

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**AGUJEROS NEGROS REGULARES EN TEORÍAS DE
GRAVEDAD DE TIPO BORN-INFELD**

Lautaro Giordano
Maestrando

Dr. Franco Fiorini
Director

Miembros del Jurado

Dr. Rafael Ferraro
Dr. Diego Mazzitelli
Dr. Roberto Trinchero

4 de febrero de 2021

Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A Elea y a Lolo,

Índice de contenidos

Resumen	vii
Abstract	ix
Introducción	1
1. Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General	5
1.1. Formalismo teleparalelo	5
1.1.1. Conexión afín	7
1.1.2. Acción teleparalela	8
2. Teorías de gravedad modificada	11
2.1. Teorías $f(T)$	12
2.1.1. Teoría de Born-Infeld- $f(T)$	14
2.2. Teoría determinantal de Born-Infeld	14
3. Soluciones cosmológicas	17
3.1. Cosmología en la teoría de Born-Infeld- $f(T)$	17
3.2. Cosmología en la teoría determinantal	19
3.2.1. Caso regular	20
3.2.2. Solución de <i>Big-Bounce</i>	21
4. El agujero negro regular	25
4.1. Solución en la teoría de Born-Infeld- $f(T)$	26
5. Soluciones de agujero negro en la teoría determinantal	35
5.1. Espacio-tiempo de Schwarzschild	37
5.2. Caso reducido	38
5.2.1. Caso $\lambda > 0$	40
5.2.2. Caso $\lambda < 0$	41
5.2.3. Geodésicas para la geometría de Kantowski-Sachs	45
5.3. Otras soluciones	47

5.3.1. Caso $\lambda < 0$	48
5.3.2. Caso $\lambda > 0$	50
Conclusiones	53
Apéndice	54
A. El modelo de Born-Infeld electromagnético	55
B. Técnica de mini super espacio	57
B.1. Ejemplo: métrica de Kantowski-Sachs en RG	57
B.2. Ejemplo: agujero negro en la teoría BI- $f(T)$	59
Bibliografía	61

Resumen

Este trabajo se enfoca en estudiar soluciones de teorías de gravedad modificada descritas en términos de la torsión, en un contexto que se conoce como el *esquema teleparalelo*. En particular, se trabajó con las teorías de Born-Infeld- $f(T)$ y de Born-Infeld determinantal, que son modelos inspirados en la electrodinámica no lineal de Born-Infeld. Ambas teorías han tenido éxito a la hora de describir soluciones regulares en modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker. Además, en el esquema de Born-Infeld- $f(T)$ se obtuvo recientemente una solución regular que consiste en una deformación de altas energías del agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo, todavía no existen soluciones de este tipo en la teoría determinantal.

En la primera parte del trabajo se describe la equivalencia que existe entre el teleparalelismo y la Relatividad General y se definen las teorías modificadas en este nuevo esquema. En la segunda, se comentan las soluciones regulares existentes tanto en la cosmología como en el agujero negro. Finalmente, el último capítulo está dedicado a presentar algunas soluciones de agujero negro halladas en la teoría determinantal. Si bien no ha sido posible hasta el momento hallar una solución regular, varias de estas soluciones presentan un comportamiento interesante, y algunas incluso reemplazan la singularidad esencial presente en el espacio-tiempo de Schwarzschild por una singularidad *leve*, constituyendo un avance en la obtención de una descripción menos patológica de estos objetos.

Abstract

This thesis is focused on studying solutions that arise in some torsion-based modified gravity theories, in a context known as the Teleparallel scheme. The theories in question are the Born-Infeld- $f(T)$ and Born-Infeld determinantal gravity theories, which were inspired by Born and Infeld's models of non-linear electrodynamics. Both theories have been successful in describing regular solutions of some Friedmann-Robertson-Walker type cosmologies. Besides, a regular solution that replaces Schwarzschild's black hole was obtained recently in the Born-Infeld- $f(T)$ theory, by means of a high-energy deformation of the classical solution. Nevertheless, to the date there does not exist any solution of this kind in the determinantal theory.

The first part of this work describes the equivalence between the Teleparallel Formulation and General Relativity. Also, the aforementioned modified theories are defined in the Teleparallel context. The second part studies the regular solutions that exist for both the cosmological models and the black hole. Finally, the last chapter of this thesis is about some interesting black hole solutions found in the determinantal theory. Although a regular solution has not been discovered yet, some of these solutions replace the Schwarzschild space-time singularity by a mild singularity. This constitutes some progress in the development of a less pathological description of black holes.

Introducción

La formulación de la teoría de la Relatividad General (RG) fue un acontecimiento que revolucionó la forma de pensar y hacer física. La teoría de Einstein estableció un cambio de paradigma en la descripción de la interacción gravitatoria y en los conceptos de espacio y tiempo. En RG se deja de lado el concepto de fuerza Newtoniana y, en su lugar, se describe a la gravedad como la curvatura que la materia y energía generan en un espacio-tiempo ahora dinámico.

La Relatividad General no solo ofrece un marco conceptual profundo y elegante para describir a la gravedad; a más de cien años de su formulación, experimentos modernos continúan validando sus predicciones, como es el caso de la existencia de los agujeros negros y de la radiación gravitatoria emitida en la colisión de estos objetos. Sin embargo, todavía existen preguntas abiertas, que motivan la búsqueda de modificaciones de la teoría. Entre estas cuestiones se encuentran el desconocimiento acerca de la naturaleza de la materia y energía oscura, que se cree que conforman la mayor parte del contenido de materia de nuestro universo. Por otro lado, un problema que enfrenta la RG es su categoría de teoría clásica. En efecto, la RG presenta dificultades aparentemente insalvables a la hora de intentar cuantizarla, impidiendo la unificación de la gravedad con el resto de las interacciones conocidas.

Otra de las cuestiones problemáticas de la teoría es la relacionada a la presencia de singularidades espacio-temporales. Las singularidades se presentan como *zonas* en donde el espacio-tiempo deja de existir. Este comportamiento patológico no afecta a unas pocas soluciones particulares de RG; los teoremas de singularidad de Hawking y Penrose muestran que el comportamiento singular es casi inherente a la teoría y se da bajo condiciones muy generales. Entre los casos singulares se encuentran dos soluciones paradigmáticas de la teoría: los modelos cosmológicos de tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y el agujero negro de Schwarzschild, que constituye el vacío esféricamente simétrico de la teoría. En el primer caso existe el Big-Bang, que es el instante en el que el universo tenía un tamaño nulo, hace unos catorce mil millones de años. En el segundo se tiene la inevitable caída a la singularidad del agujero negro una vez que se atraviesa el horizonte de eventos, que se produce en un tiempo propio finito. El interés en la búsqueda de soluciones regulares, es decir, soluciones con ausencia de singularidades, ha llevado a la búsqueda de modificaciones de la RG en el régimen

de altas energías. El desarrollo de teorías de gravedad modificada para regularizar soluciones singulares tiene la importancia de ofrecer una descripción más adecuada de la gravedad en situaciones de curvatura fuerte, y ha sido materia de considerable estudio en el pasado. En la actualidad, cuestiones como la termodinámica de los agujeros negros y la paradoja de la pérdida de la información han reavivado el atractivo en buscar modificaciones regulares de la solución de Schwarzschild.

En este trabajo estudiamos teorías de gravedad modificada con el objetivo de regularizar soluciones singulares. Para ello, abordamos la teoría desde una formulación distinta a la usual, llamada la *formulación teleparalela*. En el capítulo 1 comentamos esta nueva formulación, que describe a la gravedad en términos de la torsión. Además, presentamos una introducción a la geometría de Weitzenböck, que permite encontrar una equivalencia entre la formulación tradicional y la teleparalela.

En el capítulo 2 explicamos los motivos por los cuales la formulación teleparalela, a diferencia de muchos enfoques basados en el formalismo puramente métrico, permite modificar la RG en situaciones de altas energías. Luego enunciamos las teorías a estudiar en el resto del trabajo: la teoría de Born-Infeld- $f(T)$ (BI- $f(T)$) y la teoría de Born-Infeld determinantal.

A modo introductorio, en el capítulo 3 revisamos modelos cosmológicos de tipo FRW, enfocándonos en geometrías espacialmente planas. En primer lugar comentamos una solución hallada en el esquema BI- $f(T)$. Mostramos que esta solución es regular (geodésicamente completa) y difiere de su contraparte en la RG en el régimen de alta energía. Luego describimos dos soluciones particulares obtenidas para la teoría determinantal. Una coincide con la solución regular de BI- $f(T)$. Aquí probamos que la equivalencia se da a nivel del lagrangiano. La otra solución presenta un fenómeno conocido como *Big-Bounce* y, aunque geodésicamente completa, la solución tiene un comportamiento no regular que se enmarca dentro de las denominadas singularidades leves.

El capítulo 4 trata acerca de la regularización del agujero negro de Schwarzschild. Aquí exponemos una solución regular hallada en la teoría BI- $f(T)$, que constituye un estado de vacío esféricamente simétrico de la misma. Esta solución presenta un comportamiento a escalas pequeñas (o altas energías) muy interesante, ya que introduce un límite en los invariantes de la curvatura. Además, se comenta un avance hallado muy recientemente en esta solución, en el que se probó que la geometría en el límite de alta energía se encuentra descrita por una generalización 4-dimensional del agujero negro BTZ no rotante.

Finalmente, en el capítulo 5 describimos varias soluciones de agujero negro halladas en el marco de la teoría de Born-Infeld determinantal. El capítulo, que constituye un aporte original de esta tesis, empieza discutiendo cuestiones generales del lagrangiano determinantal. Luego se enuncian algunas de las muchas soluciones de agujero

negro que puede proveer la teoría determinantal. Si bien no encontramos una solución completamente regular, descubrimos varios comportamientos interesantes. En primer lugar, se muestra que el espacio-tiempo de Schwarzschild se presenta como una solución pura de la teoría, no solo como su límite de baja energía. También comentamos un caso para el cual el lagrangiano determinantal se reduce a una teoría funcional de tipo $f(T)$, agregando solo una corrección cuadrática al lagrangiano de Einstein-Hilbert en su versión teleparalela. Este caso contiene dos soluciones. La primera tiene una singularidad insalvable parecida a la de la geometría de Schwarzschild; la otra es potencialmente geodésicamente completa, y presenta una singularidad leve similar a la del caso del *Big-Bounce* cosmológico. Finalmente, se discuten otros dos casos que tienen un comportamiento curioso y que continúan bajo estudio, para los cuales no se puede establecer todavía un veredicto acerca de su regularidad.

Capítulo 1

Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General

Existe una formulación equivalente a RG en donde la geometría del espacio-tiempo puede describirse en términos de la torsión en lugar de la curvatura. Esta es conocida como la formulación *teleparalela* y fue introducida por el mismo Einstein en 1928 en un intento de unificar la gravedad y el electromagnetismo [1]. En este capítulo mostramos la equivalencia existente entre la formulación tradicional y la teleparalela. En el teleparalelismo se describe el comportamiento de un conjunto de n campos vectoriales llamados **vielbein**, que en $n = 4$ también se conocen como la **tétrada**. El vielbein tiene una interpretación física muy importante: sus vectores definen los sistemas de referencia localmente inerciales, que describen a los observadores en caída libre. Por otro lado, este esquema ofrece la posibilidad de contar con una estructura geométrica distinta que servirá como punto de partida para modificar la teoría de la gravedad. Las teorías basadas en el formalismo teleparalelo permiten explorar nuevas modificaciones de la Relatividad General, reavivando el interés en formular teorías que regularicen las singularidades que presentan algunas soluciones importantes de RG.

1.1. Formalismo teleparalelo

Consideremos una variedad diferencial de Hausdorff \mathcal{M} , n -dimensional, paracompacta y C^∞ , dotada de una métrica $g_{\mu\nu}$. Dado un punto $p \in \mathcal{M}$ se pueden establecer coordenadas locales $x^\mu(p)$. Estas inducen la base coordenada local para el espacio tangente $T_p \mathcal{M}$ en el punto p , dada por $E_\mu = \partial_\mu$ con $\mu = 0, 1, \dots, n-1$. La base análoga para el espacio cotangente o dual $T_p^* \mathcal{M}$ consiste en las 1-formas $\theta^\mu = dx^\mu$. Si bien esta base es comúnmente utilizada en RG, depende directamente de la elección de coordenadas locales. No hay motivo que nos impida cambiarla, por lo que vamos a buscar una base que sea independiente de las coordenadas. Más aún, vamos a pedir que la nueva base

sea ortonormal en el sentido Minkowskiano. De este modo, definimos el vielbein (o tétrada, para $n = 4$) como el conjunto de n vectores ortonormales $\{\hat{e}_a\}_{a=0,1,\dots,n-1}$ tales que

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad (1.1)$$

siendo η_{ab} la métrica de Minkowski y e_a^μ las componentes del vielbein en la base coordenada local, i.e., $\hat{e}_a = e_a^\mu E_\mu$. Los vectores $\{\hat{e}_a\}$ que definen esta base son independientes de las coordenadas y se dice que conforman una paralelización local de la variedad¹. Sus componentes conforman un nexo local entre el espacio-tiempo y la variedad tangente localmente plana descrita por la métrica de Minkowski. Aquí la dinámica está asociada a la forma en la que varía la base, que dependerá de la torsión.

Se distinguen dos tipos de índices: los índices griegos o riemannianos actúan sobre las componentes de la métrica, mientras que los latinos o lorentzianos identifican un vector del vielbein. Si tomamos el determinante a ambos lados de 1.1, podemos concluir que el determinante de la matriz e_a^μ es no nulo. Esto implica la existencia de la matriz inversa e_μ^a , de forma que valgan las identidades

$$e_a^\mu e_\mu^b = \delta_a^b, \quad e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu. \quad (1.2)$$

Las relaciones 1.2 se puede utilizar para invertir 1.1 y llegar a

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad (1.3)$$

que motivan la búsqueda de una descripción de la teoría de gravedad en términos del vielbein. Las ecuaciones 1.1 y 1.3 explicitan cómo transforman los índices griegos y latinos, ya que conocemos cómo transforman $g_{\mu\nu}$ y η_{ab} . Los índices griegos μ, ν, \dots transforman con difeomorfismos, mientras que los latinos a, b, \dots transforman con matrices de Lorentz dependientes del punto.

Para trabajar en el vielbein tenemos que describir tensores en la nueva base. Las componentes lorentzianas de un vector se definen como

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (1.4)$$

Estos índices se pueden subir y bajar con la métrica de Minkowski según

$$V_a = \eta_{ab} V^b. \quad (1.5)$$

¹Una variedad diferenciable es *paralelizable* si permite definir una base global del fibrado tangente TM en términos de campos vectoriales C^∞ . Por lo tanto, para que el vielbein este bien definido globalmente necesitamos que nuestra variedad cumpla con esta propiedad. Sin embargo, localmente, cualquier variedad es paralelizable.

1.1.1. Conexión afín

En Relatividad General se utiliza la conexión de Levi-Civita, que permite definir una noción de transporte paralelo, derivada covariante y geodésicas. La conexión se expresa a través de los símbolos de Christoffel

$${}^{(RG)}\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (1.6)$$

Esta definición es la única que cumple simultáneamente que la conexión sea simétrica en sus últimos dos índices y compatible con la métrica. La simetría implica la anulación del tensor de torsión en RG, que se define como la parte antisimétrica de la conexión respecto de sus últimos dos índices.

En el espacio del vielbein podemos definir una noción distinta de paralelismo. En este espacio, llamado espacio de Weitzenböck, vamos a decir que un vector es transportado paralelamente si sus componentes lorentzianas son constantes, es decir,

$$\partial_\nu V^a = \partial_\nu (e^a_\mu V^\mu) = e^a_\mu \partial_\nu V^\mu + \partial_\nu e^a_\mu V^\mu = 0. \quad (1.7)$$

Esto se puede reescribir como la definición de una derivada covariante si contraemos la última igualdad con e^ρ_a :

$$\partial_\nu V^\rho + e^\rho_a \partial_\nu e^a_\mu V^\mu = 0. \quad (1.8)$$

La ecuación 1.8 motiva la definición de la Conexión de Weitzenböck como

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = e^\rho_a \partial_\nu e^a_\mu = -e^a_\mu \partial_\nu e^\rho_a; \quad (1.9)$$

la derivada de Weitzenböck se define entonces como

$$\nabla_\nu V^\rho = \partial_\nu V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} V^\mu = e^\rho_a \partial_\nu V^a. \quad (1.10)$$

Para entender un poco más este espacio vamos a mostrar algunas de sus propiedades. La primera es que los vectores del vielbein tienen derivada nula, i.e.,

$$\nabla_\nu e^\rho_b = e^\rho_a \partial_\nu (e^a_\mu e^\mu_b) = 0. \quad (1.11)$$

Esto significa que los vectores del vielbein son transportados paralelamente, formando una especie de grilla de vectores ortonormales que cubren la variedad. Por definición, un vector se transporta paralelamente por una curva si sus componentes en la base del vielbein son constantes. Entonces, transportar paralelamente el vector por cualquier curva cerrada no modifica sus componentes lorentzianas. De aquí podemos deducir directamente la segunda propiedad: el espacio de Weitzenböck tiene curvatura nula.

Esto se puede probar a partir de la definición del tensor de curvatura de Riemann

$$R^\alpha_{\mu\beta\delta} = \Gamma^\alpha_{\mu\delta,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\delta} + \Gamma^\alpha_{\epsilon\beta}\Gamma^\epsilon_{\mu\delta} - \Gamma^\alpha_{\epsilon\delta}\Gamma^\epsilon_{\mu\beta} = \quad (1.12)$$

$$= \partial_\beta e^\alpha_a \partial_\delta e^a_\mu - \partial_\delta e^\alpha_a \partial_\beta e^a_\mu + e^\alpha_a e^\epsilon_b (\partial_\beta e^a_\epsilon \partial_\delta e^b_\mu - \partial_\delta e^a_\epsilon \partial_\beta e^b_\mu) = 0, \quad (1.13)$$

ya que en la última igualdad, el primer término se cancela con el tercero, y el segundo con el cuarto. El hecho de que la curvatura sea nula no quiere decir que el espacio de Weitzenböck sea igual al de Minkowski. La diferencia entre ellos radica en la torsión. Mientras que la torsión en RG es idénticamente nula, en el espacio de Weitzenböck las componentes del tensor de torsión son

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{[\mu\nu]} = e^\rho_a \partial_{[\nu} e^a_{\mu]} = e^\rho_a (\partial_\nu e^a_\mu - \partial_\mu e^a_\nu), \quad (1.14)$$

que en general es no nulo. Para entender mejor esta diferencia, vamos a enunciar la tercera propiedad del espacio de Weitzenböck: la modificación de la ecuación de las geodésicas. En la nueva conexión la ecuación de las geodésicas es

$$\frac{\partial u^\rho}{\partial \tau} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -K^\rho_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (1.15)$$

donde u^μ es la quadri-velocidad, τ es un parámetro afín y $K^\rho_{\mu\nu}$ el tensor de contorsión, que se define como

$$K^\rho_{\mu\nu} = {}^{(RG)}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^\rho_{\mu\nu} + T^\rho_{\nu\mu} - T^\rho_{\mu\mu}). \quad (1.16)$$

Entonces, las partículas de prueba siguen geodésicas que no son autoparalelas de la conexión de Weitzenböck. Aquí la contorsión se puede pensar como una fuerza que modifica las trayectorias en este espacio sin curvatura.

