Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

Ecuaciones

Definición: Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, por ejemplo:

$$P(x) = Q(x)$$

Donde $P(x)\ y\ Q(x)$ son las expresiones algebraicas cuya variable es "x"y justamente, es la INCÓGNITA de dicha ecuación.

- *Observación:*

Responder: entonces… ¿Qué elementos se necesitan para tener una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifiquen la igualdad planteada (o sea, que verifiquen la ecuación dada). El conjunto solución de una ecuación vendrá dado por todas las soluciones de la misma.

Las propiedades vistas en números reales de multiplicación y suma, nos permiten "pasar" de una ecuación original a ecuaciones equivalentes (es decir que tienen el mismo conjunto solución) más "sencillas" para poder resolverla. (Esto es, lo que comúnmente se conoce como el despeje de la variable, "pasando" términos con operaciones contrarias de un lado de la igualdad al otro)

- Responder con tus palabras y consultar si formulaste correctamente las respuestas: ¿qué es resolver una ecuación? ¿A qué se llama ecuaciones equivalentes? Ejemplificar cada una de ellas.

Ecuaciones lineales

Una ecuación es **lineal** cuando se puede escribir de la forma:

$$a.x + b = 0\ con\ a \neq 0$$

llamaremos x a la incógnita, a es coeficiente y b término independiente.

Conjunto solución en una ecuación lineal: Resuelvan las ecuaciones que le presentamos a continuación y completen el siguiente fragmento:

$$\boldsymbol{a)} 3x - 6 = 9 \qquad \boldsymbol{b)}\ \frac{1}{2}x + 2 = 2.(\frac{1}{4}x + 1) \qquad \boldsymbol{c)}\ 2x + 5 - x = 2.(\frac{1}{2}x + 3)$$

Las soluciones para una ecuación lineal pueden ser: única; ……………..; o infinitas. En el primer caso, el conjunto solución estará formado por el único elemento que es solución de la ecuación, en el segundo caso, será el conjunto vacío (el que no tiene elementos) y el tercer caso, el conjunto solución será …………

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

Ecuaciones cuadráticas

Diremos que una ecuación es **cuadrática** cuando se puede escribir de la forma:

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \ con \ a \neq 0$$

Responder: ¿Por qué tiene la obligación de ser $a \neq 0$? ¿Si b o c son 0, sigue siendo ecuación cuadrática?

En esta ecuación, x es la incógnita y a, b, c los coeficientes.

Una ecuación cuadrática que tenga sus tres coeficientes distintos de 0, se llama **ecuación cuadrática completa**. Lo cual, para hallar sus soluciones vamos a necesitar una herramienta matemática, llamada **fórmula resolvente.**

Primero dejemos en claro cómo serán los conjuntos solución en una ecuación de este tipo. Al igual que pasaba con la ecuaciones lineales, en las cuadráticas podemos tener infinitas soluciones o ninguna, pero lo que cambia es que ya no va a tener un único valor de x que verifique la igualdad. Sino que tendrá dos valores numéricos como solución de la misma. Entonces, **los conjuntos solución serían**: $S = \phi \ (símbolo \ del \ conjunto \ vacío)$; ó $S = R(todos \ los \ reales)$ ó $S = \{x_1; \ x_2\}$

Nos concentraremos en el último conjunto solución y en cómo hallar esos $x_1 \ y \ x_2$

Dijimos que:

- ➔ Si $a \neq 0; \ b \neq 0; c \neq 0$: tenemos una ecuación cuadrática completa y las soluciones las hallamos a través de la fórmula resolvente:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Ejemplo: $x^2 - 9x + 8 = 0$ Esta ecuación ya tiene los tres términos, uno cuadrático, uno lineal y otro independiente y además ya está igualada a 0. Asi que se puede aplicar la fórmula resolvente directamente. De no estar en la forma $a.x^2 + b.x + c = 0$, primero hay que trabajar algebraicamente para llegar a la misma y luego aplicar la resolvente.

$$a = 1 \ ; \ b = -9; \ c = 8 \ \Rightarrow x_1; x_2 = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{9 + 7}{2} = 8 \ y \ x_2 = \frac{9 - 7}{2} = 1$$

- Si $b = 0$, tendríamos una ecuación de la forma $a.x^2 + c = 0$En esta forma de ecuación cuadrática también se puede aplicar la resolvente considerando $b = 0$, o bien se puede trabajar como en el ejemplo:

Ejemplo: $2\,x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2.x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

- Si $c = 0$, tendríamos una ecuación de la forma $a.x^2 + bx = 0$. Del mismo modo que en el ejemplo anterior, se puede aplicar la resolvente considerando $c = 0$ o se puede despejar la incógnita a través de ecuaciones equivalentes, como en el ejemplo.

