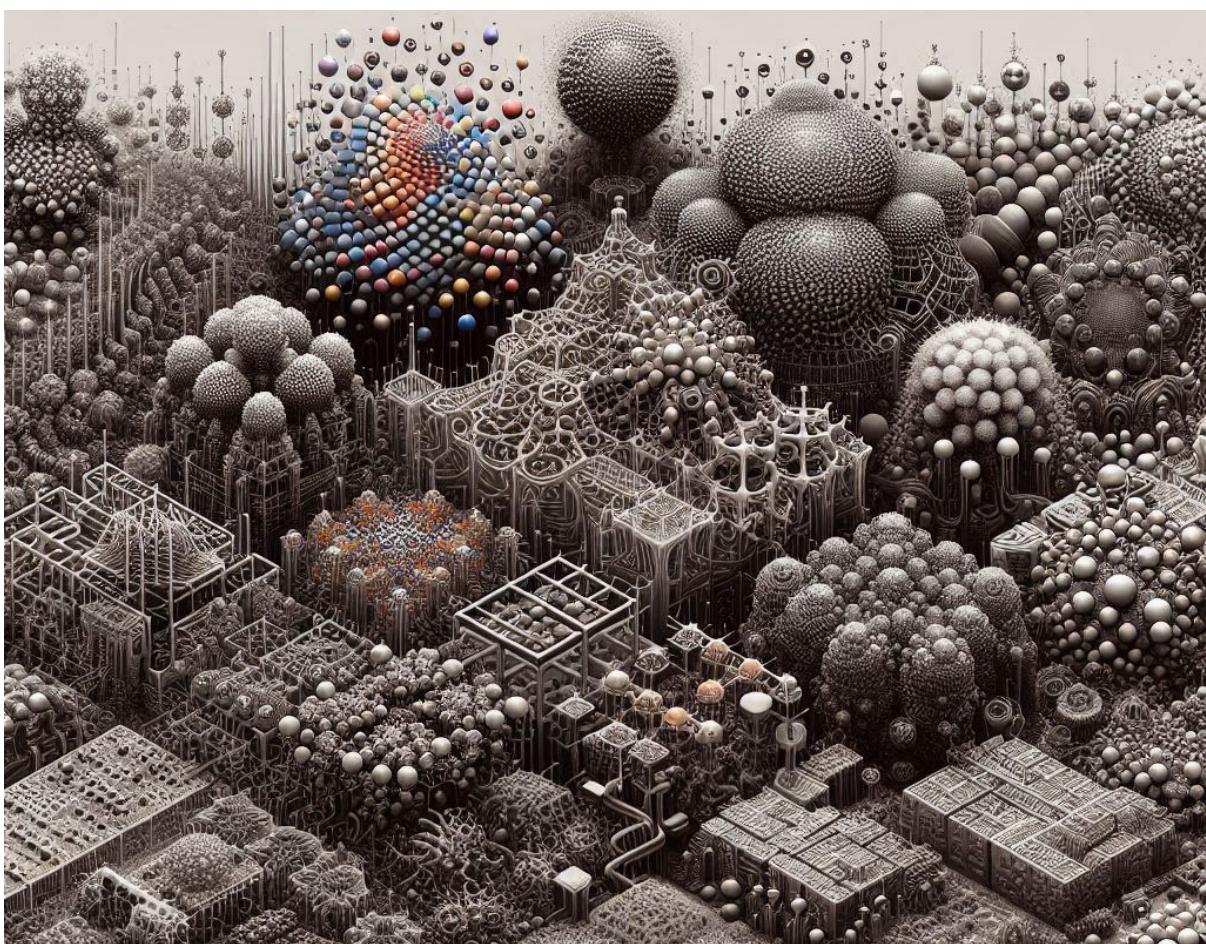


# COMPLEJIDAD

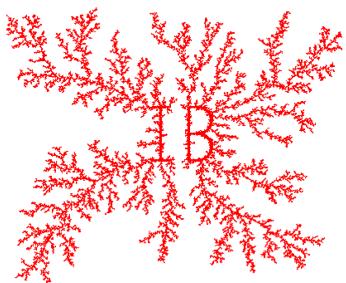
Guillermo Abramson

*Notas de clase*



---

INSTITUTO BALSEIRO  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO - CNEA  
Versión: 3 de septiembre de 2024



Complejidad - Notas de clase

© 2024 Guillermo Abramson

Logo IB fractal de Amir Zablotksy

Todos los derechos reservados

Versión: 3 de septiembre de 2024

## Prólogo

ÉSTE NO ES UN LIBRO DE TEXTO. Son las notas que uso para dar las clases de Introducción a los Sistemas Complejos en el Instituto Balseiro (un cuatrimestre, cuarto año de la Licenciatura en Física, y posgrados). Son incompletas, probablemente tienen errores, y abarcan por ahora los temas que preparé para el curso de 2024.

Si encuentran errores, por favor envíenlos a [guillermo.abramson@ib.edu.ar](mailto:guillermo.abramson@ib.edu.ar).

Encuentre la versión más reciente en: <http://bit.ly/complejidadIB>.



# Complejidad

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Presentación</b>                                 | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>El sistema de Lorenz</b>                         | <b>5</b>  |
| 2.1      | Equilibrios del sistema de Lorenz . . . . .         | 11        |
| 2.2      | El atractor de Lorenz . . . . .                     | 15        |
| 2.3      | Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .  | 18        |
| 2.4      | El mapeo de Lorenz . . . . .                        | 22        |
| <b>3</b> | <b>El mapeo logístico</b>                           | <b>27</b> |
| 3.1      | Duplicaciones de período . . . . .                  | 32        |
| 3.2      | Constantes de Feigenbaum . . . . .                  | 37        |
| 3.3      | El caos . . . . .                                   | 42        |
| 3.4      | Autosimilaridad y renormalización . . . . .         | 45        |
| 3.5      | Descripción probabilística . . . . .                | 50        |
| <b>4</b> | <b>Caos hamiltoniano</b>                            | <b>55</b> |
| 4.1      | Secciones de Poincaré y toros invariantes . . . . . | 58        |
| 4.2      | El modelo de Hénon-Heiles . . . . .                 | 64        |
| <b>5</b> | <b>Autómatas celulares</b>                          | <b>77</b> |
| 5.1      | Autómatas celulares en una dimensión . . . . .      | 78        |
| 5.2      | Autómatas celulares en dos dimensiones . . . . .    | 86        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 5.3       | Agentes . . . . .                              | 92         |
| <b>6</b>  | <b>Fractales</b>                               | <b>97</b>  |
| 6.1       | Agregación limitada por difusión . . . . .     | 98         |
| 6.2       | Fractales . . . . .                            | 102        |
| 6.3       | El conjunto de Mandelbrot . . . . .            | 108        |
| 6.4       | Autosimilaridad . . . . .                      | 111        |
| <b>7</b>  | <b>Percolación</b>                             | <b>115</b> |
| 7.1       | Percolación en 1D . . . . .                    | 115        |
| 7.2       | Percolación en 2D . . . . .                    | 116        |
| <b>8</b>  | <b>Pilas de arena</b>                          | <b>123</b> |
| 8.1       | Modelo de Bak . . . . .                        | 124        |
| 8.2       | Implementación . . . . .                       | 127        |
| 8.3       | Evolución . . . . .                            | 127        |
| 8.4       | Avalanchas . . . . .                           | 132        |
| 8.5       | Criticalidad auto-organizada . . . . .         | 135        |
| <b>9</b>  | <b>Incendios forestales</b>                    | <b>137</b> |
| 9.1       | Manejo de incendios . . . . .                  | 146        |
| 9.2       | Modelos realistas de incendios . . . . .       | 148        |
| <b>10</b> | <b>Osciladores no lineales</b>                 | <b>149</b> |
| 10.1      | Osciladores de relajación . . . . .            | 150        |
| 10.2      | Osciladores débilmente no lineales . . . . .   | 153        |
| 10.3      | Sincronización . . . . .                       | 162        |
| <b>11</b> | <b>Trabajos prácticos</b>                      | <b>183</b> |
| 11.1      | El sistema de Lorenz . . . . .                 | 183        |
| 11.2      | El mapeo logístico . . . . .                   | 184        |
| 11.3      | Sistema de Hénon-Heiles . . . . .              | 186        |
| 11.4      | Autómatas celulares en una dimensión . . . . . | 187        |
| 11.5      | Estructuras fractales . . . . .                | 190        |
| 11.6      | Percolación . . . . .                          | 193        |

|                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| 11.7 Pilas de arena . . . . .       | 194        |
| 11.8 Incendios forestales . . . . . | 195        |
| 11.9 Sincronización . . . . .       | 196        |
| <b>Bibliografía</b>                 | <b>197</b> |



## Presentación

LA COMPLEJIDAD ES UNO DE ESOS CONCEPTOS que eluden definiciones precisas, que satisfagan a todos los especialistas. Yo creo que es uno de esos conceptos que se entienden razonablemente bien, y que cualquier intento de definirlo sólo hace que se lo entienda menos. Es un caso parecido a “continente”, o “planeta”. Pero si todos tenemos una idea de lo que se trata, ¿por qué difícil de decir qué es?

La naturaleza está llena de fenómenos intrincados y patrones emergentes, con propiedades y comportamientos que no pueden ser explicados de manera simple o reduccionista. Estos sistemas complejos, presentes en una amplia gama de disciplinas, desde la física y la biología hasta la economía y la sociología, invitan a adoptar una perspectiva distinta, y a explorar las interacciones y relaciones que dan forma a la realidad. Los sistemas que exhiben estos comportamientos complejos comparten algunas características que ayudan a, si no definir, al menos acotar el concepto. En general, están formados por muchos agentes relativamente simples, tanto en estructura como en dinámica, que interactúan entre ellos. La complejidad surge y existe en un nivel de descripción superior, como resultado del juego mutuo entre la dinámica individual y las interacciones. Esa dinámica colectiva muchas veces es distinta de la individual. Incluso puede hacer que el sistema sea capaz de hacer cosas que los agentes individuales no pueden hacer. Por ejemplo, las células del miocardio son capaces de latir individualmente, pero no de funcionar como una bomba, como cuando

funcionan en conjunto en el corazón.

Esta característica es muy general, y permite casi siempre la separación de escalas en la descripción del sistema. A una escala “microscópica” vemos partículas o elementos individuales, y la descripción del sistema requiere especificar sus estados, sus posiciones y velocidades, las fuerzas que las controlan, etc. A una escala “macroscópica”, en cambio, se pueden definir propiedades globales del sistema, que generalmente involucran el cálculo de promedios sobre las propiedades microscópicas. Como físicos, es fácil reconocer que este es el programa de la Mecánica Estadística, después de todo, y no es de sorprender que el estudio de los sistemas complejos muchas veces se superponga con el de la física estadística, tanto temáticamente como en la comunidad de especialistas que nos interesamos en ellos.

Una característica más técnica de los sistemas complejos es que son abiertos y disipativos. Esto hace que, en lugar de tender al equilibrio en el sentido de la mecánica, tienden a una situación dinámica, en la cual existen fluctuaciones debidas a que hay energía o materia permanentemente inyectada y disipada en el sistema. En este estado, muchos sistemas son capaces de generar estructuras o patrones espacio-temporales que persisten por un tiempo mucho mayor que el tiempo característico de la dinámica microscópica, o que alcanzan distancias macroscópicas aunque las interacciones entre los elementos sean locales. El clima es un ejemplo paradigmático de todas estas características que estamos enumerando. Ciertamente, es el resultado de las interacciones entre las moléculas del aire, que están sujetas a la constante inyección de energía del Sol y su disipación. Pero aparte de esa descripción microscópica, es evidente que el clima de la Tierra exhibe una cantidad de fenómenos “a escala macroscópica”, tales como el ciclo de las estaciones, los patrones de circulación global, las *jet streams*, las oscilaciones globales como El Niño, los ciclones tropicales, etc. Y hace todo esto mientras la Tierra permanece en equilibrio térmico, disipando tanta energía como recibe del Sol.

Cuando observamos estructuras complejas en la naturaleza, aunque se trate de alguna de las muchas manifestaciones de la vida y no de campos tradicionalmente asociados con la física, como físicos nos preguntamos sobre los procesos que las originan. ¿Acaso la complejidad de las formas es

el resultado de procesos igualmente complejos? En algunos casos efectivamente es así, pero a lo largo de la segunda mitad del siglo XX empezó a revelarse que, en muchos casos, los procesos subyacentes son sorprendentemente simples. Por ejemplo, el estudio de un modelo simplificado de la atmósfera terrestre llevó al descubrimiento del caos determinista (a diferencia del caos aleatorio del movimiento de las moléculas) y a la explosión de su estudio.

La observación de que procesos simples pueden dar lugar a comportamientos o estructuras complejas tiene una vuelta de tuerca metodológica importante: la simplicidad de un mecanismo no debe inducirnos a concluir que debería ser fácil comprender sus consecuencias. El ejemplo más importante de un mecanismo simple que da lugar a un comportamiento muy complicado son los procesos de realimentación no lineal, donde se toma un estado como *input*, se lo transforma, y el resultado se usa como nuevo *input*. Esto es lo que hacen las ecuaciones diferenciales, o las simulaciones dinámicas en la computadora. Muchas veces, como las ecuaciones diferenciales no lineales son notoriamente difíciles de analizar, terminaremos apoyándonos en simulaciones y resoluciones computacionales para explorar la complejidad.

En estas clases vamos a estudiar ejemplos sencillos, muchas veces estereotipados, de diversos sistemas naturales que podemos caracterizar como complejos. Vamos a ver cómo modelarlos, cómo caracterizar sus dinámicas tratando de aislar los fenómenos emergentes de la maraña de detalles, y aprender cuánto podamos de las características matemáticas que nos presenten. Procuraremos identificar las características clave de la complejidad, como la no linealidad, la retroalimentación, la emergencia y la auto-organización.

Espero, sobre todo, que les sirvan de inspiración.



## El sistema de Lorenz

LA COMPLEJIDAD Y EL CAOS no son la misma cosa. Hay sistemas complejos que no son caóticos, y sistemas caóticos que no son complejos. El caos es la producción de comportamientos dinámicos aperiódicos, de aspecto aleatorio, a partir de la aplicación de reglas deterministas, simples y que generalmente involucran unos pocos grados de libertad. Esta “compli-cación” de las órbitas generalmente no es equivalente al comportamiento rico y colectivo que surge como resultado de las *interacciones* entre las unidades dinámicas que componen los sistemas complejos. De todos modos, existen puntos de contacto, tanto en metodología como en conceptos, y los avances en la teoría del caos han resultado más de una vez motivadores del estudio de los sistemas complejos, que surgió posteriormente.

Por otro lado, existen sistemas obviamente complejos, en el sentido usual, que admiten reducciones matemáticas a pocos grados de libertad, cuyas soluciones resultan caóticas. Es el caso del clima: el movimiento del aire, su temperatura, presión, humedad, la interacción con los océanos, el hielo y los continentes, es enormemente complejo. Tanto los patrones globales del clima como los fenómenos meteorológicos son fenómenos emergentes de esta complejidad, resultado de la interacción de muchísimos grados de libertad. Aún así, la dinámica de la atmósfera puede planetarse como un sistema fluido con muchos menos grados de libertad, disipativo y forzado: el forzado es térmico, y la disipación es tanto térmica como mecánica. Su formulación matemática abstracta de todos modos es intimidante,

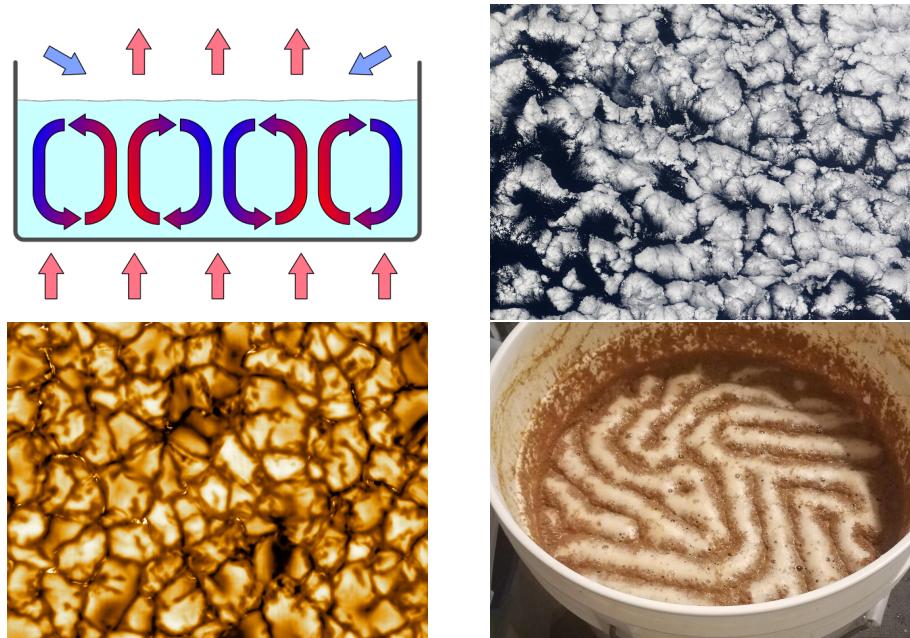


Figura 2.1: Celdas de convección en el sistema de Rayleigh-Bénard (de Wikipedia). Altocúmulos (¿o estratocúmulos?) (NASA Worldview 2024-08-21, océano Pacífico frente a Chile). Gránulos de la fotósfera solar (Inouye Telescope). Fermentación de hidromiel.

y requiere el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes más el transporte del calor. Lord Rayleigh había estudiado un sistema de este tipo, en una geometría simplificada, a principios del siglo XX. Rayleigh estudió una lámina de aire extendida en dos dimensiones horizontales, con gravedad, calentada por debajo y enfriada por encima. En este sistema hay una competencia entre la conducción térmica por conducción en el fluido, o por convección del mismo, cuando la flotabilidad del fluido supera la viscosidad. El fenómeno se llama hoy convección de Rayleigh-Bénard, y consiste en la formación de celdas y rollos de convección como los que se observan en la atmósfera, y familiares a cualquiera que haya cocinado una sopa crema (Fig. 2.1). Pero su aplicación al estudio del clima y la predicción meteorológica requerían el tipo de cálculo numérico que recién fue posible a partir de los años 1950. En 1961 un meteorólogo del MIT, Edward Lorenz, empezó a interesarse en el problema cuando pudo disponer de una de las primeras computadoras

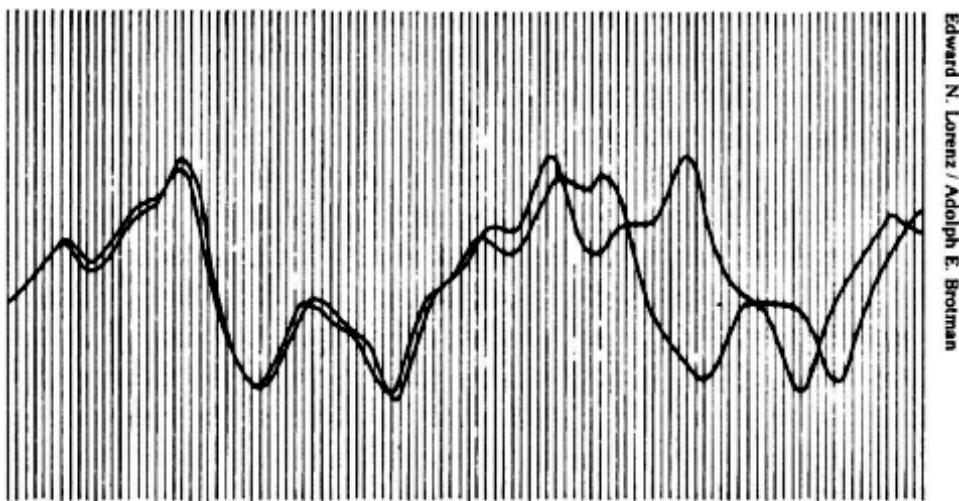


Figura 2.2: Divergencia de las trayectorias calculadas por Lorenz (de Gleick).

digitales comerciales, una LGP-30.<sup>1</sup> La primera simplificación del problema que estudió, desarrollando los campos de velocidad y temperatura en funciones ortogonales, era un sistema de 12 ecuaciones diferenciales. Las soluciones numéricas tenían una pinta realista, y Lorenz probablemente pensó que, con este sistema, tenía la clave para la física de la atmósfera. ¿Qué podría salir mal? Bueno, Lorenz descubrió que todo. Un día decidió analizar con más detalle una de las soluciones generadas por la computadora. Eligió los valores que la solución numérica había producido por la mitad del tiempo total calculado, y los usó como nuevas condiciones iniciales.<sup>2</sup> Cuando revisó la nueva corrida se encontró con que, poco a poco, el nuevo cálculo se apartaba del anterior; pero en breve se apartaba tanto que no tenían nada que ver una con la otra (Fig. 2.2).

Lorenz descubrió que la divergencia se debía a que los valores impresos tenían 3 dígitos, mientras que las variables del cálculo se almacenaban in-

<sup>1</sup>Tenía 4K de memoria (sí: cuatro kas, medidos en palabras de 31 bits), un reloj de 120 kHz, 113 tubos de vacío (equivalentes de los transistores) y consumía 1.5 kW. La interacción era a través de un teclado de máquina de escribir (sin el número 1) y cintas de papel, y la salida era mediante la impresión en la máquina de escribir a 10 caracteres de texto por segundo. Costaba, a valores de hoy, algo más de medio millón de dólares.

<sup>2</sup>E Lorenz, *On the prevalence of aperiodicity in simple systems*, en: Grmela and Marsden (eds) *Global Analysis* (Springer, 1979).

ternamente con seis. Así que las nuevas condiciones iniciales eran en realidad una pequeña perturbación de las anteriores. No tardó en comprender que esta inestabilidad del sistema era responsable de la aperiodicidad de la solución, que le resultaba atractiva desde una perspectiva meteorológica. Llegó a la conclusión de que, si sus ecuaciones capturaban fielmente el comportamiento de la atmósfera, el sueño de predecir el tiempo como se predicen los eclipses, era imposible.

Para entender mejor lo que estaba pasando, decidió simplificar todavía más el modelo, reduciéndolo a tres variables.<sup>3</sup> Las ecuaciones que estudió forman el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = r x - y - xz, \quad (2.2)$$

$$\dot{z} = xy - bz. \quad (2.3)$$

De acuerdo a la motivación original,  $x$  es la intensidad del movimiento convectivo,  $y$  es la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y las descendentes, y  $z$  la distorsión de la temperatura en la dirección vertical (respecto de un perfil lineal). Hay tres parámetros, relacionados con la mecánica de fluidos, todos ellos positivos.  $\sigma$  es el *número de Prandtl*, cociente entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica. Cuando es pequeño, domina la difusividad térmica y el transporte de calor es por conducción. Cuando es grande, domina la viscosidad (también llamada difusividad del momento), y la conducción es principalmente por convección. En los gases, el número de Prandtl es aproximadamente 1, y eso hace que ambos mecanismos compitan, complicando toda la dinámica. El parámetro  $r$  es el *número de Rayleigh*, y caracteriza el tipo de flujo. Cuando es pequeño el flujo es laminar, y cuando  $r$  es grande, es turbulento (el sistema se desestabiliza controlado por  $r$ ). El parámetro  $b$  es más específico de este sistema: es la relación de aspecto de los rollos de convección (si no recuerdo

---

<sup>3</sup>En casi todos los libros se menciona esta simplificación sin mayores detalles, pero encontré uno donde está el cálculo completo, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Es el Appendix C de Hillborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, 2001).

mal). Pero todo esto resultó anecdótico en función del descubrimiento de Lorenz.

Por otro lado, el sistema es bastante sencillo, hasta inocente. Tiene tres dimensiones, pero apenas dos no-linealidades, que son cuadráticas. Una es positiva, la otra negativa: tiene un aire a Lotka-Volterra, el bien conocido modelo de depredadores y presas, que muestra oscilaciones similares a la de un oscilador armónico. Pero, a diferencia de lo que pasa en dos dimensiones (y en una), en tres dimensiones no tenemos una teoría completa que describa todas las posibilidades del flujo de un sistema dinámico. Un sistema de tres dimensiones podía ser caótico. Y cada sistema caótico, más allá de ciertas generalidades, resultó que es más o menos único en su caoticidad.<sup>4</sup>

¿Qué podemos hacer con el sistema de Lorenz? El alumno aplicado de sistemas dinámicos dirá: busquemos los equilibrios y su estabilidad. Sí, hagamos eso, pero hay un par de cositas importantes que podemos decir antes, en este caso. Empecemos observando que tiene una simetría fácil de ver. Si reemplazamos:

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y), \quad (2.4)$$

las ecuaciones no cambian. Es decir, si  $(x(t), y(t), z(t))$  es una solución, también lo es  $(-x(t), -y(t), z(t))$ . En otras palabras, las soluciones son, o bien simétricas, o vienen de a dos, simétricas entre ellas.

La segunda observación importante es que el sistema es *disipativo*: si tomamos un volumen en el espacio de fases, y le aplicamos la dinámica, el volumen se reduce. Siempre. Esto puede demostrarse de manera simple (Strogatz). Lo que resulta es que cualquier volumen evoluciona como  $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$ , reduciéndose exponencialmente (recordar que  $\sigma$  y  $b$  son positivos).

---

<sup>4</sup>Existe un sistema mecánico exactamente análogo al sistema de Lorenz, formado por una rueda de baldes de agua que se cargan desde arriba y pierden líquido. En el libro de Strogatz está hecha la derivación de las ecuaciones de movimiento. Hay videos de su implementación física, por ejemplo: [Malkus waterwheel](#), y la siguiente es del mismísimo Strogatz, con su explicación: [Chaotic waterwheel](#).

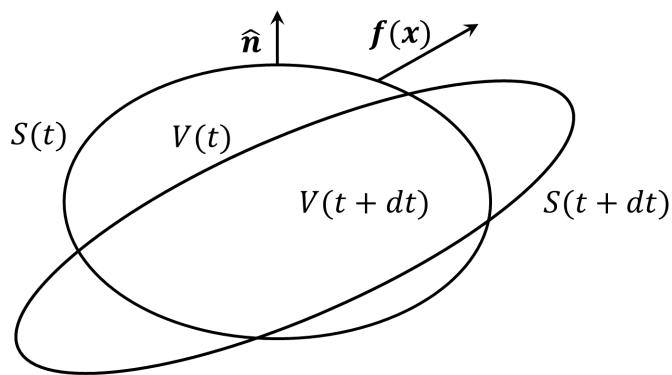


Figura 2.3: Evolución del volumen en el espacio de fases ante el flujo  $\mathbf{f}$ .

Esta contracción tiene consecuencias importantes. Por un lado, nos dice que no puede haber repulsores. Es decir, si encontramos un punto fijo, no puede ser inestable en todas las direcciones. Porque si fuera así, podríamos dibujar un dominio chiquito a su alrededor, y el flujo lo haría crecer. Así que, si hay inestabilidad y repulsión en un dirección, en alguna otra dirección tiene que haber estabilidad y contracción, de manera que el volumen total se contraiga (Fig. 2.3).

La segunda consecuencia es una generalización de esto: todas las trayectorias tienen que ir hacia atractores de tamaño nulo. De nuevo, si dibujamos un dominio de condiciones iniciales, el flujo debe contraerlo siempre, de manera que a tiempo infinito el volumen ocupado debe ser nulo. Podrían ser puntos fijos, por ejemplo, o ciclos límites, que son objetos de medida nula en el espacio, o alguna otra cosa. Lo que no podrían hacer es cubrir una superficie, como sería el caso de trayectorias cuasi-periódicas, por ejemplo, que se enroscan en un toroide de dos dimensiones (pensar en un oscilador armónico de dos grados de libertad, con dos frecuencias propias no commensurables; el oscilador armónico, por supuesto, es conservativo, no disipativo).

## 2.1 Equilibrios del sistema de Lorenz

Ahora sí, busquemos puntos fijos del sistema, poniendo a cero las velocidades:

$$0 = \sigma(y - x), \quad (2.5)$$

$$0 = r x - y - xz, \quad (2.6)$$

$$0 = xy - bz. \quad (2.7)$$

Vemos que hay un equilibrio que salta a la vista, el origen de las tres coordenadas:

$$(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0). \quad (2.8)$$

El origen, entonces, es un punto fijo, para cualquier valor de los parámetros. Tengamos presente lo que dijimos antes: no puede ser un repulsor, tiene que tener al menos una dirección estable, debido a la contracción del volumen.

Existen además otros dos puntos fijos, fáciles de encontrar (Problema):

$$x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad (2.9)$$

$$z^* = r - 1. \quad (2.10)$$

El signo  $\pm$  refleja la simetría que mencionamos arriba: estos dos puntos fijos vienen de a pares. En general se los llama  $C^+$  y  $C^-$ .

Notemos que  $C^+$  y  $C^-$  existen sólo para  $r > 1$  (recordar que  $b$  también es positivo). Es más, cuando  $r \rightarrow 1$ , los dos equilibrios se acercan, se unen en el origen y desaparecen: tenemos una bifurcación. ¿Qué tipo de bifurcación será? Podemos verlo analizando la estabilidad lineal, que haremos a continuación.

Empecemos por la estabilidad del origen. El Jacobiano del sistema es:

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Vemos que tiene una estructura de bloques, así que es fácil encontrar sus autovalores. Del bloque  $1 \times 1$  de abajo a la derecha tenemos un autovalor que es siempre negativo:  $\lambda_3 = -b < 0$ . Así que vemos que el origen tiene siempre una dirección estable, que contribuye a la contracción del volumen. Los otros autovalores vienen del bloque de  $2 \times 2$ , que se calculan sin dificultad:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma + 1)^2}{4} + \sigma(r - 1)}. \quad (2.12)$$

Aquí podemos ver que, como  $\sigma > 0$ , el primer término siempre es negativo. En  $\lambda_2$  la raíz cuadrada está restada, así que  $\lambda_2$  también es negativo, dando estabilidad. Para  $\lambda_1$  vemos que podría haber un cambio de signo, según sea  $r$  comparado con 1. Si  $r < 1$ , el radical queda menor que  $(\sigma + 1)^2/4$ , la raíz es positiva pero no alcanza el valor  $(\sigma + 1)/2$ , y también tenemos que  $\lambda_1 < 0$ . Así que todos los autovalores son negativos, y el origen es linealmente estable. ¿Qué pasa si  $r > 1$ ? El segundo término del radical queda positivo, la raíz supera al término negativo de afuera, y el autovalor  $\lambda_1 > 0$ , dando inestabilidad en una dirección. Así que el origen pierde la estabilidad cuando  $r = 1$ . Pero no es un repulsor, porque tiene dos direcciones estables. Es como un *saddle point*, pero en 3D, con una dirección inestable y dos estables (Fig. 2.4, izquierda). Si  $r < 1$ , todas las direcciones son estables, y el origen es un sumidero.

Adicionalmente, se puede demostrar que el origen es *globalmente estable* cuando  $r < 1$ , ya que existe una función de Lyapunov,  $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$ . Es fácil ver que es definida positiva, y queda como ejercicio demostrar que es decreciente en el tiempo (de hecho, tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ ) (Strogatz). En definitiva, no pasa nada interesante cuando  $r < 1$ , ciertamente no es caótico, ni siquiera es periódico, todas las condiciones iniciales se van al cero, aburridísimo.

La estabilidad de  $C^+$  y  $C^-$  requiere calcular los autovalores del jacobiano correspondiente. Es un poco tedioso, pero se puede demostrar que son estables cuando:

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}, \quad (2.13)$$

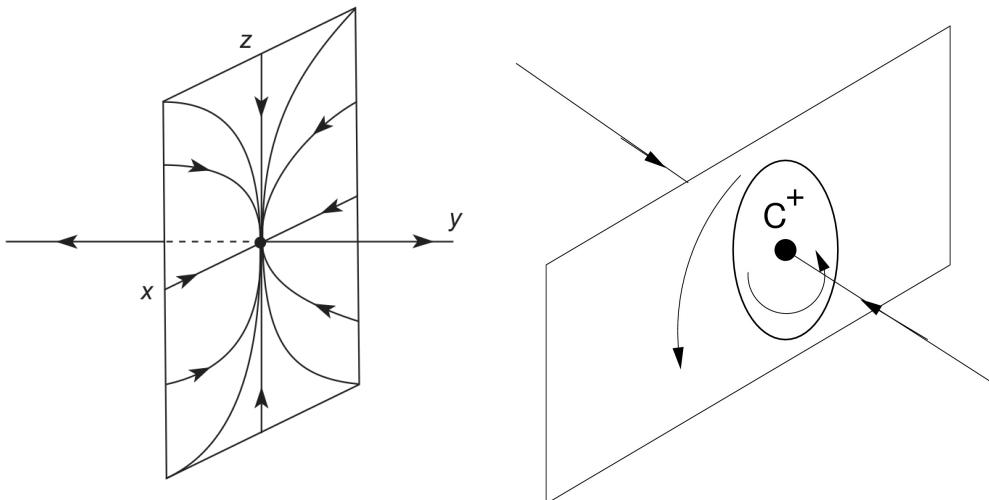


Figura 2.4: Inestabilidad del origen (izquierda), estabilidad de  $C^+$ , e inestabilidad del ciclo límite alrededor suyo, en la región  $1 < r < r_H$ . (La de la izq del libro de Hirsch, Smale y Devaney.)

(suponiendo además que  $\sigma - b - 1 > 0$ , obviamente). ¿Qué tenemos aquí? Por un lado, vemos que  $C^+$  y  $C^-$  son estables cuando  $r > 1$ , es decir cuando el origen, del cual nacen cuando  $r = 1$ , es inestable. Así que la bifurcación que tenemos en  $r = 1$  es pitchfork (supercrítica): un punto fijo estable que pierde estabilidad y se descompone en dos puntos fijos estables y simétricos.

Para valores mayores de  $r$ , tenemos que  $C^+$  y  $C^-$  pierden esta estabilidad, y lo hacen en una bifurcación de Hopf (por eso el subíndice) en  $r_H$ . Es decir, los autovalores son complejos conjugados cuya parte real cambia de signo. Pero ojo: no es una bifurcación de Hopf como las más comunes: es *subcrítica*, es decir, los ciclos límite son inestables y están por debajo del punto crítico. Podemos dibujar un diagrama de bifurcaciones bastante completo ahora (Fig. 2.5). Estos ciclos inestables (ciclos *saddle*) son propios del espacio 3D, en 2D no existe nada por el estilo (Figura 2.4, derecha).

Cuando  $r \rightarrow r_H$  por la izquierda, los ciclos se contraen y desaparecen, transfiriéndole su inestabilidad a los puntos fijos en la bifurcación de Hopf. Más allá, cuando  $r > r_H$ , no hay más puntos fijos. ¿Qué pasará con las

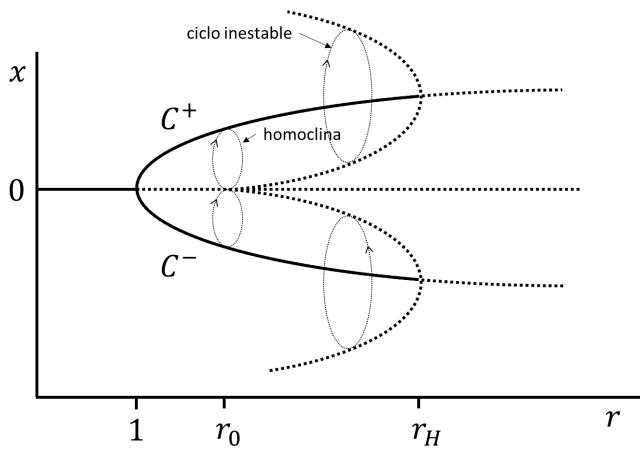
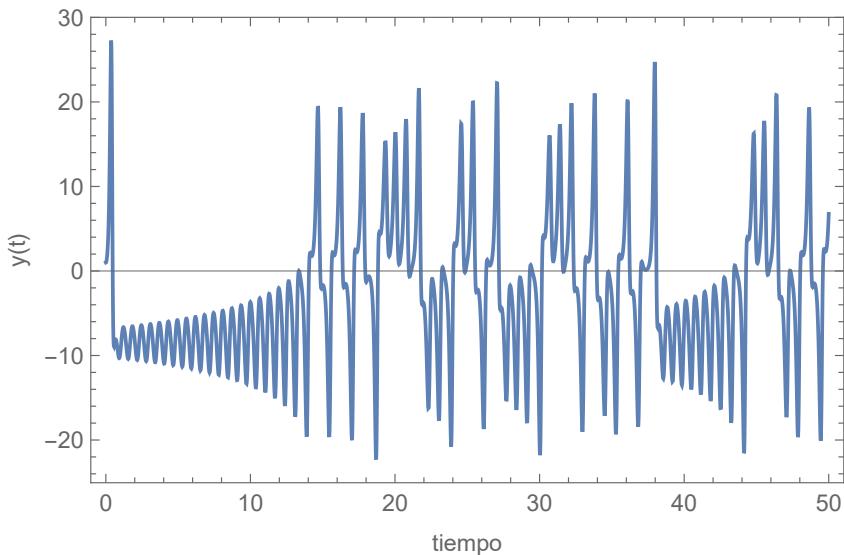


Figura 2.5: Las primeras bifurcaciones del sistema de Lorenz.

trayectorias? Una posibilidad sería que diverjan al infinito. Pero puede demostrarse que todas las trayectorias son acotadas (ejercicio complicado, tengo una prueba en algún lado y está como ejercicio en Strogatz). Otra posibilidad sería que haya algún otro ciclo límite, estable. Tampoco es el caso: Lorenz mostró un argumento razonable de que, al menos para  $r$  un poco mayor que  $r_H$ , cualquier ciclo debe ser inestable (lo veremos en la Sección 2.4). Es como un *pinball*: las trayectorias se la pasan rebotando de un punto inestable a otro, mientras que al mismo tiempo permanecen confinadas a un objeto de medida nula, y por supuesto sin cruzarse sobre sí mismas, debido a la unicidad del sistema dinámico. ¿Entonces? Entonces, eso es el caos.

Vamos a usar los valores estándar de los parámetros, que son los usados por Lorenz:  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ , y usaremos  $r$  como parámetro de control. En este caso tenemos  $r_H = 24.74$ . En el valor  $r_0 = 13.926$  se tocan las amplitudes de los dos ciclos inestables alrededor de  $C^+$  y  $C^-$ , que además coinciden con el punto fijo inestable del origen. En ese punto se conecta el equilibrio del origen consigo mismo, formando una órbita *homoclina*, y se llama bifurcación homoclínica.

Figura 2.6: Condición inicial en  $(0, 1, 0)$ .

## 2.2 El atractor de Lorenz

Esto es todo lo que podemos avanzar analíticamente. Hagamos como Lorenz, que integró numéricamente el sistema con  $r$  un poco transcrítica,  $r = 28 > r_H$ , donde esperamos que ocurran cosas raras.

Empezamos con una condición cerca del punto saddle del origen, y vemos un transitorio que se aleja de él, y después oscilaciones irregulares, que nunca se repiten (Fig. 2.6).

A pesar de la aperiodicidad de las trayectorias, en el espacio de fases aparece una magnífica estructura. Por ejemplo, dibujando  $x(t)$  vs  $z(t)$  se forma la preciosa mariposa de la Fig. 2.7 (izquierda).

¿Qué vemos en esta órbita? Vemos que se aleja del origen, da media vuelta alrededor del equilibrio  $C^+$  y se mete en una espiral saliente del  $C^-$ . Da un montón de vueltas en ésta, y finalmente sale disparada nuevamente hacia  $C^+$ , donde da algunas vueltas y regresa a  $C^-$ , y así sucesivamente. El número de vueltas que da en cada pasada es irregular, e indistinguible de un número aleatorio. Es el efecto pinball que decíamos antes, y se debe a que la variedad inestable de un equilibrio se conecta con alguna variedad estable de otro. En la Fig. 2.7 (derecha) se ve un esquema de esto.

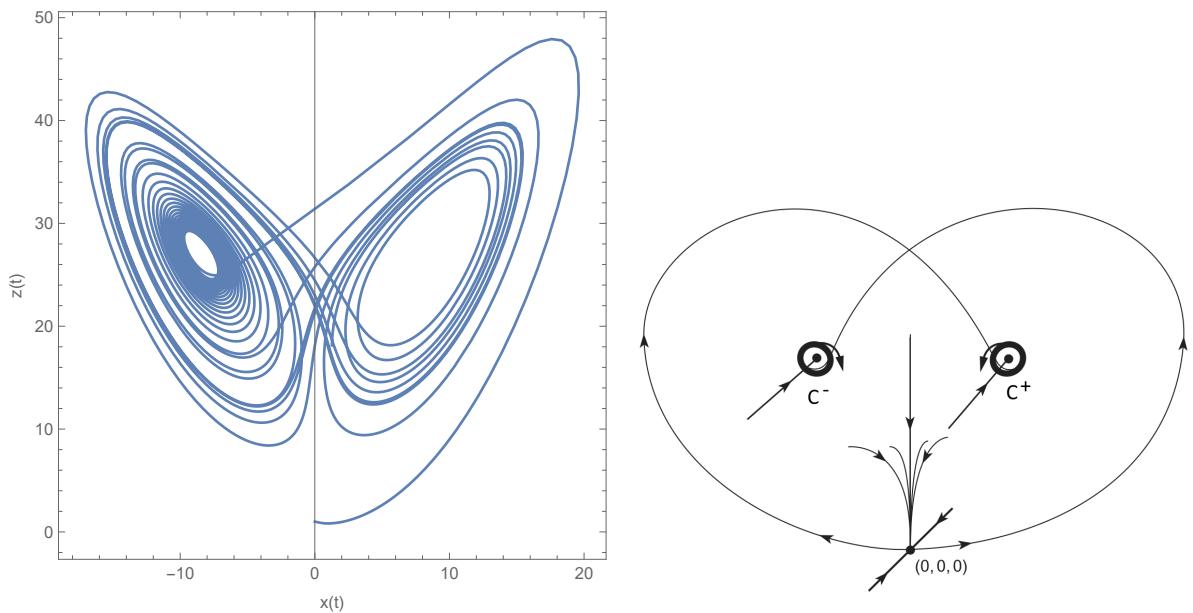


Figura 2.7: Proyección en el plano  $(x, z)$ . Diagrama, del libro de Hirsch, Smale y Devaney.

La solución que vemos en la Fig. 2.7 parece cruzarse sobre sí misma, pero es una ilusión debido a que la trayectoria es realmente tridimensional, y estamos viendo una proyección. La Fig. 2.8 muestra dos vistas de la solución tridimensional.

Cuando vemos la trayectoria en tres dimensiones vemos que la mariposa es un objeto intrincado y muy delgado, con una torsión rara en la tercera dimensión. Todas las condiciones iniciales se acercan a él, es decir es un *atractor* de la dinámica. Pero no es ni un punto fijo, ni un ciclo. Ruelle y Takens acuñaron el nombre *atractor extraño* para este tipo de objetos. Es el conjunto de medida nula que al principio dijimos que tenía que existir. A veces se le dice simplemente *solución caótica*, o simplemente *caos*.

La estructura geométrica del atractor extraño es complicada, y difícil de apreciar en figuras planas. En el gráfico de la solución, Fig. 2.8, es evidente que está formado por dos láminas muy planas, que se acercan y fusionan en la región del lado del origen. La Fig. 2.9 muestra un esquema, con una parte de trayectoria dibujada. La región donde las dos láminas se unen parece contradecir el teorema de unicidad. Sin embargo, se trata de

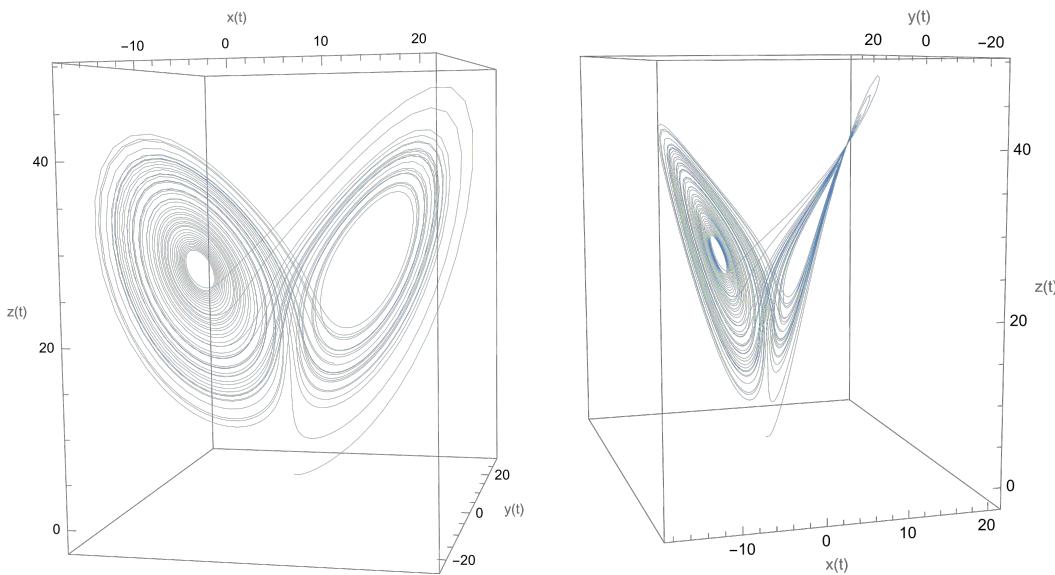


Figura 2.8: Dos vistas de la misma trayectoria en el espacio de fases.

una ilusión debida a la fuerte contracción del volumen del espacio de fases, y a la limitada resolución de la representación gráfica. Las dos superficies sólo parece que se fusionan. Lorenz explica que, si se sigue una trayectoria a medida que gira alrededor de  $C^+$  y  $C^-$ , son en realidad dos superficies. Así que cuando se fusionan, son cuatro superficies. Si uno sigue el proceso una vuelta más, encuentra que hay en realidad ocho superficies, etc. Concluye finalmente que se trata de un complejo de infinitas superficies,<sup>5</sup> cada una extremadamente cerca de una o de la otra, de las dos superficies que se juntan. Hoy en día llamamos a esta estructura *fractal*, un conjunto con volumen cero pero área infinita. Las mediciones numéricas señalan que el atractor de Lorenz es un objeto de “dimensión fractal” 2.05: es algo más que una superficie, pero bastante menos que un volumen. Volveremos a encontrar a los fractales más adelante.

<sup>5</sup>Es inevitable pensar en *El libro de arena*, de J. L. Borges. O en palmeritas de hojaldre, según la hora del día.

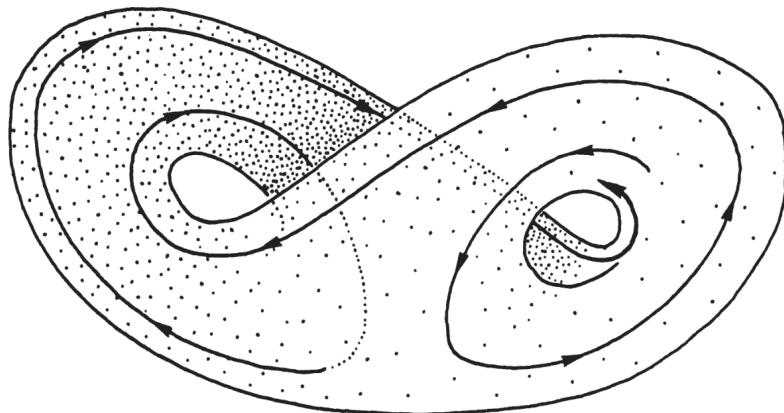


Figura 2.9: La rara topología del atractor de Lorenz.

## 2.3 Sensibilidad a las condiciones iniciales

El movimiento en el atractor exhibe una de las características más firmes del caos: la *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Es obvio que cualquier trayectoria depende de las condiciones iniciales, en cualquier sistema dinámico. En un sistema disipativo, es menos obvio lo que esto significa, ya que existen los atractores, que justamente atraen todas las trayectorias de una cantidad de condiciones iniciales (puntos fijos o ciclos límite, por ejemplo). Lo que ocurre en el caso de los sistemas caóticos es algo distinto, y es precisamente lo que llamó la atención de Lorenz cuando descubrió el fenómeno. En un sistema caótico, las trayectorias de dos condiciones iniciales cercanas *se separan exponencialmente*, a pesar de que todas ellas son atraídas al atractor extraño. Que por algo se llama extraño.

En la Fig. 2.10 vemos la evolución de la coordenada  $y$ , de dos soluciones que inicialmente difieren en  $10^{-4}$ . Vemos que al principio son indistinguibles, pero después de unas pocas vueltas empiezan a separarse, hasta que en alguna de ellas toman caminos divergentes, y a partir de allí las secuencias temporales son completamente distintas.

El efecto es más dramático si uno pone muchas condiciones iniciales cercanas, como es el caso de la Fig. 2.11, donde hay 10 000 puntos rojos

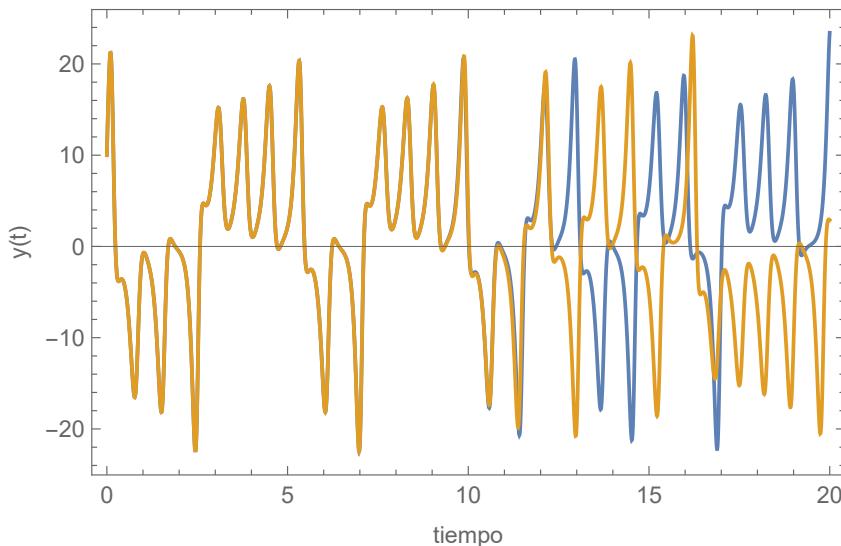


Figura 2.10: Separación de dos soluciones que difieren en  $10^{-4}$  a tiempo inicial.

evolucionando. Los paneles muestran el estado a tiempos  $t = 3, 6, 9$  y  $15$ . A medida que cada punto se mueve de acuerdo a las ecuaciones diferenciales, el conjunto de puntos rojos se estira inicialmente en un filamento, que luego termina enroscándose alrededor de los puntos fijos. A la larga terminan desparramados sobre buena parte del atractor, mostrando que el estado final podría estar casi en cualquier parte, aún cuando las condiciones iniciales eran casi idénticas.

Este comportamiento divergente es la principal característica definitiva del caos. Es fácil de cuantificar, porque la separación es exponencial. Supongamos que dejamos pasar un tiempo transitorio suficiente, de manera que la trayectoria está *en* el atractor. Sea  $\mathbf{r}$  un punto en el atractor, a cierto tiempo. Consideremos un punto cercano,  $\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_0$ , donde  $\boldsymbol{\delta}_0$  es un vector pequeño,  $|\boldsymbol{\delta}_0| \ll 1$ , que es la separación inicial. Si seguimos la evolución de ambos puntos, encontraremos que:

$$|\boldsymbol{\delta}(t)| \sim |\boldsymbol{\delta}_0| e^{\lambda t}. \quad (2.14)$$

En la Fig. 2.12 se muestra un caso, graficando en escala logarítmica la norma de  $\boldsymbol{\delta}$ , y vemos que crece con un  $\lambda$  positivo, cercano a 0.9. También vemos que esta separación no es uniforme: a veces se alejan y a veces se

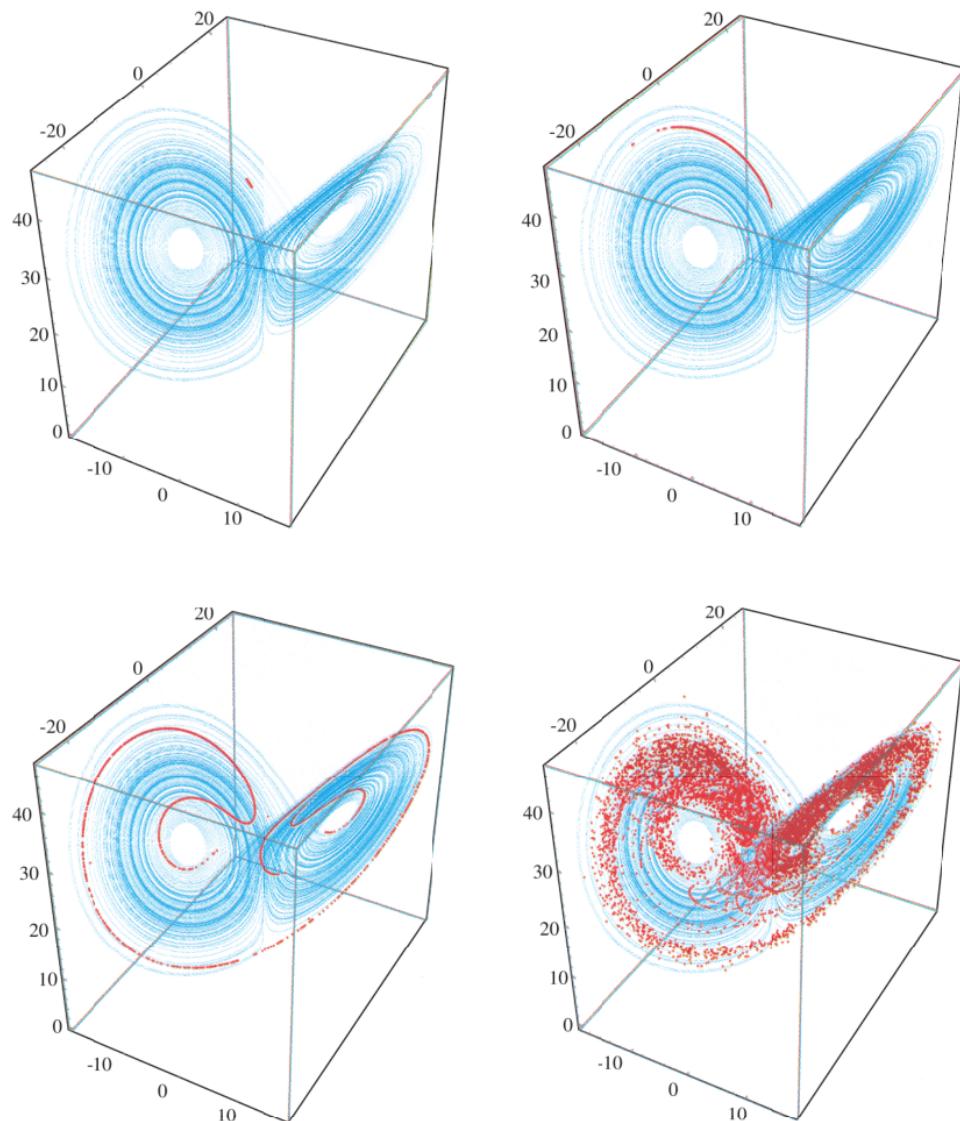


Figura 2.11: Evolución de  $10^4$  condiciones iniciales (en rojo), extendiéndose sobre el atractor de Lorenz (en azul).

acercan, si bien en media el comportamiento es de alejamiento exponencial. Esto se debe a las vueltas que dan las trayectorias. Relacionado con esto está también la saturación, que vemos a partir de  $t \sim 20$ , debida a que el atractor está acotado en el espacio, y las trayectoras no pueden separarse más que su tamaño.

El parámetro  $\lambda$  se llama *exponente de Lyapunov*. Estrictamente, en un

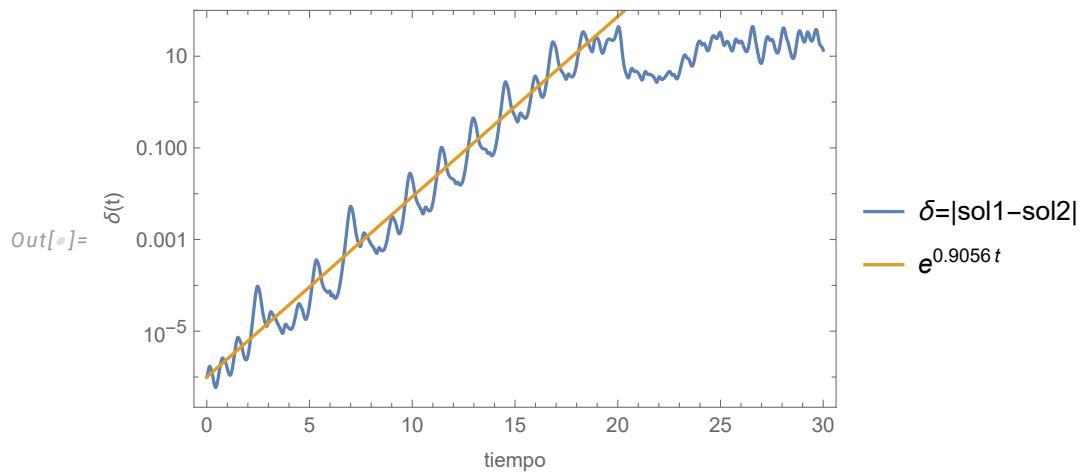


Figura 2.12: Distancia entre dos soluciones que difieren en  $10^{-6}$  a tiempo inicial. La recta tiene pendiente 0.9056, que es el valor del exponente de Lyapunov del sistema.

sistema de 3 dimensiones como éste, se pueden calcular 3 exponentes de Lyapunov, uno por cada dirección. Al menos uno debe ser positivo para que las trayectorias se separen (si  $\lambda < 0$ , las trayectorias no se separan sino que se acercan). La sensibilidad a las condiciones iniciales estará controlada, a tiempo largo, por el mayor de ellos. El valor de  $\lambda$ , además, puede depender de dónde midamos la separación exponencial. Habría que promediar el resultado obtenido para muchas diferentes condiciones iniciales. En el caso del sistema de Lorenz, el resultado que se obtiene es  $\lambda \approx 0.9056$ , que es la pendiente de la recta que pusimos en la Figura 2.12 (no es un fiteo).

Cuando un sistema tiene un exponente de Lyapunov positivo, existe un *horizonte* de tiempo, más allá del cual cualquier predicción del estado del sistema es imposible. Si medimos inicialmente el estado de un sistema real con precisión  $\delta$ . Después de un tiempo  $t$ , la discrepancia entre el valor medido y el valor real habrá crecido a  $\delta(t) \sim \delta_0 e^{\lambda t}$ . Sea  $a$  la tolerancia de nuestra predicción; es decir, si una predicción está a menos de  $a$  del estado verdadero, la admitimos como aceptable. De manera que la predicción será inaceptable cuando  $\delta \geq a$ . Despejando el tiempo, tenemos que el horizonte está a:

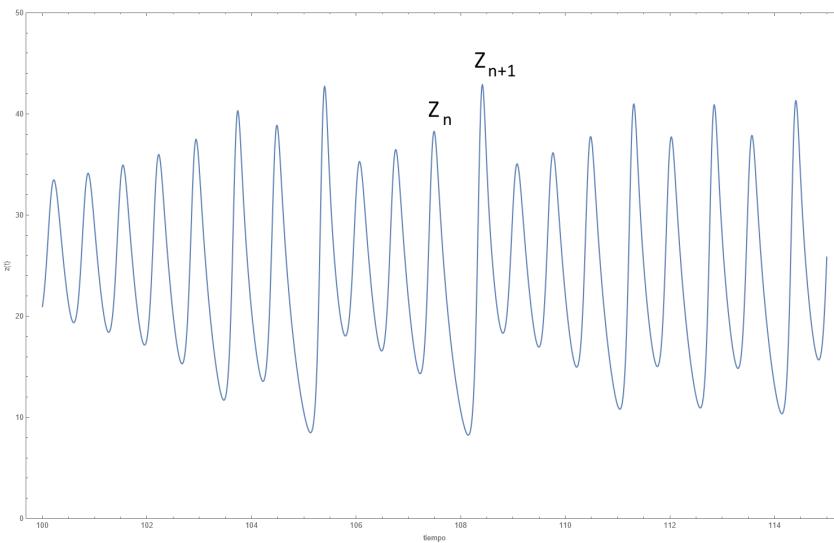
$$t_h \approx O\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\delta_0}\right). \quad (2.15)$$

Esto es una desgracia, por la dependencia logarítmica en  $\delta_0$ . Por más que nos esforcemos en reducir este error de medición inicial, el tiempo de validez de la predicción crece muy lentamente. Evidentemente, esto es lo que ocurre en la predicción meteorológica. Hace 60 años tal vez se podía prever el día siguiente. Sesenta años después de Lorenz, los pronósticos meteorológicos son razonablemente buenos apenas a unos pocos días, algo que se ha logrado gracias a aumentar enormemente la determinación de la condición inicial, con mediciones satelitales globales.

Así como con la complejidad, no existe una definición del caos que deje satisfecho a todo el mundo. El consenso es que el caos es un comportamiento *aperiódico, asintótico*, en un sistema *determinista*, con *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Aperiódico y asintótico significa que existen trayectorias que no tienden a puntos fijos, u órbitas periódicas o cuasi-periódicas, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Uno esperaría además que esas trayectorias no sean muy raras, es decir que el caos no sea una patología del sistema sino un comportamiento robusto. Determinista significa que no haya componentes aleatorios en el sistema. Esto es así para que la irregularidad de las trayectorias venga de las no-linealidades del sistema, y no del puro ruido. En muchos casos, en particular en sistemas de muchos grados de libertad (como los de la Mecánica Estadística), el modelo teórico determinista es intratable, y solemos recurrir a modelos estocásticos, valores medios, etc. Es inevitable, qué se le va a hacer. La sensibilidad a las condiciones iniciales es, como dijimos, que el sistema tenga un exponente de Lyapunov positivo.

## 2.4 El mapeo de Lorenz

Lorenz observó que, en el gráfico de la Fig. 2.7 (izquierda), la trayectoria espiral parece abandonar la proximidad del equilibrio inestable una vez que se ha alejado bastante, como si hubiera un umbral, y entonces se dirige hacia la otra, donde repite el comportamiento espiralado. En qué momento abandona una espiral, además, parece determinar qué tan cerca entrará en la siguiente, y cuántas vueltas dará allí. Esto le dio la idea

Figura 2.13: Máximos sucesivos de  $z(t)$ .

de usar un predictor sencillo para seguir la evolución del sistema. Lorenz usó los máximos locales de la variable  $z$ , como el que llamamos  $z_n$  en la Fig. 2.13, con la idea de que el valor de  $z_n$  *predice* el valor  $z_{n+1}$ , el máximo siguiente. Al graficar los valores de  $z_{n+1}$  como función de los  $z_n$ , todos los puntos parecen caer sobre una curva muy bien definida (Fig. 2.14).

Esto reduce el sistema diferencial a un *mapeo iterado*, como los que veremos con más detalle en el Capítulo 3. La función  $z_{n+1} = f(z_n)$  se llama *mapeo de Lorenz*, y es el corazón del argumento plausible,<sup>6</sup> que mencionamos más arriba, de que no existen otros atractores en la región caótica con  $r$  un poco mayor que  $r_H$ . Es decir, que no existe algún ciclo límite rarísimo, de período muy largo, que simplemente no estamos detectando porque nuestra solución numérica no fue suficientemente larga. El argumento se basa en el hecho de que la curva  $f(z)$  de la Figura 2.14 satisface:

$$|f'(z)| > 1, \quad \forall z. \tag{2.16}$$

Los puntos fijos del mapeo son los  $z^*$  tales que  $f(z^*) = z^*$ . En el gráfico del

---

<sup>6</sup>Es un argumento, y no una demostración, porque estrictamente los puntos no están sobre una curva, sino muy cerca de una, pero tienen cierto ancho, así como el atractor extraño no es completamente plano.

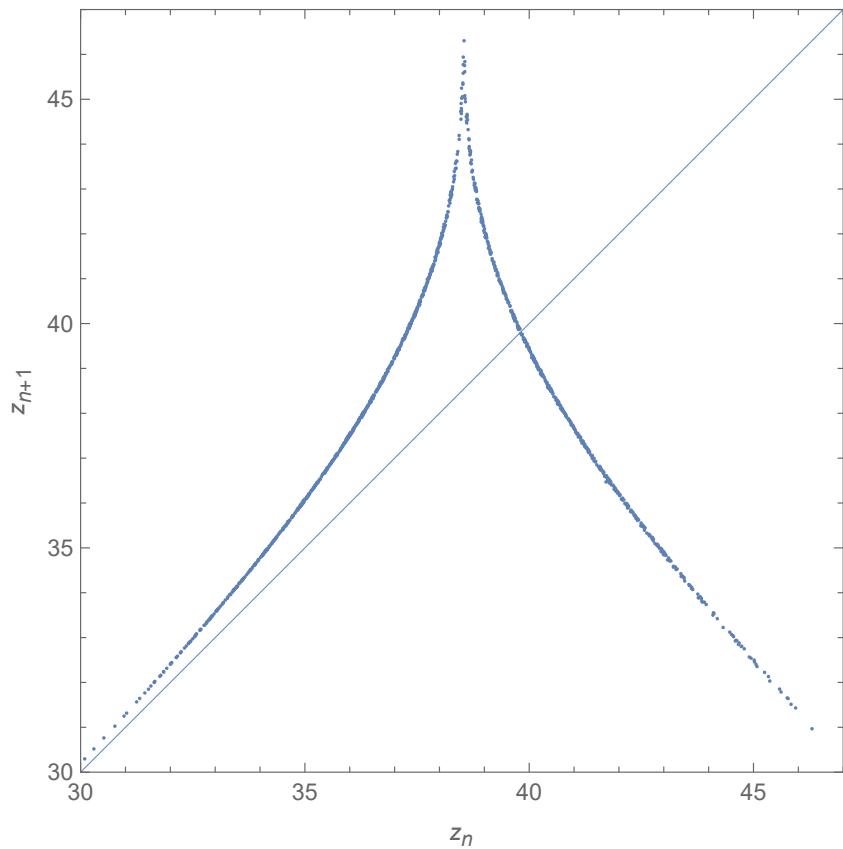
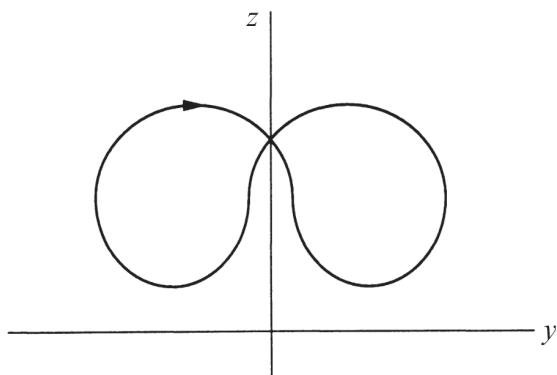


Figura 2.14: El mapeo de Lorenz.

mapeo, Fig. 2.14, vemos un equilibrio de este tipo donde la  $f$  intersecta la identidad. Si hubiera una trayectoria cerrada de la siguiente forma:



sería un caso así. Resulta que esta curva cerrada es inestable. Si considera-

mos una perturbación,  $z_n = z^* + \epsilon_n$ , al analizar su estabilidad lineal como de costumbre,  $\epsilon_{n+1} = f'(z^*)\epsilon_n$ . Y como  $|f'(z)| > 1$ , entonces  $\epsilon_n$  crece en cada iteración, y la órbita es inestable.

Con el mismo argumento, es fácil mostrar que *cualquier* trayectoria cerrada es inestable. Pensemos en la secuencia  $\{z_n\}$  correspondiente a una tal trayectoria. Como eventualmente se cierra, la secuencia a partir de algún índice se repite. Es decir,  $z_{n+p} = z_n$  para algún entero  $p \geq 1$  ( $p$  sería el período, duh). Ahora consideramos una pequeña desviación  $\epsilon_n$ , y calculamos el valor que adquiere al completarse el período,  $\epsilon_{n+p}$ . Avanzamos por pasos, y linealizando:

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+1} &\approx f'(z_n)\epsilon_n, \\ \epsilon_{n+2} &\approx f'(z_{n+1})\epsilon_{n+1} \\ &\approx f'(z_{n+1})(f'(z_n)\epsilon_n) \\ &\approx (f'(z_{n+1})f'(z_n))\epsilon_n, \\ &\dots \\ \epsilon_{n+p} &\approx \left( \prod_{k=0}^{p-1} f'(z_{n+k}) \right) \epsilon_n.\end{aligned}$$

En este producto, cada uno de los factores tiene valor absoluto mayor que 1, porque  $|f'(z)| > 1$  para todo  $z$ . Por lo tanto  $|\epsilon_{n+p}| > |\epsilon_n|$ , y la órbita cíclica es inestable. QED.

Como dijimos, se trata de un ingenioso argumento de plausibilidad, porque el mapeo de Lorenz no es estrictamente una función  $f(z)$ . Como muchas de las propiedades que discutimos, se basa en la resolución numérica del sistema. Pero ¿si los errores crecen exponencialmente, cómo sabemos que se trata de propiedades genuinas del sistema, y no de la amplificación de errores numéricos inevitables? La demostración rigurosa de que el atractor de Lorenz realmente existe y es un atractor extraño llegó recién en 1999, por Warwick Tucker,<sup>7</sup> un estudiante de doctorado

---

<sup>7</sup>W Tucker, *The Lorenz attractor exists*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 328:1197–1202 (1999). Fue una de las primeras demostraciones matemáticas que usó cálculos computacionales rigurosos.

que demostró este importante y tranquilizador resultado como parte de su tesis.

## El mapeo logístico

**E**EXISTE OTRO TIPO DE SISTEMAS, además de la meteorología, que aún teniendo un número grande de grados de libertad, admite una descripción matemática de baja dimensión: la dinámica de poblaciones. En el siglo XVIII, Thomas Malthus fue el primero en señalar que la evolución de una población en la que todos los individuos contribuyen a la reproducción, se podía describir matemáticamente mediante una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = r x(t), \quad (3.1)$$

donde  $r$  es la tasa neta de reproducción, resultado de la diferencia entre natalidad y mortalidad. La Ec. (3.1) tiene un inconveniente práctico: si  $r > 0$ , la solución crece exponencialmente a partir de cualquier condición inicial. Esto fue precisamente lo que explotó Malthus en su *Ensayo sobre el principio de la población*, para argumentar la catástrofe que sobrevendría a la humanidad, dado que los recursos disponibles resultarían insuficientes para mantener semejante explosión poblacional. La solución metodológica es, naturalmente, tener en cuenta que la tasa de reproducción depende de los recursos:

$$\frac{dx}{dt} = r(x) x(t), \quad (3.2)$$

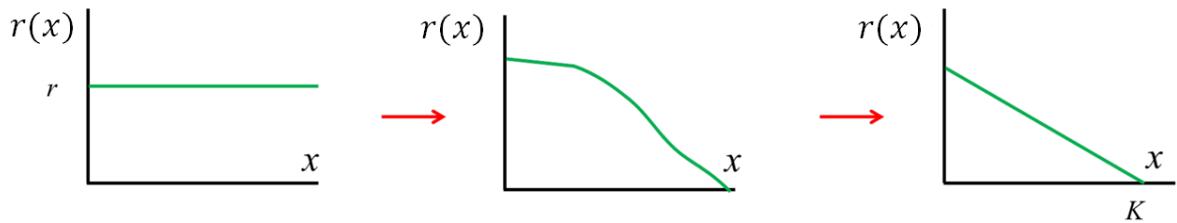


Figura 3.1: La tasa de reproducción de una población,  $r$ , podría ser independiente de la población  $x$  (izquierda). Esto produce un crecimiento exponencial, ilimitado e irreal. Más razonable es una tasa que decréce con  $x$  (centro), representando la disminución de los recursos disponibles para la reproducción. El modelo más sencillo de esta situación es una  $r(x)$  lineal, que se anula cuando  $x = K$  (derecha), que da lugar al modelo logístico de la dinámica poblacional. El parámetro  $K$  se llama *capacidad de carga* (en el texto tomamos  $K = 1$ ).

donde ahora  $r(x)$  es una función de la población, que a valores pequeños de  $x$  vale cierto valor  $r$ , pero a valores mayores decrece con  $x$ , debido a la limitación de los recursos disponibles. La forma exacta de  $r(x)$  puede ser modelada, de acuerdo a lo que se necesite describir, pero podemos imaginar su forma más sencilla posible, un decrecimiento lineal (Figura 3.2):

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - x(t))x(t), \quad (3.3)$$

llamada *ecuación logística*. En la década de 1830, el matemático belga Pierre Verhulst estudió precisamente este modelo para la dinámica poblacional, sin explicar jamás de dónde había sacado el nombre. La ecuación logística es una ecuación diferencial no lineal, con una no-linealidad cuadrática, lo cual la asemeja al sistema de Lorenz. ¿Tendrá un comportamiento tan complejo como inesperado? No: es una única ecuación, y el caos requiere por lo menos 3 ecuaciones diferenciales. Sabemos perfectamente que la dinámica de una única ecuación diferencial es bastante aburrida: pueden tener un equilibrio estable, y la solución va hacia allí y listo. No pueden ni siquiera oscilar, para lo cual se requieren por lo menos dos dimensiones, como en el caso de un péndulo.

La solución de la ecuación logística puede calcularse analíticamente de manera exacta, lo cual es una rareza entre las ecuaciones no lineales, y es

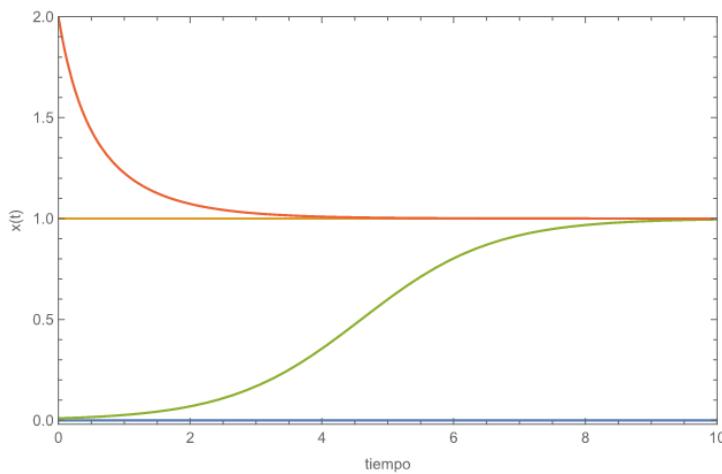


Figura 3.2: Soluciones de la ecuación logística para  $r > 0$ . La curva verde se llama *curva logística* o *sigmoidea*. La curva azul es el equilibrio inestable, y la amarilla es el estable.

algo que alguna vez vale la pena hacer uno mismo.<sup>1</sup> El resultado es:

$$x(t) = \frac{1}{1 + c e^{-rt}}, \quad (3.4)$$

donde  $c$  depende de la condición inicial  $x(0)$ . Existen dos equilibrios,  $x = 1$  y  $x = 0$ , y para  $r > 0$  el 1 es el estable (Figura 3.2). Se trata de un resultado fundamental para describir el comportamiento de muchas poblaciones biológicas, pero no tiene mayor secreto.

Ahora bien, en la física estamos acostumbrados a escribir ecuaciones diferenciales para describir matemáticamente la evolución de una variable dinámica. Pero en las poblaciones biológicas suele ocurrir que existan temporadas de reproducción que se repiten de manera más o menos periódica. En tal caso, podríamos plantear una evolución en tiempo discreto, donde la población de la próxima temporada dependa de la población de la temporada actual. La formulación matemática sería una iteración recursiva de la forma:  $x_{n+1} = f(x_n)$ , que toma un número como *input*, lo transforma con  $f$  y devuelve otro número, que se convierte en un nuevo *input*. Si una

---

<sup>1</sup>Hay que hacer el cambio de variable  $y = 1/x$ , y la ecuación transformada se puede resolver fácilmente.

ecuación diferencial no era suficiente, parece que al simplificarla estamos yendo en la dirección contraria a la complejización de la dinámica. Pero cuando se la estudió, más de 10 años después de Lorenz, hubo de nuevo sorpresas.

Matemáticamente estos sistemas dinámicos se llaman *mapeos*, o *mapas iterados*. Como el mapeo de Lorenz que encontramos en el Capítulo 2, son sucesiones donde cada término se obtiene de componer una función  $f : X \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con sí misma, a partir de una condición inicial:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \equiv f^2(x_0), \dots x_n = f^n(x_0) \dots$$

donde los superíndices no son potencias simples, ojo, sino “potencias funcionales”. Este tipo de proceso es familiar en muchos métodos del cálculo numérico, tal como la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. La omnipresencia y omnipotencia de las computadoras modernas nos permite hoy en día realizar cálculos científicos complicadísimos, que eran completamente imposibles a mitad del siglo XX. Tendemos a olvidar que los números, en la computadora, tienen una representación decimal limitada (y que es distinta en cada sistema). Si bien es posible calcular la propagación de los errores que esto produce en los cálculos, hemos desarrollado una peligrosa confianza absoluta en los resultados que los cálculos computacionales nos dan cuando los usamos como cajas negras. El ejemplo que estudiaremos aquí es tan sencillo y tan dramático que servirá como recordatorio.

La versión discreta de la ecuación logística es uno de estos modelos, el *mapeo logístico*, y es un paradigma de la dinámica de los mapeos no lineales:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n). \quad (3.5)$$

Este iterador no lineal cuadrático modela una población que se reproduce con una tasa que está limitada por los individuos presentes:  $r(x) = r(1 - x_n)$  (Fig. 3.2).

En 1976 el biólogo Robert May observó<sup>2</sup> que, a pesar de su aspecto

---

<sup>2</sup>RM May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 26:457 (1976).

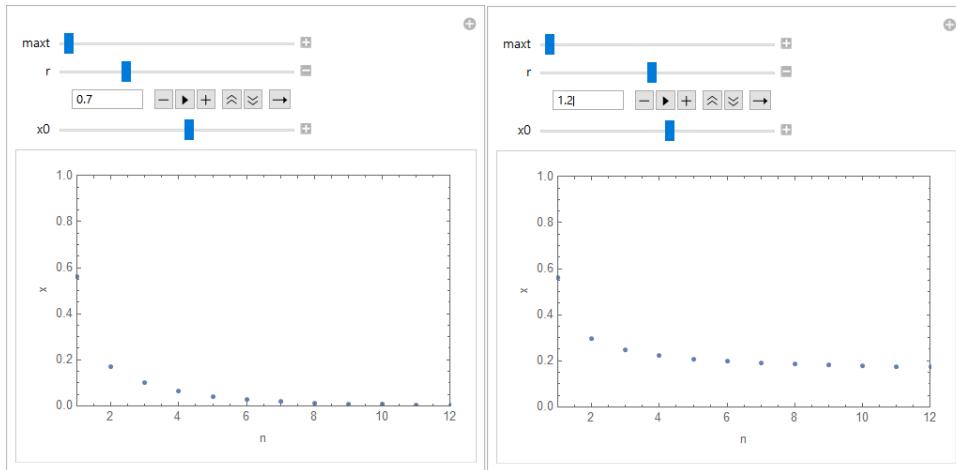


Figura 3.3: Estabilidad e inestabilidad de  $x = 0$  a ambos lados del valor  $r = 1$ .

inocente, las órbitas del mapeo logístico tienen un comportamiento inesperadamente muy complejo. Había descubierto el caos en un sistema 1D, algo imposible en sistemas diferenciales.

En primer lugar, es inmediato darse cuenta de que el sistema tiene dos equilibrios. Aquí no tenemos la derivada temporal para igualar a cero (como estudiamos en los sistemas diferenciales), sino que buscamos los equilibrios poniendo el mismo valor de  $x$  a ambos lados de la igualdad:

$$x^* = r x^* (1 - x^*),$$

de donde vemos que  $x = 0$  es un equilibrio  $\forall r$ , y que hay un segundo equilibrio que depende de  $r$ . Comencemos con valores pequeños de  $r$ . Podemos ver que  $x = 0$  es un *punto fijo estable* y que es un *atractor* de la dinámica. Es decir, si graficamos las trayectorias con  $x_0 = 0$ , se quedan en 0. Y si  $x_0 > 0$ , igual se acercan a 0.

Cuando  $r = 1$  ocurre un cambio significativo. Si  $r > 1$ ,  $x_0 = 0$  sigue siendo un punto fijo: si  $x_0 = 0$ ,  $x = 0 \forall t$ . Pero es *inestable*: si  $x_0 = \epsilon > 0$ , la trayectoria se aleja de 0. Y vemos que el otro punto fijo empezó a funcionar como atractor,  $x^* > 0$  (Fig. 3.3).

Con  $r > 2$  podemos ver que este nuevo punto fijo se approxima oscilando de manera amortiguada. Cuando  $r$  se approxima a 3, la amortiguación

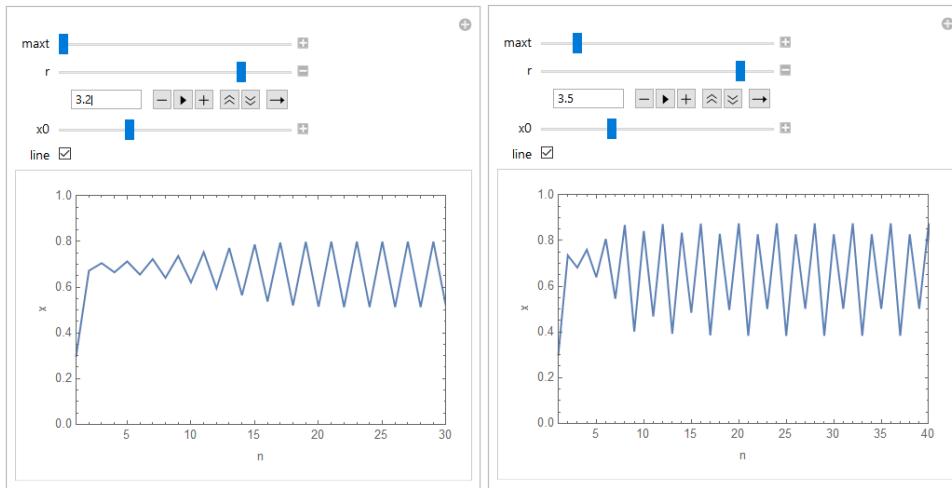


Figura 3.4: Trayectorias periódicas del mapeo logístico.

se hace cada vez más lenta. Y para  $r > 3$  ocurre un nuevo cambio significativo: la solución ya no es un punto fijo, sino *dos puntos*, que se repiten periódicamente, una trayectoria que se llama *período-2* (Fig. 3.4, izquierda).

Cambiando  $x_0$  podemos ver que los puntos fijos anteriores ( $x = 0$  y  $x \approx 0.68$ ) siguen existiendo, pero son inestables.

Para valores mayores de  $r$  nos encontramos con sucesivos cambios a período-4 (Fig. 3.4, derecha) y mayores, cada vez más apretados (Fig. 3.5, izquierda), hasta que se acumulan ¿en un período infinito? (Fig. 3.5, derecha).

### 3.1 Duplicaciones de período

Vamos a usar una nueva representación del sistema para ver qué está pasando, llamada *gráfico cobweb* (telaraña). Graficamos juntas la función  $f(x)$  y la identidad. Comenzamos con  $r = 2$ :  $x_n + 1 = 2x_n(1 - x_n)$ , es decir que, cuando la población es pequeña, se duplica en cada paso de tiempo.

Los puntos fijos del mapeo son las intersecciones de las curvas, donde

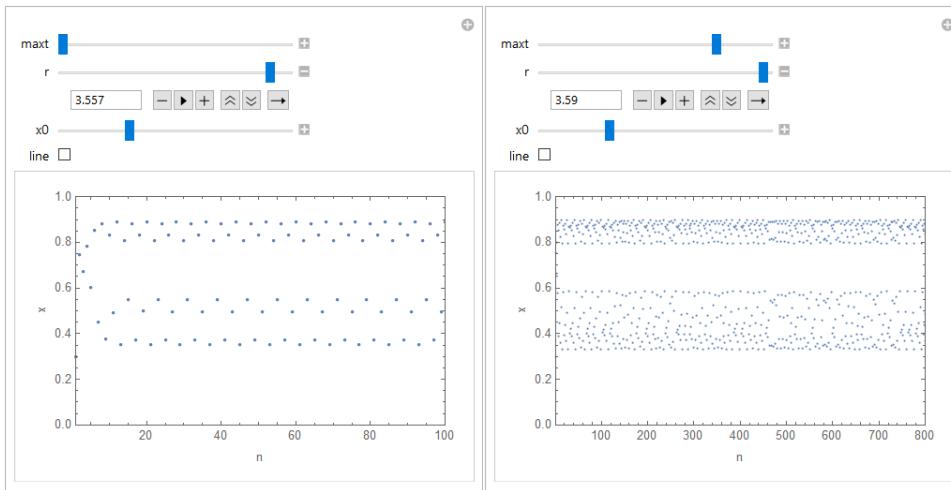
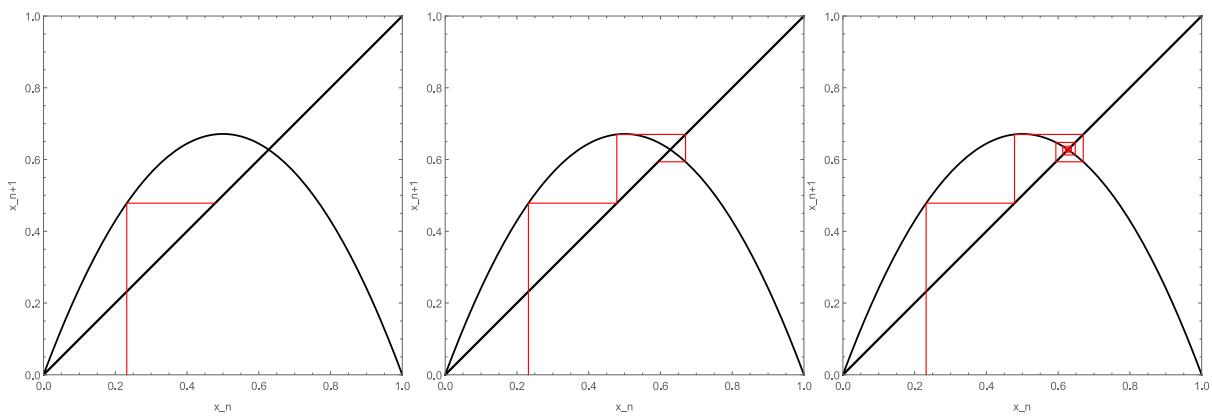


Figura 3.5: Una trayectoria con un período grande, ¿y una con un período infinito?

se cumple:

$$f(x) = x.$$

Una órbita se representa partiendo de una condición inicial  $x_0$  en las abs-  
cisas, y subiendo verticalmente hasta  $f(x_0)$ . A continuación tenemos que  
convertir este valor en una nueva preimagen de  $f$ , así que nos movemos  
horizontalmente hasta la identidad. Repitiendo estos dos pasos generamos  
una representación gráfica de la órbita.



Podemos ver gráficamente que uno de los puntos fijos,  $x = 0$ , repele  
las órbitas, mientras que el otro,  $x = 0.5$ , las atrae. Algebraicamente, la

condición de estabilidad de un punto fijo  $x^*$  de un mapeo (suave)  $f$  es:

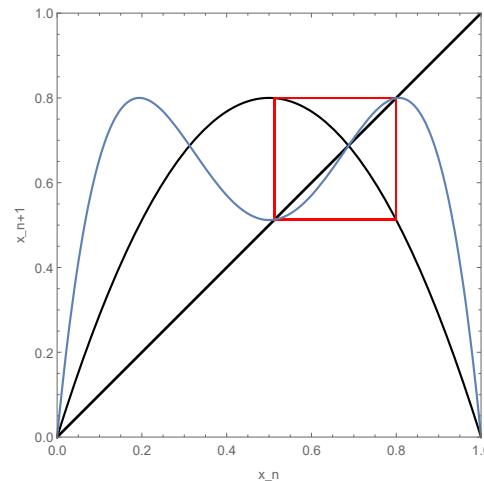
1. Si  $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^*$  es un sumidero (*sink*).
2. Si  $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^*$  es una fuente (*source*).

Noten la diferencia con la condición de estabilidad de los sistemas diferenciales: aquí la comparación de la derivada es con 1, no con 0. (La estabilidad no puede determinarse sólo con la derivada cuando ésta es exactamente 1.)

Si sigo aumentando  $r$ , la pendiente en el equilibrio positivo terminan haciéndose  $< -1$ . Por ejemplo, consideremos ahora  $r = 3.3$ . Los (únicos) puntos fijos son ahora  $x = 0$  y  $x = 0.6969\dots$ . Ambos son inestables, ya que:

$$f'(0) = 3.3 > 1, \quad f'(0.69) = -1.3 < -1.$$

¿Si no hay puntos fijos, a dónde van las órbitas?



El gráfico cobweb muestra que existe un período-2 (estrictamente, *una órbita periódica de período 2*; en el gráfico se muestra sólo el atractor, habiendo descartado el transitorio desde cualquier condición inicial). En este caso:

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(f(x_1)) = x_1, \quad (3.6)$$

es decir, la órbita de período-2 es un *punto fijo* del mapeo

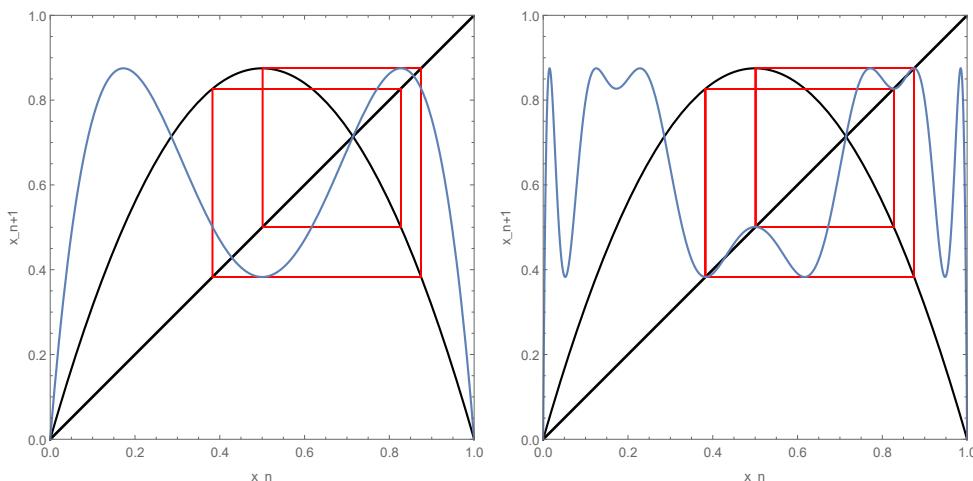
$$x_{n+1} = f(f(x_n)) \equiv f^2(x_n),$$

que mostramos en el mismo cobweb, en color azul, donde vemos que tiene dos intersecciones con la identidad. (Ojo: la última expresión no es la función cuadrado, es la iteración.) Así que podemos estudiar su estabilidad mediante la derivada de  $f^2$ :

$$(f^2)' = f'(f(x))f'(x) \quad (\text{regla de la cadena}).$$

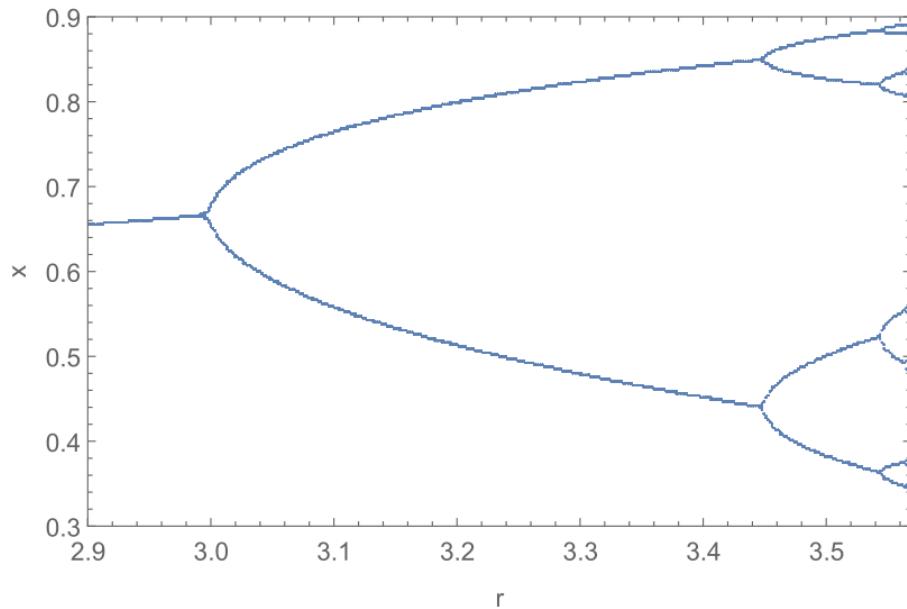
Podemos ver que  $|(f^2)'(x_1)| < 1$ , y atrae las órbitas. Pero si seguimos aumentando  $r$ , en algún momento tendremos  $|(f^2)'| > 1$ , ¡y el período-2 será también inestable!

¿A dónde van las órbitas cuando pasa esto? Ocurrió una nueva duplicación de período, y apareció un período-4 que es estable. De manera análoga a lo que ocurrió con el período-2, el período-4 es un *punto fijo estable* del mapeo  $f^4 \equiv f(f(f(f(x))))$  (se muestra, también en azul, en el gráfico de al lado, con cuatro intersecciones con la identidad...).



Empezamos a ver cómo están relacionados los mapeos miembros de la familia  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ : están conectados por sucesivas duplicaciones de período, controladas por el parámetro  $r$ . Hay rangos de  $r$  donde cada tipo de órbita es estable, y pueden analizarse mediante el criterio de la derivada, al menos para períodos bajos. La primera bifurcación (al p-2) ocurre en  $r_1 = 3$ . La del p-2 al p-4 en  $r_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ .

A esta altura es conveniente graficar el comportamiento de la familia completa, usando  $r$  como *parámetro de control*, en un diagrama de bifurcaciones. Dibujamos los puntos fijos, periódicos o de otro tipo, que atraigan una órbita.



Podemos ver claramente las primeras bifurcaciones, y vemos también que parecen acumularse a un valor de  $r_\infty \approx 3.568$ . Más allá de este punto, las órbitas parecen llenar al azar (pero no uniformemente) uno o varios sub-intervalos de  $(0, 1)$ . Estos conjuntos atractores son *atractores caóticos* mucho más difíciles de describir que los períodos- $k$ . Aparecen en el punto de acumulación  $r_\infty$ , donde el número de puntos fijos se vuelve infinito ¡y son todos inestables!<sup>3</sup>

Una observación detallada muestra que en esta región,  $r_\infty < r < 4$ , existen sin embargo ventanas de comportamiento periódico. La más grande y evidente es una ventana de período-3, que surge abruptamente de la región caótica y desaparece mediante una nueva cascada de bifurcaciones a órbitas de períodos 6, 12, etc. La figura de la derecha muestra un detalle de

---

<sup>3</sup>En Complexity Explorables están implementados algunos atractores extraños para mapeos bidimensionales: [Stranger things](#).

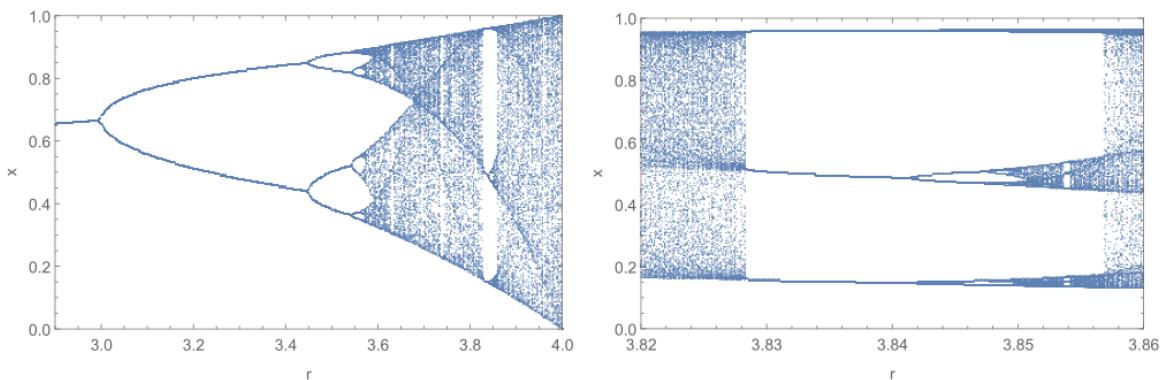


Figura 3.6: Diagrama de bifurcaciones del mapeo logístico. A la derecha, una ampliación del rango de  $r$ , mostrando la ventana de comportamiento regular de período 3.

esta región. Un período-3 debería ser fácilmente reconocible en un gráfico cobweb de la función iterada 3 veces:  $f^3(x)$ . ¡Hágalo! (y observe cómo se hace estable de una manera distinta que los  $p-2^n$ ). Existen, en otros valores de  $r$ , ventanas periódicas de período arbitrariamente grande, ventanas arbitrariamente angostas que le dan al diagrama una infinita riqueza de detalle.

## 3.2 Constantes de Feigenbaum

En resumen: nos encontramos con que el mapeo logístico, cuando se queda sin equilibrios estables, tiene una secuencia de soluciones periódicas, enregistradas como chorizos. En un diagrama de bifurcaciones armamos un mapa de todas estas trayectorias como función de  $r$ . Y dibujamos sólo los atractores, que son la parte estacionaria de las órbitas. Hay una parte que descartamos, que es transitoria y contingente, que depende de la condición inicial. Esa parte no nos interesa (bueno, hoy). Los atractores periódicos también se desestabilizan sucesivamente, con  $r$  creciente, y aparecen otros, de período más alto.

El diagrama de estas bifurcaciones de duplicación de período tiene una estructura *autosemejante*: se repite la forma a distintas escalas. El estudio

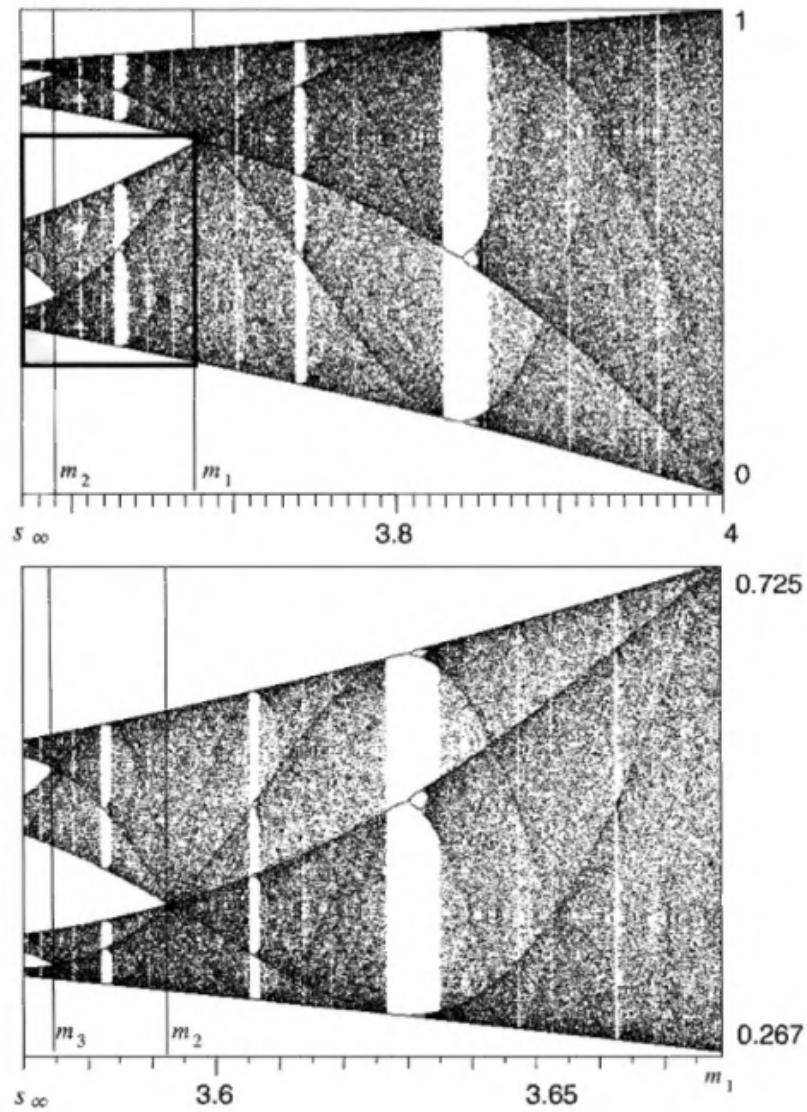


Figura 3.7: Autosimilaridad en la región caótica. La figura de arriba abarca desde  $r = r_\infty$  hasta 4, todo el rango más allá de la primera cascada de duplicaciones de período. El de abajo es una ampliación de la región marcada con un rectángulo. (De Peitgen.)

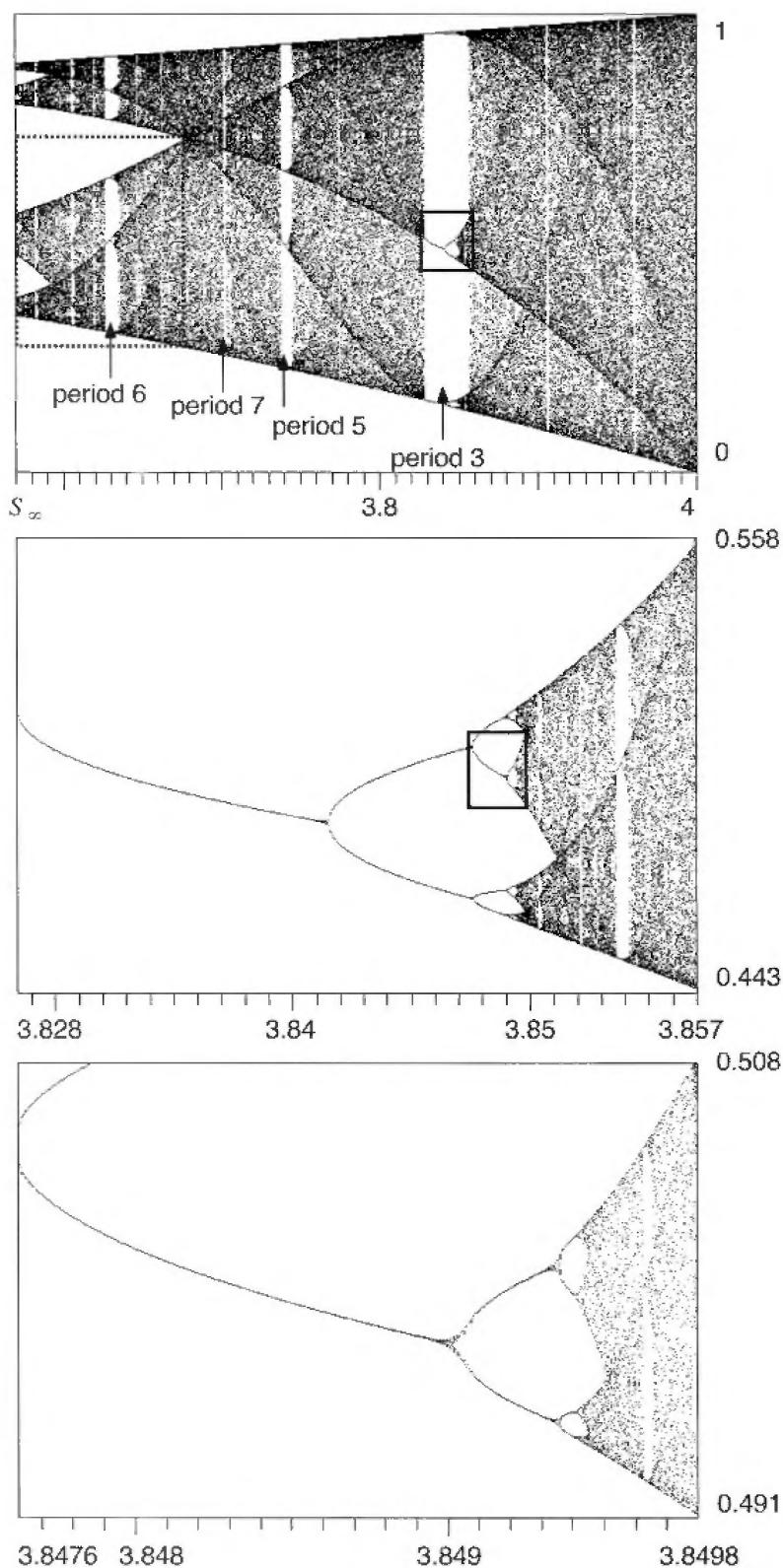


Figura 3.8: Autosimilaridad en las ventanas de dinámica regular que se encuentran en el régimen caótico. Se muestran ampliaciones de las regiones señaladas con rectángulos. (De Peitgen.)

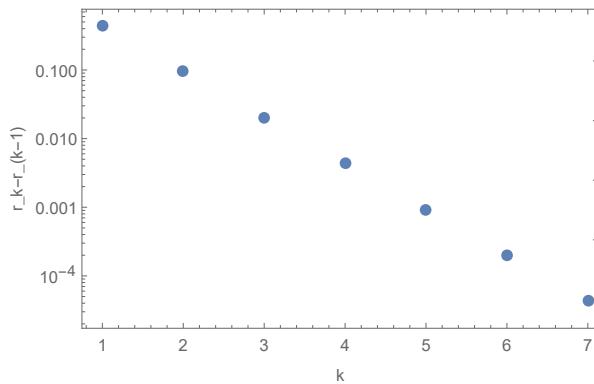
cuantitativo de esta característica, que se llama *invariancia de escala*, es la clave para entender el fenómeno. Puse un esquema de este análisis en un apéndice de este capítulo.

En segundo lugar, vemos que estas bifurcaciones se acumulan, con lo cual en el punto de acumulación tenemos un atractor de período infinito. Período infinito no es un período, me dirán Uds., con toda razón. Tiene toda la pinta de ser justamente el caos. Desde ese punto de acumulación en adelante tenemos otro tipo de atractores, extraños de aspecto y de nombre, de dinámica caótica y con sus propias peculiaridades. En esta región del diagrama de bifurcaciones también vemos la autosimilaridad. Entre otras cosas, nos encontramos con versiones en miniatura de la cascada de duplicación de período. Y también tenemos las ventanas de dinámica regular, no caótica, que resultan ser de todos los períodos posibles.

Empecemos por la cascada de bifurcaciones. Las primeras duplicaciones de período ocurren en:

| $k$ | $r_k$     |
|-----|-----------|
| 1   | 3         |
| 2   | 3.4494897 |
| 3   | 3.5440903 |
| 4   | 3.5644073 |
| 5   | 3.5687594 |
| 6   | 3.5696916 |
| 7   | 3.5698913 |
| 8   | 3.5699340 |

En la tabla podemos ver que los valores se van acercando, es decir, que la distancia  $r_k - r_{k-1}$  se achica. Si graficamos esta diferencia, parece ser un decaimiento exponencial.



Es decir, que el cociente:

$$\frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} \approx \delta$$

es un parámetro constante (aunque en realidad, será un  $\delta_k \rightarrow \delta$ ).

En 1978 Mitchell Feigenbaum realizó un descubrimiento sorprendente<sup>4</sup>, analizando éste y otros mapeos con una calculadora de bolsillo. Descubrió que esa constante es *universal* para todos los mapeos que, como el logístico, tengan un máximo cuadrático. Esto no pasa, por ejemplo, con el  $r_\infty$ , que depende del mapeo. Específicamente, se tiene:

$$r_k \approx r_\infty - c \delta^{-k}, \quad (3.7)$$

con

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k}.$$

(Método rápido y fácil, ver Peitgen p 568.)

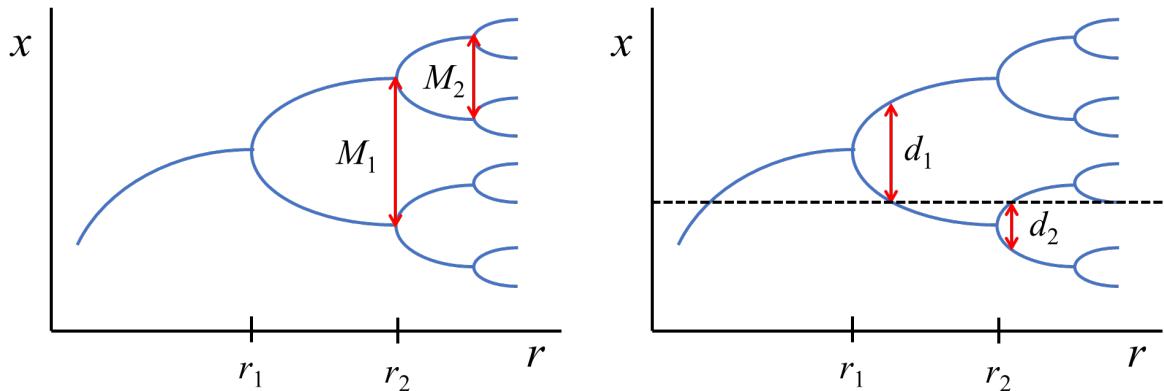
La constante  $\delta$  de Feigenbaum vale:

$$\delta = 4.669201609102991\dots$$

Esto caracteriza la acumulación en el parámetro de control  $r$ . Hay una segunda propiedad de la cascada, que expresa que cada bifurcación también está más apretada en  $x$ :

---

<sup>4</sup>MJ Feigenbaum, *Universality in complex discrete dynamics*, Los Alamos Theoretical Division Annual Report 1975–1976 (1976). MJ Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of non-linear transformations*, J. Stat. Phys. 19:25–52 (1978).



Los valores  $M_1, M_2 \dots$  tienen la desventaja de que son difíciles de determinar, porque el transitorio es muy largo en los puntos de bifurcación. En su lugar se puede usar  $d_k = x_k^* - 1/2$ . (punto super estable, etc, no interesa)

El segundo descubrimiento de Feigenbaum es la universalidad de la constante de decrecimiento de estas distancias:

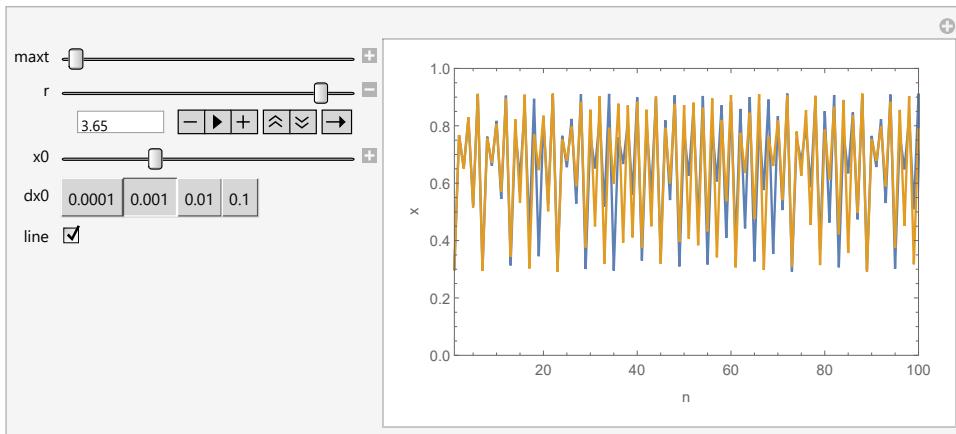
$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{d_k}{d_{k+1}} \right).$$

La constante  $\alpha$  también se conoce muy exactamente:

$$\alpha = 2.5029078750\dots \quad (3.8)$$

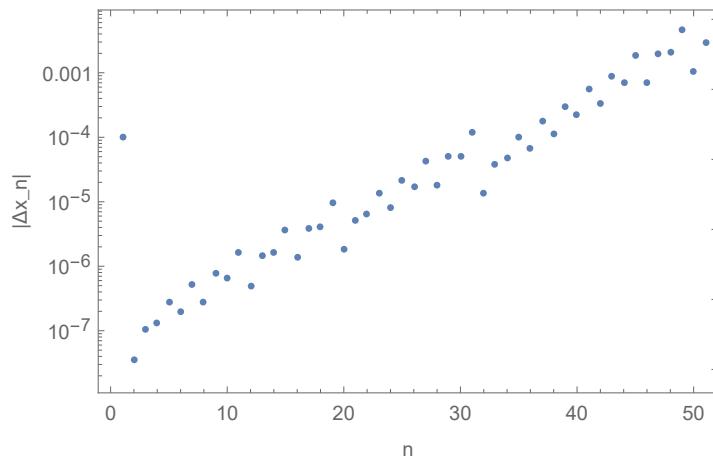
### 3.3 El caos

¿Cómo sabemos que el sistema es caótico? La característica más importante es la *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Las trayectorias correspondientes a condiciones iniciales cercanas divergen rápidamente, algo que podemos observar.



Como las computadoras representan los números reales con una cantidad finita de dígitos, esto implica que una *predicción* en el régimen caótico estará restringida a un intervalo pequeño, aun cuando la dinámica (como en el mapeo logístico) es completamente determinista.

Esta propiedad se puede estudiar cuantitativamente. En general, empezando de dos condiciones iniciales, la diferencia será una función de  $n$ .



Vemos que la separación entre trayectorias *crece exponencialmente*. Caracterizamos esto con un *exponente de Lyapunov*  $\lambda$ :

$$|\Delta x_n| = |\Delta x_0| e^{\lambda n}.$$

Si  $\lambda > 0$ , las trayectorias se separan, y la dinámica es caótica.

Una manera ingenua de medir  $\lambda$  es hacer precisamente esto. Pero hay varios inconvenientes. La tasa de separación podría depender de  $x_0$ , así que habría que empezar de muchas condiciones iniciales y promediar, lo cual es medio tedioso. Otra limitación importante es que la trayectoria está siempre en el intervalo  $(0, 1)$ , así que para algún  $n$  van a dejar de alejarse porque empiezan a “plegarse”.

Una mejor manera de determinar  $\lambda$  es como sigue. Tomamos el logaritmo en la definición:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} \right|.$$

En el cociente podemos insertar todos los puntos de la trayectoria:

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \cdots \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}}.$$

Poniendo esto en el logaritmo, tenemos:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \right|.$$

O sea, cualquier  $x_i$  intermedio puede ser interpretado como una condición inicial, y el cómputo de  $\lambda$  consiste en calcular los cocientes

$$\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i}.$$

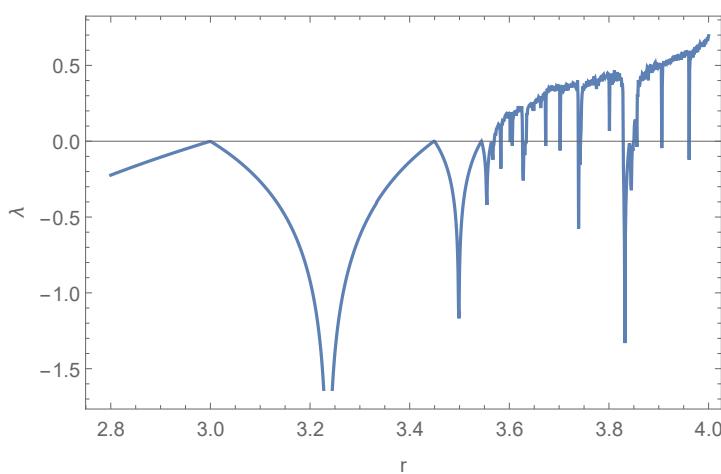
Ahora, como nos interesa hacer que las condiciones iniciales sean arbitrariamente cercanas, nos interesa el límite  $\Delta x_i \rightarrow 0$ . Esto podemos hacerlo calculando en lugar de las diferencias finitas, las derivadas  $dx_{i+1}/dx_i$ , cosa que podemos hacer directamente de la ecuación de la dinámica. Por ejemplo:

$$\frac{dx_{i+1}}{dx_i} = f'(x_i) = r(1 - 2x_i),$$

y la usamos en

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|,$$

evaluada sobre la trayectoria. La sumatoria, eso sí, hay que empezarla una vez pasado el transitorio inicial, con la trayectoria ya en el atractor que le toque. