



Curso Introductorio

Tecnatura Univ. en Programación

Módulo Matemática

Unidad Temática N° 1 - “Los números Reales \mathbb{R} ” – Teoría

El conjunto de números reales, que simbolizaremos con \mathbb{R} , es un conjunto que fueron descubriendo a partir de un proceso constructivo que comenzó con el conjunto de los números naturales, y se fue ampliando a los enteros, a los racionales, con los irracionales, debido a la necesidad de resolver diferentes problemas.

En cada conjunto numérico se definen operaciones y se analizan sus propiedades.

El conjunto de los **números naturales**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, se pueden realizar sumas y multiplicaciones cuyos resultados se encuentran en el mismo conjunto, (por esto es que se dice que la suma y la multiplicación son operaciones cerradas), pero no ocurre lo mismo con la resta.

Por ejemplo ¿qué ocurre si queremos restar $5 - 9$?, surge la necesidad de otro conjunto de números... Se definen entonces los **números negativos**, que junto a los naturales y el cero forman el conjunto de los **números enteros** que designaremos $\mathbb{Z}_0 = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. En este conjunto, la suma, la resta y la multiplicación son cerradas.

Evidentemente, el conjunto de números naturales está contenido en el conjunto de números enteros, por eso se dice que los números enteros son una "ampliación" de los naturales.

Pero, también hay problemas que no se pueden resolver en \mathbb{Z} , como por ejemplo el siguiente:

¿Existe un número entero tal que multiplicado por 5 de por resultado 2? La respuesta es no.

Es necesario considerar una "ampliación" del conjunto de números enteros para poder resolverlo. Surge así el conjunto de **números racionales**.

Un número racional es aquél que puede escribirse como el cociente de dos números enteros **a** (numerador) y **b** (denominador) siendo **b** $\neq 0$, en símbolos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Notar que los enteros son racionales, pues pueden escribirse en forma de fracción. Resulta:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad (\subset \text{ símbolo de inclusión})$$

Veamos ahora el siguiente problema:

¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado cuyos lados miden 1 unidad? Utilizando el Teorema de Pitágoras resulta que la respuesta es $\sqrt{2}$. Este número no es racional, pues no puede expresarse

como fracción ($\sqrt{2} = 1,414213562\dots$).

Surge un nuevo conjunto de **números**, los **irracionales**. Se definen como aquellos números que no son racionales. Se simboliza \mathbb{I} . Los números e , π , $\sqrt{3}$ son números irracionales.

El conjunto de los números racionales e irracionales no tienen elementos en común y su unión constituye el conjunto de los **números reales**.

Nosotros centraremos nuestro repaso en el conjunto de los **números racionales**.

Se puede usar la **expresión decimal (finita o periódica)** para expresar a los números racionales.

Si efectuamos la división entre el numerador y el denominador de una fracción, el cociente obtenido es la expresión decimal de la fracción.

Por ejemplo, $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{3} = 0,333333 \dots$; $\frac{2}{15} = 0,1333333 \dots$

Notemos que en el primer ejemplo que dimos la expresión decimal tiene solamente dos números decimales (**expresión decimal finita**); el segundo ejemplo muestra infinitos decimales que se repiten (**expresión decimal periódica pura**) y en el último ejemplo dado vemos que algunos decimales se repiten y otros no. Al grupo de cifras decimales que se repiten se les llama **período** y se coloca un arco encima de ellos para simplificar su escritura:

$$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots = 0, \hat{3};$$

$$\frac{2}{15} = 0,1333333 \dots = 0,1\hat{3}$$

Por lo tanto, un número racional en forma decimal se puede expresar como fracción de la siguiente manera, dependiendo cual sea el caso:

Expresión decimal finita:

Para poder expresarlos como fracción se escribe en el numerador el número sin la coma y en el denominador potencias de diez, teniendo en cuenta la cantidad de decimales que posea (1). Es decir,

$$4,3 = \frac{43}{10}$$

$$0,25 = \frac{25}{100}$$

$$3,025 = \frac{3025}{1000}$$

(1) Nota: El sistema numérico que usamos se llama decimal, o sistema de base 10, porque en este sistema cada entero positivo está

representado como una suma de potencias de 10. Ejemplo: $105 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0$

Expresión decimal periódica: se clasifican en dos grupos:

- **Puros:** todas sus cifras decimales son periódicas. Ejemplo: $0,531531531 \dots = 0,\widehat{531}$
- **Mixtos:** no todas sus cifras decimales son periódicas. Ejemplo: $7,4222222 \dots = 7,4\widehat{2}$

Si es una expresión decimal **periódica pura**: en el numerador se realiza la resta entre el número completo (sin la coma) y la parte no periódica, mientras que en el denominador se colocan tantos 9 como cifras decimales periódicas posea.

Por ejemplo: $1,\widehat{13} = \frac{113-1}{99} = \frac{112}{99}$

Si es una expresión decimal **periódica mixta**: en el numerador se realiza la resta entre el número completo (sin la coma) y la parte no periódica y en el denominador se colocan tantos 9 como cifras decimales periódicas posea y tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga.

Por ejemplo: $1,1\widehat{3} = \frac{113-11}{90} = \frac{102}{90} = \frac{17}{15}$

Operaciones con números reales:

Es conveniente que ahora recordemos las propiedades que gozan algunas operaciones. La aplicación correcta de las mismas ayuda a un manejo fluido de las operaciones con números reales.

Adición (suma)

Propiedades:

Sean a , b y c números reales cualesquiera. Se cumple:

1- **Propiedad de cierre o clausura:** de la suma de números reales se obtiene un número real. En símbolos: $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$

2- **Propiedad conmutativa:** $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

3- **Propiedad asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

4- **Existencia del elemento neutro:** $\exists 0 \in \mathbb{R} / a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

5- **Existencia del elemento opuesto:** para cada $a \in \mathbb{R}$ existe su opuesto $-a \in \mathbb{R}$ que verifica $a + (-a) = 0$.

Diferencia (resta)

La existencia de un único opuesto para cada número real justifica la definición de diferencia o

resta de números reales de la siguiente manera $a - b = a + (-b)$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$

Propiedades:

Sean a, b y c números reales cualesquiera. Se cumple:

- 1- *Propiedad de cierre o clausura:* $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}$
- 2- *Propiedad conmutativa:* no se cumple.
- 3- *Propiedad asociativa:* no se cumple.

Recordemos como se sumar y restar fracciones con distinto denominador.

Lo primero debemos hacer es buscar un **denominador común** (el mínimo común múltiplo entre los denominadores). Luego sustituir las fracciones originales por fracciones equivalentes (2) que posean este denominador común.

Pero ¿cómo se calcula este denominador común? Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Si tenemos la siguiente operación entre fracciones:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{7}{9} =$$

Se debe calcular el mínimo común múltiplo entre denominadores **m.c.m (3, 5, 9)**, para ello vamos a descomponer los denominadores en factores primos (consultar el video 1)

3, 5, 9	3	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 5px;">}</div> <div style="margin-right: 5px;">}</div> <div style="margin-right: 5px;">}</div> <div style="margin-right: 5px;">}</div> </div>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 5px;">}</div> <div style="margin-right: 5px;">}</div> <div style="margin-right: 5px;">}</div> <div style="margin-right: 5px;">}</div> </div>
1, 5, 3	3		
1, 5, 1	5		
1, 1, 1	/		

$3^2 \cdot 5 = 45$

Una vez obtenido el denominador común hay que calcular las fracciones equivalentes. Para cada fracción haremos lo siguiente.