Ejemplo: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (sacamos\ factor\ común\ "x")\ x.(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2$

Observación muy importante:

El número $\Delta = b^2 - 4.a.c$ (es decir, el cálculo de adentro de la raíz de la resolvente) se llama ***discriminante*** y decide sobre la naturaleza de las soluciones de la ecuación:

- ★ Si $\Delta \succ 0 \Rightarrow tiene\ dos\ soluciones\ reales\ y\ distintas$
- ★ Si $\Delta = 0 \Rightarrow tiene\ dos\ soluciones\ reales\ e\ iguales$
- ★ Si $\Delta \preccurlyeq 0 \Rightarrow no\ tiene\ soluciones\ en\ los\ reales$

Ecuaciones que pueden reducirse a una cuadrática

1. Ecuaciones con radicales

En lo que sigue, trabajaremos algebraicamente para transformar la ecuación original dada en una ecuación cuadrática, algunos de estos trabajos algebraicos que haremos podrían estar agregando soluciones que a la ecuación original no la satisface, a dichas soluciones las llamaremos soluciones extrañas.

Veamos un ejemplo:

$$\sqrt{x-1} + x = 1 \ (*)$$

dejamos en un miembro el radical solo $\quad \sqrt{x-1} = 1 - x$

Elevamos ambos miembros al cuadrado $\quad \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (1-x)^2$

armamos la ecuación cuadrática $x - 1 = 1 \quad - 2\,x + x^2$

(recordar que la pot no se distribuye en la suma, allí hay que aplicar cuadrado de un binomio o hacer propiedad distributiva) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Resolvente con $a = 1$; $b = -3$; $c = 2 \Rightarrow$ $x_1 = 2 \;\; y \;\; x_1 = 1$(verificar aplicando la fórmula)

Luego tenemos que verificar si ambas soluciones halladas, 2 y 1, son soluciones de la ecuación original: $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2-1} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 1$ Por lo tanto 2 no es solución de la ecuación original.

$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1-1} + 1 = \sqrt{0} + 1 = 0 + 1 = 1$. Acá sí se ve que 1 es solución de nuestra ecuación.

Por lo tanto, el conjunto solución a (*) es $S = \{1\}$

2. Ecuaciones bicuadráticas

Son ecuaciones del tipo $a.x^{2n} + b.x^n + c = 0$. Es decir, los exponentes de la incógnita guardan la relación de que uno es el doble del otro. Por ejemplo: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ ó $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$. Se resuelven realizando una primer sustitución $y = x^n$, reduciendo la ecuación original a una cuadrática.

Continuemos con el primer ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Sustituimos $y = x^2 \; (**) \; \Rightarrow y^2 = x^4 \rightarrow$ $y^2 - 3y - 4 = 0$

Con la resolvente obtenemos: $y_1 = 4 \quad y_{2=} - 1$

Luego, reemplazamos en (**) para hallar los valores de x que es nuestra incógnita en la ecuación original: $y_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$y_2 = -1 \Rightarrow$no existen nº reales tales que $x^2 = -1$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-2;\ 2\}$

Esta ecuación nos indica que tiene 4 soluciones (por ser 4 el mayor exponente de la incógnita), sólo hallamos dos de ellas en los reales, las otras dos serán complejas y retomaremos este ejemplo en los próximos contenidos.

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

INECUACIONES

Definición**:** una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, por ejemplo: $P(x) \leq Q(x)$, cuya variable es la x y a la cual la llamaremos incógnita de la inecuación.

Resolver la desigualdad dada es encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que la verifiquen. El **conjunto solución** será aquel formado por todas las soluciones de la misma.

