



## **CONJUNTOS**

### **TEMARIO:**

Conceptos primitivos

Algunas formas de representar un conjunto

Cardinal de un conjunto

Subconjunto

Operaciones y propiedades: Intersección, unión, diferencia, complemento.

Problemas de conteo

Algunos símbolos matemáticos



## CONCEPTOS PRIMITIVOS

En matemática hay ciertas “ideas”, “representaciones” que no tienen una definición, preceden a una serie de definiciones, propiedades, teoremas y más. Dichas representaciones son denominadas “**conceptos primitivos**”, a tales conceptos los aceptamos sin definición, son como un punto de partida. Los conjuntos son un ejemplo de esto. Cuando nos referimos a un conjunto asociamos esta palabra con colección de objetos, grupos de elementos, etc.

Este concepto es uno de los más fundamentales de la Matemática, ya que la Teoría de Conjuntos es la base sobre la que se construye toda la Matemática.

### Ejemplos:

- 1) *Los puntos de una figura.*
- 2) *Los alumnos de un curso determinado.*
- 3) *Las letras del alfabeto.*
- 4) *Los números enteros mayores que -3 y menores que 3.*

Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos o entidades distinguibles y bien definidas con características comunes. Tales objetos o entidades que pertenecen a un conjunto reciben el nombre de elementos del mismo.

Los conjuntos, generalmente, los nombramos con letras mayúsculas: **A, B, C...**

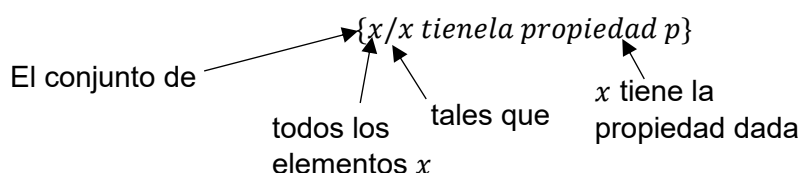
Los elementos de un conjunto, generalmente, los denominamos con letras minúsculas: **a, b, c...**

**Conjunto “Vacío”:** Es el conjunto que no tiene elemento y lo simbolizamos  $\emptyset$  o  $\{ \}$ .

## ALGUNAS FORMAS DE REPRESENTAR UN CONJUNTO

- **Por extensión:** es cuando listamos todos los elementos del conjunto (entre llaves). Es una forma que podemos usar en tanto el conjunto tenga una cantidad finita de elementos.
- **Por comprensión:** Es cuando indicamos las propiedades que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto.

### **Estructura en la notación por comprensión:**





### Ejemplos:

1)  $A = \{x/x \text{ es un dígito impar}\}$

Los números dígitos son aquellos que tienen una sola cifra.

Los elementos de este conjunto serán entonces los números dígitos impares. Por lo que si quisiéramos escribir por extensión al mismo quedaría:  $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ .

2)  $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales menores a 6. Por extensión:  $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ .

3)  $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 3 \leq x < 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales, incluido el cero, mayores o iguales a 3 y menores a 6. Por extensión:  $\{3; 4; 5\}$ .

4)  $D = \{x/x \text{ es un impar terminado en } 2\}$

Si un número termina en dos entonces es par, por lo que este conjunto no tiene ningún elemento. Por extensión:  $\emptyset$ .

La notación  $x \in A$  significa que la entidad u objeto  $x$  es un elemento del conjunto  $A$  (se lee " $x$  pertenece a  $A$ "). La notación  $x \notin A$  quiere decir que  $x$  no es un elemento del conjunto  $A$  (se lee " $x$  no pertenece a  $A$ ").

Ejemplos:  $1 \in A$ ,  $2 \notin A$ ,  $3 \in B$ ,  $6 \notin B$ .

## CARDINAL DE UN CONJUNTO

Definimos el **cardinal de un conjunto finito**, como el número de elementos del mismo. Simbólicamente el cardinal de  $A$  suele escribirse:  $|A| = \text{card}(A)$ .

Ejemplos:  $|A| = 5$ ,  $|B| = 5$ ,  $|C| = 3$ ,  $|D| = 0$ .

## SUBCONJUNTO

Decimos que un conjunto  $B$  es un **subconjunto** de un conjunto  $A$  si todos los elementos de  $B$  también lo son de  $A$ . Es decir que el conjunto  $B$  es subconjunto de  $A$  si y sólo si todo elemento de  $B$ , es también de  $A$ . En símbolos:

$$B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

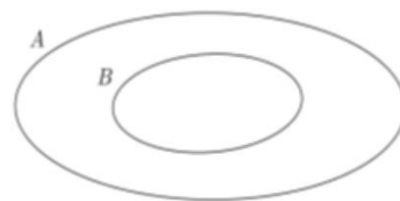


Fig.: Diagrama de Venn representando la relación de inclusión entre conjuntos



**Ejemplo:** Sea  $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$  y  $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 3 \leq x < 6\}$ , resulta  $C \subset B$ .

- También se dice que el conjunto B está contenido en el conjunto A, o que A contiene a B.
- Con la notación  $B \not\subset A$  se indica que B **no es un subconjunto** de A. Para probar que un conjunto A no es subconjunto de otro B, es suficiente mostrar un elemento  $a$  en A tal que  $a$  no pertenezca a B.
- Dos conjuntos serán **iguales** cuando posean los mismos elementos. En otras palabras:  $A = B$ , si todo elemento de A es también elemento de B, y todo elemento de B es también elemento de A. En símbolos:

$$B = A \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

**Ejemplos:**

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 9\} \text{ y } B = \{-3, 3\}$$

$$A = \{x/x \text{ es un número primo par}\} \text{ y } B = \{2\}$$

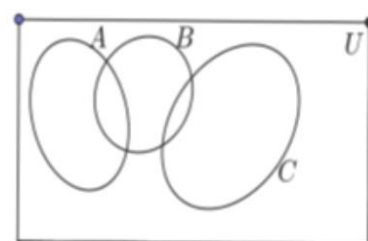
Un conjunto A es **subconjunto propio** de B si se cumplen las siguientes condiciones:

- $A \subset B$  (A es subconjunto del B).
- $A \neq B$  (A y B no son iguales).

Dicho en términos más sencillos: el conjunto A es un subconjunto propio de B si cada elemento de A es también elemento de B, pero cada elemento de B no es necesariamente es un elemento de A.

La relación anterior se denota por  $A \subseteq B$ . Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominamos "**Conjunto Universal**". Generalmente lo simbolizamos con U.

Como esta definición lo indica, su formación va a depender del problema con el cual se trabaje.



**Fig.:** Diagrama de Venn  
conjunto Universal y algunos  
subconjuntos.

**Ejemplos:**

- Se realizó un sondeo sobre qué carrera van a seguir los alumnos de 5to año de la Escuela "Manuel Belgrano". Los resultados de la encuesta entre los 45 alumnos del curso fueron:
  - o Derecho: 12 alumnos
  - o Cs. Económicas: 10 alumnos



- o Ingeniería Industrial: 9 alumnos
- o Psicología: 6 alumnos
- o Otros: 8 alumnos

Para esquematizar con conjuntos esta situación, se toma como conjunto universal  $U$  a los 45 alumnos de este 5to año de la Escuela “Manuel Belgrano”.

**2)** Necesitamos establecer características que definan a los números impares y pares. En este caso, sería apropiado utilizar como conjunto universal, al conjunto de los números naturales incluidos el cero. Es decir:  $U = \mathbb{N}$ .

*Los números pares son los múltiplos de 2. Eso significa que al multiplicar un número natural (o cero) por 2 obtendremos un número par. Con esto conseguimos una caracterización de los pares como: “si  $x$  es par entonces  $x = 2n$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ .”*

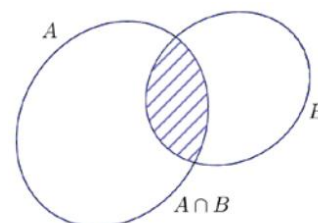
## OPERACIONES

Al igual que se realizan operaciones como ser la suma y la multiplicación con los números, también es posible definir operaciones con conjuntos... cuyos resultados serán ¡conjuntos!

### INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

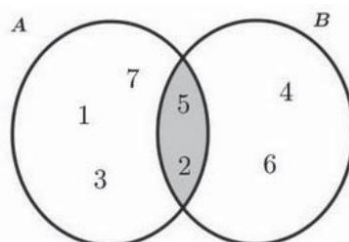
La intersección de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente. Es decir, que un elemento  $x$  pertenece a la “intersección” siempre y cuando esté simultáneamente en  $A$  y en  $B$ . En símbolos:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$



**Fig.:** Intersección de los conjuntos  $A$  y  $B$

**Ejemplo:** Si  $A = \{1,2,3,5,7\}$ ;  $B = \{2,4,5,6\}$ .



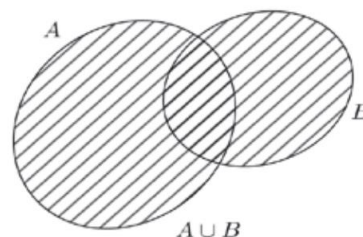
$$A \cap B = \{2,5\}$$



### UNIÓN DE CONJUNTOS

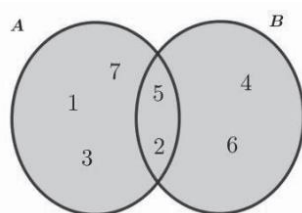
La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con todos los elementos de ambos conjuntos, es decir por todos los elementos que son sólo de A, también lo que son sólo de B y los que son elementos de ambos conjuntos. En símbolos:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$



**Fig.:** Unión de los conjuntos A y B

**Ejemplo:** Si  $A = \{1,2,3,5,7\}$ ;  $B = \{2,4,5,6\}$ .



$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

Si dos conjuntos no tienen elementos en común, entonces son **disjuntos**, y recíprocamente. Es decir:

$$A \text{ y } B \text{ disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

**Ejemplo:** El conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares son disjuntos.

#### Más ejemplos:

**1) Inversión en publicidad** La tabla superior lista a las 6 empresas que más invirtieron para sponsorrear a la Selección Argentina de fútbol, durante las Eliminatorias "Sudáfrica 2010", tanto en televisión por cable como en la televisión abierta de Capital Federal.

- Determina las empresas que estuvieron en una u otra de las categorías durante ese período.
- ¿La parte a) representa la unión o la intersección de las empresas? Explica.
- Determina las empresas que estuvieron en ambas categorías durante ese período.
- ¿La parte c) representa la unión o la intersección de las empresas? Explica.

Inversión de sponsor y anunciantes		
Eliminatorias Sudáfrica 2010		
	TV por cable	TV Capital federal
1	Coca Cola	Claro
2	Standar Bank	Coca Cola
3	Claro	Repsol YPF
4	Repsol YPF	Standar Bank
5	Italcred	Italcred
6	Quilmes	Adidas

Fuente: Monitor Medios Publicitarios



Respuestas:

- a) {Coca Cola; Standar Bank, Claro, Repsol YPF, Italcred, Quilmes, Adidas}  
b) Representa la unión ya que se refiere a lo que está en una u otra categoría (TV cable o TV abierta), pudiendo estar sólo en una (como Quilmes) o en ambas (como Claro).  
c) {Coca Cola; Standar Bank, Claro, Repsol YPF, Italcred}  
d) Representa la intersección ya que tiene que estar en las dos categorías simultáneamente.

2)  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $C = \{-7, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

Entonces:

$$C \cap B = \{1, 2, 3\}$$

$$C \cup B = \{-7, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B \cap \emptyset = \emptyset \quad B \cup \emptyset = B$$

$$C \cap \emptyset = \emptyset \quad C \cup \emptyset = C$$

3)  $\{x/x = 6n, n \in \mathbb{N}_0\}$

$$\{x/x = 5n, n \in \mathbb{N}_0\}$$

Como A es el conjunto de los múltiplos de 6, y B el de los múltiplos de 5, realizar  $A \cap B$  significa determinar los múltiplos comunes a 5 y a 6. Así:  $A \cap B = \{0, 30, 60, 90, 120, \dots\}$

Algunas propiedades que cumplen las operaciones vistas (que serán válidas pero no demostraremos en este curso) son:

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
<b>Conmutativa</b>	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
<b>Asociativa</b>	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<b>Distributiva</b>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
<b>Idempotencia</b>	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
<b>Neutralidad</b>	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$

**DIFERENCIA DE CONJUNTOS**

La diferencia entre el conjunto A y el B es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a A pero no están en B. En símbolos:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

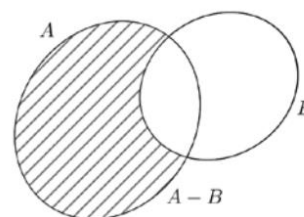
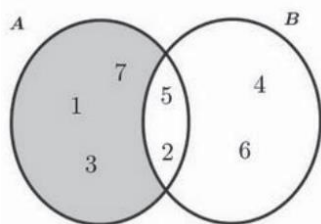


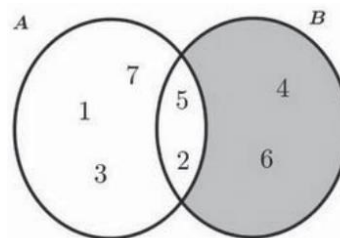
Fig.: Diferencia entre A y B



**Ejemplos:** Si  $A = \{1,2,3,5,7\}$ ;  $B = \{2,4,5,6\}$ .



$$A - B = \{1,3,7\}$$



$$B - A = \{4,6\}$$

### COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

El complemento del conjunto A es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a U pero no están en A y se simboliza como  $\mathcal{C}_A$  o  $\bar{A}$ . En símbolos:

$$\mathcal{C}_A = \bar{A} = U - A$$

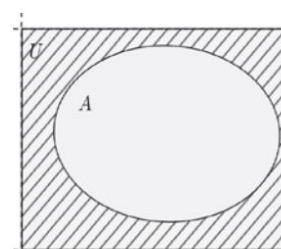


Fig.: Complemento de A

**Observación:**  $A - B = A \cap \bar{B}$

Propiedades	
<b>Complemento</b>	$\bar{\bar{A}} = A$ $A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $\bar{U} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = U$
<b>Leyes de Morgan</b>	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

**Ejemplos:** Sea  $U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 12\}$ , y los conjuntos  $A = \{x/x \in U \wedge x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$  y  $B = \{x/x \in U \wedge x - 3 \in U\}$

Escribimos por extensión A y B.

$$A = \{1,4,9\} \quad B = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Entonces:

$$A - B = \{1\}$$

$$B - A = \{5,6,7,8,10,11,12\}$$

$$\bar{A} = \{2,3,5,6,7,8,10,11,12\}$$

$$\bar{B} = \{1,2,3\}$$

$$A \cup B = \{1,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Luego:  $\overline{A \cup B} = \{2,3\}$  y  $\bar{A} \cap \bar{B} = \{2,3\}$





## PROBLEMAS DE CONTEO (conjuntos en Diagrama de Venn)

### Ejemplos:

- 1) En un curso de 35 alumnos, 20 alumnos toman clases de alemán, 10 alumnos toman clases de inglés y 8 alumnos toman clases de portugués. Además, se sabe que 4 alumnos toman clases de inglés y portugués, 5 toman clases de alemán e inglés, 3 de alemán y portugués, y 14 sólo de alemán. Responde:
- ¿Cuántos alumnos toman clases de los tres idiomas?
  - ¿Cuántos alumnos toman clases sólo de inglés?
  - ¿Cuántos alumnos no toman clases de ningún idioma?
  - ¿Cuántos alumnos no toman clases de portugués?
  - ¿Cuántos alumnos toman clases de, al menos, uno de los idiomas?

### Resolución:

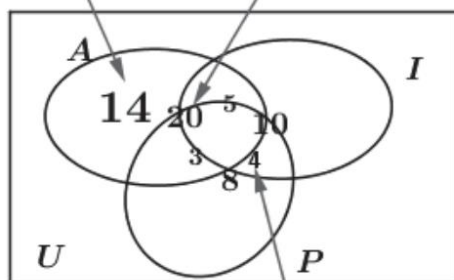
Como primera medida, esquematicemos esta situación. Lo ideal en estos casos es realizar un diagrama de Venn con los conjuntos:

- Universal  $U$  = conjuntos de los 35 alumnos
- $I$  = conjunto de alumnos que estudian inglés
- $A$  = conjunto de alumnos que estudian alemán
- $P$  = conjunto de alumnos que estudian portugués.