- Sustituimos su denominador por el denominador común.
- Calculamos su numerador de la siguiente manera: dividimos el denominador común por el denominador original de cada fracción. El resultado obtenido lo multiplicamos por el numerador original, obteniendo el numerador de la fracción equivalente:

(2) Nota: Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Para obtener fracciones equivalentes, se debe multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número distinto de cero.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{7}{9} = \frac{30 + 9 - 35}{45} = \frac{4}{45}$$

Producto (multiplicación)

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Propiedades:

Sean a, b y c números reales cualesquiera. Se cumple:

- 1- Propiedad de cierre o clausura: $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$
- 2- Propiedad conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a \quad a, b \in \mathbb{R}$
- 3- Propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad a, b, c \in \mathbb{R}$
- 4- Existencia del elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{R} / a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- 5- Existencia de inverso multiplicativo:

para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe su inverso $\frac{1}{a}$, que verifica $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

El inverso multiplicativo, si existe, es único.

Se puede realizar el producto entre numeradores por un lado y denominadores por otro y ver, **si es posible**, simplificar el resultado. Por ejemplo:

6 y 45 son divisibles por 3 y se obtiene la fracción irreducible $\frac{2}{15}$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{6:3}{45:3} = \frac{2}{15}$$

También se puede primero ver, **si es posible**, simplificar numeradores con denominadores y luego hacer el producto entre numeradores por un lado y denominadores por otro que resultaron de esa simplificación:

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$$

Cociente (división)

La existencia de un único inverso multiplicativo para cada número real, distinto de cero, justifica la definición de cociente de números reales de la siguiente manera:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \quad b \neq 0$$

Propiedades:

Sean a, b y c números reales cualesquiera. Se cumple:

- 1- *Propiedad de cierre o clausura:* $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a : b \in \mathbb{R}$
- 2- *Propiedad conmutativa:* no se cumple.
- 3- *Propiedad asociativa:* no se cumple.
- 4- *El cociente no tiene elemento neutro.*
- 5- *Como no tiene elemento neutro, no se puede analizar la existencia del elemento opuesto.*

Observaciones: sean $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Propiedad distributiva:

- *Del producto con respecto a la suma:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$
- *Del producto con respecto a la resta:* $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$
- *Del cociente con respecto a la suma:* $(b + c) : a = b : a + c : a \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- *Del cociente con respecto a la resta:* $(b - c) : a = b : a - c : a \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Potenciación de un número real y exponente entero

Sean $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, llamaremos potencia de base a y exponente n :

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (n veces)}$$

Observaciones:

$$a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ si } a \neq 0$$

Propiedades:

Sean m, n números enteros y a, b números reales cualesquiera. Se cumple:

- 1- *Propiedad distributiva respecto al producto:* $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- 2- *Propiedad distributiva respecto al cociente:* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{con } b \neq 0$
- 3- *Producto de potencias de igual base, se suman los exponentes:* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- 4- *Cociente de potencias de igual base, se restan los exponentes:* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ con } a \neq 0$
- 5- *Potencia de otra potencia, se multiplican los exponentes:* $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Nota: si algún exponente es negativo o cero, deben ser a y b distintos de cero. La potencia no es distributiva con respecto a la suma y a la resta.

En la potenciación de números racionales hay que tener mucho cuidado con el empleo de paréntesis, es decir: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ al emplearse el paréntesis que abarca a toda la fracción, el numerador y el denominador están afectados por la potencia, en cambio $\frac{3^4}{2} = \frac{81}{2}$ sin el paréntesis la potencia sólo afecta al numerador.

Ejemplos:

$$a) \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$b) 7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$$

$$c) \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Radicación

Dados $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ y $a \in \mathbb{R}$,

se llama raíz n – ésima de a , a cualquier número real que verifique $b^n = a$.

En símbolos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

El número n se llama índice y a radicando.

Observaciones:

- Cuando el índice n es impar, el valor de b es único y del mismo signo del radicando.
- Cuando el índice n es par, el valor de a es negativo, no existe la raíz n -ésima de a .
- $\sqrt[n]{0} = 0$

Propiedades:

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$1- \text{Distributiva respecto del producto: } \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2- \text{Distributiva respecto del producto: } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$$

3- Raíz de otra raíz se multiplican los índices: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Nota: si a o b son negativos, estas propiedades valen cuando n es impar.

Combinando la potenciación y la radicación se definen las **potencias de exponentes racionales (fraccionarios)**:

Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{R}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $a \in \mathbb{R}^+$ si n es par y $a \in \mathbb{R}$ si n es impar

Unidad Temática N° 1 - "Los números Reales \mathbb{R} " – Práctica

Actividad 1:

Dada la siguiente tabla:

	\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{I}	\mathbb{R}
-5					
8,3					
$\sqrt{5}$					
$-5,2\overline{7}$					
10000					
$\sqrt{-1}$					
π					
$\sqrt{4}$					
$5,2\hat{3}$					
$8/2$					

- Marque, si es posible, a qué conjunto/s pertenecen los números de la primera columna.
- Escriba los números reales racionales en su expresión fraccionaria.

Actividad 2:

Una cada expresión con su resultado:

$14 - 4 - 5 + 3 - 2 + 7 - 1 + 4$	18
$14 - (4 - 5) + 3 - (-2 + 7 - 1) + 4$	4
$14 - 4 - [5 + 3 - (-2 + 7) - 1] + 4$	16
$14 - (4 - 5 + 3) - (-2 + 7 - 1 + 4)$	12

Actividad 3:

Coloque, en cada caso, paréntesis donde sea necesario para que obtener el resultado indicado:

a) $6 \cdot 3 + 6 : 2 - 1 = 20$

b) $6 \cdot 3 + 6 : 2 - 1 = 26$

c) $6 \cdot 3 + 6 : 2 - 1 = 20$

Actividad 4:

Suprime llaves, corchetes y paréntesis:

$$a) 2x(y - z) - [-3(x + y)z + x(2y + z)] - 3yz =$$

$$b) \frac{1}{3}[3a - 6(a - b)] - \frac{3}{2}\left\{-\left(b - \frac{a}{4}\right) - \frac{2}{9}\left[a - 5b - \frac{2}{5}a\right]\right\}$$

Actividad 5:

Resuelve mostrando el procedimiento:

$$a) \frac{2}{3} - \frac{1}{5} : \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot 10 =$$

$$b) -\frac{2}{7} - \frac{\frac{4-2:5}{7}}{\frac{1 \cdot 4-3}{10 \cdot 3}} =$$

$$c) \frac{\frac{2}{5} - \left(\frac{3}{4} + 1 : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{11}}{\frac{3}{5} : 2 - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{3} : 4 - 1\right)} =$$