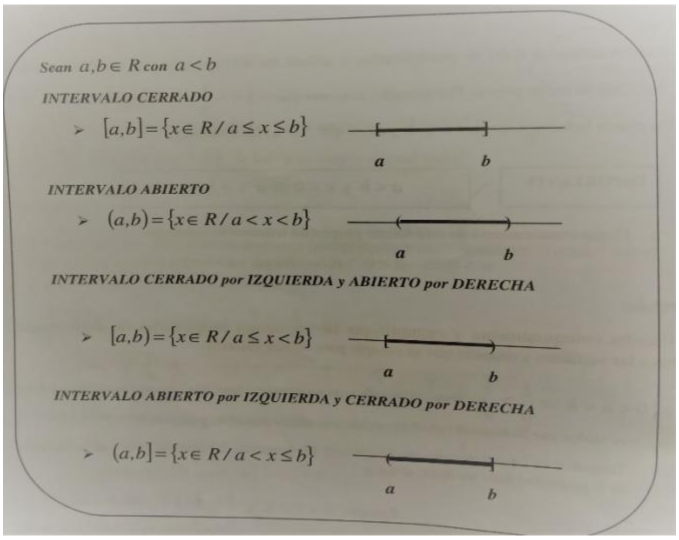
De manera análoga a ecuaciones, dos inecuaciones son equivalentes cuando tengan el mismo conjunto solución. De aquí, que uno puede transformar una inecuación dada en otra equivalente, más sencilla, para encontrar el conjunto solución, recurriendo a las siguientes **propiedades**:

1. Propiedad transitiva: $a < b \ y \ b < c \ \Rightarrow a < c$
2. Sean a, b, c números cualquiera, tal que $a < b \ \Rightarrow (a + c) < (b + c)$
3. Sean a, b, c números cualquiera, tal que $a < b \ y \ c > 0 \ \Rightarrow (a.c) < (b.c)$
4. MUY IMPORTANTE: Sean a, b, c números cualquiera, tal que $a < b \ y \ c < 0$ $\Rightarrow (a.c) > (b.c)$
5. $0 < a < b \ \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
6. Para $"n"$ natural impar: $a < b \ \Rightarrow a^n < b^n$
7. Para todo a $a \in R$: $a^2 \geq 0$
8. Para todo a $a \in R$: $-a^2 \leq 0$

Retomando el conjunto solución de una inecuación, este puede ser representado gráficamente en la recta numérica, ya que dicho conjunto será un intervalo (intersección o unión de intervalos) de la misma.

Definición**: INTERVALOS**

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales



Sean $a,b \in R$ con $a<b$

INTERVALO CERRADO

- $[a,b]=\{x\in R / a\le x\le b\}$

INTERVALO ABIERTO

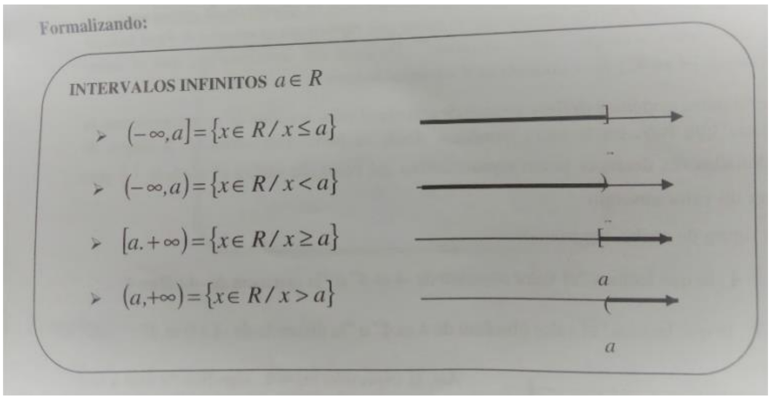
- $(a,b)=\{x\in R / a< x< b\}$

INTERVALO CERRADO por IZQUIERDA y ABIERTO por DERECHA

- $[a,b)=\{x\in R / a\le x< b\}$

INTERVALO ABIERTO por IZQUIERDA y CERRADO por DERECHA

- $(a,b]=\{x\in R / a< x\le b\}$



Formalizando:

INTERVALOS INFINITOS $a\in R$

- $(-\infty,a]=\{x\in R / x\le a\}$
- $(-\infty,a)=\{x\in R / x< a\}$
- $[a.+\infty)=\{x\in R / x\ge a\}$
- $(a,+\infty)=\{x\in R / x> a\}$

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLOS RESUELTOS

$$2.\left(\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}\right)>6x-4$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}>6x-4$$

