Unidad 2: Ecuaciones e inecuaciones Lineales

ECUACIONES LINEALES

Diremos que una ecuación es lineal cuando puede escribirse de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0 \;\; con\; a \neq 0}$$

Llamaremos x a la incógnita, y a los números a y b coeficientes.

Resolver una ecuación consiste en hallar el o los valores de x que hacen valida la igualdad. Para ello es necesario aplicar dos propiedades:

- **Propiedad uniforme**: establece que, si se aumente o disminuye la misma cantidad en ambos miembros la igualdad de conserva, y nos permite escribir ecuaciones equivalentes a la inicial.
- **Propiedad cancelativa:** que establece que en una operación se pueden suprimir dos elementos/términos que sean opuestos.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

$$2x + 7 = -x + 49$$

$$2x + 7 + x = \cancel{-x} \cancel{+x} + 49$$

$$3x + 7 - 7 = 49 - 7$$

$$3x = 42$$

$$\frac{1}{3} . 3x = 42 . \frac{1}{3}$$

$$x = 14$$

$$S = \{14\}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{2}x + 2 = 2.\left(\frac{1}{4}x + 1\right)$$

Aplicar propiedad distributiva para suprimir los paréntesis

$$\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{1}{2}x + 2 - 2 = \frac{1}{2}x + 2 - 2$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = 0$$

$$0x = 0$$

$$S = \mathfrak{R}$$

Cualquier número real multiplicado por cero resulta cero,
con lo cual esta ecuación tiene ***infinitas soluciones****.*
El conjunto solución será $S = \mathcal{R}$

Ejemplo 3:

$$2x + 5 - x = 2.\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$$

$$2x + 5 - x = 2.\frac{1}{2}x + 2.3$$

$$x + 5 - 6 = x + 6 - 6$$

$$x - 1 = x$$

$$x - 1 - x = x - x$$

$$-1 = 0x$$

$$S = \emptyset$$

Ningun número real multiplicado por cero resulta distinto de cero,
con lo cual esta ecuación ***no tiene solución****.*
El conjunto solución será $S = \emptyset$

En Resumen, las ecuaciones lineales $ax + b = 0$ presentan tres tipos de solución, y esta dependerá de los coeficientes a y b:

- ÚNICA SOLUCIÓN: cuando $a \neq 0$
- INFINITAS SOLUCIONES: cuando $a = 0 \wedge b = 0$
- NINGUNA SOLUCIÓN: cuando $a = 0 \wedge b \neq 0$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Diremos que una ecuación es cuadrática cuando se puede escribir de la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0} \ \textbf{ con } \boldsymbol{a \neq 0}}$$

Donde

$$\boldsymbol{a = \ coeficiente\ cuadr\acute{a}tico}$$
$$\boldsymbol{b = \ coeficiente\ lineal}$$
$$\boldsymbol{c = \ termino\ independiente}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones tendremos que emplear una fórmula, y obtendremos a lo sumo, dos soluciones reales, (que podrán ser iguales o distintas) o ninguna solución real. La fórmula comúnmente llamada resolvente es:

$$\boxed{\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

DISCRIMINANTE

Esta fórmula surge al completar cuadrados de la ecuación general, pero no nos detendremos en esto, sino que simplemente haremos uso de ella.
Antes de empezar a resolver una ecuación siempre nos conviene hacer un estudio previo de la misma para analizando **el discriminante (Δ),** que es el radicando de la fórmula y nos brinda información anticipada de las posibles soluciones a encontrar:

- $\boldsymbol{\Delta > 0, dos\ soluciones\ reales\ distintas}$
- $\boldsymbol{\Delta = 0, dos\ soluciones\ reales\ iguales}$
- $\boldsymbol{\Delta < 0, no\ hay\ \ soluciones\ reales}$

Hay casos particulares de estas ecuaciones donde los coeficientes b y c pueden ser cero y su resolución se reduce a resolver típicas ecuaciones por método de despeje directo.