Actividad 6:

Transforme en fracción y resuelve (mostrar el proceso de resolución):

$$a) \left[\sqrt{\frac{4}{25}} : \left(2 - \frac{8}{5}\right) \right] + (2, \hat{1} + 1,0\hat{9}) : 28,9 \qquad b) \frac{\sqrt[3]{1-0,93\hat{6}}-1}{\sqrt[3]{-1+0,78\hat{4}}} + \frac{[(-0,3) \cdot 0,4 + 0,2\hat{2}]^2}{\sqrt{0,9\hat{9}}\sqrt{0,4\hat{4}}}$$

Actividad 7:

Resuelve:

$$a) (-0,6\hat{3})^2 = \quad b) \sqrt{0,4\hat{4}} = \quad c) \sqrt{0,3\hat{6}} = \quad d) (-5)^{-3} = \quad e) \left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} =$$

$$f) \sqrt[3]{-\frac{64}{729}} = \quad g) \sqrt{0,9\hat{9}} = \quad h) \sqrt{-\frac{16}{25}} = \quad i) (-0,3\hat{3})^{-5} = \quad f) (0,7\hat{7})^{-2} =$$

Actividad 8:

Evalúe las siguientes expresiones:

$$a) 2^2 \cdot 2^3 \quad b) 2^2 \cdot 3^2 5^2 \quad c) 4^2 2^{3,2} \quad d) \sqrt{3} (\sqrt{6})^2 \quad e) \left(\frac{a^6 b^{14}}{a^2} \right)^{24} \quad f) \sqrt[5]{\frac{320}{10}}$$

Actividad 9:

Resuelve aplicando las propiedades de la potenciación y radicación, indica cual/es empleó en cada caso:

$$\begin{array}{lll} a) \sqrt[3]{\frac{512m^6n^9}{8m^3n^6}} & b) \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^7 y z} : [(-2) \sqrt[5]{x^2 y}] & c) \sqrt{400x^5} : \sqrt{900x} \\ d) -\frac{1}{2} \sqrt{2xy} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4} x^2 y^3} & e) \left[\left(\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{5}{6}} \right)^2 \right]^{-3} & f) \sqrt{\frac{\sqrt[3]{10}}{2^{-\frac{5}{3}} \cdot 5^{-\frac{11}{3}}}} \\ g) \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{8}} & h) \sqrt{\frac{2^3 \cdot 5^5}{2^{-1} \cdot 5^3}} \cdot \left(\frac{2^4 \cdot 5^{-1}}{2^5 \cdot 5^{-1}} \right) & i) \frac{2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot 4^2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}} \end{array}$$

Actividad 10:

Entre las siguientes expresiones, encuentre las que son equivalentes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 ; -\left(\frac{1}{2}\right)^2 ; 0,5^2 ; -0,5^2 ; \left(-\frac{1}{2}\right)^2 ; -2^{-2} ; 2^{-2}$$

Actividad 11:

Resuelve, suponiendo que $a \neq 0$

$$\begin{array}{ll} a) 2a - 5a + 4a - 7a = & c) \frac{2}{a} - \frac{5}{a} + \frac{-3}{a} \\ b) \frac{a}{a} - \frac{a}{5} + \frac{-3a}{10} & d) [(20 - 5a)^2 : a^{-3}]^{\frac{3}{5}} \end{array}$$

Actividad 12:

Complete con = o \neq y justifique su elección mencionando la propiedad que empleó para tomar la decisión:

a) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} \dots\dots\dots \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{4}{9}} \qquad \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}} \dots\dots\dots \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}}$

Unidad Temática N° 1 - “Los números Reales \mathbb{R} ” – Práctica ComplementariaActividad 1:

Considera los siguientes números: -8 ; 7 ; 0 ; $\frac{89}{4}$; $15,6$; $\sqrt{3}$; $2, \hat{3}$; $-\pi$; $-\sqrt{2}$.

Indica cuáles de ellos son: \mathbb{Z} , \mathbb{N} , \mathbb{Q}^+ (rationales positivos), \mathbb{I} , \mathbb{Q} y \mathbb{R}_0^+ (reales no negativos).

Actividad 2:

Resuelve sin usar la calculadora, indicando las propiedades o definiciones utilizadas en cada paso:

a)

$$\frac{4}{5} + 5 + \frac{1}{4}$$

c)

$$5 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4}$$

b)

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{8}{7}$$

d)

$$\frac{\frac{1}{7}}{\frac{13}{7}}$$

Actividad 3:

a) Sabiendo que $3x - 3y = 27$ obtine el valor de $x - y$.

b) Sabiendo que $x + y = 5$ obtine el valor de $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y$.

Actividad 4:

Calcula y verifica:

a)

$$3 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 7 \cdot (-5) + \frac{15}{4} = -28$$

b)

$$-[-3 - (6 - 9) \cdot 0,1\bar{5}] = \frac{38}{15}$$

c)

$$\frac{3 - \frac{5 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{10}}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

d)

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 - \frac{1}{5}}\right) : 3 + \frac{1}{3} = \frac{17}{27}$$

Actividad 5:

Escribe el resultado como una única potencia (de exponente natural):

a)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$$

b)

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-2} =$$

c)

$$\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}\right]^{-1} =$$

Actividad 6:

Simplifica:

a)

$$\frac{3^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-7} \cdot 3^2}{3^{-3} \cdot 3^2}$$

b)

$$\frac{x^{-2} \cdot [x^2]^3 \cdot 3^{-2}}{x^4 \cdot 9}$$

c)

$$\frac{a^4 \cdot b \cdot c^{-2}}{a^2 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^{-5}}$$

Actividad 7:

Resuelve aplicando las propiedades de la potenciación y radicación, indica cuál/es empleó en cada caso:

a)

$$\left(\frac{1}{2} - 2\right)^3 - \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2^{-2}} =$$

b)

$$0,9^3 - \sqrt{1 - 0,52 \cdot \frac{16}{18}} + 1,9^2 : 10 - \frac{9}{100} =$$

c)

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{0,4} + 0,5\hat{3} \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\sqrt{\frac{16}{81}}}$$

Unidad Temática N° 2 - "Ecuaciones" – Teoría

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones que contienen uno o más valores desconocidos (incógnita) que se representan con letras del alfabeto.

Una **solución** es un valor de la(s) incógnita(s) para los cuales la igualdad se verifica. Por lo tanto, el **conjunto solución** de la ecuación es el conjunto de todas las soluciones.

Resolver una ecuación significa encontrar todas las soluciones. Es decir, hallar el conjunto solución.

Una **identidad** es una ecuación que se verifica para todos los valores posibles de la(s) incógnita(s).

Una **expresión es algebraica** si en ella aparecen variables y números, llamados coeficientes, relacionados por operaciones suma, producto, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

- | | | | |
|----------------------|----------------|---------------------|------------------------|
| a) $x + 5 = 0$ | c) $x + y = 8$ | e) $\log y = 6$ | g) $2a - 4b + 10c = 9$ |
| b) $a^2 + a - 4 = 0$ | d) $e^x = 20$ | f) $\sin(p) = 0,45$ | |

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** cuando todas las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda, y viceversa.