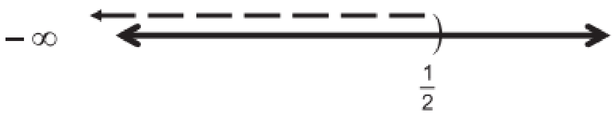
$$\frac{1}{2}x-6x>\frac{5}{4}-4$$

$$-\frac{11}{2}x>-\frac{11}{4}$$

$$x<\frac{-\frac{11}{4}}{-\frac{11}{2}}$$

$$x<\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el intervalo solución es $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ y la representación gráfica es



Ejemplo 2: $\frac{2x+1}{x-3}>0$

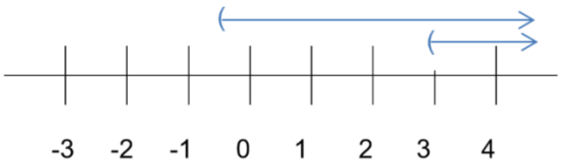
En este caso, debemos pensar en lo siguiente: si $a.b\geq 0$, a y b deben tener el mismo signo de manera simultánea, entonces $a\geq 0$ y $b\geq 0$, *o* $a\leq 0$ *y* $b\leq 0$.

Lo mismo ocurre con las divisiones, por la regla de los signos.

Entonces, retomando el ejemplo:

$$\begin{cases}2x+1>0\\x-3>0\end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases}2x+1<0\\x-3<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>\frac{-1}{2}\rightarrow x\in(\frac{-1}{2},+\infty)\\x>3\ \rightarrow x\in(3,+\infty)\end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases}x<\frac{-1}{2}\rightarrow x\in(-\infty,\frac{-1}{2})\\x<3\rightarrow x\in(-\infty,3)\end{cases}$$



$$S: \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) U(3, +\infty)$$

VALOR ABSOLUTO

Definimos geométricamente el valor absoluto de un número real a como la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas (su distancia al 0). Se utiliza el símbolo | | para indicar un valor absoluto.

Por ejemplo: |4|=4 la distancia que hay del 4 al 0, es 4.

|-4|=4 la distancia que hay del (-4) al 0 es 4.

Entonces podemos definir al valor absoluto de un número real x, como:

$$\begin{cases} |x| = x & si\ x \geq 0 \\ |x| = -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Observación

- El valor absoluto de un número distinto de cero será siempre un número positivo (ya que, vimos, se refiere a “distancias”). En tanto el valor absoluto de cero será cero, y éste es el único número con dicha propiedad.
- Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto- la distancia de sus puntos al origen va a ser la misma.

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

Algunas propiedades del valor absoluto que pueden resultarte útiles.

Para todos $a, b \in R$:

- $|a| \geq 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (si $b \neq 0$)
- $|-a| = |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

Para todos $a, b \in R$ y $k > 0$:

- $|a+b| \leq |a| + |b|$

  $|a-b| \geq ||a| - |b||$
- $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$
- $|a| > k \Leftrightarrow (a > k \quad o \quad a < (-k))$

Veamos algunos ejemplos:

En este primer ejemplo estamos aplicando la propiedad: $|a| > k \Rightarrow a > k$ ó $a < -k$

$$| X + 4 | > 5$$

X + 4 > 5	X + 4 < - 5
X > 5 - 4	X < - 5 - 4
X > 1	X < - 9

En este ejemplo, utilizamos la propiedad: $|a| < k \Rightarrow -k < a < k$

$$5 \quad -20| \leq 15$$

36

$$-15 \leq 5x - 20 \leq 15$$
$$-15 + 20 \leq 5x \leq 15 + 20$$
$$5 \leq 5x \leq 35$$
$$\frac{5}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{35}{5}$$
$$1 \leq x \leq 7$$

$C.S. = [1,7]$

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

PRÁCTICA ECUACIONES

Ejercicio 1:

Determina cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones lineales en una variable. **Justifica** tu respuesta:

a) $\sqrt{2}.x = 0$

b) $3y = 35$

c) $2.(a+3) = 46$

d) $-3x + 6 = \log x$

e) $0.x + 5 = 0$

f) $x.(2+x) = 4$

Ejercicio 2:

Determina si los siguientes valores son solución de la ecuación $-3x = 5 + 2.(-x+2)$, <u>sin resolverla</u>:

a) $x = 0$

b) $x = 9$

c) $x = -1$

d) $x = -9$

Ejercicio 3:

Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $8x + 2.(x-4) = 5.x + 3$

b) $-5.\left[3 - (2-x) - \frac{1}{5}\right] = -x + 9$

c) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-1}{2}$

d) $x^2 + 9x + 3 = (x-5)^2$

e) $3x - (x-5) = 1 - 2.(5-x)$

f) $\frac{2x-4}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x+3}{3}$

g) $-(-x-6) + 2$=x+8

h) $2.(\frac{5}{2}.x + 1) = 6x$

Ejercicio 4:

Plantea la ecuación que modeliza el problema y luego resuelve.

a) Si Francisco se compra hoy un celular lo paga $\frac{8}{9}$del precio de lista y puede hacerlo en 4 cuotas de $842. ¿Cuánto ahorra Francisco?

b) Si se le resta a 6, siete veces un mismo número, el resultado es cinco veces ese número. ¿De qué número se trata?

c) Un cable de 44 metros se corta en dos trozos, uno es tres veces más largo que el otro. ¿Cuáles son las longitudes de cada uno de los trozos?

d) La suma de un número con la sexta parte del mismo es 3. ¿Cuál es ese número?

Ejercicio 5:

Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. **Justifica** tu respuesta:
La ecuación $-2+\frac{2}{4}x=\frac{1}{2}(x-4)$ y $3x-5=x+1$ son equivalente porque 3 es solución de ambas ecuaciones.

Ejercicio 6:

1) **Determina** cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones cuadráticas. **Justifica** tu respuesta.

   a) $x+3=0$

   b) $y.y=35$

   c) $2.(a^2+3)=3$

   d) $-3x^2-1=\log x$

2) **Determina** si los siguientes valores son solución de la ecuación $-w^2-3w+4 = 0$, sin resolverla.

   a) $w=1$

   b) $w=-1$

   c) $w=0$

   d) $w=4$

Ejercicio 7:

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas y detalla, en cada una de ellas, en caso de usar resolvente, los coeficientes.

a) $x^2-2x+2=0$ c) $x^2-4=0$ e) $(x-4)(x+2)=0$

b) $-x^2+3x-2=0$ d) $x^2+4=0$ f) $-(x-1)(x+2)=0$

Ejercicio 8:

Resolver los siguientes problemas.

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

---

a) Encontrar el valor de $k$de forma tal que $x = 2$ sea solución de la ecuación $x^2 - 6kx + 8 + 2k = 0$

b) Tres enteros pares consecutivos son tales que el cuadrado del tercero es 76 más que el cuadrado del segundo. Obtener esos tres números.

c) Determinar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el largo es $\frac{4}{3}$de su ancho y que su área es de $1200m^2$

Ejercicio 9:

Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x+6} = x$

b) $x - \sqrt{x+7} - 5 = 0$

c) $6x - \sqrt{18x-8} = 2$

d) $\sqrt{5-a} + \sqrt{a+3} = 0$

Ejercicio 10:

Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones bicuadráticas.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

c) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

Práctica Nº 2: Ecuaciones e Inecuaciones lineales

PRÁCTICA INECUACIONES

1. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y representarlo gráficamente.

a) $-3 < x \leq 1$
b) $x \leq \frac{5}{2}$
c) $3x > 6$
d) $-3x > 6$
e) $3 + x \geq 6$
f) $\frac{-4+x}{2} \leq -1$
g) $-4 + \frac{x}{2} \leq -1$
h) $2x - 4 > 6x$
i) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$
j) $2 < 2x - 4 \leq 6$
k) $-3 < -9 - 4x \leq 11$
l) $-1 \leq \frac{5-2x}{-2} < 1$

2. Indicar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{3x+2}{x+2} \leq 0$
b) $\frac{3-5x}{1+x} \succ 0$
c) $\frac{6x}{2x-4} \geq 0$
d) $(2x+3)(-3x+1) \geq 0$
e) $(5x-10).(2-x) \prec 0$
f) $(\frac{1}{2}x+2)(x-\frac{3}{2}) \leq 0$

3. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con valor absoluto y representar dicha solución en la recta numérica.

a) $\left|-\frac{1}{4}x+3\right| \geq 1$
b) $\left|7x-\frac{3}{5}\right| \prec 1$
c) $\left|\frac{-3x+1}{2}\right| \succ 1$
d) $-\left|-\frac{6}{5}x-1\right| \prec -2$
e) $|x-4| \succ x-2$
f) $|x| \prec x+1$
g) $\left|\frac{2x+3}{-5}\right| \leq -2$
h) $\left|\frac{x^2-1}{2}\right| \geq 1$
i) $\left|\frac{3x+7}{4}\right| \succ \sqrt[3]{-27}$