CONJUNTOS

TEMARIO:

Conceptos primitivos

Algunas formas de representar un conjunto

Cardinal de un conjunto

Subconjunto

Operaciones y propiedades: Intersección, unión, diferencia, complemento.

Problemas de conteo

Algunos símbolos matemáticos

CONCEPTOS PRIMITIVOS

En matemática hay ciertas “ideas”, “representaciones” que no tienen una definición, preceden a una serie de definiciones, propiedades, teoremas y más. Dichas representaciones son denominadas “***conceptos primitivos***”, a tales conceptos los aceptamos sin definición, son como un punto de partida. Los conjuntos son un ejemplo de esto. Cuando nos referimos a un conjunto asociamos esta palabra con colección de objetos, grupos de elementos, etc.
Este concepto es uno de los más fundamentales de la Matemática, ya que la Teoría de Conjuntos es la base sobre la que se construye toda la Matemática.

Ejemplos:

1) *Los puntos de una figura.*
2) *Los alumnos de un curso determinado.*
3) *Las letras del alfabeto.*
4) *Los números enteros mayores que -3 y menores que 3.*

Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos o entidades distinguibles y bien definidas con características comunes. Tales objetos o entidades que pertenecen a un conjunto reciben el nombre de elementos del mismo.

Los conjuntos, generalmente, los nombramos con letras mayúsculas: **A, B, C…**
Los elementos de un conjunto, generalmente, los denominamos con letras minúsculas: **a, b, c…**

Conjunto “Vacío”: Es el conjunto que no tiene elemento y lo simbolizamos Ø o { }.

ALGUNAS FORMAS DE REPRESENTAR UN CONJUNTO

- **Por extensión:** es cuando listamos todos los elementos del conjunto (entre llaves). Es una forma que podemos usar en tanto el conjunto tenga una cantidad finita de elementos.
- **Por comprensión:** Es cuando indicamos las propiedades que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto.

Estructura en la notación por compresión:

$$\{x/x \ tienela \ propiedad \ p\}$$

El conjunto de

todos los elementos x

tales que

x tiene la propiedad dada

Ejemplos:

1) $A = \{x/x \text{ es un dígito impar}\}$

Los números dígitos son aquellos que tienen una sola cifra.

Los elementos de este conjunto serán entonces los números dígitos impares. Por lo que si quisiéramos escribir por extensión al mismo quedaría: {1; 3; 5; 7; 9}.

2) $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales menores a 6. Por extensión: {1; 2; 3; 4; 5}.

3) $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 3 \leq x < 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales, incluido el cero, mayores o iguales a 3 y menores a 6. Por extensión: {3; 4; 5}.

4) $D = \{x/x \text{ es un impar terminado en } 2\}$

Si un número termina en dos entonces es par, por lo que este conjunto no tiene ningún elemento. Por extensión: Ø.

La notación $x \in A$ significa que la entidad u objeto x es un elemento del conjunto A (se lee "x pertenece a A"). La notación $x \notin A$ quiere decir que x no es un elemento del conjunto A (se lee "x no pertenece A").

Ejemplos: $1 \in A, 2 \notin A, 3 \in B, 6 \notin B$.

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Definimos el **cardinal de un conjunto finito**, como el número de elementos del mismo. Simbólicamente el cardinal de A suele escribirse: $|A| = card(A)$.

Ejemplos: $|A| = 5,\ |B| = 5,\ |C| = 3,\ |D| = 0.$

SUBCONJUNTO

Decimos que un conjunto B es un **subconjunto** de un conjunto A si todos los elementos de B también lo son de A. Es decir que el conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A. En símbolos:

$$\boxed{B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)}$$

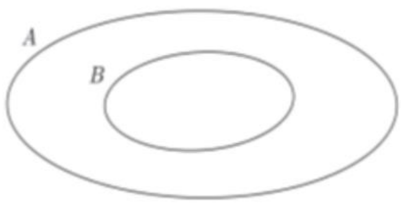


Fig.: Diagrama de Venn representando la relación de inclusión entre conjuntos

Ejemplo: *Sea* $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$ *y* $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 3 \leq x < 6\}$, *resulta* $C \subset B$.

- También se dice que el conjunto B está contenido en el conjunto A, o que A contiene a B.

- Con la notación $B \not\subset A$ se indica que B **no es un subconjunto** de A. Para probar que un conjunto A no es subconjunto de otro B, es suficiente mostrar un elemento a en A tal que a no pertenezca a B.

- Dos conjuntos serán **iguales** cuando posean los mismos elementos. En otras palabras: A = B, si todo elemento de A es también elemento de B, y todo elemento de B es también elemento de A. En símbolos:

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{A} \Leftrightarrow (\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \ \wedge B \subset \mathrm{A})}$$

Ejemplos:

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x}/\mathrm{x} \ \in \mathbb{Z} \ \wedge \mathrm{x}^2 = 9\}$ y $\mathrm{B} = \{-3{,}3\}$

$A = \{x/x \ esun\ númeor\ primo\ par\}$ y $B = \{2\}$

Un conjunto A es **subconjunto propio** de B si se cumplen las siguientes condiciones:

- $A \subset B$ (A es subconjunto del B).
- $A \neq B$ (A y B no son iguales).

Dicho en términos más sencillos: el conjunto A es un subconjunto propio de B si cada elemento de A es también elemento de B, pero cada elemento de B no es necesariamente es un elemento de A.

La relación anterior se denota por $A \subseteq B$. Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominamos "**Conjunto Universal**". Generalmente lo simbolizamos con U.

Como esta definición lo indica, su formación va a depender del problema con el cual se trabaje.

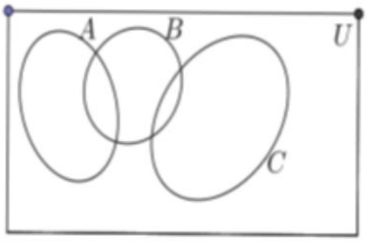


Fig.: Diagrama de Venn conjunto Universal y algunos subconjuntos.

Ejemplos:

1) Se realizó un sondeo sobre qué carrera van a seguir los alumnos de 5to año de la Escuela "Manuel Belgrano". Los resultados de la encuesta entre los 45 alumnos del curso fueron:

- o Derecho: 12 alumnos
- o Cs. Económicas: 10 alumnos

- Ingeniería Industrial: 9 alumnos
- Psicología: 6 alumnos
- Otros: 8 alumnos

Para esquematizar con conjuntos esta situación, se toma como conjunto universal U a los 45 alumnos de este 5to año de la Escuela "Manuel Belgrano".

2) Necesitamos establecer características que definan a los números impares y pares. En este caso, sería apropiado utilizar como conjunto universal, al conjunto de los números naturales incluidos el cero. Es decir: U=N.

Los números pares son los múltiplos de 2. Eso significa que al multiplicar un número natural (o cero) por 2 obtendremos un número par. Con esto conseguimos una caracterización de los pares como: "si x es par entonces $x = 2n$, con $n \in \mathbb{N}_0$.

OPERACIONES

Al igual que se realizan operaciones como ser la suma y la multiplicación con los números, también es posible definir operaciones con conjuntos… cuyos resultados serán ¡conjuntos!

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente. Es decir, que un elemento x pertenece a la "intersección" siempre y cuando esté simultáneamente en A y en B. En símbolos:

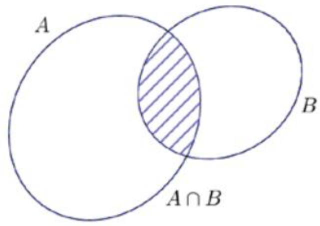
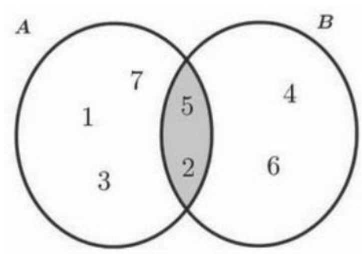


Fig.: Intersección de los conjuntos A y B

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo: *Si* $A = \{1,2,3,5,7\}; B = \{2,4,5,6\}$.



$$A \cap B = \{2,5\}$$

UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con todos los elementos de ambos conjuntos, es decir por todos los elementos que son sólo de A, también lo que son sólo de B y los que son elementos de ambos conjuntos. En símbolos:

$$\boxed{A \cup B = \{x / x \ \in A \vee x \in B\}}$$

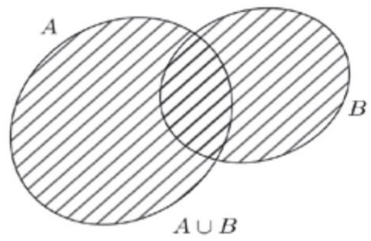
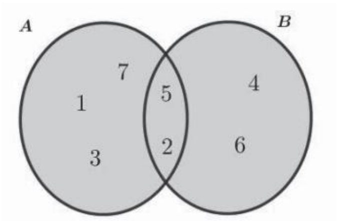


Fig.: Unión de los conjuntos A y B

Ejemplo: *Si* $A = \{1,2,3,5,7\}; B = \{2,4,5,6\}$.



$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Si dos conjuntos no tienen elementos en común, entonces son **disjuntos**, y recíprocamente. Es decir:

$$\boxed{A \ y \ B \ disjuntos \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset}$$

Ejemplo: El conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares son disjuntos.

Más ejemplos:

1) *Inversión en publicidad La tabla superior lista a las 6 empresas que más invirtieron para sponsorear a la Selección Argentina de fútbol, durante las Eliminatorias "Sudáfrica 2010", tanto en televisión por cable como en la televisión abierta de Capital Federal.*

	Inversión de sponsor y anunciantes Eliminatorias Sudáfrica 2010	
	TV por cable	**TV Capital federal**
1	Coca Cola	Claro
2	Standar Bank	Coca Cola
3	Claro	Repsol YPF
4	Repsol YPF	Standar Bank
5	Italcred	Italcred
6	Quilmes	Adidas

Fuente: Monitor Medios Publicitarios

a) Determina las empresas que estuvieron en una u otra de las categorías durante ese período.
b) ¿La parte a) representa la unión o la intersección de las empresas? Explica.
c) Determina las empresas que estuvieron en ambas categorías durante ese período.
d) ¿La parte c) representa la unión o la intersección de las empresas? Explica.

Respuestas:

a) *{Coca Cola; Standar Bank, Claro, Repsol YPF, Italcred, Quilmes, Adidas}*
b) *Representa la unión ya que se refiere a lo que está en una u otra categoría (TV cable o TV abierta), pudiendo estar sólo en una (como Quilmes) o en ambas (como Claro).*
c) *{Coca Cola; Standar Bank, Claro, Repsol YPF, Italcred}*
d) *Representa la intersección ya que tiene que estar en las dos categorías simultáneamente.*

2) $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}, C = \{-71,2,3,4\}$

Entonces:

$C \cap B = \{1,2,3\}$

$C \cup B = \{-7,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$

$B \cap \emptyset = \emptyset \quad B \cup \emptyset = B$

$C \cap \emptyset = \emptyset \quad C \cup \emptyset = C$

3) $\{x/x = 6n, n \in \mathbb{N}_0\}$

$\{x/x = 5n, n \in \mathbb{N}_0\}$

Como A es el conjunto de los múltiplos de 6, y B el de los múltiplos de 5, realizar $A \cap B$ significa determinar los múltiplos comunes a 5 y a 6. Así: $A \cap B = \{0,30,60,90,120,\ldots\}$

Algunas propiedades que cumplen las operaciones vistas (que serán válidas pero no demostraremos en este curso) son:

Propiedades	**UNIÓN**	**INTERSECCIÓN**
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Neutralidad	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia entre el conjunto A y el B es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a A pero no están en B. En símbolos:

$$\boxed{A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}}$$

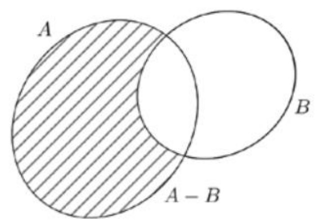
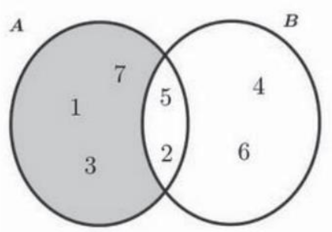
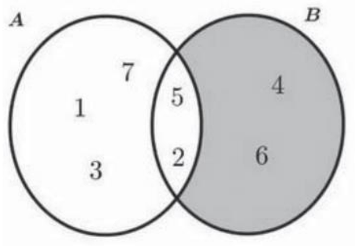


Fig.: Diferencia entre A y B

Ejemplos: *Si* $A = \{1,2,3,5,7\}; B = \{2,4,5,6\}$.



$A - B = \{1,3,7\}$



$B - A = \{4,6\}$

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

El complemento del conjunto A es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a U pero no están en A y se simboliza como $\mathcal{C}A$ o $\bar{A}$. En símbolos:

$$\boxed{\mathcal{C}_A = \bar{A} = U - A}$$

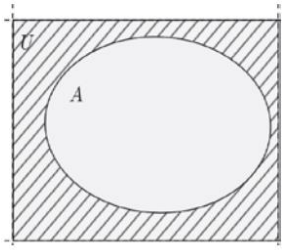


Fig.: Complemento de A

Observación: $A - B = A \cap \bar{B}$

Propiedades	
Complemento	$\bar{\bar{A}} = A$ $A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $\bar{U} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = U$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Ejemplos: *Sea* $U = \{x/x \in \mathbb{N} \land x \leq 12\}$, *y los conjuntos* $A = \{x/x \in U \land x\ es\ un\ cuadrado\ perfecto\}$ *y* $B = \{x/x \in U \land x - 3 \in U\}$

Escribimos por extensión A y B.

$$A = \{1,4,9\} \qquad B = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Entonces:

$A - B = \{1\}$

$B - A = \{5,6,7,8,10,11,12\}$

$\bar{A} = \{2,3,5,6,7,8,10,11,12\}$

$\bar{B} = \{1,2,3\}$

$A \cup B = \{1,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Luego: $\overline{A \cup B} = \{2,3\}$ y $\bar{A} \cap \bar{B} = \{2,3\}$

PROBLEMAS DE CONTEO (conjuntos en Diagrama de Venn)

Ejemplos:

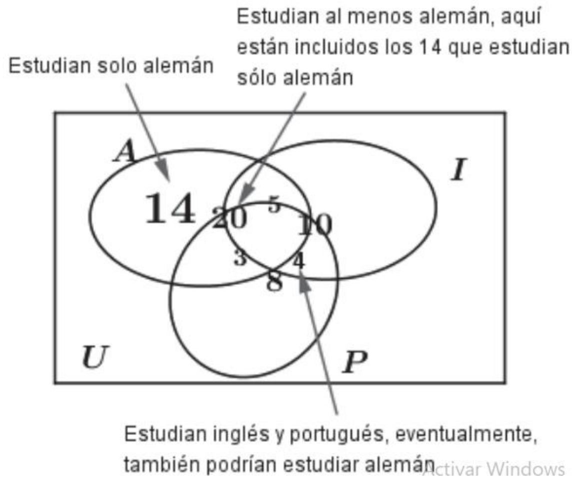
1) En un curso de 35 alumnos, 20 alumnos toman clases de alemán, 10 alumnos toman clases de inglés y 8 alumnos toman clases de portugués. Además, se sabe que 4 alumnos toman clases de inglés y portugués, 5 toman clases de alemán e inglés, 3 de alemán y portugués, y 14 sólo de alemán. Responde:

a) ¿Cuántos alumnos toman clases de los tres idiomas?
b) ¿Cuántos alumnos toman clases sólo de inglés?
c) ¿Cuántos alumnos no toman clases de ningún idioma?
d) ¿Cuántos alumnos no toman clases de portugués?
e) ¿Cuántos alumnos toman clases de, al menos, uno de los idiomas?