Ejemplos:

a) Las ecuaciones $x + 1 = 2$ y $2x + 2 = 4$ son equivalentes. Pues $x = 1$ es la única solución de ambas ecuaciones.

b) Las ecuaciones $x - 3 = 0$ y $x^2 - 3 = 0$ no son equivalentes. Pues $x = 3$ es solución de ambas, pero la segunda tiene una solución, $x = -3$, que no es solución de la primera.

Las ecuaciones pueden clasificarse, teniendo en cuenta el conjunto solución, en:

- **Compatible Determinada:** cuando tienen un número finito de soluciones.
- **Compatible Indeterminada:** cuando tienen infinitas soluciones.
- **Incompatible:** cuando no existe ninguna solución.

Ejemplos:

- a) $x + 1 = 0$ tiene una solución $x = -1$.
- b) $0x = 0$ tiene infinitas soluciones.
- c) $x^2 = -1$ no tiene ninguna solución real.

Teniendo en cuenta el número de incógnitas, una ecuación puede clasificarse en: ecuación de una incógnita, ecuación de dos incógnitas, etc. Además, se pueden definir de acuerdo con el grado de ellas. Para saber el grado de una ecuación, basta con identificar el mayor de ellos. Es decir, el mayor exponente de la incógnita. Así, tenemos los tipos siguientes:

- Ecuaciones de **primer grado**.
- Ecuaciones de **segundo grado**.
- Ecuaciones de **tercer grado**.
- Ecuaciones de **grado n** .

Ejemplos:

- a) $4x + 1 = -3$ es una ecuación de primer grado.
- b) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado.

Metodología para resolver ecuaciones:

Como dos ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones, cuando se quiere resolver una ecuación se puede resolver cualquiera que sea equivalente a ella, de ahí la idea de buscar ecuaciones equivalentes más simples.

El procedimiento es transformar una ecuación en otra equivalente pero más sencilla, y así sucesivamente hasta llegar a una ecuación equivalente a la dada, de la cual se encuentra con facilidad su conjunto solución.

Las transformaciones que se pueden hacer sobre una ecuación para obtener una equivalente son:

- 1- Intercambiar los dos miembros de la ecuación.
- 2- Simplificar los miembros de la ecuación reduciendo a términos semejantes, eliminando los paréntesis, etc.
- 3- Sumar o restar la misma expresión a ambos miembros de la ecuación. (1)
- 4- Multiplicar o dividir ambos miembros por una misma expresión distinta de cero. (2)
- 5- Si un miembro de la ecuación es 0 y el otro puede ser factorizado, entonces se puede usar la ley del producto y hacer cada factor igual a cero.

Notas:

- (1) Si la expresión que se suma no se puede calcular para cada valor de la incógnita entonces puede ocurrir que las dos ecuaciones no sean equivalentes.

(2) Si la expresión que se multiplica no es distinta de cero entonces puede ocurrir que las dos ecuaciones no sean equivalentes.

Ecuación lineal en una incógnita:

Una ecuación es lineal en la incógnita x si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la siguiente expresión:

$$ax + b = 0 \quad , \text{ con } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Ejemplos:

a)

$$1,8\hat{3}x - \frac{1}{5} = 2 \quad \text{primero debemos expresar como fracción a } 1,8\hat{3} = \frac{11}{6}$$

$$\frac{11}{6}x - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5} \quad \text{sumamos } \frac{1}{5} \text{ a ambos miembros de la igualdad}$$

$$\frac{11}{6}x = \frac{10 + 1}{5}$$

$$\frac{11}{6}x = \frac{11}{5}$$

$$\frac{11}{6}x \cdot \frac{6}{11} = \frac{11}{5} \cdot \frac{6}{11} \quad \text{multiplicamos a ambos miembros } \frac{6}{11}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

El conjunto solución es unitario y es $S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

b) $2 \cdot (t - 1) + 3 = 1 + 2t$

$$2t - 2 + 3 = 1 + 2t$$

$$2t + 1 = 1 + 2t$$

$$2t - 2t = 1 - 1$$

$$0t = 0$$

Cualquiera sea el valor que demos a la variable "t", la igualdad se verifica, por lo tanto, esta ecuación es satisfecha por todos los números reales. Es decir, el conjunto solución es $S = \mathbb{R}$

c) $2 \cdot (t - 1) + 3 = 2t$

$$2t - 2 + 3 = 2t$$

$$2t + 1 = 2t$$

$$2t - 2t = -1$$

$$0t = -1$$

No existe valor de "t" que verifique la igualdad, ya que $0 \cdot t = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Es decir, el conjunto solución es $S = \emptyset$

$$d) \frac{5}{4}x - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{5}{4}x - 2 \cdot \frac{3}{2}x + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{5}{4}x - 3x + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{5}{4}x - 3x - \frac{1}{2}x = 2 - \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{5x - 12x - 2x}{4} = \frac{4 - 1 - 2}{2}$$

$$-\frac{9x}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} : \left(-\frac{9}{4}\right)$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$$

$$x = -\frac{2}{9}$$

$$e) \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}x - 2} + 1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}x - 2} = \frac{1}{4} - 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}x - 2} = -\frac{3}{4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}x - 2} = -\frac{3}{4} \cdot 2$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}x - 2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{4}x - 2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\frac{1}{4}x - 2 = -\frac{27}{8} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{11}{8} \Rightarrow x = -\frac{11}{8} : \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{11}{8} \cdot 4 \Rightarrow x = -\frac{11}{2}$$

$$f) \frac{8}{125} \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)^3 + 2 = 3$$

$$\frac{8}{125} \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)^3 = 3 - 2$$

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)^3 = 1 \cdot \frac{125}{8}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{15 + 4}{6}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{19}{6}$$

$$x = \frac{19}{6} \cdot 2$$

$$x = \frac{19}{3}$$

Ecuación de segundo grado en una variable:

Una ecuación es de segundo grado, en la incógnita x , si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la siguiente expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Se la denomina expresión **polinómica** de la ecuación cuadrática.

Para resolver esta ecuación se emplea la fórmula **resolvente**:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante y se simboliza Δ , las soluciones dependen de él y podrán ser:

Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas

Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales iguales

Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene solución real

En los primeros dos casos la ecuación cuadrática resulta compatible y en el último incompatible.

Ejemplo:

a) $x^2 - 2 + x = 0 \quad a = 1, \quad b = 1, \quad c = -2$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

b) $x^2 - 2 - 2x = -3 \Rightarrow x^2 - 2x = -3 + 2 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

c) $x^2 + 2 = -x \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Propiedad:

Si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación de segundo grado en la incógnita x , entonces se puede **factorizar** la expresión $ax^2 + bx + c$ de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Si lo aplicamos a los ejemplos a) y b) antes vistos, obtenemos:

a) $1 \cdot (x - 1) \cdot (x - (-2)) = (x - 1) \cdot (x + 2)$

b) $1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) = (x - 1)^2$

Observaciones:

Recordemos el desarrollo de un **binomio cuadrado**, llamado **trinomio cuadrado perfecto**:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con el mismo procedimiento vemos que:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Situaciones problemáticas

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial del aprendizaje de la matemática ya que de esta manera se logra experimentar su potencialidad y utilidad en el mundo que nos rodea.