Veamos algunos ejemplos:

I) $\boldsymbol{x^2 - 9x + 8 = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{siendo\ a = 1,\ b = -9,\ c = 8}$ $\quad$ $\Delta = (-9)^2 - 4.1.8 = 49$

$\Delta = 49 \rightarrow dos\ soluciones\ \mathcal{R} \neq$

$$\frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = x_{1,2}$$

$$\frac{9 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{9+7}{2} = 8 = x_1 \\ \dfrac{9-7}{2} = 1 = x_2 \end{cases}$$

Las soluciones son $x_1 = 8$ y $x_2 = 1$

II) $\boldsymbol{5x^2 - 2x + \frac{1}{5} = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{siendo\ a = 5,\ b = -2,\ c = \frac{1}{5}}$ $\quad$ $\Delta = (-2)^2 - 4.5.\dfrac{1}{5} = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow dos\ soluciones\ \mathcal{R} =$

$$\frac{2 \pm \sqrt{0}}{10} = x_{1,2}$$

$$\frac{2 \pm 0}{10} \quad \begin{cases} \dfrac{2+0}{10} = \dfrac{1}{5} = x_1 \\ \dfrac{2-0}{10} = \dfrac{1}{5} = x_2 \end{cases}$$

La solución será $x_1 = x_2 = \frac{1}{5}$

III) $\boldsymbol{x^2 - 2x + 5 = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{siendo\ a = 1, b = -2,\ c = 5}$ $\quad$ $\Delta = (-2)^2 - 4.5.1 = -16$

$\Delta < 0 \rightarrow no\ tiene\ soluciones\ \mathcal{R}$

$$\frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = x_{1,2}$$

$$\sqrt{-16} = \nexists \ en\ los\ números\ reales$$

$\boxed{\begin{array}{c} Obtendríamos\ un\ número\ perteneciente\ a\ los\ números\ complejos, \\ y\ en\ este\ curso\ solo\ trabajaremos\ con\ soluciones\ reales \end{array}}$

IV) $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{siendo\ a = 1,\ b = 0,\ c = -4}$ $\quad$ $(\boldsymbol{ecuación\ incompleta, b = 0})$

$x^2 = 4$

$|x| = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Las soluciones son $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

V) $\boldsymbol{x^2 + 3x = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{siendo\ a = 1,\ b = 3,\ c = 0}$ $\quad$ $(\boldsymbol{ecuación\ incompleta, c = 0})$

$\boldsymbol{x.(x + 3) = 0}$ — $\boxed{\begin{array}{c} factorizar\ la\ ecuación\ original, \\ para\ transformarla\ en\ un\ producto \end{array}}$

$x = 0$ $\qquad$ $x + 3 = 0$

$x = -3$

Las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$

VI) $\sqrt{3x - 2} = x$ $\quad$ $Algunas\ ecuaciones\ radicales\ pueden\ reducirse\ \ cuadraticas$

$\left(\sqrt{3x - 2}\right)^2 = x^2$ $\quad$ $Cancelamos\ la\ raiz\ con\ la\ potencia\ del\ primer\ miembro$

$3x - 2 = x^2$ $\quad$ $Acomodamos\ los\ términos\ para\ que\ quede\ de\ la\ forma\ cuadrática$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad$ $Aplicar\ la\ resolvente\ para\ obtener\ los\ resultados\ posibles.$

$$\frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = 1$$

Las soluciones serán $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Son ecuaciones del tipo: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, que se resuelven realizando una primera sustitución $y = x^2$, reduciendo la ecuación original a una ecuación cuadrática. Es importante recordar que solo trabajaremos con las soluciones reales.

Veamos un ejemplo:

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow sustituimos\ x^2 = y, es\ decir\text{:}\ \ x^4 = y^2 \text{ y } x^2 = y$

$y^2 - 3y - 4 = 0 \quad \rightarrow sobre\ esta\ cuadrática\ aplicaremos\ la\ resolvente$

$y = 4 \quad \text{e} \quad y = -1 \quad \rightarrow de\ estas\ soluciones\ debemos\ descartar\ las\ que\ son\ negativas$
$ya\ que\ solo\ estamos\ trabajando\ con\ números\ reales$
$y\ ningun\ número\ real\ al\ cuadrado\ puede\ darnos\ negativo$

Entonces $y = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow |x| = \sqrt{4} \rightarrow |x| = 2 \rightarrow x = \pm 2$

Así las soluciones reales de la ecuación original son: $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas en la que hay una o más incógnitas. Dichas relaciones se expresan mediante los signos > (mayor que), < (menor que), ≥ (mayor o igual que) o ≤ (menor o igual que).

La solución de una inecuación serán entonces intervalos de la recta real cuyos números cumplan con la desigualdad plateada.

Para resolver una inecuación se debe despejar la incógnita o las incógnitas. Con el fin de lograrlo, deberás tener en cuenta con qué tipo de inecuación estás trabajando, al igual que prestar atención al signo de relación para determinar los intervalos solución.
A su vez tendrás que prestar atención si al despejar multiplicas o divides por un número negativo debes invertir el signo de relación de la desigualdad.
Veamos algunos ejemplos sencillos:

I)
$x + 3 < -9$
$x < -9 - 3$
$x < -12$
$\boldsymbol{S} = (-\infty; \boldsymbol{-12})$

II)
$-2x < 5$
$x > -\frac{5}{2}$
$\boldsymbol{S} = (-\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}; \infty)$

III)
$2.(x - 3) \geq x + 4$
$2x - 6 \geq x + 4$
$2x - x \geq 4 + 6$
$x \geq 10 \rightarrow \boldsymbol{S} = [\boldsymbol{10}; \infty)$

Los ejemplos anteriormente vistos nos presentan inecuaciones lineales sencillas, pero en algunos casos las inecuaciones pueden ser cuadráticas, racionales o con valor absoluto y en estos casos hay que aplicar mecanismos de resolución un poco más complejos e interpretar los resultados obtenidos para decidir el conjunto solución.

Veremos un ejemplo de cada una para explicar en detalle cada caso:

I) Inecuación cuadrática:

$$2x^2 - 4x > -2x$$

$$2x^2 - 4x + 2x > 0$$

Siempre primero debemos acomodar la inecuación de manera que quede una expresión cuadrática, para luego poder resolverla como una ecuación.

$$2x^2 - 2x > 0$$

$$2x.(x-1) > 0$$

Aquí es importante la interpretación de esta expresión: el producto entre dos factores debe ser mayor que cero, es decir debe ser positivo, por lo tanto, ambos factores serán positivos o ambos serán negativos.

$$2x > 0 \quad \wedge \quad x - 1 > 0$$

$$x > 0 \quad \wedge \quad x > 1$$

$$(0, \infty) \cap (1; \infty)$$

$$S_1 = (1; \infty)$$

$$2x < 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0$$

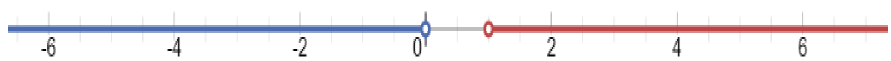
$$x < 0 \quad \wedge \quad x < 1$$

$$(-\infty; 0) \cap (-\infty; 1)$$

$$S_2 = (-\infty; 0)$$

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 0) \cup (1; \infty)$$

Interpretación gráfica e la solución:



II) Inecuación racional:

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{x-2} < 2}$$

Primero debemos despejar el dos al primer miembro, buscar el común denominador y escribir una inecuación equivalente desigualada a cero.

$$\frac{x+3}{x-2} - 2 < 0$$

$$\frac{x+3-2(x-2)}{x-2} < 0$$

$$\frac{-x+7}{x-2} < 0$$

Una expresión racional debe ser menor que cero, es decir negativa, para ello el numerador debe ser distinto al del denominador. Es importante determinar los valores que anulan el denominador, pues nunca puede ser cero.

$$-x+7 > 0 \quad \wedge \quad x-2 < 0$$

$$x < 7 \quad \cap \quad x < 2$$

$$S_1 = (-\infty; 2)$$

$$-x+7 < 0 \quad \wedge \quad x-2 > 0$$

$$x > 7 \quad \cap \quad x > 2$$

$$S_2 = (7; \infty)$$

La solución es: $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; 2) \cup (7; \infty)$

Interpretación gráfica de la solución:

III) Inecuación con valor absoluto:

Aquí es importante interpretar lo que expresa la inecuación según las propiedades del valor absoluto:

- $\boldsymbol{P_1: a > 0 \rightarrow |x| < a \rightarrow -a < x < a}$
- $\boldsymbol{P_2: a > 0 \rightarrow |x > a \rightarrow x > a \vee x < -a|}$

Y a partir de allí plantear la resolución correspondiente.

❖ $\boldsymbol{|3x-7| < 5}$

$-5 < 3x - 7 < 5$

$-5 + 7 < 3x < 5 + 7$

$2 < 3x < 12$

$\frac{2}{3} < x < 4$

$S = \left(\frac{2}{3}; 4\right)$

❖ $\boldsymbol{|3x-1| \geq 2x}$

$3x - 1 \geq 2x \quad \vee \quad 3x - 1 \leq -2x$

$3x - 2x \geq 1 \quad \vee \quad 3x + 2x \leq 1$

$x \geq 1 \quad \vee \quad 5x \leq 1$

$x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{5}$

$S = \left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [1; \infty)$