1.1.2. Acción teleparalela

Si bien hemos mencionado la equivalencia entre la Relatividad General y la formulación teleparalela, para poder utilizar esta última necesitamos obtener las ecuaciones que determinan el vielbein. Recordemos que la acción de Hilbert-Einstein es

$$S_{\text{HE}} = \int d^n x \mathcal{L}_{\text{HE}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{g} R. \quad (1.17)$$

Aquí podemos reescribir el escalar de curvatura R en función del vielbein. Para lograr esto, se reemplaza $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ escrito en función del vielbein en la definición de R , despejándo-

lo de la ec. 1.16. Según el resultado de [2], se obtiene

$$eR = e \left(\frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\rho\mu\nu} T_{\mu\rho\nu} - T^{\mu\nu} T_{\rho\mu}{}^{\rho} \right) + 2\partial_{\mu}(e T_{\rho}{}^{\rho\mu}), \quad (1.18)$$

donde $e = \sqrt{|g_{\mu\nu}|} = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}$. La ecuación 1.18 se puede escribir de forma más concisa. Definiendo el superpotencial $S_{\rho}{}^{\mu\nu}$ como

$$S_{\rho}{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(T^{\mu\nu}{}_{\rho} - T^{\nu\mu}{}_{\rho} - T_{\rho}{}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\delta_{\rho}^{\mu} T^{\lambda\nu}{}_{\lambda} - \delta_{\rho}^{\nu} T^{\lambda\mu}{}_{\lambda}), \quad (1.19)$$

y el escalar de Weitzenböck

$$T = S^a{}_{\mu\nu} T_a{}^{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

la ecuación 1.18 se reescribe

$$R = T + 2e^{-1}\partial_{\mu}(e T_{\rho}{}^{\rho\mu}). \quad (1.21)$$

Como el tensor de torsión y el superpotencial transforman como tensores ante un cambio general de coordenadas en sus índices griegos, T es un verdadero escalar en este sentido². Definiendo el lagrangiano teleparalelo $\mathcal{L}_T = \frac{1}{16\pi G} e T$ vemos que este difiere del lagrangiano de RG en una derivada total. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la acción teleparalela

$$S_T = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x e T \quad (1.22)$$

son análogas a las de RG. Las ecuaciones de Lagrange provenientes de 1.22 al variar con respecto a las componentes del vielbein son

$$e^{-1}\partial_{\mu}(e S_a{}^{\mu\nu}) - e_a^{\lambda} T^{\rho}{}_{\mu\lambda} S_{\rho}{}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} e_a^{\lambda} T = 4\pi G e_a^{\nu} \mathbf{T}_{\nu}{}^{\lambda}, \quad (1.23)$$

donde $\mathbf{T}_{\nu}{}^{\lambda}$ es el tensor de energía-impulso. En conclusión, hemos construido una formulación de la Relatividad General que describe a la gravedad como un efecto causado por la torsión en el espacio plano en el que vive el vielbein. Esta formulación alternativa se conoce como el Equivalente Teleparalelo de la Relatividad General (ETRG)[3].

²Sin embargo, debemos mencionar que T no es invariante ante transformaciones locales de Lorentz en el vielbein. Esta transformación produce un término de borde que no afecta a las ecuaciones de movimiento y será comentado en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Teorías de gravedad modificada

La teoría de Einstein es la mejor teoría que tenemos actualmente para describir la interacción gravitatoria. Aún a más de cien años de su formulación seguimos confirmando sus predicciones: el corrimiento del perihelio de Mercurio, las ondas gravitacionales [4] y los agujeros negros [5] (cuya existencia ha sido confirmada recientemente por observación directa de su sombra [6]), son algunos ejemplos. A pesar del rotundo éxito de la Relatividad General, con los años han surgido cuestiones teóricas y observacionales que parecen indicar que esta no es la teoría definitiva de la gravedad. Las mediciones de la Radiación de Fondo de Microondas revelan que el universo era altamente homogéneo hace unos catorce mil millones de años [7]. Esta homogeneidad no se puede explicar con los modelos cosmológicos tradicionales, en los cuales dos regiones muy distantes del fondo de radiación están desconectadas causalmente pero sorprendentemente tienen la misma temperatura media. La solución fue considerar una etapa de inflación donde el universo se expandía aceleradamente. La forma más sencilla de lograr esto en RG es acoplando un campo llamado inflatón al contenido de materia, que es difícil de caracterizar dada la arbitrariedad con la que se define su potencial de interacción. Otro tipo de problema con la relatividad de Einstein viene desde el punto de vista teórico. La relatividad es una teoría clásica que no se puede cuantizar con métodos tradicionales, como el esquema de cuantización canónica. La teoría es no renormalizable. Al tener teorías cuánticas para el resto de las interacciones, se esperaría que la gravedad también se pudiera cuantizar.

Finalmente, la cuestión que queremos abordar en esta tesis es la de las singularidades espacio-temporales. Las singularidades aparecen en muchas soluciones de RG [8]-[9], entre ellas, dos de las más icónicas: el modelo cosmológico de FRW y el agujero negro de Schwarzschild. Ambas soluciones comparten la propiedad de contener geodésicas incompletas, lo que significa que existen geodésicas para las cuales su parámetro afín no puede tomar cualquier valor real. Esto, en el agujero negro, significa que cualquier geodésica que cruce el horizonte de eventos terminará en la singularidad en un tiempo

propio finito. En la cosmología, el factor de escala es nulo en el momento del Big-Bang. En consecuencia, la distancia entre cualquier par de puntos del espacio se anula. Otra marca de las singularidades es la aparición de divergencias, por ejemplo en ciertos escalares que miden la curvatura. Estos inconvenientes causados por las singularidades son inherentes a la teoría misma. Por esta razón se motiva la exploración de teorías alternativas de la gravedad, que modifiquen a la Relatividad General de forma tal que, al menos en ciertas soluciones físicamente relevantes, se regularicen las singularidades espacio-temporales.

Una manera de modificar RG es a nivel de la acción. En lugar de utilizar el lagrangiano de Hilbert-Einstein 1.17, se puede reemplazar el escalar de curvatura por una función más general $f(R)$. Es lógico pedir que esta acción se aproxime a RG en el límite de baja energía. Entonces, la $f(R)$ debe cumplir

$$f(R) \sim R + \mathcal{O}(R^2), \quad (2.1)$$

que es equivalente a pedir $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Este tipo de modificación presenta algunos inconvenientes. El primero es que en general las ecuaciones de movimiento son de cuarto orden en la métrica. Esto se debe a que el escalar de curvatura depende de segundas derivadas de la misma. En estos casos, para determinar la métrica se necesitan valores iniciales de mayor orden en derivadas de la misma y esto suele llevar a inestabilidades. El segundo problema es que estas teorías son incapaces de modificar soluciones cuyo escalar de curvatura es nulo. Esto se puede intuir desde la acción, ya que para $R \rightarrow 0$ domina el término lineal. De forma más precisa, se puede ver que las ecuaciones de movimiento para $R = 0$ coinciden con las ecuaciones de Einstein. Una métrica que nos interesa estudiar es la de Schwarzschild, que por ser solución de vacío de RG tiene $R = 0$. Lo mismo sucede para la cosmología cuando se considera un fluido perfecto de radiación. En estos casos, las teorías $f(R)$ no pueden ayudarnos a buscar nuevas soluciones.

2.1. Teorías $f(T)$

En el capítulo anterior vimos la formulación de la Relatividad General en términos de su equivalente teleparalelo. En este esquema, la acción se obtenía reemplazando a R por el escalar de Weitzenböck T . Es natural preguntarse por las implicancias de modificar la gravedad siguiendo un esquema del tipo $f(T)$. Lo primero que podemos deducir es que en general las teorías $f(T)$ son distintas a las $f(R)$, ya que el término con la derivada total en 1.21 deja de ser un término de superficie cuando $f(T) \neq \alpha T + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. ¿Presentan estas teorías los mismos problemas que las $f(R)$? Afortunadamente, la formulación en base al escalar de Weitzenböck esquivó esas dificultades. El

escalar es una función cuadrática de la torsión, que depende del vielbein y sus derivadas primeras. Entonces, una teoría $f(T)$ solo puede contener términos con el vielbein y sus derivadas primeras. En consecuencia, las ecuaciones de movimiento resultantes son de segundo orden. Más adelante veremos que el escalar de Weitzenböck no es necesariamente nulo en los casos del agujero negro de Schwarzschild y los modelos FRW; este tipo de teorías permite, en principio, deformar soluciones de vacío de RG.

Las ecuaciones de movimiento de una teoría $f(T)$ se obtienen variando el lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{e}{16\pi G} f(T)$ con respecto a las componentes del vielbein. Las ecuaciones se pueden escribir en forma tensorial de la siguiente manera [10]

$$(e^{-1}\partial_\mu(e S_a^{\mu\nu}) + e_a^\lambda T^\rho_{\mu\lambda} S_\rho^{\mu\nu}) f'(T) + S_a^{\mu\nu} \partial_\mu T f''(T) - \frac{1}{4} e_a^\nu f(T) = -4\pi G e_a^\lambda \mathbf{T}_\lambda{}^\nu, \quad (2.2)$$

donde el primado significa derivación respecto a T .

Las teorías $f(T)$ surgen como candidatas para modificar a la Relatividad General en casos de espacio-tiempos singulares. En esta tesis estudiaremos la aptitud de este tipo de teorías en lo concerniente a la regularización de las soluciones singulares. Antes de hablar de formas explícitas para la función $f(T)$, debemos mencionar que este tipo de teorías no es invariante ante transformaciones locales de Lorentz del vielbein. Esto se debe a que el escalar de Weitzenböck T no es invariante ante esas transformaciones. Si realizamos una transformación con una matriz local de Lorentz $\Lambda(x)$ sobre un vielbein solución $\hat{e}^{a'} = \Lambda^{a'}{}_b(x) \hat{e}^b$, el invariante de Weitzenböck cambia según

$$T' = T + e^{-1} d(\epsilon_{abcd} \hat{e}^a \wedge \hat{e}^b \wedge \eta^{de} \Lambda^c_{f'} d\Lambda^{f'}{}_e), \quad (2.3)$$

donde \wedge es el producto wedge. Según este resultado, probado en [11], las $f(T)$ son invariantes ante un grupo remanente, que es el subgrupo de las transformaciones locales de Lorentz que llevan a la anulación del término con la derivada total en 2.3. Este grupo remanente está relacionado con la libertad de elegir una paralelización de la variedad y no debe verse como un problema de la teoría, como se explica detalladamente en [11] y [12], aunque es claro que la ruptura de la invariancia local trae aparejada grados de libertad adicionales cuya naturaleza no es del todo clara en la actualidad [13] [14]. En particular, la teoría es invariante ante transformaciones globales de Lorentz, ya que $d\Lambda = 0$. Más allá de esto, remarcamos que las teorías $f(T)$ siempre son invariantes ante cambios generales de coordenadas.

Existe una clase de teorías llamadas teorías de Born-Infeld que han tenido éxito en la regularización de divergencias en el electromagnetismo clásico. Este tipo de teorías, propuestas en la década del 30, tienen una formulación funcional y una determinantal. Ambas formulaciones se comentan brevemente en el apéndice A para el caso electromagnético. En lo que sigue se describe el análogo a estas teorías en el contexto

teleparalelo.

2.1.1. Teoría de Born-Infeld- $f(T)$

Ya vimos que las teorías $f(R)$ son fútiles a la hora de regularizar soluciones singulares en vacío, como en el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild, donde $R = 0$. Vamos a trabajar entonces con un modelo análogo al funcional de Born-Infeld en el esquema teleparalelo, proponiendo una función

$$f(T) = \lambda \left[\sqrt{1 + \frac{2T}{\lambda}} - 1 \right], \quad (2.4)$$

que resulta en el lagrangiano de la teoría de Born-Infeld- $f(T)$

$$\mathcal{L}_{BI-f} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{1 + \frac{2T}{\lambda}} - 1 \right]. \quad (2.5)$$

Se puede ver que en el límite $\lambda \rightarrow \pm\infty$, $f(T) \rightarrow T$, por lo que se recupera RG en el límite de baja energía³. Haciendo un desarrollo en serie para λ^{-1} tenemos

$$f(T) \approx T - \frac{T^2}{2\lambda} + \frac{T^3}{2\lambda^2} - \frac{5T^4}{8\lambda^3} + \mathcal{O}(\lambda^{-4}), \quad (2.6)$$

donde vemos que el signo de los términos dependen del signo de T y de λ . En particular, la primera corrección a RG depende solo del signo de λ . De esta manera, podemos estudiar teorías muy distintas considerando a la constante λ con signo positivo o negativo.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen reemplazando la forma funcional de $f(T)$ en la ec. 2.2. Esta teoría ha logrado regularizar las singularidades de los modelos cosmológicos [15] y, recientemente, del vacío esféricamente simétrico correspondiente al agujero negro de Schwarzschild [16], ambas en $n = 4$ dimensiones. Vamos a exponer algunas de estas soluciones en los siguientes capítulos, ya que nos servirán de guía para comprender los nuevos casos estudiados en esta tesis.

2.2. Teoría determinantal de Born-Infeld

En esta sección describimos otro tipo de teoría teleparalela, basada en el modelo determinantal electromagnético de Born-Infeld (descrito en el apéndice A), que no puede ser obtenida a partir de una teoría $f(T)$. Esta es conocida como la teoría de

³Observemos que la constante λ puede tener, en principio, cualquier signo.

Born-Infeld Determinantal (BID) [17], y su lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{BID} = \frac{\lambda}{16\pi G} \left[\sqrt{|g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \right] = \frac{\lambda}{16\pi G} \left[\sqrt{|U_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \right], \quad (2.7)$$

con $U_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu}$. Factorizando $e = \sqrt{|g_{\mu\nu}|}$ y tomando el límite de baja energía el lagrangiano se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_{BID} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{|I + \frac{2}{\lambda} F^\mu{}_\nu|} - 1 \right] \approx \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[1 + \frac{1}{\lambda} \text{Tr}(F^\mu{}_\nu) - 1 \right] = \frac{e}{16\pi G} F^\mu{}_\mu. \quad (2.8)$$

Para que en el límite de baja energía la teoría tienda a RG en su versión teleparalela, vamos a pedir que $F_{\mu\nu}$ sea tal que $F^\mu{}_\mu = \text{Tr}(F^\mu{}_\nu) = T$. Si se pretende una acción construída con derivadas hasta primer orden en la tétrada, se puede ver que la forma más general para las componentes de este tensor son

$$F_{\mu\nu} = \alpha F_{\mu\nu}^{(1)} + \beta F_{\mu\nu}^{(2)} + \gamma F_{\mu\nu}^{(3)}, \quad (2.9)$$

donde se tiene que cumplir la condición $\alpha + \beta + n\gamma = 1$. Las componentes $F_{\mu\nu}^{(i)}$ están definidas según

$$F_{\mu\nu}^{(1)} = S_\mu{}^\lambda{}^\rho T_{\nu\lambda\rho}, \quad F_{\mu\nu}^{(2)} = S_{\lambda\mu}{}^\rho T^\lambda{}_{\nu\rho}, \quad F_{\mu\nu}^{(3)} = g_{\mu\nu} T. \quad (2.10)$$

Las ecuaciones de movimiento para esta teoría, obtenidas en [18], tienen la forma

$$\frac{|U|^{\frac{1}{2}}}{2} (U^{-1})^{\nu\mu} \left[\delta_{(\mu}^\lambda e_{a\nu)} + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} \right] - e_a^\lambda e - \lambda^{-1} \partial_\gamma \left(|U|^{\frac{1}{2}} (U^{-1})^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)} \right) = 16\pi G e \mathbf{T}_a^\lambda. \quad (2.11)$$

Aquí falta dar una forma explícita de los términos $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a}$ y $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\gamma e_\lambda^a)}$. Para eso se definen

$$D^b{}_{\alpha\beta c}{}^{\sigma\rho} = \frac{1}{4} (\delta_c^b \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho - e^{\rho b} e_{c[\alpha} \delta_{\beta]}^\sigma) - \frac{1}{2} e_{[\alpha}^b \delta_{\beta]}^\rho e_c^\sigma, \quad (2.12)$$

$$Q_a{}^b{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (T_{[\alpha,\beta]a} e^{\lambda b} - \delta_{[\alpha}^\lambda T_{a\beta]}{}^b) - \frac{1}{2} (\delta_a^b \delta_{[\alpha}^\lambda T_{\sigma\beta]}^\sigma - e_{[\alpha}^b T_{a\beta]}^\lambda). \quad (2.13)$$

De este modo, se pueden reescribir las derivadas de $F_{\mu\nu}$ de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial e_\lambda^a} &= \alpha \left(\delta_\mu^\lambda F_{a\nu}^{(1)} + \delta_\nu^\lambda F_{\mu a}^{(1)} + Q_{a\mu\alpha\beta}^\lambda T_\nu{}^{\alpha\beta} - 2S_{\mu\rho(a} T_\nu{}^{\rho\lambda)} \right) + \\ &+ \beta \left(Q_{a\beta\mu\alpha}^\lambda T_\nu{}^{\beta\alpha} - S_{\beta\mu}{}^{(\lambda} T_{\nu a)}^\beta \right) + \gamma \left(\delta_\mu^\lambda e_{a\nu} T - 4g_{\mu\nu} F^{(2)\lambda}{}_a \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\gamma e^a_\lambda)} = \alpha \left(2S_\mu^{\lambda\gamma} e_{\nu a} + D_\mu^{\sigma\rho}{}^a{}^{[\lambda\gamma]} T_{\nu\sigma\rho} \right) + \beta \left(D_{\beta\mu\alpha a}^{[\lambda\gamma]} T_\nu^{\beta\alpha} + S_{a\mu}^{[\gamma\delta\lambda]} \right) + 4\gamma g_{\mu\nu} S_a^{\lambda\gamma}. \quad (2.15)$$

Las ecuaciones de movimiento formales para la teoría determinantal se obtienen reemplazando 2.14 y 2.15 en la expresión 2.11.

Cabe destacar que en $n = 4$ con la elección especial $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1/4$, la teoría determinantal se reduce a una $f(T)$ que tiene la forma exacta

$$f(T) = T + \frac{T^2}{4\lambda}, \quad (2.16)$$

que llamaremos teoría reducida. Esta es la única $f(T)$ que se puede obtener desde la teoría determinantal para una tétrada general⁴. Notemos que para que el término cuadrático de 2.16 coincida con la primera corrección de la teoría BI- $f(T)$ en 2.6 debemos redefinir $\lambda' = -\lambda/2$.

Trabajando en la teoría determinantal, se encontró en [17] una solución regular para la cosmología en 4 dimensiones, que surge con una elección especial no trivial de los parámetros α y β . Esta elección lleva a las mismas ecuaciones obtenidas en el esquema de BI- $f(T)$, por lo que encontramos la misma solución en las dos teorías. Encontrar esta equivalencia en la cosmología nos hace preguntarnos si sucede lo mismo en el caso del agujero negro. Existe una solución regular para el mismo en el esquema de BI- $f(T)$ [16], pero veremos más adelante que no hay una forma clara de obtener la misma solución regular en el esquema determinantal. Además, estudiaremos deformaciones del agujero negro en el caso reducido y en otros casos determinantaes puros que presentan comportamientos interesantes.

⁴Sin embargo, veremos en el capítulo siguiente que para una tétrada especial se puede lograr que la teoría determinantal se reduzca a una teoría $f(T)$, sin tener que fijar $\alpha = \beta = 0$.

Capítulo 3

Soluciones cosmológicas

En este capítulo trataremos algunas soluciones correspondientes a modelos cosmológicos planos de FRW en el contexto de las teorías de tipo Born-Infeld- $f(T)$ y determinantal, formuladas en el espacio de Weitzenböck. Vamos a exponer la solución regular obtenida en ambas teorías [15] [17], que además de regularizar la singularidad del Big-Bang, presentan una etapa inflacionaria natural, de carácter geométrico. También veremos que existe otra solución determinantal que presenta un rebote o *bounce* para un valor mínimo no nulo del factor de escala [19]. Este caso nos será de utilidad más adelante a la hora de interpretar algunas soluciones de agujero negro obtenidas en la teoría determinantal.

3.1. Cosmología en la teoría de Born-Infeld- $f(T)$

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker para el caso espacialmente plano, en $n = 4$ dimensiones y en coordenadas pseudo-euclídeas (t, x, y, z) es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala que describe cómo cambian las distancias con el tiempo propio t . Para trabajar en el esquema teleparalelo debemos encontrar una tétrada⁵ adecuada para la geometría en cuestión, que cumpla la condición 1.3. Dada la alta simetría de la geometría descrita por 3.1, una paralelización posible está dada por las funciones

$$e_\mu^a = \text{diag}(1, a(t), a(t), a(t)). \quad (3.2)$$

La elección 3.2 representa la tétrada más simple que da lugar a la métrica 3.1⁶.

⁵Desde ahora y en lo que resta de la tesis vamos a trabajar en 4 dimensiones, por lo que nos referiremos al vielbein como la tétrada.

⁶Si bien esta elección de la tétrada “funciona” para determinar las ecuaciones de movimiento en el caso cosmológico, veremos en el capítulo siguiente que la elección de la tétrada trivial para la geometría

El contenido de materia en los modelos isótopos y homogéneos está codificado en un tensor de energía-impulso del estilo $\mathbf{T}_\mu{}^\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, correspondiente a un fluido perfecto descrito en el sistema comóvil. El escalar de Weitzenböck que resulta de la tétrada 3.2 es

$$T = -6H^2, \quad (3.3)$$

donde $H = H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ es el parámetro de Hubble. El lagrangiano de Born-Infeld- $f(T)$ 2.5 evaluado en la tétrada 3.2 resulta entonces

$$\mathcal{L}_{BI-f} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{1 - \frac{12H^2}{\lambda}} - 1 \right]. \quad (3.4)$$

Como la tétrada es diagonal y tiene dos entradas distintas, surgen dos ecuaciones,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{12H^2}{\lambda}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda} \rho, \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{16H^2}{\lambda} + \frac{4H^2}{\lambda} q - 1 \right) \left(1 - \frac{12H^2}{\lambda} \right)^{-\frac{3}{2}} + 1 = \frac{16\pi G}{\lambda} p, \quad (3.6)$$

donde $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ es el parámetro de desaceleración. La ecuación 3.5 proviene de variar la acción de BI- $f(T)$ con respecto a la componente e_t^t de la tétrada y es la análoga a la ecuación de Friedmann de RG. La ecuación 3.6 proviene de la variación respecto de las componentes espaciales de la tétrada. Notemos que 3.5 es una ecuación en derivadas primeras de la tétrada y representa una ecuación de vínculo.

Vamos a estudiar el caso con λ positivo. Considerando una ecuación de estado del estilo $p = \omega\rho$, la conservación automática del tensor energía-impulso $\mathbf{T}_\mu{}^\nu$ relaciona la densidad de energía con el factor de escala según

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (3.7)$$

Combinando las ecuaciones 3.5 y 3.6 obtenemos

$$1 + q = \frac{3}{2} \frac{1 + \omega}{\left(1 + \frac{16\pi G}{\lambda} \rho \right) \left(1 + \frac{8\pi G}{\lambda} \rho \right)}. \quad (3.8)$$

Vemos que si se cumple la condición

$$\rho > \frac{\lambda}{32\pi G} (\sqrt{13 + 12\omega} - 3), \quad (3.9)$$

del agujero negro es insatisfactoria, en el sentido de que no deviene en las ecuaciones de movimiento correctas. Este problema refleja la falta de invariancia local que presentan las teorías a estudiar en el esquema de Weitzenböck, y hace que la determinación del campo de tétradas “correcto” para una geometría resulte en un problema altamente no trivial.

entonces $q < 0$, lo que implica una etapa de expansión acelerada. Esta condición se cumple si la densidad es suficientemente grande y, contrariamente a RG, no es necesario pedir $\omega \leq -1/3$ (lo que conllevaría una presión negativa). En otras palabras, la teoría BI- $f(T)$ predice un régimen en donde la gravedad se vuelve repulsiva, con tal de tener una densidad de energía lo suficientemente elevada.

Podemos estudiar el comportamiento del factor de escala en el límite de altas energías, es decir, cuando $a(t) \rightarrow 0$. Si asumimos $\omega > -1$, la densidad es divergente en ese límite. Si tomamos el límite en la ecuación 3.8 tenemos que $q \rightarrow -1$, de donde vemos que

$$q = -1 \Leftrightarrow 0 = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \dot{H}, \quad (3.10)$$

por lo que el parámetro de Hubble es constante en este límite. El comportamiento asintótico para el factor de escala es

$$a(t) = a_0 e^{Bt}, \quad (3.11)$$

donde el valor de B queda determinado por la ec. 3.5, siendo $B = H_{max} = \sqrt{\frac{\lambda}{12}}$. Curiosamente este valor H_{max} anula la raíz en el lagrangiano de Born-Infeld 3.4. El efecto de la teoría de Born-Infeld es, entonces, fijar un valor máximo del parámetro de Hubble. Además, este espacio límite o asintótico coincide con la geometría de de Sitter, que tiene curvatura constante.

La ecuación 3.11 tiene consecuencias notables. El comportamiento del factor de escala es exponencial en el límite de alta densidad. Esto nos indica que el universo tiene una etapa de inflación, a la que se llega sin necesidad de acoplar un campo inflacionario al contenido de materia. El factor de escala se anula solo en el límite $t \rightarrow -\infty$. Entonces, podemos extender las geodésicas en este espacio-tiempo para un tiempo propio arbitrario, puesto que la divergencia de los escalares geométricos sucede solo en ese límite. Por lo tanto, el espacio-tiempo es geodésicamente completo, sin singularidades. En este sentido decimos que esta deformación de la solución regulariza la cosmología.

3.2. Cosmología en la teoría determinantal

En esta sección se comentan dos soluciones para el modelo cosmológico obtenidas en la teoría determinantal en [17] y [19]. La tétrada utilizada es la misma que en la teoría de BI- $f(T)$, dada por la ec. 3.2. Por lo tanto, el escalar de Weitzenböck coincide con el del caso anterior, dado por 3.3. La ecuación de movimiento obtenida a partir de variar la acción determinantal respecto de e_t^t , que proviene de las ecuaciones generales

dadas por 2.11, es⁷

$$\frac{\sqrt{1 - BH^2}}{\sqrt{1 - AH^2}}[1 + 2BH^2 - 3ABH^4] - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\rho, \quad (3.12)$$

donde

$$A = 6(\beta + 2\gamma)/\lambda, \quad B = 2(2\alpha + \beta + 6\gamma)/\lambda. \quad (3.13)$$

Las ecuaciones espaciales no son independientes de 3.12, y se pueden obtener a partir de su derivada temporal y la conservación automática de $\mathbf{T}_\mu{}^\nu$. Para caracterizar el factor de escala, basta con resolver 3.12 con la densidad de energía 3.7.

3.2.1. Caso regular

Si pedimos que $B = 0$ y recordamos la condición de normalización $\alpha + \beta + 4\gamma = 1$, el valor de A queda determinado por $A = 12/\lambda$. En este caso, la ec. 3.12 se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{12H^2}{\lambda}}} - 1 = \frac{16\pi G}{\lambda}\rho, \quad (3.14)$$

que es la misma ecuación que se obtuvo en el caso BI- $f(T)$ (ec. 3.5). Este resultado es curioso, ya que tenemos la misma solución para dos teorías aparentemente muy distintas. La elección $B = 0$ es inconsistente con el caso reducido dado por $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1/4$, por lo que la teoría determinantal no coincide con la $f(T)$ dada en 2.16. De todos modos, podemos ver que para este caso la teoría determinantal en el fondo coincide con la BI- $f(T)$ descrita en la sección anterior. Revisemos el lagrangiano determinantal, dado por

$$\mathcal{L}_{BID} = \frac{\lambda}{16\pi G} \left[\sqrt{|U_{\mu\nu}|} - \sqrt{|g_{\mu\nu}|} \right]. \quad (3.15)$$

Calculando la matriz $F_{\mu\nu}$ para la tétrada 3.2, obtenemos el término de adentro de la primera raíz en 3.15

$$U_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - AH^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 + B\dot{a}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 + B\dot{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 + B\dot{a}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

⁷Esta misma ecuación se puede obtener a partir de la técnica de mini super espacio, técnica que utilizaremos para obtener algunas ecuaciones de movimiento para el agujero negro en la teoría determinantal. Este método y algunos ejemplos de sus aplicaciones están explicados en el apéndice B.

La forma de 3.16 implica que si factorizamos el término $e = \sqrt{|g_{\mu\nu}|}$ en el lagrangiano, lo que queda solo dependerá de H^2 , esto se puede ver reescribiendo 3.16 de la forma

$$U_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g^{\rho\alpha} \left(g_{\rho\nu} + \frac{2}{\lambda} F_{\rho\nu} \right) = g_{\mu\alpha} U^\alpha{}_\nu. \quad (3.17)$$

Las componentes de $U^\alpha{}_\nu$ dependen solo de H^2 , ya que

$$U^\alpha{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 - AH^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - BH^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - BH^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - BH^2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Finalmente, considerando 3.18 y factorizando e en el lagrangiano 3.15 tenemos

$$\mathcal{L}_{BID} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{|U^\alpha{}_\nu|} - 1 \right] = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{|(1 - AH^2)(1 - BH^2)^3|} - 1 \right]. \quad (3.19)$$

Recordemos que el escalar de Weitzenböck obtenido para la cosmología en 3.3 es proporcional a H^2 , por lo que el lagrangiano 3.19 depende únicamente de T . En consecuencia, la teoría puede interpretarse como una $f(T)$. Esto no quiere decir que la teoría determinantal sea en el fondo un disfraz de una teoría $f(T)$, ya que para una tétrada arbitraria los términos $F_{\mu\nu}^{(i)}$ dados por 2.10 no son necesariamente proporcionales a $g_{\mu\nu}T$ para $i = 1, 2$.

Volviendo a nuestro caso dado por $B = 0$ y $A = 12/\lambda$, calculamos el lagrangiano reemplazando las constantes en 3.19 para obtener

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{\left| 1 - \frac{12H^2}{\lambda} \right|} - 1 \right] = \mathcal{L}_{BI-f}, \quad (3.20)$$

donde asumimos que $H < H_{max} = \sqrt{\frac{\lambda}{12}}$. Entonces, para esta elección particular de las constantes, la teoría determinantal es igual a la funcional de Born-Infeld. Esto explica por qué la ecuación de movimiento en este caso coincide con la de la sección anterior.

3.2.2. Solución de *Big-Bounce*

Además de la solución regular descrita en la sección anterior, la teoría determinantal ofrece nuevas modificaciones de la cosmología. Esto se logra mediante la elección de distintos valores para las constantes A y B definidas en 3.13. Uno de los casos más simples posibles es el llamado caso de rebote o *bounce* [19], que presenta una solución analítica que describiremos brevemente.

Empecemos fijando $A = B$ en 3.12. La igualdad de las constantes implica que $\alpha = \beta$ y γ que queda libre se puede absorber en la constante λ de la teoría. Redefiniendo

$\lambda \rightarrow \lambda/(2A)$, la ecuación de movimiento 3.12 se reescribe

$$6H^2 \left(1 - \frac{9H^2}{2\lambda}\right) = 16\pi G\rho, \quad (3.21)$$

que es una ecuación cuadrática en H^2 , con soluciones

$$H^2 = \frac{\lambda}{9} \left(1 \pm \sqrt{1 - 3y}\right), \quad (3.22)$$

donde

$$y = \frac{16\pi G}{\lambda} \rho. \quad (3.23)$$

La ecuación 3.22 tiene dos ramas. La rama con el signo positivo lleva a un valor máximo del factor de Hubble cuando $\rho \rightarrow 0$, es decir cuando el factor de escala tiende a infinito (obviamos aquí el caso con constante cosmológica $w = -1$). Interpretamos a esta rama como un estado de alta energía desconectado de RG, por lo que vamos a considerar solamente la rama con signo negativo. Además, vamos a estudiar el caso con $\lambda > 0$, que lleva a un valor máximo de H^2 dado por $\lambda/9$, cuando $y = 1/3$. Por otro lado, la ecuación de conservación de $\mathbf{T}_\mu{}^\nu$ escrita en términos de y resulta

$$\dot{y} = -3(1 + w)Hy, \quad (3.24)$$

que a su vez se puede deducir de 3.7. Combinando 3.22 y 3.24 podemos obtener una ecuación diferencial para y

$$\dot{y} = \pm \alpha y \sqrt{1 - \sqrt{1 - 3y}}, \quad (3.25)$$

donde $\alpha = (1 + w)\sqrt{\lambda}$. La ecuación 3.25 se puede integrar para obtener

$$\pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}} t + c = (f(y))^{-1} + \operatorname{arctanh}(f(y)), \quad (3.26)$$

con c una constante de integración y $f(y)$ definida por

$$f(y) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 3y}}{2} \right)^{1/2}. \quad (3.27)$$

Vamos a fijar c pidiendo la condición de que $y = 1/3$ para $t = 0$, de modo que $c = \sqrt{2} + \operatorname{arctanh}(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Esto es equivalente a fijar un origen del tiempo. La indeterminación en el signo del primer término de 3.26 se resuelve teniendo en cuenta que el lado derecho de la igualdad es siempre positivo, por lo que utilizaremos el signo más para tiempos positivos y el signo menos para tiempos negativos. Haciendo una expansión

alrededor de $y = 1/3$ en 3.26, podemos aproximar el factor de escala según

$$\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^4 = \frac{144\pi G\rho_0}{\lambda(3 \mp 4\sqrt{\lambda t})} + \mathcal{O}(\lambda t^2), \quad (3.28)$$

donde el signo menos corresponde a tiempos positivos y el signo más a tiempos negativos. Nótese que para obtener 3.28 y para lo que resta de esta sección asumimos un universo temprano dominado por radiación, para lo que fijamos $w = 1/3$ ⁸. Vemos que el factor de escala presenta un mínimo a $t = 0$, dado por

$$\frac{a_{min}}{a_0} = \left(\frac{48\pi G\rho_0}{\lambda}\right)^{1/4}. \quad (3.29)$$

El correspondiente parámetro de Hubble que surge de 3.28 es

$$H(t) = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{3 \mp 4\sqrt{\lambda t}} + \mathcal{O}(\lambda t^2), \quad (3.30)$$

donde, nuevamente, el primer signo corresponde a tiempos positivos. Como esperábamos, para $t = 0$ (es decir, $y = 1/3$), el factor de Hubble vale $H^2 = \frac{\lambda}{9}$. Sin embargo, hay una indeterminación en el signo de H para $t = 0$, ya que este cambia de signo según se tome el límite por izquierda o por derecha. Esto se interpreta como un “rebote” o *bounce* del factor de escala y le otorga el nombre a esta solución. Pegando las soluciones para tiempos positivos y negativos, graficamos en la Fig. 3.1 el factor de escala que sale de la solución completa 3.26 para distintos valores de λ .

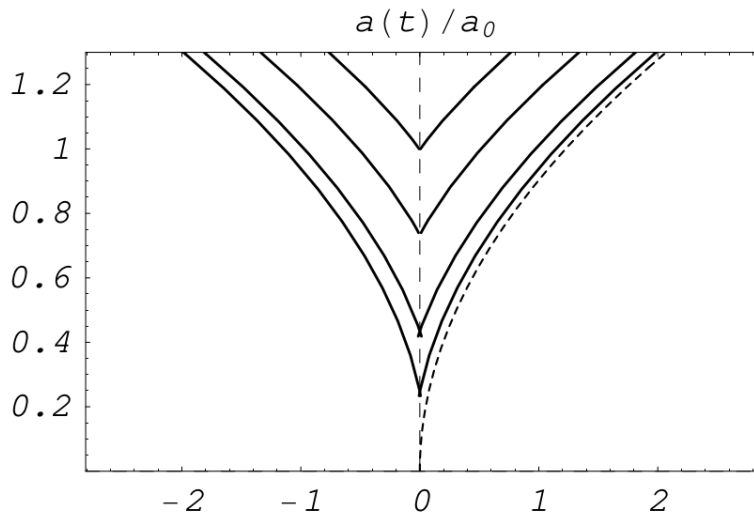


Figura 3.1: Figura 1 de [19]. Comportamiento del factor de escala en función del tiempo cerca de $t = 0$, para valores de $\lambda = 3, 10, 10^2$ y 10^3 vistos de arriba para abajo en las curvas sólidas, respectivamente. En línea de trazos se grafica la solución clásica de RG.

⁸Al fijar $w = 1/3$, podemos ver de la ecuación 3.7 que $\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^4$.

Entonces, esta solución reemplaza el *big-bang* por un *big-bounce*. Cabe preguntarse acerca de la presencia de singularidades en esta geometría. Por un lado, en [19] se prueba que las geodésicas no se interrumpen, por lo que hay completitud geodésica. Sin embargo, el escalar de curvatura está dado por

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}); \quad (3.31)$$

si bien H^2 está bien definido para todo t , el término \dot{H} está indeterminado para $t = 0$, ya que el factor de Hubble mismo está indeterminado. Entonces, el escalar de curvatura no está definido en el momento del rebote, aunque los campos de materia sean finitos. Este tipo de comportamiento se engloba dentro de lo que se conoce como *mild singularities* o singularidades de tipo IV. Vamos a dar una discusión más completa de estas singularidades más adelante, en el capítulo referente a las soluciones de agujero negro en la teoría determinantal, donde aparecen comportamientos similares.

Capítulo 4

El agujero negro regular

De manera similar al caso cosmológico, la teoría de Born-Infeld- $f(T)$ posee una solución regular de agujero negro en el vacío esféricamente simétrico, que constituye una regularización de la geometría de Schwarzschild. En este capítulo comentaremos las principales características de este objeto, que forma parte del estado del arte de la física de agujeros negros en las teorías de Born-Infeld.

Recordemos que la métrica de Schwarzschild (en unidades donde $c = G = 1$)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

representa la única solución de vacío esféricamente simétrica que posee RG. Esta solución contiene una singularidad esencial en $r = 0$, siendo esta una de las singularidades paradigmáticas presentes en la Relatividad General. Cualquier observador libremente gravitante que ingrese a la región caracterizada por $r < 2M$ inevitablemente terminará en la singularidad en un tiempo propio finito; dicho de otro modo, el espacio-tiempo es geodésicamente incompleto. Si bien algunos escalares geométricos son idénticamente nulos⁹, la singularidad también se manifiesta como la divergencia de ciertos invariantes geométricos; por ejemplo, el escalar de Kretschmann

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (4.2)$$

que diverge para $r = 0$, independientemente de la elección de coordenadas. En lo que sigue describiremos el *interior regular* obtenido recientemente en el contexto de la teoría de BI- $f(T)$ [16] y una posterior interpretación geométrica de las cercanías de la región asintótica del mismo [20].

⁹Este es el caso del escalar de curvatura R y el escalar de Ricci $R^2 = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, que se anulan debido a que la métrica 4.1 es una solución de vacío.

4.1. Solución en la teoría de Born-Infeld- $f(T)$

El espacio-tiempo de Schwarzschild se presenta también como solución exacta de las ecuaciones de movimiento de las teorías $f(T)$. En efecto, en [21] se mostró que este espacio emerge como solución esféricamente simétrica en vacío de cualquier deformación ultravioleta de tipo $f(T)$. Es importante mencionar que la técnica para mostrar esta propiedad se basa en encontrar una tétrada particular (denominada *frame de Schwarzschild*), que lleva a un escalar de Weitzenböck idénticamente nulo; el encontrar una tétrada que garantice la anulación de T para una dada solución de RG implica que esa solución también lo será de cualquier teoría $f(T)$ ultravioleta. Para detalles sobre este punto sugerimos consultar la referencia mencionada.

Por otro lado, las teorías $f(T)$ también son capaces de deformar la solución de Schwarzschild, como mostraremos en lo que sigue. El interior de un agujero negro de Schwarzschild se describe con la métrica 4.1, siendo $r < 2M$. La equivalencia de Kantowski-Sachs (KS) [22] nos muestra que la métrica en esta región se puede reescribir de la forma

$$ds^2 = dt^2 - b^2(t)dz^2 - a^2(t)d\Omega^2, \quad (4.3)$$

en donde $a(t)$ y $b(t)$ son factores de escala dependientes solo del tiempo propio, dados por

$$b(t) = b_1 \tan(\eta(t)), \quad a(t) = 2M \cos^2(\eta(t)), \quad (4.4)$$

siendo b_1 y M dos constantes de integración. Mientras que b_1 puede ser reabsorbida en un cambio de coordenadas, la constante M está asociada a la masa del agujero negro. Aquí introducimos una nueva función del tiempo $\eta(t)$ parametrizada según la ecuación implícita $t - t_0 = 2M(\eta + \sin \eta \cos \eta)$. De esta forma, el interior del agujero negro de Schwarzschild puede pensarse como un espacio-tiempo de tipo cosmológico. Sin embargo, a diferencia de los modelos de tipo FRW, la métrica 4.3 es anisótropa. En esta descripción, la singularidad se corresponde con $\eta(t) = \pi/2$, en donde el radio de las 2-esferas en 4.3 colapsa a cero. La coordenada $a(t)$ es proporcional a la función radial $r(t)$ de la solución de Schwarzschild y $b(t) \propto r(t)^{-\frac{1}{2}}$. Para ver esto y más detalles de la geometría de Kantowski-Sachs se puede consultar [23].

La obtención de una tétrada adecuada para la geometría 4.3 en el contexto de las teorías $f(T)$ es sumamente no trivial. Por ejemplo, si elegimos una tétrada diagonal que sea la “raíz cuadrada” de la métrica, como hicimos en el caso cosmológico, las ecuaciones de movimiento resultantes son inconsistentes. Para obtener una tétrada que funcione se puede partir de la tétrada diagonal y realizar un conjunto de transformaciones de Lorentz adecuadas que garanticen la consistencia del sistema de ecuaciones, antes de intentar resolverlas. Este proceso es tedioso, puesto que normalmente estas

transformaciones involucran varias funciones libres asociadas a boosts y rotaciones locales, que luego tienen que ser seleccionadas para asegurar la consistencia del sistema completo de ecuaciones de movimiento. En [24] se mostró que un ansatz adecuado para la geometría 4.3 en el contexto de las teorías $f(T)$ es

$$e^{(t)} = dt, \quad (4.5)$$

$$e^{(z)} = b(t) \cos \theta dz + a(t) \sin^2 \theta d\phi, \quad (4.6)$$

$$e^{(\theta)} = \sin \phi [b(t) \sin \theta dz + a(t)(\cot \phi d\theta - \sin \theta \cos \theta d\phi)], \quad (4.7)$$

$$e^{(\phi)} = \cos \phi [b(t) \sin \theta dz - a(t)(\tan \phi d\theta - \sin \theta \cos \theta d\phi)], \quad (4.8)$$

que no es diagonal, a diferencia del caso de las cosmologías del capítulo anterior. De esta tétrada calculamos el escalar de Weitzenböck,

$$T = -2 (H_a^2 + 2H_a H_b - a^{-2}), \quad (4.9)$$

donde $H_{a,b}$ son los parámetros de Hubble asociados a los distintos factores de escala. Al evaluar 4.9 en la solución de Schwarzschild en la forma de KS 4.4 obtenemos

$$T_{\text{KS}} = 4a^{-2} = 4a_1^{-2} \cos^{-4}(\eta(t)). \quad (4.10)$$

El escalar de Weitzenböck no es idénticamente nulo, a diferencia del caso del frame de Schwarzschild discutido en [21]. Esta es la primera diferencia respecto del esquema métrico, ya que el escalar de curvatura R es idénticamente nulo para la solución de Schwarzschild.

Para calcular las ecuaciones de movimiento para $a(t)$ y $b(t)$, tenemos que evaluar las ecuaciones $f(T)$ (dadas por 2.2), en la tétrada 4.8. Tenemos dos ecuaciones independientes:

$$f + 4f'(H_a^2 + 2H_a H_b) = 0, \quad (4.11)$$

$$f'' H_a \dot{T} + f'(\dot{H}_a + 2\dot{H}_a^2 + H_a H_b) + f/4 = 0. \quad (4.12)$$

Reemplazando en 4.11 el T obtenido en 4.9, y la función de BI- $f(T)$

$$f_{\text{BI}}(T) = \lambda \left[\sqrt{1 + \frac{2T}{\lambda}} - 1 \right], \quad (4.13)$$

llegamos a la ecuación

$$H_a^2 + 2H_a H_b = -\frac{1}{a^2(t)} \left(1 + \frac{4}{\lambda a^2(t)} \right). \quad (4.14)$$

Esta ecuación es muy interesante, ya que si $\lambda < 0$ (desde ahora $\lambda = -|\lambda|$), tenemos

una solución estática, es decir, una solución consistente con $H_a = 0$. Esto sucede cuando $a(t) = a_c = 2/\sqrt{|\lambda|}$ y significa que las 2-esferas dadas por $z = cte$ y $t = cte$ tienden a una configuración estática con un radio $a_c > 0$. La presencia de un factor de escala crítico no nulo es un aspecto nuevo de esta solución, que difiere totalmente de su contraparte en RG. En efecto, la solución de Schwarzschild no tiene un mecanismo físico que impida que los radios de las 2-esferas colapsen a un punto, generando una singularidad en la curvatura.

Combinando la ecuación 4.14 con el escalar de Weitzenböck 4.9, tenemos que el escalar correspondiente a esta solución es

$$T = \frac{4}{a^2(t)} \left(1 - \frac{2}{|\lambda|a^2(t)} \right). \quad (4.15)$$

El escalar T tiene un valor máximo justamente en a_c , donde toma el valor $T_c = |\lambda|/2$. Si reemplazamos T_c en 4.13 vemos que nuevamente el término de la raíz se anula. Esto mismo sucedía en la cosmología para los casos BI- $f(T)$ y determinantal, dando una pista acerca de los espacios asintóticos presentes en las nuevas soluciones. En el caso cosmológico, el estado asintótico estaba dado por un espacio de curvatura constante correspondiente a la métrica de de Sitter. Procedemos ahora a caracterizar el espacio asintótico presente en el interior del agujero negro.

Podemos obtener una ecuación para el factor de escala $a(t)$ si primero despejamos H_b de 4.14 y lo reemplazamos junto con el T de la ecuación 4.15 en la ecuación de Friedmann modificada 4.11. La ecuación así obtenida puede combinarse con la segunda ecuación de movimiento 4.12, para llegar finalmente a una ecuación que depende solo de $a(t)$

$$\left[1 - \frac{4}{|\lambda|a^2(t)} \right] \left[\frac{1}{a^2(t)} \left(1 - \frac{4}{|\lambda|a^2(t)} \right) + 3H_a^2 + 2\dot{H}_a \right] - \frac{16H_a^2}{|\lambda|a^2(t)} = 0, \quad (4.16)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden para $a(t)$, cuya solución analítica es desconocida al momento. Nos interesa entender la naturaleza del espacio-tiempo cerca del punto crítico $a(t) = a_c$. Vemos que para $H_a = 0$ se cumple $a(t) = a_c$ en 4.16, consistentemente con los comentarios de los párrafos anteriores. Sin embargo, ésta no es una solución del sistema de ecuaciones. El motivo es que la ecuación de movimiento 4.12 no se satisface si reemplazamos $\dot{H}_a = H_a = 0$, $a(t) = a_c$. Entonces, interpretamos a la métrica en la región con $a = a_c$ como un espacio asintótico al que no se puede llegar en un tiempo propio finito. En lo que sigue daremos evidencia de esta última afirmación.

Se puede caracterizar la solución numéricamente efectuando un análisis dinámico para el parámetro de Hubble H_a . Vamos a considerar un sistema dinámico en función de las variables a y una nueva variable y definida según $y = H_a$. Despejando $\dot{y} = \dot{H}_a$

de 4.16 en función de estas variables, llegamos al sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{a} = ay \\ \dot{y} = \left(\frac{16}{|\lambda|a\mathcal{A}} - 3 \right) y^2 - \frac{\mathcal{A}}{a^2} . \end{cases} \quad (4.17)$$

Aquí definimos $\mathcal{A} = \left(1 - \frac{4}{|\lambda|a^2}\right)$, que se anula cuando $a = a_c$. Recordemos que los puntos fijos de los sistemas dinámicos son aquellos (a, y) que cumplen $\dot{a} = \dot{y} = 0$ y representan los puntos de equilibrio del sistema. En este sistema existe un punto fijo si $y = 0$ y $a = a_c$, asumiendo que la dinámica sea tal que $y^2/\mathcal{A} \rightarrow 0$. En 4.1 graficamos el retrato de fases para el sistema 4.17 y para la solución de Schwarzschild. Observamos que para a lejos de a_c el comportamiento es similar al de RG, mientras que al acercarse al radio crítico las trayectorias tienden al punto fijo, es decir, el módulo de H_a empieza a disminuir hasta llegar a 0, mientras que $a \rightarrow a_c$. Esto quiere decir que el factor de escala a se desacelera a medida que llega al valor crítico. Notemos que para el agujero negro de Schwarzschild la dinámica establece que H_a tiende a menos infinito conforme a tiende a cero; esta es la singularidad.

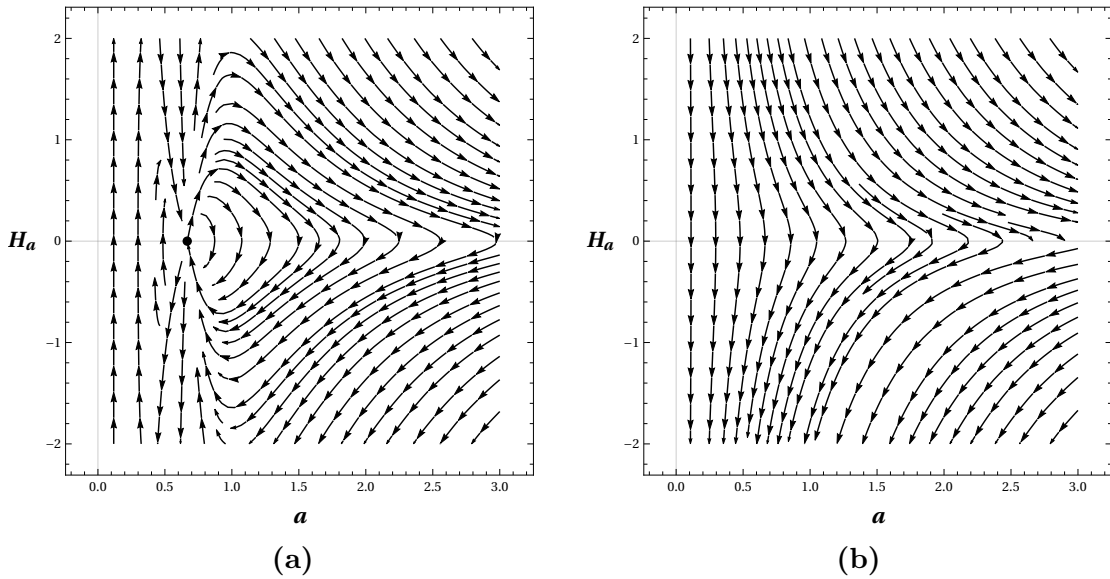


Figura 4.1: (a) Sistema dinámico para el agujero negro regular para $\lambda = -9$, por lo que vale $a_c = 2/3$. (b) Sistema dinámico correspondiente al interior del horizonte en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Si bien el sistema dinámico nos brinda información valiosa con respecto al proceso de regularización, es incapáz de decirnos si el $a = a_c$ se alcanza en un tiempo finito, o no. Por eso debemos estudiar las inmediaciones de $a = a_c$ en forma analítica. Podemos estudiar el comportamiento de $a(t)$ cerca del punto crítico si consideramos una perturbación del estilo $a(t) \sim a_c(1 + \epsilon g(t))$, con $\epsilon \ll 1$ y $g(t)$ una función que resultará acotada. Al orden más bajo, la expresión 4.16 resulta en una ecuación diferencial

para $g(t)$

$$4\epsilon^2(a_c^{-2}g^2 - \dot{g}^2 + g\ddot{g}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 0, \quad (4.18)$$

cuya solución es

$$g(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{2a_c^2} + Bt\right), \quad (4.19)$$

siendo A y B dos constantes de integración. Nótese que $g(t)$ es acotada, de forma consistente con la aproximación. Aquí probamos finalmente que las soluciones tardan un tiempo propio infinito en llegar a a_c .

Una vez obtenido $a(t)$, la ecuación 4.14 permite obtener el factor de escala $b(t)$. Al mismo orden, se obtiene

$$b(t) = b_0(t - Ba_c^2), \quad (4.20)$$

en donde b_0 es otra constante de integración. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir $B = 0$, puesto que el rol de B es determinar el origen del tiempo. La métrica en las cercanías de a_c puede escribirse como

$$ds^2 = dt^2 - b_0^2 t^2 dz^2 - a_c^2 [1 + 2A e^{(-t^2/2a_c^2)}] d\Omega^2, \quad (4.21)$$

en donde hemos redefinido $\epsilon A \rightarrow A$. Notemos que se necesitaría un tiempo propio infinito para alcanzar a_c . Los escalares geométricos asociados a la métrica 4.21 son

$$R = -\frac{2}{a_c^2} + \xi_1, \quad R^{(2)} = \frac{2}{a_c^4} + \xi_2, \quad K = \frac{4}{a_c^4} + \xi_3, \quad (4.22)$$

en donde las $\xi_i = \xi_i(A, t)$ $i = 1, 2, 3$ son funciones que tienden a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$, para todo A . Al igual que en el caso cosmológico, el estado asintótico (cuando $t \rightarrow \pm\infty$), está caracterizado por un espacio-tiempo de curvatura constante. Esto puede verse mediante un cambio de coordenadas apropiado; en efecto, el estado asintótico es

$$ds^2 = dt^2 - b_0^2 t^2 dz^2 - a_c^2 d\Omega^2. \quad (4.23)$$

La parte (t, z) de esta métrica es simplemente el espacio de Minkowski en coordenadas de Milne. Para $b_0 \neq 0$, si pasamos al tiempo conforme $\tilde{t} = b_0^{-1} \log(t)$ y luego a coordenadas (T, X) definidas según

$$T = \frac{\exp(b_0 \tilde{t})}{b_0} \cosh(b_0 z), \quad X = \frac{\exp(b_0 \tilde{t})}{b_0} \sinh(b_0 z),$$

la métrica 4.23 queda

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - a_c^2 d\Omega^2. \quad (4.24)$$

Esta métrica fue hallada en [25] y corresponde al interior de una cuerda cósmica llamada la cuerda de Gott. Los invariantes de la curvatura están dados por 4.22, con las funciones $\xi_i = \xi_i(A, t)$ iguales a cero.