Antes de abordar la resolución de problemas matemáticos es necesario delimitar qué es lo que entendemos por problema.

Un **problema** es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y hay que poner a punto relaciones nuevas.

Pautas a seguir en la resolución de problemas

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas, no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución).

Apelaremos a los procesos que se llaman "**heurísticos**": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de estos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable,

un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Es ya clásica y bien conocida la formulación que hizo Polya (1945) de las cuatro fases esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

- 1- Comprender el problema: Parece, a veces, innecesaria, pero es de gran importancia, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Entender el problema que se tiene que abordar es la tarea más difícil, resulta por ello de gran importancia orientar a los alumnos en el proceso.
 - Se debe leer el enunciado despacio y reiteradas veces de ser necesario.
 - ¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)
 - ¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)
 - Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
 - Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.
- 2- Trazar un plan para resolverlo: Hay que plantear la situación problemática de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.
 - ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
 - ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
 - Imaginar un problema parecido pero más sencillo.
 - Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
 - ¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?
- 3- Poner en práctica el plan: Hay que tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.
 - Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.
 - ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
 - Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?
 - Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.
 - Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver

al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4- Comprobar los resultados: Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Se puede comprobar la solución?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede hallar alguna otra solución?
- Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
- Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.

Ejemplo:

Halle un número positivo sabiendo que su triple más el doble de su cuadrado es igual a 119.

Datos:

número positivo: n

triple del número: $3n$

doble de su cuadrado: $2n^2$

Planteo y resolución:

$$3n + 2n^2 = 119 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 119 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 3; c = -119$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-119)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 952}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{961}}{4} = \frac{-3 \pm 31}{4}$$

$\frac{-3 + 31}{4} = \frac{28}{4} = 7$

$\frac{-3 - 31}{4} = \frac{-34}{4}$

Verificación:

No cumple con las condiciones dadas en los datos

$$3n + 2n^2 = 119 \Rightarrow 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 = 21 + 2 \cdot 49 = 21 + 98 = 119, \text{ se verifica la igualdad}$$

Rta: el número que cumple las condiciones planteadas por la situación problemática es el **7**.

Unidad Temática N° 2 - "Ecuaciones" – Práctica

Actividad 1:

Analizando la ecuación $ax + b = 0$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, se la puede clasificar, teniendo en cuenta sus soluciones, de tres maneras diferentes. Une las opciones de la segunda y tercera columna que correspondan con las opciones 1 a 3.

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------|---|
| 1. Compatible a solución única cuando | a. $a = 0$ y $b = 0$ | I. La solución queda $x = -\frac{b}{a}$ |
| 2. Indeterminado cuando | b. $a \neq 0$ | II. La solución queda $0x = b$
<i>no se verifica para ningún $x \in \mathbb{R}$</i> |
| 3. Incompatible cuando | c. $a = 0$ y $b \neq 0$ | III. La solución queda $0x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ |

Actividad 2:

Resuelve las siguientes ecuaciones. Clasifique su solución (compatible determinada o indeterminada e incompatible) y determine su conjunto:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $\frac{x+2 \cdot (1+x)}{8} = \frac{7 \cdot (3-x)-2}{5}$ | l) $h + 4 = \sqrt{h+10}$ |
| b) $\left(\frac{7}{2}x - 5\right) \cdot 4 - 9x = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) - 5$ | m) $4 + \sqrt{x+2} = x$ |
| c) $3t + \frac{2+45t}{6} = \frac{15t-2}{3} + 4t + \frac{3t+2}{2}$ | n) $5 \cdot \frac{5^{5x}}{25^x} = 25$ |
| d) $\frac{10x-5}{4} = \left(\frac{15}{2}x - 3\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ | o) $2^t = 16$ |
| e) $\frac{\sqrt{0,1} + \frac{4}{3}}{2y-1} = \frac{5}{6}$ | p) $2 \cdot 9^x = 162$ |
| f) $1 + \frac{1}{2} \cdot 4m + \frac{1}{2} \cdot (-6) = -2$ | q) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x = 28$ |
| g) $\frac{x}{2} + \frac{2}{3} = \frac{x}{3} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x+1}{3}\right)$ | r) $(y-3)^3 : 3 = 81$ |
| | s) $t^3 - 3 = -30$ |

h) $x - \frac{2}{3} \left[-1 - \left(\frac{15}{2} - x \right) \right] = \frac{x}{3} + 1$

t) $(k - 4)^3 \cdot 3 = 81$

i) $\frac{2x+5-x-1}{2} - \frac{9-x-5+3x-2}{3} = \frac{x-3 \cdot (2x-4)+2}{2}$

u) $v^2 + 11 = 47$

j) $\sqrt{y} - 3 = 5$

v) $2 \cdot u^2 - 25 = 25$

k) $-1 - \sqrt[3]{2t+3} = \frac{1}{6}$

w) $\frac{x-4}{8-x} = 0$

Actividad 3:

Resuelve las siguientes ecuaciones. Clasifique su solución (compatible determinada o indeterminada e incompatible) y determine su conjunto:

a) $\sqrt{x^2 + 1 + 2\sqrt{4x - 3}} = x + 1$

h) $5x^2 - 3x + 1 = 4x^2 - 7x - 3$

b) $\frac{\sqrt{3x+10}+1}{2-\sqrt{x+3}} = 3$

i) $(3p - 2)^2 + (2p + 3)^2 = 26$

c) $\frac{3x+1}{3} - \frac{2x^2-5}{6} = \frac{7x+4}{2}$

j) $6x - 18 - (x + 1)^2 = x^2 - (x + 2)^2$

k) $3 \cdot 4^x + 6 \cdot 2^x = 24$

d) $\frac{4}{6}x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{1}{12}$

l) $3^{2x-1} - 3x = 18$

e) $2x + 6 - \frac{x^2+1}{2} = 4 - x^2$

f) $\frac{2x}{3} - \frac{(x-1)^2}{5} = \frac{2 \cdot (x-3)}{15}$

g) $(x - 2)(2x + 2) = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$

Actividad 4:

Calcule m tal que las siguientes ecuaciones cuadráticas tengan:

- a) $3mx^2 + 2x = 3$; *tenga dos raíces reales distintas*
- b) $x^2 - mx + 4 = 0$; *tenga dos raíces reales iguales*
- c) $-2x^2 + 3x - m = 0$; *carezca de raíces reales*

Actividad 5:

a) Escribe una ecuación cuadrática en su forma polinómica que tenga como soluciones los números $\frac{2}{3}$ y -5 .

b) Escribe una ecuación cuadrática en su forma polinómica que tenga como coeficiente cuadrático -1 y como soluciones los números -7 y -8 .

Actividad 6:

Realice una lectura comprensiva, plantee, resuelva y verifique la solución obtenida, de las siguientes situaciones problemáticas:

a) Calcule las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que la base es 6 unidades mayor que la altura y su área es de $16cm^2$.