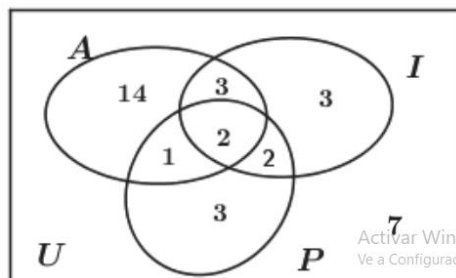
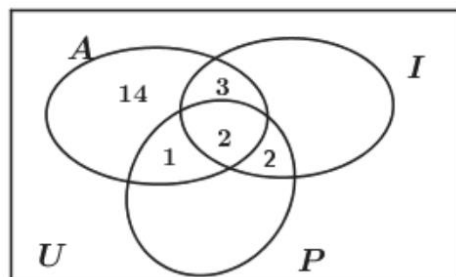
Así, en el diagrama de Venn representemos en cada “zona”, la cantidad de alumnos que cumplen las propiedades indicadas para estar en la “zona”.

Ahora podemos “visualizar” mejor. Y entonces podemos determinar las cantidades correspondientes a cada zona. Empecemos por “alemán”, en total tenemos 20 alumnos que lo estudian, pero sabemos que 14 lo estudian con exclusividad, luego hay 6 alumnos que estudiarán alemán y algún otro (inglés o portugués), es decir que estarían estudiando 2 o 3 idiomas. Pero dentro de esos 6 están contados los 5 que realizan inglés y alemán, con lo cual 1 alumno (6-5) realiza sólo alemán y portugués. Así, sabiendo que 3 alumnos estudian alemán y portugués (incluyendo los que estudian, además, inglés), queda que 2 (3-1) alumnos estudian los 3 idiomas simultáneamente. Y también obtenemos que 3 (5-2) alumnos estudian sólo alemán e inglés (no portugués).

Estudian al menos alemán, aquí están incluidos los 14 que estudian sólo alemán



Estudian inglés y portugués, eventualmente, también podrían estudiar alemán





Ahora, como 4 alumnos toman clases de, al menos, inglés y portugués, tendremos 2 alumnos que estudian sólo esos dos idiomas.

Ahora ya podemos completar las cantidades.

Sólo inglés =  $10 - 3 - 2 - 2 = 3$

Sólo portugués =  $8 - 1 - 2 - 2 = 3$

Alumnos que estudian al menos un idioma =  $14 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 3 = 28$

Alumnos que no estudian ningún idioma =  $35 - 28 = 7$ .

Ya estamos en condiciones de responder:

- a) **2 alumnos**
- b) **3 alumnos**
- c) **7 alumnos**
- d)  $7 + 14 + 3 + 3 = 27$ , **27 alumnos**
- e) **28 alumnos**



### ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\neq$	Distinto
$<$	Menor
$>$	Mayor
$\leq$	Menor o igual
$\geq$	Mayor o igual
$\cong$	Aproximadamente
$\forall$	Para todo
$/$	Tal que
$\infty$	Infinito
$\emptyset$	Vacío
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\subset$	Contenido
$\not\subset$	No contenido
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\Rightarrow$	Entonces o implica
$\Leftrightarrow$	Sí y solo sí



## CONJUNTOS: PRÁCTICA

1) Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{x/x = 2n, n \in \mathbb{N}_0, x \leq 7\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$$

$$C = \{x/x \text{ es vocal de la palabra agua}\}$$

$$D = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 0 < x < 6\}$$

$$E = \{x/x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}_0, x \leq 7\}$$

$$F = \{x/x = 5n, n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq x \leq 18\}$$

2) Escribir por comprensión:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{10, 11, 12, 13\}$$

$$D = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$$

3) Sean  $A = \{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \leq 2\}$ , determinar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

a)  $B \subset A$

b)  $\frac{3}{2} \in A$

c)  $B \subset C$

d)  $\{1\} \subset B$

e)  $\{1\} \in B$

f)  $1 \in B$

4) Sean  $U = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 7\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 7\}$ ,  $B = \{x/x \in U \wedge 4 \leq x < 8\}$ ,  $C = \{1, 3, 6\}$  y  $D = \{2, 6, 7\}$ .