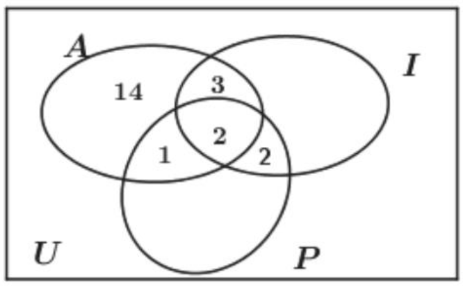
<u>Resolución</u>:

Como primera medida, esquematicemos esta situación. Lo ideal en estos casos es realizar un diagrama de Venn con los conjuntos:

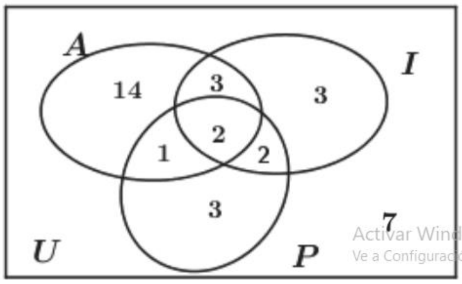
- Universal U = conjuntos de los 35 alumnos
- I = conjunto de alumnos que estudian inglés
- A = conjunto de alumnos que estudian alemán
- P = conjunto de alumnos que estudian portugués.



Así, en el diagrama de Venn representemos en cada "zona", la cantidad de alumnos que cumplen las propiedades indicadas para estar en la "zona".



Ahora podemos "visualizar" mejor. Y entonces podemos determinar las cantidades correspondientes a cada zona. Empecemos por "alemán", en total tenemos 20 alumnos que lo estudian, pero sabemos que 14 lo estudian con exclusividad, luego hay 6 alumnos que estudiarán alemán y algún otro (inglés o portugués), es decir que estarían estudiando 2 o 3 idiomas. Pero dentro de esos 6 están contados los 5 que realizan inglés y alemán, con lo cual 1 alumno (6-5) realiza sólo alemán y portugués. Así, sabiendo que 3 alumnos estudian alemán y portugués (incluyendo los que estudian, además, inglés), queda que 2 (3-1) alumnos estudian los 3 idiomas simultáneamente. Y también obtenemos que 3 (5-2) alumnos estudian sólo alemán e inglés (no portugués).



Ahora, como 4 alumnos toman clases de, al menos, inglés y portugués, tendremos 2 alumnos que estudian sólo esos dos idiomas.

Ahora ya podemos completar las cantidades.

Sólo inglés=10-3-2-2=3

Sólo portugués=8-1-2-2=3

Alumnos que estudian al menos un idioma=14+1+2+3+2+3+3=28

Alumnos que no estudian ningún idioma=35-28=7.

Ya estamos en condiciones de responder:

a) **2 alumnos**
b) **3 alumnos**
c) **7 alumnos**
d) 7+14+3+3=27, **27 alumnos**
e) **28 alumnos**

ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\neq$	Distinto
$<$	Menor
$>$	Mayor
$\leq$	Menor o igual
$\geq$	Mayor o igual
$\cong$	Aproximadamente
$\forall$	Para todo
$/$	Tal que
∞	Infinito
$\emptyset$	Vacío
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\subset$	Contenido
$\not\subset$	No contenido
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\Longrightarrow$	Entonces o implica
$\Leftrightarrow$	Sí y solo sí