De esta manera, el rol de la constante de BI λ , a través de a_c , es introducir una escala que se traduce en una cota en los invariantes geométricos. El espacio-tiempo experimentado por observadores en caída libre se aproximará, asintóticamente en el tiempo¹⁰, a un espacio-tiempo de curvatura constante. Las geodésicas serán completas, definidas en todo valor de la coordenada temporal. Este es el mecanismo por el cual se obtiene la remoción de la singularidad en el agujero negro. Además, la regularidad de la solución no reposa en el acople de campos de materia puesto que es una solución de vacío, de carácter puramente geométrico.

Vamos a caracterizar ahora la geometría en la región cercana a a_c , que corresponde a tener en cuenta la primera corrección a la métrica de Gott, dada por 4.21. En un trabajo reciente [20] se probó que esta región de la solución del agujero negro está bien descrita por una generalización 4-dimensional del conocido agujero negro BTZ no rotante [26] [27]. Vamos a ver que la métrica 4.21 se puede llevar a la forma

$$ds_{BTZ}^2 = (-\tilde{M} + \ell^{-2}R^2)dT^2 - \frac{dR^2}{(-\tilde{M} + \ell^{-2}R^2)} - R^2d\Omega^2, \quad (4.25)$$

asumiendo que $A \ll 1$ ¹¹, como se hizo desde el principio. Esta solución tiene una constante cosmológica negativa dada por $\Lambda = -\ell^{-2}$ y un parámetro de masa \tilde{M} .

Empecemos pidiendo que $ds^2 = 0$ en 4.21 cuando $d\Omega^2 = 0$. De esta condición se pueden definir las coordenadas

$$U = \log t - b_0 z, \quad (4.26)$$

$$V = \log t + b_0 z, \quad (4.27)$$

que son constantes a lo largo de geodésicas radiales nulas. Entonces, la parte (t, z) de 4.21 se reescribe como

$$\exp(U + V)dUdV = t^2(dt^2/t^2 - b_0^2dz^2) = dt^2 - b_0^2t^2dz^2. \quad (4.28)$$

Definiendo ahora $u = \exp(U)/a_c$, $v = \exp(V)/a_c$ tenemos una métrica

$$ds^2 = a_c^2 \left[dudv - \left(1 + 2A \exp(-uv/2)\right) d\Omega^2 \right], \quad (4.29)$$

donde $t^2 = a_c^2 uv$. Si asumimos que $A \ll 1$ y nos restringimos a una región con $t \sim 0$,

¹⁰Nótese que dentro del agujero negro t asume el rol de una coordenada *radial*.

¹¹La métrica del agujero negro BTZ no rotante se obtiene de tomar hipersuperficies de $\phi = cte$ en 4.25.

podemos aproximar la exponencial que acompaña a A en 4.29 a primer orden en uv . Reescaleando $\tilde{u} = \sigma u$, $\tilde{v} = \sigma v$, la métrica resultante cerca de la región asintótica es

$$ds^2 = a_c^2 [\sigma^2 dudv - (1 + 2A - A\sigma^2 uv) d\Omega^2] . \quad (4.30)$$

Ahora vamos a hacer cambios de coordenadas en la métrica del BTZ 4.25 para llevarla a una forma similar a 4.30. Empecemos definiendo

$$\tilde{U} = \frac{\ell}{\sqrt{\tilde{M}}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{R}{\ell \sqrt{\tilde{M}}} \right) + T , \quad (4.31)$$

$$\tilde{V} = \frac{\ell}{\sqrt{\tilde{M}}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{R}{\ell \sqrt{\tilde{M}}} \right) - T . \quad (4.32)$$

Haciendo un escaleo $u = \sqrt{\tilde{M}}\tilde{U}/\ell$, $v = \sqrt{\tilde{M}}\tilde{V}/\ell$ la métrica se escribe

$$ds_{BTZ}^2 = \ell^2 \left[\frac{dudv}{\cosh^2(\frac{u+v}{2})} - \tilde{M} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(\frac{u+v}{2})} \right) d\Omega^2 \right] . \quad (4.33)$$

El horizonte del BTZ se encuentra en $R_h = \ell \sqrt{\tilde{M}}$. En el límite $R \rightarrow R_h$, las coordenadas u y v divergen, por lo que podemos aproximar $\cosh^{-2}((u+v)/2) \approx 4 \exp(-u/2) \exp(-v/2)$. En esta aproximación, la métrica resulta

$$ds_{BTZ}^2 = \ell^2 \left[4 \exp(-u/2) \exp(-v/2) dudv - \tilde{M} \left(1 - 4 \exp(-u/2) \exp(-v/2) \right) d\Omega^2 \right] . \quad (4.34)$$

Finalmente, introducimos las coordenadas $\tilde{u} = -4 \exp(-u/2)$ y $\tilde{v} = -4 \exp(-v/2)$, que convierten la métrica 4.34 en

$$ds_{BTZ}^2 = \ell^2 \left[d\tilde{u}d\tilde{v} - \tilde{M} (1 - \tilde{u}\tilde{v}/4) d\Omega^2 \right] . \quad (4.35)$$

La métrica 4.35 coincide con 4.30 si identificamos

$$a_c \sigma = \ell , \quad a_c^2 (1 + 2A) = \ell^2 \tilde{M} , \quad a_c^2 A \sigma^2 = \ell^2 \tilde{M}/4 , \quad (4.36)$$

de donde se obtiene que

$$\ell = a_c \sqrt{(1 + 2A)/(4A)} , \quad \tilde{M} = 4A . \quad (4.37)$$

El horizonte del BTZ se encuentra en

$$R_h = \ell \sqrt{\tilde{M}} = a_c \sqrt{1 + \tilde{M}/2} \approx a_c (1 + \tilde{M}/4) , \quad (4.38)$$

en vistas a que $A = \tilde{M}/4 \ll 1$. El radio del horizonte es mayor a a_c , a menos que valga

$\tilde{M} = 0$, lo cual no está permitido puesto que la cuerda de Gott no es solución de vacío de la teoría BI- $f(T)$. El escalar de curvatura en el horizonte se puede calcular según

$$R_{BTZ}\Big|_h = -\frac{2}{a_c\sqrt{1+\tilde{M}/2}}\left(1 - \frac{10\tilde{M}}{a_c\sqrt{1+\tilde{M}/2}}\right), \quad (4.39)$$

que tiende a $R = -2/a_c$ cuando \tilde{M} tiende a cero, en acuerdo con el resultado obtenido en 4.22. Esto muestra que el espacio de curvatura constante dado por la cuerda de Gott se encuentra en el infinito nulo futuro dentro del agujero negro, puesto que coincide con la superficie nula dada por el horizonte de eventos del agujero negro BTZ. Esto es lo que hace, en última instancia, que el espacio de Gott sea un estado asintótico, inalcanzable para ningún observador en caída libre dentro del agujero negro.

La estructura de la solución en las vecindades del horizonte de eventos es básicamente la misma que la del agujero negro de Schwarzschild, al menos en el límite en que la masa es mucho mayor que la escala de longitud proveniente de la constante de BI λ , esto es, si $M^2 \gg |\lambda|^{-1}$. Esto es equivalente a pedir que $r_s^2 \gg a_c^2$, en donde $r_s = 2M$. Esto fue mostrado con detalle en [20], y no consideramos oportuno reproducirlo aquí puesto que el cálculo no involucra el régimen de alta energía en donde la solución se aparta de su contraparte de RG, y entonces no tiene nada que decir con respecto al mecanismo de regularización de la singularidad. De esta manera se prueba que si $M^2 \gg |\lambda|^{-1}$ la estructura exterior del agujero negro es prácticamente indistinguible de la solución de Schwarzschild.

Por otro lado, cabe preguntarse cómo se comportará el agujero negro en el régimen cuando $M^2 \approx |\lambda|^{-1}$. Este régimen corresponde a las etapas tardías de la evolución del agujero negro (o a posibles agujeros negros microscópicos fabricados en el universo temprano), en donde se ha perdido la mayor parte de la masa vía evaporación. En este sentido, es razonable pensar que el estado final será el correspondiente a un agujero negro extremal de masa muy pequeña y temperatura nula. En efecto, dado que la constante de BI es un parámetro fijo de la teoría, luego de mucho tiempo de evaporación tendremos $r_s^2 \rightarrow a_c^2$. Por otro lado, cuando la masa es muy chica, vimos que a_c se parece al radio del horizonte BTZ. Esto sustenta el hecho de que el horizonte de eventos tenderá a parecerse al horizonte interior (BTZ), de ahí la extremalidad del agujero negro. Sin embargo, estas ideas son materia de investigación en curso, y al momento no se tiene un panorama claro en lo que concierne al objeto remanente que permanecería luego de tiempos enormes de evaporación. Simplemente las mencionamos porque constituyen intuiciones que están siendo desarrolladas al momento.

Capítulo 5

Soluciones de agujero negro en la teoría determinantal

La solución de agujero negro obtenida en la teoría BI- $f(T)$ del capítulo 4 no contiene singularidades: esto se refleja en las propiedades de completitud geodésica y en la no divergencia de los escalares relacionados a la curvatura. En este capítulo vamos a explorar nuevas soluciones de agujero negro halladas en el marco de la teoría determinantal.

Si recordamos el capítulo 3, en la cosmología determinantal existe una elección especial de las constantes α , β y γ que lleva a la misma solución regular que la desarrollada previamente en la teoría BI- $f(T)$. La causa de esta coincidencia subyace en la igualdad de los Lagrangianos para ese caso particular. Con el objetivo de hallar una solución regular de agujero negro en la teoría determinantal, cabe preguntarse si existe la misma solución que en el caso funcional partiendo del ansatz de Kantowski-Sachs 4.8. Es decir, queremos determinar si existe alguna elección inteligente de las constantes de la teoría en la que el lagrangiano determinantal coincida con el de la teoría BI- $f(T)$. Esto nos daría automáticamente la primera solución regular de agujero negro en la teoría determinantal. Para calcular el Lagrangiano de la teoría funcional basta con reemplazar el escalar de Weitzenböck obtenido para la tétrada de KS que calculamos en el capítulo anterior, dado por

$$T = -2 (H_a^2 + 2H_a H_b - a^{-2}), \quad (5.1)$$

en la definición del lagrangiano funcional 2.5. De aquí obtenemos

$$\mathcal{L}_{KS-f} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{1 - \frac{4}{\lambda} \left(H_a^2 + 2H_a H_b - \frac{1}{a^2} \right)} - 1 \right], \quad (5.2)$$

con $e = |a^2 b \sin \theta|$.

En el caso de la teoría determinantal, vamos a trabajar a partir del ansatz de KS,

con la misma tétrada del capítulo anterior, dada por 4.8. En orden de comparar los dos lagrangianos, implementamos un programa en Mathematica que calcula el tensor $F_{\mu\nu}$ y el lagrangiano asociado para la tétrada de KS. Imponiendo la condición de normalización $\alpha + \beta + 4\gamma = 1$ y despejando α en función de β y γ , el lagrangiano resultante es

$$\mathcal{L}_{KS-D} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{\frac{A^2 BC}{\lambda^4}} - 1 \right], \quad (5.3)$$

con las funciones $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ definidas según

$$A(t) = \left(\lambda + (\beta + 4\gamma - 2)(H_a^2 - a^{-2}) \right) + (\beta - 2)H_a H_b, \quad (5.4)$$

$$B(t) = \left(\lambda + 4\gamma a^{-2} - 2(\beta + 2\gamma)H_a^2 \right) - 4(\beta + 2\gamma)H_a H_b, \quad (5.5)$$

$$C(t) = \left(\lambda + 2(\beta + 2\gamma)a^{-2} - 4\gamma H_a^2 \right) + 2(\beta + 4\gamma - 2)H_a H_b. \quad (5.6)$$

La única forma de igualar los Lagrangianos 5.2 y 5.3 es logrando que el producto $A^2 BC$ tenga las potencias correctas de a , H_a y H_b . Para esto es estrictamente necesario anular los factores que acompañan a estas funciones en el término $A(t)$, ya que al estar elevado al cuadrado produciría las potencias incorrectas de a , H_a y H_b . Esto nos obliga a fijar las constantes $\beta = 2$, $\gamma = 0$. De este modo, el lagrangiano resultante para este caso es

$$\mathcal{L}_{KS-D} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{4}{\lambda a^2}\right) \left(1 - \frac{4}{\lambda}(H_a^2 + 2H_a H_b)\right)} - 1 \right]. \quad (5.7)$$

Vemos que, a diferencia del caso cosmológico, el lagrangiano 5.7 no coincide con su par de la teoría BI- $f(T)$ ¹². En consecuencia, no hay una forma sencilla, directa, de obtener la solución regular del capítulo 4. Además, se puede ver que el lagrangiano 5.7 no se puede escribir solo en términos del escalar T ¹³, por lo que este caso ilustra un ejemplo de una teoría determinantal pura que no se reduce a una $f(T)$.

En lo que sigue vamos a exponer algunas soluciones interesantes que surgen de considerar distintos casos de β y γ en el lagrangiano 5.3, que constituyen una pequeña muestra de la riqueza de soluciones presentes en la teoría determinantal. Algunas de estas soluciones se encuentran todavía en desarrollo, por lo que se espera dar una descripción más completa en un futuro trabajo.

¹²Una forma fácil de ver esto es notando que aparecen términos de orden λ^{-2} , no presentes en el lagrangiano funcional.

¹³Ya que la expresión de orden λ^{-2} no se puede escribir únicamente en términos de T .

5.1. Espacio-tiempo de Schwarzschild

Una pregunta importante que podemos hacernos antes de buscar nuevas soluciones es si la geometría de Schwarzschild emerge como estado puro también en el contexto determinantal. Esto fue discutido con cierto detalle en [18], y ahora mostraremos que el interior del espacio-tiempo de Schwarzschild es reobtenido como solución de vacío en la teoría determinantal, para ciertos valores de las constantes libres presentes en la acción.

Considerando la elección de constantes de la sección anterior ($\alpha = -1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 0$), tenemos el lagrangiano dado por 5.7. Para hallar las ecuaciones de movimiento, vamos a utilizar la técnica de mini-super espacio (MSE). Este método consiste en fijar ciertos grados de libertad de la teoría y variar el lagrangiano respecto de los restantes. Esto nos dá ventajas sobre el método formal para obtener las ecuaciones, que tiene un costo computacional más alto, y que en algunos de los casos que vamos a estudiar no permite calcular las ecuaciones de movimiento en un tiempo razonable. Un desarrollo más detallado de esta técnica y algunos ejemplos se encuentra en el apéndice B. Para más información concerniente a la validez de la técnica de MSE aplicada a simetría esférica se sugiere [28]. Dicho esto, la ecuación de vínculo que surge del lagrangiano 5.7 es

$$H_a^2 + 2H_a H_b + \frac{1}{a^2} = 0, \quad (5.8)$$

que, sorpresivamente, coincide con la ecuación de tipo Friedmann de RG para la geometría de Schwarzschild en la forma de Kantowski-Sachs¹⁴. La otra ecuación independiente que se obtiene con el método MSE, que proviene de variar con respecto a la función $b(t)$ (ver B), es

$$\begin{aligned} 4\lambda H_a \left[2H_a^3 + 3H_a^2 H_b + H_a H_b^2 + H_a \left(\frac{2}{a^2} - \dot{H}_b + H_b^2 \right) + \left(H_b - \frac{1}{H_a a^2} \right) \left(\dot{H}_a + H_a^2 \right) + \frac{2}{a^2} H_b \right] + \\ \lambda^2 \left[H_a H_b - \dot{H}_a - H_a^2 \right] + 16 \frac{H_a}{a^2} \left[H_a^3 + H_a^2 H_b + H_a H_b^2 + H_a \left(\frac{1}{a^2} - \dot{H}_b - H_b^2 \right) + H_b \left(\dot{H}_a + H_a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A simple vista, esta extensa ecuación no parece coincidir con la ecuación espacial correspondiente a la solución de Schwarzschild en la forma de KS, i.e., la dada por la ec. (9a) en [22]. Sin embargo, podemos simplificarla si la reescribimos solo en términos de la variable $a(t)$ y sus derivadas. Para eso, despejamos H_b de 5.8 y lo reemplazamos en 5.9. Podemos hacer lo mismo con \dot{H}_b si derivamos a ambos lados de 5.8. Después

¹⁴Mencionamos, para calmar al lector con una inclinación hacia el rigor matemático, que la ecuación 5.8 coincide con la que se obtiene calculando las ecuaciones de movimiento completas de la teoría determinantal.

de reemplazar H_b y \dot{H}_b y de algunas manipulaciones, llegamos a una ecuación solo de $a(t)$, dada por

$$(4 + \lambda a^2)^2 \left[2\dot{H}_a + 3H_a^2 + \frac{1}{a^2} \right] = 0. \quad (5.10)$$

Para $\lambda > 0$, podemos eliminar el factor izquierdo de 5.10 y la ecuación se convierte en la ecuación espacial de KS. Para $\lambda < 0$ esto no es cierto, ya que el factor cambia de signo en $a_c^2 = -4/\lambda$. Sin embargo, $a(t) = a_c$ no es una solución de la teoría, ya que no satisface la ecuación de vínculo 5.8. De cualquier manera, la solución de Schwarzschild existe en esta teoría independientemente del signo de λ .

Veamos si podemos entender un poco la aparición de la solución de Schwarzschild. Asumiendo la ecuación de tipo Friedmann 5.8, el escalar de Weitenböck se puede reescribir como

$$T = -2(H_a^2 + 2H_a H_b - a^{-2}) = 4a^{-2}. \quad (5.11)$$

Recordemos también el lagrangiano del ETRG, y reemplacemos el valor de T ,

$$\mathcal{L}_{RG} = \frac{\lambda e}{16\pi G} T = \frac{\lambda e}{4\pi G} a^{-2}. \quad (5.12)$$

Entonces, partiendo del Lagrangiano de la teoría determinantal 5.7 y utilizando la ecuación de tipo Friedmann, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BID} &= \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{4}{\lambda a^2}\right) \left(1 - \frac{4}{\lambda} (H_a^2 + 2H_a H_b)\right)} - 1 \right] \\ &= \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{4}{\lambda a^2}\right)^2} - 1 \right] = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\left| 1 + \frac{4}{\lambda a^2} \right| - 1 \right] \Big|_{\lambda > 0} \\ &= \frac{e}{4\pi G} a^{-2} \propto \mathcal{L}_{RG}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Los lagrangianos coinciden a menos de un factor λ (para $\lambda > 0$) asumiendo la ecuación de vínculo. Esto nos da una pista de por qué aparece la solución clásica en esta teoría determinantal¹⁵.

5.2. Caso reducido

En el capítulo 2 mencionamos que la teoría determinantal se reduce a una teoría $f(T)$ para la elección de las constantes $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1/4$. Para este caso, la $f(T)$ en cuestión es

$$f(T) = \lambda \left[\left(1 + \frac{T}{2\lambda} \right)^2 - 1 \right] = T + \frac{T^2}{4\lambda}, \quad (5.14)$$

¹⁵Para formalizar este resultado habría que probar que los lagrangianos coinciden a primer orden sobre las configuraciones vecinas a la solución de KS.

con el lagrangiano dado por $\mathcal{L} = \frac{\lambda e}{16\pi G} f(T)$. Vamos a estudiar qué soluciones emergen de considerar este caso, al que llamaremos *caso reducido*, partiendo del ansatz de Kantowski-Sachs.

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener aplicando la técnica de mini super espacio, o bien calculando las ecuaciones de movimiento formales de las teorías $f(T)$, dadas por 2.2. La primera ecuación que surge es la ecuación de vínculo entre las funciones $a(t)$ y $b(t)$, y se escribe de la forma

$$\left(1 + \frac{1}{\lambda a^2} - y\right) \left(1 + \frac{1}{\lambda a^2} + 3y\right) - 1 = 0, \quad (5.15)$$

donde

$$y = \frac{1}{\lambda} (H_a^2 + 2H_a H_b). \quad (5.16)$$

La ecuación 5.15 es cuadrática en y . Resolviendo para y y reemplazando su definición finalmente tenemos

$$H_a^2 + 2H_a H_b - \frac{1}{3a^2} = \frac{\lambda}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{\lambda a^2} + \frac{4}{\lambda^2 a^4}}\right). \quad (5.17)$$

La rama positiva corresponde a un estado puro de alta energía; esto es, está desconectado de la teoría de Einstein, puesto que el límite $\lambda \rightarrow \pm\infty$ lleva a un miembro derecho divergente. Dicho de otra forma, la teoría en este caso no contiene a la RG como límite de baja energía. Por el contrario, si tomamos la rama negativa, el límite del miembro derecho cuando $\lambda \rightarrow \pm\infty$ es exactamente $-4/3a^2$. Teniendo esto en cuenta, la ecuación 5.17 se reduce a la de ecuación de KS en ese límite, que estaba dada por 5.8. Por lo tanto, de aquí en adelante vamos a considerar solo la rama negativa, ya que es la que tiende a RG en el régimen de bajas energías.

Para obtener la segunda ecuación de movimiento utilizamos la técnica MSE, variando respecto a $b(t)$, para llegar a

$$\begin{aligned} 4\dot{H}_a \left(3H_a^2 + 4H_a H_b - \frac{1}{a^2} - \lambda\right) + 8H_a^2 \dot{H}_b + 7H_a^4 + 16H_a^3 H_b + \\ + 2H_a^2 \left(2H_b^2 + \frac{1}{a^2} - 3\lambda\right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + 2\lambda\right) = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

que es una ecuación de segundo orden para a y b . Se puede ver que esta ecuación se reduce a la ecuación de KS si tomamos el límite $\lambda \rightarrow \pm\infty$. En ese límite, rescatando los términos dominantes (es decir, los que están acompañados por un λ) la ecuación resultante es $2\dot{H}_a + 3H_a^2 + a^{-2} = 0$, que coincide con la ecuación de KS. Para entender la dinámica de este caso nos conviene obtener una ecuación que dependa solo de $a(t)$ y sus derivadas temporales. Esto se puede lograr reemplazando a \dot{H}_b y H_b en 5.18 como

funciones de \dot{H}_a , H_a y a que surgen de despejar H_b de 5.17 y derivar respecto al tiempo. Hecho esto, llegamos a una ecuación que no depende de b ni sus derivadas, dada por

$$f_1 \dot{H}_a + f_2 H_a^2 + f_3 = 0, \quad (5.19)$$

siendo las $f_i = f_i(a)$ funciones del factor de escala $a(t)$, que tienen la forma

$$f_1 = 2\mathcal{A} \left[\mathcal{A} + 2 \left(1 + \frac{1}{\lambda a^2} \right) \right], \quad (5.20)$$

$$f_2 = 3\mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A} \left(3 - \frac{1}{\lambda a^2} \right) - \frac{16}{\lambda a^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda a^2} \right), \quad (5.21)$$

$$f_3 = \frac{\lambda}{3} \mathcal{A} \left[\mathcal{A} \left(1 + \frac{1}{\lambda a^2} \right) - \left(1 + \frac{-2 - \sqrt{2}}{\lambda a^2} \right) \left(1 + \frac{-2 + \sqrt{2}}{\lambda a^2} \right) \right], \quad (5.22)$$

donde

$$\mathcal{A} = \sqrt{1 + \frac{8}{\lambda a^2} + \frac{4}{\lambda^2 a^4}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2(2 + \sqrt{3})}{\lambda a^2} \right) \left(1 + \frac{2(2 - \sqrt{3})}{\lambda a^2} \right)}. \quad (5.23)$$

Si bien la ecuación 5.19 es extensa y no lineal como para buscar una solución analítica, se puede entender el comportamiento del factor de escala $a(t)$ estudiando límites y utilizando herramientas como los métodos numéricos y el análisis de sistemas dinámicos. En lo que sigue vamos a dar una descripción de las soluciones de esta ecuación considerando los casos con ambos signos de λ .

5.2.1. Caso $\lambda > 0$

Recordando la observación hecha al final del capítulo 2 acerca de la teoría reducida, teníamos que la corrección a la teoría $f(T)$ reducida tenía el mismo signo que la primera corrección en el desarrollo de Taylor de la teoría BI- $f(T)$, si el signo de λ de una teoría era el opuesto a la otra. Esto se ve en las ecuaciones 2.6 y 2.16. Por lo tanto, puesto que la solución regular de agujero negro en la teoría BI- $f(T)$ del capítulo 4 posee un λ negativo, es razonable considerar a λ positivo en el caso reducido para buscar una solución regular en la teoría determinantal. Sin embargo, se presenta una diferencia fundamental con la solución de la teoría BI- $f(T)$: no hay una solución estática para λ positivo, es decir, no hay nadie que haga el papel que hacía a_c en la solución regular. Esto se puede ver reemplazando $\dot{H}_a = H_a = 0$ en 5.19, que obliga a que se cumpla $f_3 = 0$. Esto implica que \mathcal{A} tiene que anularse¹⁶; pero, para λ positivo esto no es posible. Entonces, con este argumento podemos intuir que la solución, a diferencia de

¹⁶Se puede ver que la expresión entre corchetes de f_3 no se anula para ningún valor de $a(t)$ si $\lambda > 0$.

la del capítulo anterior, tenderá hacia la región con $a(t) = 0$, como en la solución de Schwarzschild. Queda ver si el factor de escala se anula en tiempo propio finito o infinito. Para eso resolvimos la ecuación 5.19 numéricamente, cuyo gráfico se observa en la Fig. 5.1. Allí vemos que aunque el factor de escala tiene derivada segunda negativa cuando tiende a 0, este se anula en tiempo propio finito. Faltaría dar una forma funcional en la región de $a(t) \sim 0$, para entender de qué manera la solución tiende a anularse. Esto es materia de estudio actual y de trabajo futuro.

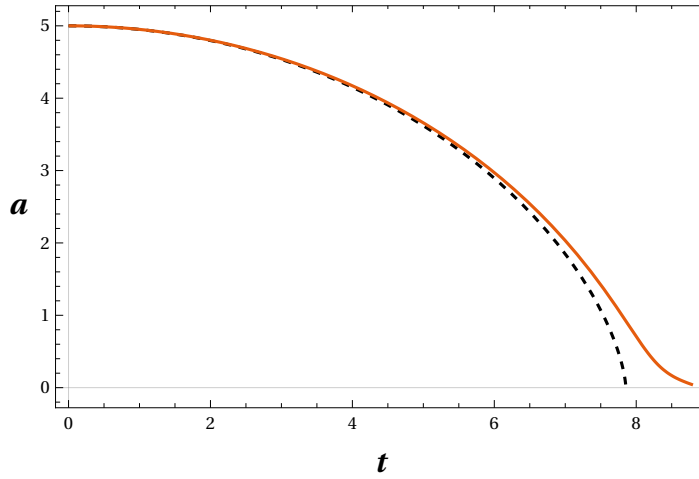


Figura 5.1: Solución numérica (en línea continua) de la función $a(t)$ para $\lambda = 4$ con la condición inicial $a(0) = 5$, $\dot{a}(0) = 0$. En línea de trazos tenemos la solución de RG.

Para entender mejor este caso, es conveniente realizar un análisis dinámico, como hicimos con la solución regular. Para eso despejamos a \dot{H}_a de 5.19 y consideramos el sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{a} = ay \\ \dot{y} = -\frac{1}{f_1}(f_2 y + f_3), \end{cases} \quad (5.24)$$

cuyo retrato de fases se presenta en la Fig 5.2. Aquí se ve claramente que las trayectorias disminuyen su velocidad a medida que se acercan a $a \sim 0$. Sin embargo, esto no es suficiente como para que el factor de escala se anule en tiempo propio infinito; por lo tanto, esta solución también presenta una singularidad similar a la de Schwarzschild y se considera no regular.

En conclusión, al considerar la teoría reducida con $\lambda > 0$ (que contiene una corrección de la misma forma que el segundo orden de la teoría BI- $f(T)$), vemos que el término cuadrático no alcanza para regularizar la solución interior de Schwarzschild.

5.2.2. Caso $\lambda < 0$

Consideremos ahora la teoría determinantal reducida para el caso con λ negativo. A diferencia del caso anterior, ahora el término de la raíz 5.23 se anula para los valores

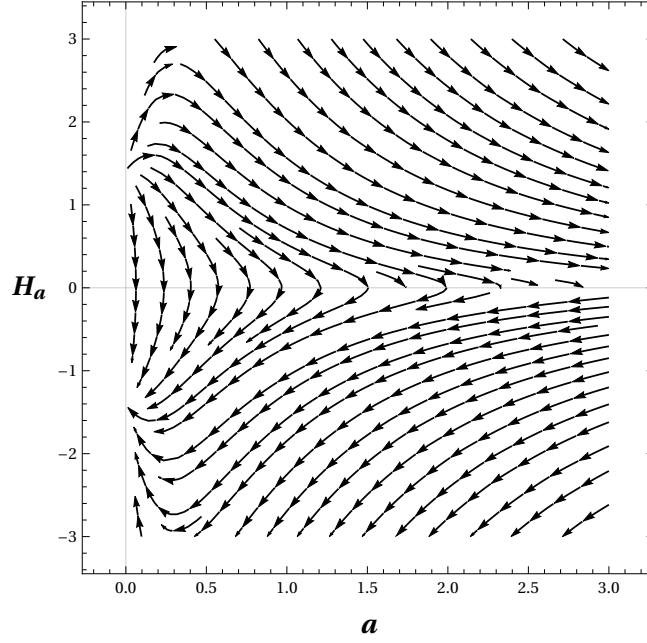


Figura 5.2: Retrato de fases del sistema dinámico 5.24 para $\lambda = 4$.

del factor de escala

$$a_{\pm}^2 = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{\lambda}, \quad (5.25)$$

lo cual genera un problema en la región intermedia, donde $a_- < a < a_+$, ya que el radicando se vuelve negativo. Podemos pensar en la evolución de una partícula de prueba cerca (pero dentro) del horizonte. Esta comienza con $a > a_+$, evolucionando hacia valores menores, por lo que el sistema primero debe encontrar al valor a_+ . El valor a_- no es alcanzado porque, como recién mencionamos, el radicando cambia de signo. De ahora en adelante, llamaremos $a_c^2 = a_+^2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{\lambda}$ y vamos a estudiar la región con $a \geq a_c$. En la Fig. 5.3 tenemos una solución numérica de la ecuación 5.19 para $\lambda = -4$ y una condición inicial tal que $a(0) > a_c$. Vemos que la solución es similar a la solución de KS de RG para valores grandes de a/a_c , pero esta se separa de su contraparte de RG en las cercanías de a_c . La solución termina a un tiempo propio finito, cuando $a = a_c$. Por completitud, mencionamos que el comportamiento de la función $b(t)$ también se puede obtener con la solución numérica, y presenta un crecimiento hasta un valor máximo finito al que llega en el mismo tiempo en el que a llega al valor crítico. Aún no es claro qué sucede después de que el factor de escala llega al valor crítico. Si bien no tenemos una solución analítica capaz de probarlo, este caso reminsce al caso de la cosmología determinantal con rebote, donde se tenía un factor de escala que llegaba a un valor mínimo con derivada no nula y finita. En la solución cosmológica de la teoría determinantal se producía un *bounce* en el que se invertía el valor del factor de Hubble y el factor de escala empezaba a crecer. Evidentemente, este comportamiento no tendría sentido físico si pensáramos en un rebote real en esta geometría, ya que

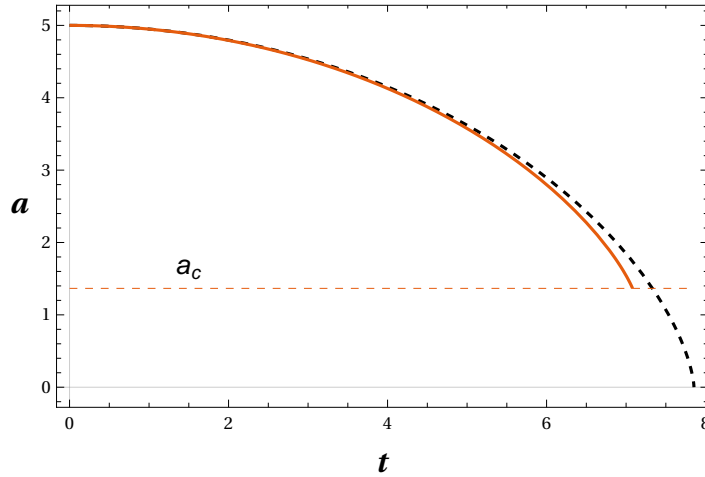


Figura 5.3: Graficamos en línea continua la solución numérica de la función $a(t)$ para $\lambda = -4$, donde $a_c = \sqrt{1 + \sqrt{3}/2} \approx 1,37$, con la condición inicial $a(0) = 5$, $\dot{a}(0) = 0$, comparada con la solución de RG en línea de trazos.

una de las propiedades conocidas de la solución interior al horizonte en RG es que las geodésicas solo pueden disminuir su coordenada radial (que está relacionada al factor de escala $a(t)$) a medida que avanza el tiempo propio. Como la llegada al valor crítico a_c es inevitable independientemente de la condición inicial, una trayectoria que se encuentre en las cercanías del horizonte para algún t , volvería a la misma región luego de uno de estos rebotes. Dado que la región interior cercana al horizonte debería estar bien descripta por RG, nos encontraríamos con un comportamiento que contradice a la teoría de Einstein. Sin embargo, tanto en la solución de RG como en todas las otras soluciones que describimos, está presente la región del agujero blanco, donde la gravedad se vuelve repulsiva (en el caso de RG, esto surge simplemente de permitir que la masa del agujero negro sea negativa). Esto es así porque las ecuaciones de movimiento en todos estos casos son invariantes ante inversión de la coordenada t . Entonces, si una trayectoria $a(t)$ es solución de las ecuaciones de movimiento con H_a negativo, la trayectoria invirtiendo el tiempo propio también es solución, esta vez con H_a positivo¹⁷. Esto da una interpretación a la región con $H_a > 0$ en los retratos de fases presentados como la región que describe la solución de agujero blanco. Una posible interpretación acerca del comportamiento de las trayectorias conforme se acercan a a_c , es que podrían ser extendidas hacia la región con las características del agujero blanco. En breve mostraremos que este es exactamente el caso para curvas geodésicas. Sin embargo, al momento no existe una prueba formal de este comportamiento y la interpretación mencionada no tiene un carácter más fuerte que el de una especulación informada.

Podemos estudiar el sistema dinámico dado por 5.24 pero ahora con $\lambda < 0$, que

¹⁷Es decir, las trayectorias se alejan de $a(t) = 0$.

presentamos en la Fig. 5.4, para $\lambda = -4$. En la figura se observa que las distintas trayectorias terminan en a_c , aunque cada una llega con un valor de H_{a_c} finito y distinto¹⁸. Una consecuencia de este comportamiento es la divergencia de \dot{H}_a en a_c . Esto se puede

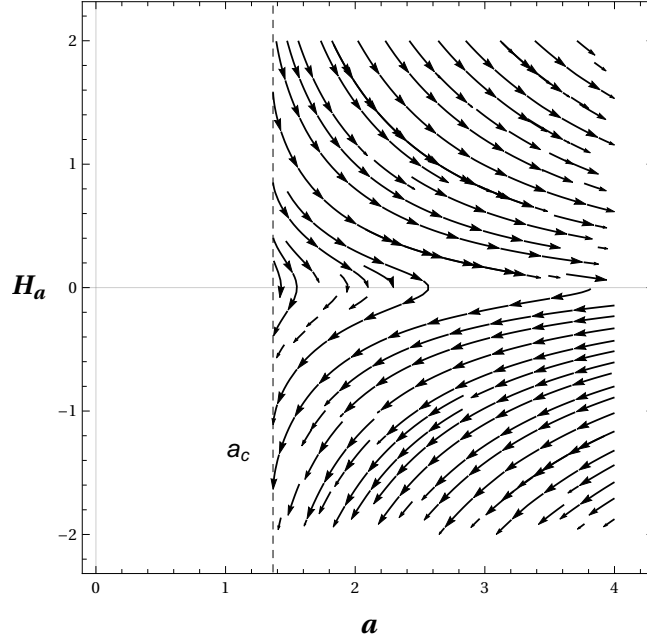


Figura 5.4: Sistema dinámico para $\lambda = -4$. En línea de trazos se grafica la recta $a = a_c \approx 1,37$.

ver despejando a \dot{H}_a de la ecuación 5.19 según

$$f_1 \dot{H}_a = -f_2 H_a^2 - f_3.$$

Cuando tomamos el límite $a \rightarrow a_c$, tanto f_1 como f_3 tienden a 0, ya que $\mathcal{A}(a_c) = 0$. Sin embargo, el término $-f_2 H_a^2$ tiende a $\frac{16}{\lambda a_c^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda a_c^2}\right) H_{a_c}^2$, que es no nulo. Entonces, la única forma de mantener la igualdad es pidiendo que \dot{H}_a diverja a $-\infty$, de forma de cancelar el comportamiento de \mathcal{A} que tiende a anularse y lograr llegar a un valor constante no nulo. Este comportamiento indica una probable divergencia en los escalares de curvatura. El escalar de curvatura para el ansatz de KS es

$$R = 2(2\dot{H}_a + \dot{H}_b) + 2(3H_a^2 + H_b^2 + H_a H_b + a^{-2}). \quad (5.26)$$

Para ver que el escalar diverge en a_c hay que probar que la expresión $2\dot{H}_a + \dot{H}_b$ es divergente en a_c , ya que el segundo término en paréntesis es no divergente debido a que $a(t) \neq 0$ para todo t , y los factores de Hubble tampoco divergen en $a = a_c$. Para

¹⁸Aquí hay una diferencia con el caso del bounce, donde el factor de Hubble en el rebote llegaba a un máximo y era independiente de las condiciones iniciales.

ello, vamos a despejar a H_b de 5.17 y derivar a ambos lados, para obtener

$$2\dot{H}_a + \dot{H}_b = \dot{H}_a \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3\dot{a}^2} - \frac{\lambda(1-\mathcal{A})}{3H_a^2} \right) + \frac{\dot{\mathcal{A}}}{H_a^2}. \quad (5.27)$$

El lado derecho de la igualdad tiende a infinito cuando $a \rightarrow a_c$. En consecuencia, el escalar de curvatura diverge en a_c . De aquí podemos concluir que los objetos extendidos sufren una fuerza infinita en la región de a_c , que tiende a comprimirlos. Esto se puede ver desde la ecuación de desviación de las geodésicas (cuya derivación se puede consultar en [29])

$$A^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho T^\sigma, \quad (5.28)$$

que expresa que la aceleración relativa A^μ de dos geodésicas cercanas con vector tangente T^α es proporcional a la curvatura. La divergencia del escalar de curvatura implica la divergencia de al menos una componente del tensor de Riemann, ya que por definición

$$R = g^{\mu\nu} R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad (5.29)$$

y sabemos que la métrica no se anula ni diverge en a_c . La divergencia del escalar de curvatura augura un comportamiento singular. Por otro lado, las partículas puntuales libremente gravitantes no sufrirían ningún problema al atravesar esa región. Para entender mejor el tipo de singularidad que se presenta, conviene estudiar las geodésicas en esta geometría.

5.2.3. Geodésicas para la geometría de Kantowski-Sachs

En esta sección vamos a derivar un resultado general para el ansatz de Kantowski-Sachs¹⁹ que es independiente de la teoría. Nuestro objetivo no es el de resolver la ecuación de las geodésicas, más bien nos interesa calcular los vectores tangentes de las geodésicas a partir de las cantidades conservadas provistas por las simetrías de la geometría.

Encontremos primero los vectores de Killing ξ_i^μ . En la métrica de Schwarzschild existen cuatro de estos vectores, así que no es sorprendente que tengamos la misma cantidad para la geometría de KS. Estos son

$$\xi_1^\mu = \partial_z, \quad (5.30)$$

$$\xi_2^\mu = \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \quad (5.31)$$

$$\xi_3^\mu = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \quad (5.32)$$

$$\xi_4^\mu = \partial_\phi. \quad (5.33)$$

¹⁹Es decir, para la tétrada con funciones arbitrarias $a(t)$ y $b(t)$ que llevan a una métrica de la forma 4.3.

Las cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas asociadas a los vectores de Killing son

$$U = b^2 \dot{z}, \quad (5.34)$$

$$L_1 = a^2 (\cos \phi \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \sin \phi \dot{\phi}), \quad (5.35)$$

$$L_2 = a^2 (\sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \cos \phi \dot{\phi}), \quad (5.36)$$

$$L_3 = a^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (5.37)$$

donde el punto corresponde a derivación respecto al parámetro afín τ . De aquí se pueden despejar \dot{z} , $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$. Para obtener \ddot{t} podemos usar la conservación de la cuadri-velocidad u . Tenemos entonces las componentes de los vectores tangentes a las geodésicas

$$\ddot{t}^2 = \delta + \frac{1}{a^2} \left[(L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi)^2 + \frac{L_3^2}{\sin^2 \theta} \right] + \frac{U^2}{b^2}, \quad (5.38)$$

$$\dot{z} = \frac{U}{b^2}, \quad (5.39)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{a^2} (L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi), \quad (5.40)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_3}{a^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.41)$$

con $\delta = 1$ para geodésicas temporales y $\delta = 0$ para geodésicas nulas. Nótese que estos vectores dependen solo de los factores de escala y no de sus derivadas, lo cual es común en modelos cosmológicos de alta simetría (lo mismo sucede en los modelos de FRW [30]).

Tanto en la solución de RG como en el caso reducido con $\lambda > 0$, las soluciones tienen un $a(t)$ que se anula para un tiempo propio finito. Además de la divergencia en los escalares de curvatura, se evidencia el comportamiento singular en el hecho de que los vectores tangentes de las geodésicas que llegan a $a = 0$ divergen, lo cual representa un punto final de estas curvas. En cambio, en el caso reducido con $\lambda < 0$, la solución llega hasta un valor mínimo de a dado por $a_c \neq 0$ y un valor máximo de b ; aquí no hay ningún problema con los vectores tangentes, que se mantienen bien comportados en a_c . Esto implica que las geodésicas podrán ser extendidas más allá del momento del rebote. De este modo, la solución poseería geodésicas completas. Este es un resultado fuerte, ya que podríamos concluir que el espacio-tiempo de Schwarzschild se vuelve geodésicamente completo con solo agregar un término cuadrático de la forma T^2/λ en el lagrangiano del ETRG (con λ negativo), que actúa como una especie de *cut-off*. El hecho de que las geodésicas nulas y temporales puedan extenderse más allá de a_c , aún cuando el escalar de curvatura es divergente ahí, es producto del carácter “cosmológico” del interior del agujero negro; los vectores tangentes dependen solo de a y b , y no de sus derivadas. Sin embargo, los escalares de curvatura contienen derivadas segundas

de la métrica, que son divergentes. Finalmente, observamos que en esta solución las curvas geodésicas no son \mathcal{C}^∞ , ya que en las derivadas de mayor orden aparecen H_a y sus derivadas, siendo \dot{H}_a divergente en a_c .

Es importante mencionar que la completitud geodésica es solo una condición necesaria para que un espacio-tiempo sea regular. En efecto, es sabido desde hace mucho tiempo [31], que existen ejemplos de espacios geodésicamente completos que contienen curvas (no geodésicas) incompletas. En este sentido, la incompletitud geodésica es la característica suficiente para que un espacio-tiempo se considere singular. Mostrar que un espacio-tiempo es regular, de hecho, es mucho más complicado que simplemente asegurar que las geodésicas son completas.

El tipo de comportamiento que encontramos en las soluciones estudiadas se engloba dentro de las llamadas *singularidades leves* (mild singularities). Otros ejemplos, en contextos cosmológicos, involucran ciertas patologías de los escalares que no se traducen, sin embargo, en divergencias de los campos de materia. El lector interesado en este tipo de singularidades puede consultar, entre otros, [32] [33] [34].

Si bien el objetivo primordial de este trabajo es el de buscar soluciones regulares en la teoría determinantal, este tipo de comportamiento es interesante de por sí y constituye un avance en el entendimiento de los posibles mecanismos de regularización que ofrece la teoría. Es remarcable que el efecto de una corrección ultravioleta arbitraria (con $\lambda < 0$) de la RG, lleve a una singularidad de carácter leve en el interior de los agujeros negros. Una caracterización más acabada de estas singularidades será objeto de futuras investigaciones.

5.3. Otras soluciones

Como hemos visto, las ecuaciones de movimiento de la teoría determinantal suelen ser muy extensas y difíciles de resolver para el ansatz de KS. Es por eso que los casos analizados hasta ahora corresponden a las elecciones más sencillas de las constantes α , β y γ , que simplifiquen la mayor cantidad posible de los factores presentes en las funciones $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ intervinientes en el lagrangiano 5.3. Esta sección no es una excepción; aquí vamos a describir las soluciones presentes para el caso $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$. Esta elección hace que los factores $\beta + 4\gamma - 2$ y $\beta + 2\gamma$ se anulen, por lo que el lagrangiano determinantal se simplifica y se reescribe de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda e}{16\pi G} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{4}{\lambda a^2}\right) \left(1 - \frac{4H_a H_b}{\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{4H_a^2}{\lambda}\right)} - 1 \right]. \quad (5.42)$$

De este lagrangiano podemos predecir que el comportamiento será radicalmente distinto dependiendo del signo de λ . Para $\lambda < 0$ el primer factor del radicando cambia de signo

en $a_c = \frac{2}{\sqrt{|\lambda|}}$, al igual que en la solución de la teoría BI- $f(T)$. Como los otros dos factores son positivos, la raíz solo tiene sentido en la región $a > a_c$, de forma similar a la sección anterior. Si $\lambda > 0$, ahora el limitante se encuentra en el factor de Hubble de a : si $H_a^2 < H_c^2 = \frac{\lambda}{4}$ la raíz está bien definida, pero existirá una región prohibida definida por $|H_a| > H_c$.

Para calcular las ecuaciones de movimiento vamos a utilizar la técnica MSE, de la misma manera que con los casos anteriores. La ecuación tipo Friedmann que obtuvimos es²⁰

$$X = \left[1 + \frac{4}{\lambda} H_a H_b \left(1 - \frac{8}{\lambda} H_a^2 \right) \right]^2, \quad (5.43)$$

donde

$$X = \frac{1 - \frac{4H_a^2}{\lambda}}{1 + \frac{4}{\lambda a^2}}. \quad (5.44)$$

Una expansión en potencias de $1/\lambda$ en 5.43 nos lleva a

$$H_a^2 + 2H_a H_b + a^{-2} - \frac{16}{\lambda} \left(4H_a^3 H_b - H_a^2 H_b^2 + a^{-2} H_a^2 + a^{-4} \right) + \mathcal{O}(\lambda^{-2}) = 0. \quad (5.45)$$

El orden 0 de esta ecuación y, por ende, el que domina el comportamiento en la región de baja energía, es $H_a^2 + 2H_a H_b + a^{-2} = 0$. Esta ecuación coincide con la ecuación de tipo Friedmann de la solución de Kantowski-Sachs en RG. La otra ecuación independiente que surge de aplicar el método MSE es

$$\text{sgn} \left(1 - \frac{4}{\lambda} H_a H_b \right) \sqrt{X} = 1 + \frac{4}{\lambda} \left(1 - \frac{8H_a^2}{\lambda} \right) \left(\dot{H}_a + H_a^2 \right) - \frac{16H_a^2}{\lambda^2 a^2} X, \quad (5.46)$$

que es casi una ecuación solo de $a(t)$, a menos de la dependencia de H_b en la función signo del lado izquierdo de la igualdad. Estudiemos las soluciones que emergen al considerar λ negativo y positivo, respectivamente.

5.3.1. Caso $\lambda < 0$

En la sección anterior comentamos que una característica del lagrangiano 5.42 para $\lambda < 0$ era la presencia de un valor crítico para el factor de escala a_c , que representa el valor mínimo al que puede llegar una solución $a(t)$. De la misma manera que en ocasiones anteriores, realizamos un análisis dinámico de la ecuación de movimiento 5.46, despejando a $y = \dot{H}_a$. El retrato de fases se presenta en la Fig. 5.5. Cabe aclarar que en el sistema dinámico asumimos que la función signo de la ec. 5.46 es negativa: en caso contrario, el retrato de fases nos mostraría que la gravedad es repulsiva para cualquier valor de a dentro de una franja $|H_a| < H_a^*$, con H_a^* una constante. Este comportamiento

²⁰Esta misma ecuación también fue obtenida utilizando el método formal.

es no físico ya que no reproduce a RG en el límite de a cercano al horizonte. Sin embargo, esto no es suficiente para descartar que la función signo cambie su valor en alguna otra región del retrato de fases. De todos modos, si $|H_a| > H_a^*$, las trayectorias presentan un comportamiento similar independientemente del signo elegido. Observamos que, de

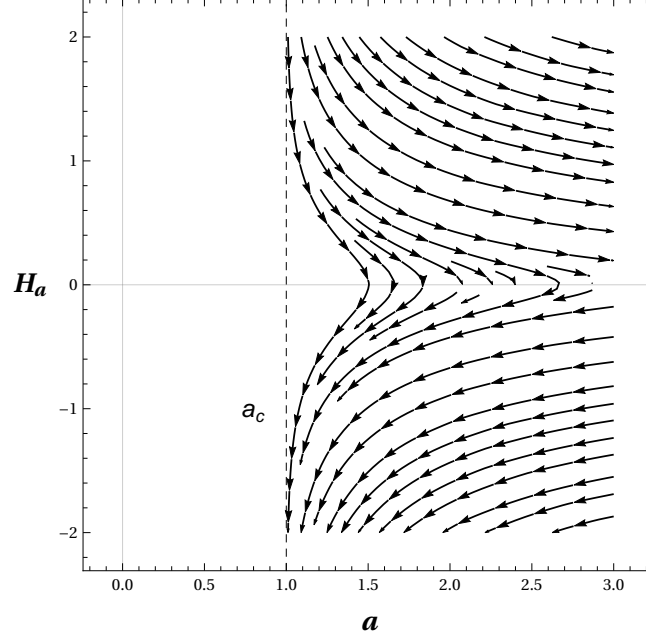


Figura 5.5: Sistema dinámico para $\lambda = -4$. En la línea de trazos graficamos la recta con $a = a_c$, donde $a_c = 1$ para esta elección de la constante de BI.

manera similar al caso reducido con λ negativo, las trayectorias tienden al valor a_c . Si bien no lo mostramos aquí, se puede ver en las soluciones numéricas que el factor de escala tiende al valor crítico a tiempo finito. Una diferencia con el caso reducido es que al menos uno de los factores de Hubble diverge en a_c . Esto se puede ver desde la ecuación de tipo Friedmann 5.43, ya que si $a \rightarrow a_c$, entonces $X \rightarrow \infty$. Para que se mantenga la igualdad, el miembro derecho obliga a que H_a o H_b diverjan en ese límite. Por esto, es de esperarse que también diverjan los escalares de curvatura. El hecho de tener un factor de escala límite no nulo para a permite la posibilidad de que la solución posea la propiedad de completitud geodésica. Sin embargo, la aceleración (correspondiente a la primera derivada de los vectores tangentes) dependerá de H_a y H_b , de los que al menos uno va a infinito cuando $a \rightarrow a_c$. Este tipo de comportamiento ocurre también en ciertos modelos cosmológicos cuyo contenido de materia está dado por fuentes de tipo *Chaplygin gas*, y se conoce como “Big-Freeze Singularity” [35].

5.3.2. Caso $\lambda > 0$

Ahora consideramos el caso con λ positivo, para el cual discutimos que aparecía un factor de factor de Hubble máximo H_c . Antes de analizar dinámicamente la ecuación 5.46, debemos calcular cuánto vale la función signo. Esto se puede deducir de la ecuación

de tipo Friedmann 5.43 de la siguiente manera: en la región $H_a^2 < H_c^2$, la expresión X es siempre menor a 1. Por lo tanto, lo mismo debe suceder con el miembro derecho. Entonces, la expresión

$$z = \frac{4}{\lambda} H_a H_b \left(1 - \frac{8}{\lambda} H_a^2 \right) = \frac{4}{\lambda} H_a H_b \left(1 - \frac{H_a^2}{H_0^2} \right) \quad (5.47)$$

debe cumplir $-2 < z < 0$. Si $H_a^2 < H_0^2 < H_c^2$, el término entre paréntesis en z es positivo. Para cumplir que z sea negativo, debe valer que $\frac{4}{\lambda} H_a H_b < 0$, por lo que el argumento de la función signo será $1 - \frac{4}{\lambda} H_a H_b > 0$ y se puede fijar a 1. En la región con $H_0^2 < H_a^2 < H_c^2$ también podemos utilizar la condición $-2 < z < 0$, pero esto solo nos permite concluir que $-1 < 1 - \frac{4}{\lambda} H_a H_b < 1$ y no deja claro que valor toma la función signo en esa región.

Vamos a graficar el sistema dinámico en función de las variables a e $y = \dot{a}$, donde la definición de y es la primera ecuación del sistema. Para despejar la segunda ecuación hay que tener en cuenta que $\dot{y} = \ddot{a} = a(\dot{H}_a + H_a^2)$, que se puede despejar de 5.46. En la Fig. 5.6 se presenta el retrato de fases para este sistema dinámico, asumiendo el signo positivo en toda la región $H_a^2 < H_c^2$ ²¹.

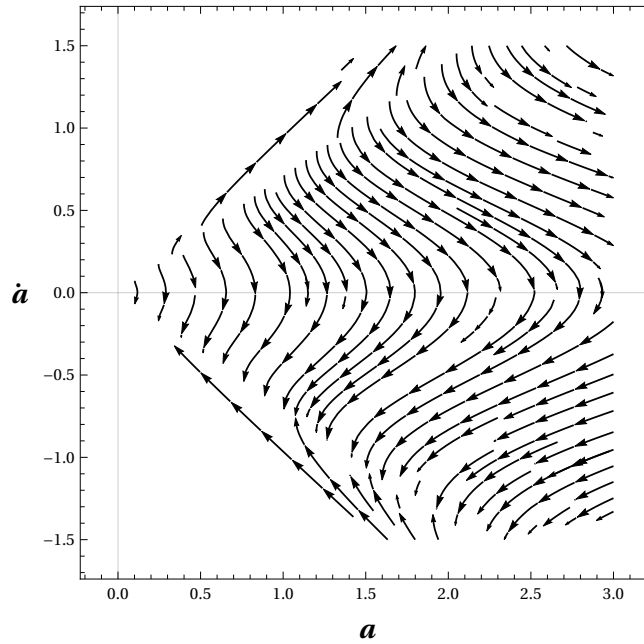


Figura 5.6: Sistema dinámico para $\lambda = 4$ en función de las variables a e $y = \dot{a}$.

Utilizando la función \dot{a} en lugar de H_a como variable nos permite ver que existen rectas que delimitan la región donde tenemos soluciones. La pendiente de estas rectas está asociada con el valor de Hubble crítico según $\dot{a} = \pm H_c a$ ²². Además, las rectas

²¹No hay diferencias significativas en la forma del retrato de fases considerando uno u otro signo para la región con $H_0^2 < H_a^2 < H_c^2$.

²²Esto se rastrea hacia el lagrangiano determinantal, en donde las raíces delimitan la región en donde están definidas las soluciones.

con pendiente $\pm H_0$ son regiones desde donde nacen y hacia donde llegan las soluciones del sistema, respectivamente. Las trayectorias en este sistema evolucionan de manera similar a la solución de KS hasta que su factor de Hubble llega a $\pm H_0$, donde la solución termina. Esto significa que distintas trayectorias “terminan” en regiones con valor final de a diferentes. Este comportamiento no parece tener sentido físico, pero lo mencionamos por mera curiosidad y por el hecho de que es la primera vez que aparece algo del estilo en las teorías consideradas. Queda para el futuro entender en más detalle esta solución.

Conclusiones

Se estudiaron varias soluciones de gravedad modificada obtenidas en las teorías de Born-Infeld- $f(T)$ y determinantal en el contexto teleparalelo, con el objetivo de encontrar soluciones que resuelvan el comportamiento singular que presentan algunas cosmologías y el agujero negro de Schwarzschild. Para el caso cosmológico se revisó el hecho de que la misma solución regular aparece tanto en la teoría funcional como en la determinantal; esta solución, que en el límite asintótico ($t \rightarrow -\infty$) tiende a un espacio de curvatura constante caracterizado por la métrica de de Sitter, se presenta como un estado común de ambas teorías de tipo BI. Además, se describió otra solución presente solo en la teoría determinantal cuyo comportamiento se puede describir por la aparición de un *Big-Bounce*, que contiene una singularidad de tipo leve. Estas singularidades aseguran la completitud geodésica, aunque vienen aparejadas con comportamientos patológicos de los invariantes de la curvatura.

En el caso del agujero negro, se estudió la solución regular obtenida para la teoría BI- $f(T)$, cuyo estado asintótico de curvatura constante coincide con la solución interior de Gott. Además, se probó que la primera corrección en las cercanías de la región asintótica se puede describir con una métrica que es una generalización 4-dimensional del agujero negro BTZ no rotante.

Como aporte original, se presentaron varias soluciones de agujero negro existentes en la teoría determinantal, entre las cuales se halló el espacio-tiempo de Schwarzschild en la forma dada por el ansatz de Kantowski-Sachs. Asimismo, se encontraron soluciones con singularidades fuertes como la de Schwarzschild y otras con singularidades leves y con una fuerte posibilidad de ser geodésicamente completas. Las últimas comparten un comportamiento similar al de la solución regular de la teoría BI- $f(T)$, para la cual aparece un factor de escala mínimo, no nulo. El objetivo de investigaciones futuras residirá en completar el entendimiento de algunas de las soluciones halladas en la teoría determinantal y también en seguir buscando soluciones de agujeros negros libres de singularidades.

Apéndice A

El modelo de Born-Infeld electromagnético

La teoría de Born-Infeld (B-I) fue una propuesta que estos autores realizaron en 1934 para regularizar la divergencia del campo eléctrico generado por una carga puntual. Este modelo de Born-Infeld contiene dos teorías: la funcional y la determinantal.

La propuesta funcional, concebida por Max Born [36], considera una densidad lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \lambda_{EM} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{L}_{EM}}{\lambda_{EM}}} \right], \quad (\text{A.1})$$

siendo $\mathcal{L}_{EM} \propto \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ el lagrangiano de Maxwell y λ_{EM} una constante. Este esquema es una clara reminiscencia del lagrangiano para la partícula libre relativista, en donde λ_{EM} juega el papel de la velocidad de la luz. Realizando una modificación de este tipo se obtiene que el campo eléctrico es finito en todo el espacio. Consecuentemente, la autoenergía del electrón asociada a ese campo también se vuelve finita. El parámetro λ_{EM} define en qué escala se produce la deformación de la teoría. En este caso se ajusta de forma tal que la autoenergía sea $E = m_e c^2$. El esquema de tipo BI- $f(T)$ que discutimos extensivamente en esta tesis está directamente relacionado con este tipo de deformación.

Una modificación inmediatamente posterior a la anterior fue considerada por Born e Infeld [37]. En esta teoría se incorporó el término pseudo invariante $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, de tal forma que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \lambda_{EM} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{L}_{EM}}{\lambda_{EM}} - \frac{p^2}{\lambda_{EM}^2}} \right], \quad (\text{A.2})$$

que puede escribirse en forma más compacta según

$$\mathcal{L} = \lambda_{EM}^2 \left[1 - \sqrt{-\left| \eta_{\mu\nu} + \frac{F_{\mu\nu}}{\lambda_{EM}} \right|} \right], \quad (\text{A.3})$$

siendo $F_{\mu\nu}$ el tensor de campo electromagnético. Sorprendentemente, la acción de Born-Infeld con un lagrangiano muy parecido a [A.3](#) aparece en la teoría de cuerdas, ya que describe el comportamiento del campo electromagnético en las D-branas [\[38\]](#). La teoría determinantal para la gravedad considerada en esta tesis encuentra su motivación en el lagrangiano [A.3](#).

Apéndice B

Técnica de mini super espacio

En [18] se derivaron expresiones formales para las ecuaciones de movimiento de la teoría determinantal, dadas por 2.11. Aunque esta derivación nos provee de un algoritmo para obtener las ecuaciones, su implementación práctica en casos particulares requiere de recursos computacionales muy elevados. Dada la complejidad de las expresiones a calcular, el algoritmo formal nos permite calcular las ecuaciones de movimiento en un reducido número de casos especiales dentro de la teoría determinantal. Sin embargo, existe un método alternativo para calcular las ecuaciones de movimiento en modelos de alta simetría, que conlleva un costo computacional menor. Este método, conocido como técnica de *mini super espacio* (MSE), consiste en fijar ciertas simetrías en la métrica y calcular las ecuaciones de movimiento a partir de la variación de la acción. Esto es análogo a congelar anticipadamente grados de libertad en la acción. Si bien esta técnica no es correcta en general para obtener soluciones, ya que se restringen de antemano grados de libertad en la acción, vemos que igualmente funciona para calcular las ecuaciones en muchos casos de interés para este trabajo. A continuación detallamos dos ejemplos relevantes donde la técnica MSE funciona correctamente. Para una discusión técnica sobre la validez de este procedimiento, remitimos al lector al trabajo original [39].

B.1. Ejemplo: métrica de Kantowski-Sachs en RG

Vamos a calcular las ecuaciones de movimiento de la métrica de Schwarzschild con el ansatz de Kantowski-Sachs. Esta métrica es la base a partir de la cual obtuvimos deformaciones de soluciones de agujero negro en los capítulos 4 y 5. La métrica representa un tipo de cosmología homogénea y anisótropa a la que se le puede asignar una equivalencia con el interior de un agujero negro de Schwarzschild [22].

Empezamos haciendo un ansatz de la forma

$$ds^2 = n^2(t)dt^2 - b^2(t)dz^2 - a^2(t)d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

donde $n(t)$, $a(t)$ y $b(t)$ son funciones a determinar. El hecho de que la métrica sea diagonal se puede deducir de la simetría de rotación de la misma manera en que se hace con la geometría de Schwarzschild. La novedad aquí reside en asumir a priori que las funciones $n(t)$, $a(t)$ y $b(t)$ dependen solo del tiempo. En este sentido, se restringe la métrica antes de extremar la acción. Asumiendo este ansatz, el lagrangiano de RG $\mathcal{L} \sim \sqrt{|g|}R$ se escribe de la forma (vamos a omitir los parentesis de la dependencia temporal de las funciones n , a y b)

$$\mathcal{L}_{KS} = -\frac{\sin(\theta)}{8\pi G n^2} \left[a\dot{b}(2n\dot{a} - \dot{n}a) + na^2\ddot{b} + b \left(-2\dot{n}a\dot{a} + n(2a\ddot{a} + \dot{a}^2) + n^3 \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Este lagrangiano es de segundo orden en $a(t)$ y en $b(t)$ y las ecuaciones de movimiento surgen de plantear las ecuaciones de Euler-Lagrange. De aquí obtenemos 3 ecuaciones en lugar del conjunto de 10 (no independientes) que se calculan evaluando el tensor de Einstein. Variando respecto de $n(t)$ tenemos

$$H_a^2 + 2H_a H_b + \frac{1}{a^2} = 0, \quad (\text{B.3})$$

que coincide con la ecuación ec. (8a) del paper original [22] y se puede pensar como una ecuación de tipo Friedmann para esta cosmología. En la ecuación no aparece $n(t)$ porque fijamos $n(t) = 1$ luego de hacer la variación; esto equivale a redefinir la coordenada temporal. No realizamos este cambio antes ya que la función auxiliar $n(t)$ se necesita en el ansatz para calcular las ecuaciones correctas. La ecuación que se obtiene variando respecto a $b(t)$ se puede escribir de la forma

$$2\dot{H}_a + 3H_a^2 + \frac{1}{a^2} = 0, \quad (\text{B.4})$$

que coincide con la ecuación (9a) de [22]. Finalmente, se puede probar que la ecuación que se obtiene variando respecto de $a(t)$ es dependiente de las otras dos ecuaciones y se puede calcular derivando B.3 respecto al tiempo y utilizando B.4 convenientemente.

En conclusión, hemos obtenido las ecuaciones de movimiento relevantes que fijan la solución de KS a partir de asumir un ansatz para la métrica. El costo computacional para calcular estas ecuaciones es menor que planteando las ecuaciones de Einstein, ya que en el método tradicional hay que calcular, en principio, 10 ecuaciones. Cabe mencionar que este mismo método se puede implementar en la métrica de Schwarzschild usual, obteniendo las ecuaciones de movimiento correctas, como se detalla en [28].

B.2. Ejemplo: agujero negro en la teoría BI- $f(T)$

En el capítulo 4 trabajamos con la solución regular de agujero negro hallada en la teoría BI- $f(T)$, en el contexto del ansatz de KS [16]. Las ecuaciones de movimiento allí presentadas se derivaron de la forma tradicional. Aquí probamos que estas mismas ecuaciones se pueden hallar utilizando la técnica MSE. Partiendo del mismo ansatz B.1, recordemos el lagrangiano para la teoría BI- $f(T)$

$$\mathcal{L}_{KS} = \frac{\lambda}{16\pi G} n a^2 b \sin(\theta) f(T), \quad (\text{B.5})$$

donde la función $f(T)$ de la teoría es

$$f(T) = \left[\sqrt{1 + \frac{2T}{\lambda}} - 1 \right] \quad (\text{B.6})$$

y el escalar T depende de los factores de escala de la forma

$$T = 2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{H_a^2 + 2H_a H_b}{n^2} \right). \quad (\text{B.7})$$

Nuevamente, podemos calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange. Variando respecto de $n(t)$ y luego fijando $n(t) = 1$ se obtiene la ecuación

$$f(T) + 4(H_a^2 + 2H_a H_b) f'(T) = 0, \quad (\text{B.8})$$

que coincide con la ecuación (11) de [16] y es una ecuación de movimiento que determina la solución regular del agujero negro en esta teoría. Podemos obtener la otra ecuación variando respecto de $b(t)$ y utilizando B.8 convenientemente. Después de un poco de álgebra, llegamos a

$$\frac{f(T)}{4} + \left(\dot{H}_a + 2H_a^2 + H_a H_b \right) f'(T) + H_a \dot{T} f''(T) = 0, \quad (\text{B.9})$$

que es la ecuación (12) de [16] y constituye la segunda ecuación de movimiento que determina las soluciones $a(t)$ y $b(t)$.

Concluimos que la técnica MSE resulta muy útil para derivar las ecuaciones de movimiento en los sistemas con alto grado de simetría y proveen un método efectivo para obtener las ecuaciones de las teorías mencionadas en el capítulo 5. Si bien no lo mencionamos aquí, también probamos que esta técnica funciona en el caso cosmológico plano para obtener las ecuaciones conocidas tanto en la teoría BI- $f(T)$ como en la teoría determinantal.

Bibliografía

- [1] Einstein, A. *Session Report of the Prussian Academy of Sciences*, 217–221, 1928. [5](#)
- [2] Maluf, J. *Ann. Phys.*, **525**, 339, 2013. [9](#)
- [3] Aldrovandi, R., Pereira, J. G. *Teleparallel Gravity - An Introduction*. Springer, 2013. [9](#)
- [4] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 161101, 2017. [11](#)
- [5] Ghez, A. M., Morris, M., Becklin, E. E., Tanner, A., Kremenek, T. *Nature*, **407** (6802), 349–351, 2000. [11](#)
- [6] Akiyama, K., *et al.* *Astrophys. J.*, **875** (1), L1, 2019. [11](#)
- [7] Planck Collaboration. *Astron. Astrophys.*, **594**, A20, 2018. [11](#)
- [8] Hawking, S. W., Penrose, R. *Proc. Royal Soc. A*, **314** (1519), 529–548, 1970. [11](#)
- [9] Hawking, S., Ellis, G. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973. [11](#)
- [10] Bengochea, G. R., Ferraro, R. *Phys. Rev. D*, **79**, 124019, 2009. [13](#)
- [11] Ferraro, R., Fiorini, F. *Phys. Rev. D*, **91** (6), 064019, 2015. [13](#)
- [12] Bejarano, C., Ferraro, R., Fiorini, F., Guzmán, M. J. *Universe*, **5** (6), 158, 2019. [13](#)
- [13] Ferraro, R., Guzmán, M. J. *Phys. Rev. D*, **98**, 124037, 2018. [13](#)
- [14] Ferraro, R., Guzmán, M. J. *Phys. Rev. D*, **101**, 084017, 2020. [13](#)
- [15] Ferraro, R., Fiorini, F. *Phys. Rev. D*, **75**, 084031, 2007. [14](#), [17](#)
- [16] Böhmer, C. G., Fiorini, F. *Class. Quantum Gravity*, **36** (12LT01), 1361–6382, 2019. [14](#), [16](#), [25](#), [59](#)

- [17] Fiorini, F. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 041104, 2013. [15](#), [16](#), [17](#), [19](#)
- [18] Fiorini, F., Vattuone, N. *Phys. Lett. B*, **763**, 45–51, 2016. [15](#), [37](#), [57](#)
- [19] Fiorini, F. *Phys. Rev. D*, **94**, 024030, 2016. [17](#), [19](#), [21](#), [23](#), [24](#)
- [20] Böhmer, C. G., Fiorini, F. *Class. Quantum Gravity*, **37** (18), 185002, 2020. [25](#), [31](#), [33](#)
- [21] Ferraro, R., Fiorini, F. *Phys. Rev. D*, **84**, 083518, 2011. [26](#), [27](#)
- [22] Kantowski, R., Sachs, R. K. *J. Math. Phys.*, **7**, 443, 1966. [26](#), [37](#), [57](#), [58](#)
- [23] Doran, R., Lobo, F., Crawford, P. *Found. Phys.*, **38**, 160–187, 2008. [26](#)
- [24] Fiorini, F., González, P., Vásquez, Y. *Phys. Rev. D*, **89**, 024028, 2014. [27](#)
- [25] Gott, J. R., III. *Astrophys. J.*, **288**, 422–427, 1985. [31](#)
- [26] Bañados, M., Teitelboim, C., Zanelli, J. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1849–1851, 1992. [31](#)
- [27] Bañados, M., Henneaux, M., Teitelboim, C., Zanelli, J. *Phys. Rev. D*, **48**, 1506–1525, 1993. [31](#)
- [28] Deser, S., Tekin, B. *Class. Quantum Gravity*, **20** (22), 4877–4883, 2003. [37](#), [58](#)
- [29] Carroll, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019. [45](#)
- [30] Fernández-Jambrina, L., Lazkoz, R. *Phys. Rev. D*, **70**, 121503, 2004. [46](#)
- [31] Geroch, R. *Ann. Phys.*, **48** (3), 526, 1968. [47](#)
- [32] Barrow, J. D. *Class. Quantum Gravity*, **21** (11), L79–L82, 2004. [47](#)
- [33] Barrow, J. D. *Class. Quantum Gravity*, **21**, 5619–5622, 2004. [47](#)
- [34] Barrow, J. D., Cotsakis, S., Tsokaros, A. *Class. Quantum Gravity*, **27** (16), 165017, 2010. [47](#)
- [35] Bouhmadi-López, M., González-Díaz, P. F., Martín-Moruno, P. *Phys. Lett. B*, **659** (1), 1–5, 2008. [49](#)
- [36] Born, M. *Proc. Roy. Soc. A*, **143**, 410, 1934. [55](#)
- [37] Born, M., Infeld, L. *Proc. Royal Soc. A*, **144**, 425–451, 1934. [55](#)
- [38] Fradkin, E., Tseytlin, A. A. *Phys. Lett. B*, **163**, 123–130, 1985. [56](#)
- [39] Palais, R. S. *Comm. Math. Phys.*, **69**, 19, 1979. [57](#)