a) Indicar el cardinal de U, A, B, C y D.

b) Determinar los conjuntos que se indican:

1.  $A \cup B$

2.  $A \cap B$

3.  $B \cup C$

4.  $A \cap B \cap C$

5.  $A \cap (B \cup C)$

6.  $A - B$

7.  $\bar{A}$

8.  $\bar{D}$

9.  $\overline{A \cup B}$

10.  $\bar{A} \cap \bar{B}$

11.  $C - B$

12.  $(C - B) \cup (B - C)$

13.  $(A \cap B) \cup C$

14.  $B \cap C$

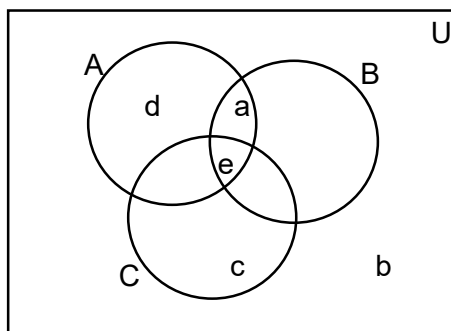
15.  $\overline{A \cap B}$

16.  $A \cup \bar{\emptyset}$

17.  $\overline{(B \cup \emptyset)} \cap B$

18.  $(B \cup \bar{B}) \cap C$

5) Atendiendo a la figura, determinar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:





- |                            |                     |                                       |
|----------------------------|---------------------|---------------------------------------|
| a) $a \in A \cap B$        | d) $c \in B \cup C$ | g) $e \in A \cap B \cap C$            |
| b) $b \in B \cap C$        | e) $d \notin C$     | h) $e \in A \cap C$                   |
| c) $d \notin A \cup B - C$ | f) $c \in A - B$    | i) $b \in \overline{A \cup B \cup C}$ |

6) Se ha definido el cardinal de A, conjunto finito, como el número de elementos del mismo y se lo ha notado  $|A|$ . Para la unión de dos conjuntos finitos A y B se verifica la siguiente propiedad:

- Si A y B son conjuntos disjuntos:  $|A \cup B| = |A| + |B|$
- Si A y B no son disjuntos:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Para tres conjuntos; A, B y C, se verifica:

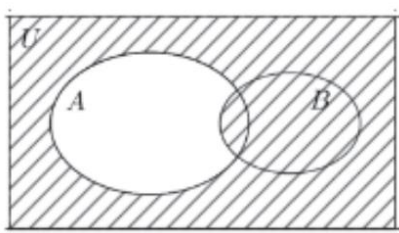
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

Comprobar estas propiedades para los siguientes conjuntos:

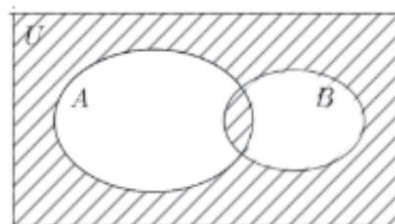
- a)  $A = \{1,2,3,4\}$   
 $B = \{2,3,5,6,8\}$
- b)  $A = \{1,2,3,4,5\}$   
 $B = \{1,2,5,6,7\}$   
 $C = \{2,4,5,6,7,8,9,10\}$
- c)  $A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x^2 \leq 16\}$   
 $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^- \wedge x^2 \leq 25\}$

7) Representa mediante operaciones entre conjuntos, la zona sombreada:

a)



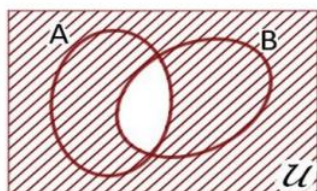
b)



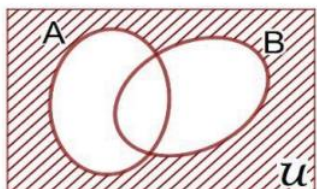
8) Dibujar el Diagrama de Venn y sombreadar el conjunto indicado:

- |  |   |
|--|---|
| a) $A \cap \bar{B}$                            | e) $\bar{A} \cap \bar{B}$                               |
| b) $B \cup (B - A)$                            | f) $(A \cup B) - B$                                     |
| c) $B \cap (\overline{C \cup A})$              | g) $(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{C} - A)$                |
| d) $((C \cap A) - (\bar{B} - \bar{A})) \cap C$ | h) $(B - \bar{C}) \cup ((B - \bar{A}) \cap (C \cup B))$ |

9) Unir los gráficos con la o las operaciones correspondientes:



$$(U - B) \cup A$$



$$U - (B \cap A)$$

$$\overline{B \cup A}$$



$$\bar{B}$$

$$\bar{B} \cup A$$

- 10) Si  $|A| = 7$ ,  $|A \cap B| = 3$  y  $|A \cup B| = 15$ , ¿cuál es el cardinal de B?
- 11) Una encuesta realizada a un grupo de empleados de una fábrica reveló que 250 empleados tenían casa propia, 220 tenían automóvil, 585 tenían TV LCD, en tanto 185 empleados tenían automóvil y TV LCD, 70 automóvil y casa propia, 130 casa propia y TV. A su vez, 50 tenían casa propia, automóvil y TV LCD; y 25 empleados no poseían ni casa propia ni automóvil ni TV LCD. Averigua:
- ¿Cuántos empleados fueron encuestados?
  - ¿Cuántos empleados tienen sólo casa propia?
  - ¿Cuántos empleados tienen sólo una de estas cosas
- 12) En una Universidad 70 alumnos rindieron examen de Matemática, Física e Inglés, los resultados fueron: 20 alumnos rindieron bien las tres asignaturas, 50 rindieron bien Matemática, 30 rindieron bien Inglés, 35 rindieron bien Física, diez alumnos solo rindieron Matemática y Física, ocho solo rindieron bien Matemática e Inglés, uno solamente rindió bien Inglés y Física. Si para ser promovidos deberían aprobar dos materias por lo menos, ¿cuántos alumnos promovieron? ¿Cuántos alumnos rindieron mal las tres materias?
- 13) Una empresa de turismo realiza una encuesta entre 100 personas, 40 quieren viajar a Mendoza, 25 desean viajar a Bariloche, 13 de los interrogados quieren ir a Mendoza y Bariloche.
- ¿Cuántas personas no realizan excursión?
  - ¿Cuántas van a realizar solo una de las excursiones?
  - ¿Cuántas viajarán solo a Mendoza?



- d) ¿Cuántas van por lo menos a una excursión?
- 14) En un grupo de 191 estudiantes, diez toman Matemática, Programación y Sistemas I; 36 toman Matemática y Programación; 20 están en Matemática y Sistemas I; 18 en Programación y Sistemas I; 65 en Matemática; 76 en Programación y 63 toman Sistemas I.
- a) ¿Cuántos toman Matemática y Sistemas I pero no Programación?
  - b) ¿Cuántos toman Programación, pero no Matemática ni Sistemas I?
  - c) ¿Cuántos toman Matemática o Programación?
  - d) ¿Cuántos toman Sistemas I o Matemática, pero no Programación?
  - e) ¿Cuántos no toman ninguna de las tres materias?
- 15) De 106 personas se sabe que los que hablan solo inglés son tantos como los que hablan inglés y francés y además los que hablan solo francés es la quinta parte de los que hablan inglés. Si diez personas no hablan ninguno de estos dos idiomas, ¿cuántos hablan solo francés?
- 16) En una encuesta realizada en la ciudad de Medellín, acerca de los medios de transporte más utilizados entre bus, metro o moto, se obtuvieron los siguientes resultados: de los 3200 encuestados, 1950 utilizan el metro, 400 se desplazan en moto, 1500 van en bus, 800 se desplazan en bus y metro, además ninguno de los que se transporta en moto utiliza bus o metro. ¿Cuántas personas solo utiliza el metro? ¿Cuántas personas utilizan como máximo dos medios de transporte?
- 17) En un grupo de 30 estudiantes perteneciente a un curso, 15 no estudiaron Matemáticas y 19 no estudiaron Lenguaje. Si tenemos un total de 12 alumnos que no estudiaron Lenguaje ni Matemáticas. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente una de las materias mencionadas?
- 18) De los 150 alumnos y alumnas de un colegio, 120 estudian inglés, 100 informática, y solo 20 ni lo uno ni lo otro. ¿Cuántos estudian ambas materias?