* b) La distancia entre las ciudades Rosario y Victoria es de $50km$. A la misma hora, salen un camión desde Rosario a $60 \frac{km}{h}$ y un ciclista de la ciudad de Victoria a $25 \frac{km}{h}$.

Se desea calcular cuánto tardarán en encontrarse si ambos circulan por la misma ruta pero en sentidos opuestos (ecuación del espacio recorrido $e = v \cdot t$).

* c) Si al producto entre un número natural y su sucesor le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. Calcula el o los números que cumplan lo anteriormente mencionado.

d) Calcular el área de un círculo sabiendo que si se aumenta su radio en $3cm$, su área se cuadruplica.

* e) Calcule las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su área es de $600cm^2$ y su perímetro de $100m$.

f) Pilar decidió regalar $\frac{1}{3}$ de su colección de libros a una amiga y $\frac{2}{7}$ a su sobrino ¿Cuántos libros tenía Pilar al comienzo si al final se quedó con 64? ¿Con qué parte de sus libros se quedó Pilar?

g) Calcule el valor de los ángulos interiores de un triángulo sabiendo que ellos se encuentran representados por:

$$\hat{a} = 3x + 5^\circ, \quad \hat{b} = 2x + 45^\circ \quad y \quad \hat{c} = 9x + 10^\circ$$

h) El perímetro de un triángulo isósceles es de 15cm . El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados congruentes. Calcule la longitud de los lados del triángulo.

Unidad Temática N° 2 - "Ecuaciones" – Práctica Complementaria

Actividad 1:

Resuelve cada ecuación. Clasifique su solución (compatible determinada o indeterminada e incompatible) y determine su conjunto:

a)

$$8x + 2 \cdot (x - 4) = 5 \cdot x + 3$$

b)

$$-5 \cdot \left[3 - (2 - x) - \frac{1}{5} \right] = -x + 9$$

c)

$$\frac{x + 3}{5} = \frac{2x - 1}{2}$$

d)

$$x^2 + 9x + 3 = (x - 5)^2$$

e)

$$-[-3x + 2] + 9 = \frac{1}{2}x$$

f)

$$3x - (x - 5) = 1 - 2 \cdot (5 - x)$$

g)

$$\frac{2x + 4}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x + 3}{3}$$

h)

$$-(-x - 6) + 2 = x + 8$$

i)

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}x + 1 \right) = 6x$$

$$j) \quad \sqrt{x + 11} - \sqrt{x - 1} = 2$$

Actividad 2:

Plantea la ecuación lineal que modeliza el problema y resuelve:

- Si se le resta a 6 siete veces un cierto número, el resultado es cinco veces el número. ¿De qué número se trata?
- Un cable de 44m se corta en dos trozos, uno es tres veces más largo que el otro. ¿Cuáles son las longitudes de cada uno de los trozos?
- María, de 30 años, tiene una hija de 2 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de la madre sea el doble que la de la hija?
- Jorge tiene el triple de figuritas que Marta, Marta tiene tres figuritas más que Alberto y Alberto tiene tres figuritas más que Sara. Entre los cuatro tiene 63 figuritas. ¿Cuántas figuritas tienen cada uno?

Actividad 3:

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $-x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $x^2 - 4 = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

e) $18 = 6x + x(x - 13)$

f) $3x^2 + 2x + 4 = 10$

Actividad 4:

Encuentre el valor de k de forma que $x = 2$ sea solución de la ecuación:

$$x^2 - 6kx + 8 + 2k = 0.$$

Actividad 5:

Plantea la ecuación cuadrática que modeliza el problema y resuelve:

- a) La multiplicación entre dos números enteros consecutivos pares es igual al doble del número impar que hay entre ellos aumentado 34 unidades. ¿Cuáles son los dos números pares consecutivos? *Ayuda:* Hay dos posible pares de números.
- b) Tres enteros pares consecutivos son tales que el cuadrado del tercero es 76 más que el cuadrado del segundo. Obtenga estos tres números.
- c) Un negocio vende n lámparas, no más de 50 lámparas, a un precio de $\$(91 - n)$ cada lámpara. ¿Cuántas debe vender para obtener \$1938?
- d) Determine las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el largo es $\frac{4}{3}$ de su ancho y que su área es de 1200 m^2 .

Unidad Temática N° 3 - “Polinomios” – Teoría

Expresiones Algebraicas

Es una combinación de letras y números que aparecen vinculados a través de las distintas operaciones como ser sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, pueden aparecer también potencias y raíces.

Son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$2x^3y + 3x + z$$

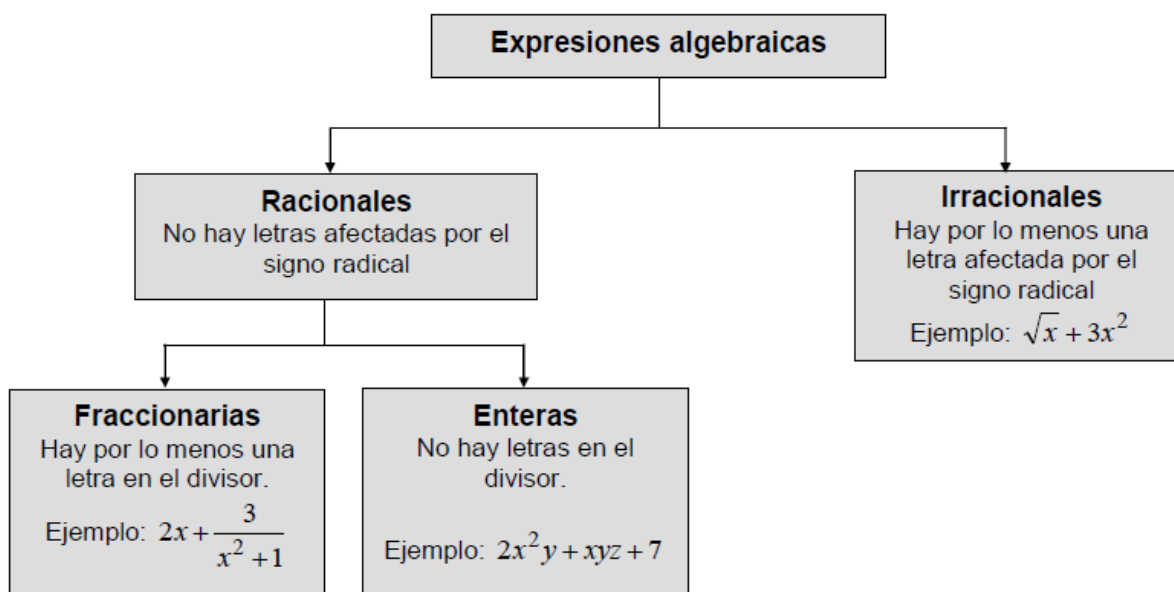
$$y^3 - \frac{3}{y} + y^2$$

$$\frac{x+2y}{3x-y}$$

$$-3\sqrt{x} + 1$$

$$-5xyz^2$$

Clasificación de las expresiones algebraicas



Expresiones algebraicas enteras

En el curso introductorio estudiaremos las expresiones algebraicas enteras.

A los números se los llama **coeficientes** (y en ocasiones se usan las primeras letras del alfabeto para denominar valores constantes) y a las letras que representan aquellas expresiones *que pueden tomar diferentes valores* (generalmente las últimas del alfabeto x , y , z) se las llama **variables**.

Cada grupo de letras y números que estén separados por los signos + o – es un **término**; a aquellos términos que tienen igual parte literal se los llama **términos homogéneos**.

En matemática se designa con el término de **polinomio** a la suma de varios monomios (expresiones algebraicas de un único término), porque un polinomio es una expresión algebraica, constituida por una o más variables, utilizando únicamente las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

El polinomio que presenta un único término se denomina monomio, el que posee dos términos, binomio, el de tres, trinomio, al de cuatro cuatrinomio y a partir de cinco diremos polinomio. (1)

El **grado** de una expresión algebraica está dado por el mayor exponente que posee la variable.

Si bien desde la antigüedad, tanto la resolución de ecuaciones algebraicas, como la determinación de las raíces de los polinomios fueron las máximas preocupaciones a resolver por la matemática, la práctica notación de los mismos y que se usa actualmente, recién aparecería para establecerse hasta nuestros días durante el siglo XV.

Polinomio en una variable

Durante el desarrollo de este tema nos referiremos a polinomios donde la parte literal está constituida solamente por una variable elevada a cualquier exponente natural.

Los polinomios que se estudiarán en esta Unidad son expresiones algebraicas de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

donde:

- $a_{n,n-1,\dots,0}$ son números reales llamados **coeficientes**.
- a_n es el **coeficiente principal**.
- a_0 es el **término independiente**.
- x es la **variable**, también conocida con el nombre de indeterminada.
- Los exponentes $n, n-1, \dots, 2, 1, 0$, son números naturales.
- n es el grado del polinomio y se indica *grado* $P(x) = n$.

(1) Nota: a partir de los dos términos, también podemos llamarlos polinomio.

Observaciones:

- Ordenar un polinomio significa ubicar de manera decreciente los exponentes de la variable.
- Completar un polinomio significa colocar términos $0x^t$ si hay faltante de un exponente.

Ejemplos:

- a) $Q(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x^3 + 1$ es un polinomio de grado 5, coeficiente principal 3 y término independiente 1. También podemos llamarlo cuatrinomio ya que posee cuatro términos.

Ordenado es: $Q(x) = 3x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 1$.

Ordenado y completo es: $Q(x) = 3x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 0x + 1$

- b) $G(x) = -2$ es un monomio de grado cero.

- c) $S(x) = 0$ se llama **polinomio nulo** y no tiene grado.

Igualdad de polinomios

Los polinomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0 \quad \text{y}$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \quad \text{con } b_m \neq 0$$

Son iguales si:

- $n = m$ tienen el mismo grado.
- $a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, \dots, a_0 = b_0$

Valor numérico de un polinomio

Se llama valor numérico de un polinomio $P(x)$ en $x = k$, al valor que toma el polinomio cuando se sustituye x por k .

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, entonces el valor de $P(x)$ en $x = k$ es:

$$P(x) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0$$

Ejemplo:

Sea $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, el valor de $Q(x)$ en $x = -2$ es:

$$Q(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -43$$

Raíces de un polinomio

Un número k es raíz de un polinomio $P(x)$ si y solo si $P(k) = 0$.



Entonces cuando resolvíamos ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$ encontrábamos las raíces del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Operaciones con polinomios

Adición (suma) de polinomios

La suma de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $P(x) + Q(x)$ que se obtiene sumando los monomios semejantes que se encuentran en ellos.

Ejemplo:

Dados $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 9$. Calcular $P(x) + Q(x)$

Para sumar polinomios tenemos dos opciones:

Opción 1: $P(x) + Q(x) = (2x^4 - 5x^3 + x) + (2x^3 - x^2 + 9) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^3 - x^2 + x + 9 =$

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 9$$

Opción 2:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 0x^2 + x + 0$$

$$Q(x) = \quad 2x^3 - x^2 + 0x + 9$$

$$P(x) + Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 9$$

Producto de un número real por un polinomio

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y k es un número real, entonces:

$$k \cdot P(x) = (k \cdot a_n) x^n + (k \cdot a_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (k \cdot a_2) x^2 + (k \cdot a_1) x + (k \cdot a_0)$$

Ejemplo:

Si $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ y $k = -3$, entonces:

$$k \cdot P(x) = -3 \cdot P(x) = -3 \cdot (5x^3 + 2x^2 - 5x + 2) = -15x^3 - 6x^2 + 15x - 6$$

Diferencia (resta) de polinomios

La resta de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $P(x) - Q(x) = P(x) + (-1) \cdot Q(x)$

Ejemplo:

Dados $P(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 3$ y $Q(x) = -4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. Calcular $P(x) - Q(x)$

Para restar polinomios tenemos dos opciones:

Opción 1: $P(x) + Q(x) = (3x^4 - 3x^2 + x - 3) + (-1) \cdot (-4x^3 + 2x^2 + 3x - 1) = 3x^4 - 3x^2 + x - 3 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = \boxed{3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x - 2}$

Opción 2:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ (-1) \cdot Q(x) &= 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline P(x) - Q(x) &= 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Producto de polinomios (multiplicación)

Para realizar el producto de dos polinomios es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la resta y las propiedades del producto de potencias de igual base.

Ejemplo:

Dados $P(x) = x^2 - 3x + 5$ y $Q(x) = 2x - 1$. Calcular $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 - 3x + 5) \cdot (2x - 1) \\ &= x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot (-1) + (-3x) \cdot 2x + (-3x) \cdot (-1) + 5 \cdot 2x + 5 \cdot (-1) = \\ &= 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 10x - 5 = \boxed{2x^3 - 7x^2 + 13x - 5} \end{aligned}$$

Observación:

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se verifica que:

$$\text{grado}(P(x) \cdot Q(x)) = \text{grado}(P(x)) + \text{grado}(Q(x))$$

Algunos productos especiales:

Producto	Nombre
$(x+a) \cdot (x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$ $(x+a) \cdot (x-a) = x^2 - a^2$	Diferencia de cuadrados
Cuadrado de un binomio $(x+a)^2 = (x+a) \cdot (x+a) = x^2 + ax + ax + a^2$ $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ $(x-a)^2 = (x-a) \cdot (x-a) = x^2 - ax - ax + a^2$ $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$	Trinomio cuadrado perfecto Trinomio cuadrado perfecto
Cubo de un binomio $(x+a)^3 = (x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a)$ $= (x^2 + 2ax + a^2) \cdot (x+a)$ $= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3$ $= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$	Cuatrinomio cubo perfecto Cuatrinomio cubo perfecto

Factorización de polinomios

Del mismo modo en que se descompone un número entero en producto de sus factores primos, se puede descomponer un polinomio compuesto en producto de polinomios primos.

Un polinomio $P(x)$ de grado no nulo, es primo o irreducible cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor que $P(x)$.

Todo polinomio de grado uno es primo o irreducible.

Cuando un polinomio no es primo, es compuesto.

Factorizar un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios primos o irreducibles.

Ejemplo:

Polinomio desarrollado: $S(x) = -3x^2 + 12x + 15$

Polinomio factorizado: $S(x) = -3 \cdot (x - 5) \cdot (x + 1)$

A continuación, se presentan algunas técnicas que permiten expresar un polinomio como producto de factores.

Factor común

Cuando un polinomio $P(x)$, se presenta un factor que es común en todos los términos se puede extraer el mismo.

En caso de que la variable se encuentre presente en todos los términos, se extrae como factor común a la que está elevada al menor exponente.

Ejemplo:

Sea $P(x) = 18x^2 + 20x^3 - 8x^4$ el factor común que aparece en todos los términos es $2x^2$ por lo cual el polinomio dado se puede expresar como $P(x) = 2x^2 \cdot (9 + 10x - 4x^2)$

Factor común en grupos

En primer lugar, debemos tener en cuenta que, para factorizar un polinomio con este método, debe tener un número compuesto de términos (4, 6, 8, 9, 10, 12 términos, etc. para poder separarlos en grupos de igual tamaño).

El método es similar a extraer factor común, pero en este caso no poseen uno en común todos los términos, sino por grupos.

Ejemplo:

$$P(x) = 5x^3 - 6x^2 + 10x - 12 = x^2 \cdot (5x - 6) + 2 \cdot (5x - 6) = (x^2 + 2) \cdot (5x - 6)$$

Diferencia de cuadrados

Se recuerda que una diferencia de cuadrados puede expresarse como producto del siguiente modo:

$$x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

Ejemplo:

$$\frac{16}{9}x^4 - 36 = \left(\frac{4}{3}x^2\right)^2 - 6^2 = \boxed{\left(\frac{4}{3}x^2 + 6\right) \cdot \left(\frac{4}{3}x^2 - 6\right)}$$

Trinomio cuadrado perfecto

La expresión factorizada de un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Ejemplo:

$$H(x) = x^2 - 10x + 25 = \boxed{(x - 5)^2} \text{ Binomio cuadrado}$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x^2} = x & & \sqrt{25} = 5 \\ \downarrow & & \\ 2 \cdot (-5) \cdot x & & \end{array}$$

Cuatrinomio cubo perfecto

La expresión factorizada de un cuatrinomio cubo perfecto es el cubo de un binomio:

$$x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 = (x - a)^3$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x + 3)^3 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt[3]{8x^3} = 2x & & \sqrt[3]{27} = 3 \\ \swarrow & & \searrow \\ 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 = 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 = 36x^2 & & 3 \cdot 2x \cdot 3^2 = 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 = 54x \end{array}$$

Unidad Temática N° 3 - "Polinomios" – Práctica**Actividad 1:**

Determine cuál de las siguientes expresiones son polinomios. Justifique su respuesta:

a) $x^2 - 3x + \sqrt{2}$

b) $x^2 + \frac{1}{x} - 6x^5$

c) $\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{7}x^{-\frac{1}{2}}$

d) $4x^7 - \frac{1}{4}x$

Actividad 2:

Dados los siguientes polinomios indica el grado, coeficiente principal y término independiente de cada uno de ellos. Además, calcule el valor numérico indicado:

a) $Q(x) = x^6 - x^4 + x^3 - x^2$

$Q(1); Q(-1)$

b) $R(x) = \frac{1}{2}x + 5 - \frac{3}{4}x^5$

$R(2); R(-1); R(-1)$

Actividad 3:

Dados los polinomios $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$, calcula:

a) $P(-1) + Q(0) =$

b) $2 \cdot P(-2) - Q(3) =$

Actividad 4:

Calcular $A(x) - 2B(x)$, siendo $A(x) = 2x^3 + 4x^4 - 9x^2 + 8$ y $A(x) = -3x^3 + x^2 - 2x$

Actividad 5:

Dados: $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 4$, $Q(x) = 4x^2 - x + 5$, $M(x) = 1 + x$ y
 $T(x) = x^2 - 3$

Calcular:

a) $3P(x) + Q(x) - T(x)$

b) $P(x) - Q(x) \cdot T(x)$

c) $P(x) \cdot T(x)$

d) $-2 \cdot [T(x)]^2$

e) $[M(x)]^3$

Actividad 6:

Sea el polinomio $A(x) = x^5 + x^3 - 2x^4 - 3x^2 + kx + 3$. ¿Cuánto vale k , si $A(-1) = 2$?

Actividad 7:

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $x^2 - 13x + 40$

b) $4x^2 + 24x + 36$

c) $\frac{1}{4}x^4 - 625$

d) $3x^3 - 6x^2 - 9x$

e) $\frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{15}{32}x$

f) $x^3 + 2x - 3x^2 - 6$

g) $5x^3 - 6x^2 + 10x - 12$

h) $\frac{9}{16}x^2 + x + 0,4$

i) $9x^6 + \frac{3}{2}x^3 + 0,0625$

j) $8x^3 + 6x^2 + 12x + 1$

k) $1 - \frac{1}{4}x^2$

Unidad Temática N° 3 - "Polinomios" – Práctica Complementaria**Actividad 1:**

Indica cuales de las siguientes expresiones son polinomios:

a) $3x + 2$

d) $\sqrt{x} \cdot 2 + 1$

b) $8^x - x^3 + 2x^2$

e) $x^7 + \sqrt{3}x - 1$

c) $x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{5}} - x + 1$

f) $(x + 1)^2$

Actividad 2:

Determina, en cada ítem, los valores de a , b , c y d de forma que $p(x) = q(x)$.

a) $p(x) = 7x^4 - x^2 + 3x - 2$; $q(x) = (a + b)x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + d$

b) $p(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{3}{5}x + 6$; $q(x) = (a - b)x^4 + bx^3 + (2c - d)x^2 + \frac{3}{5}x + d$

c) $p(x) = (3x^a - 2x^2 + x) \cdot x$; $q(x) = 3x^4 + bx^3 + x^2 + c$

Actividad 3:

a) En cada caso, resuelve y determina el grado del polinomio resultante. Siendo:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6, \quad Q(x) = x^4 + 10x^2 - x + 3, \quad R(x) = 2x^3 + 3$$

i. $P(x) + Q(x) =$

ii. $P(x) - 3 \cdot Q(x) =$

iii. $P(x) \cdot R(x) =$

iv. $-[R(x)]^2 =$

b) Dados los polinomios en el ítem a), obtienen el valor numérico que se pide:

i. $P(-1)$

ii. $R(2) - 3 \cdot Q(0)$

iii. $8 \cdot R\left(-\frac{1}{2}\right)$

Actividad 4:

Determine el valor de la constante k , de modo que 2 sea raíz del polinomio $p(x) = x^4 + 3kx^3 - 6x^2 - 12$.

Actividad 5:

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $x^2 + 10x + 25$

b) $x^3 - x$

c) $3x^3 - 12x^2 + 12x$

d) $-x^3 - 2x^2 - x$

e) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

f) $6x^2 - 9x + 15x^3$

g) $\frac{1}{7}x - \frac{2}{49}x^2$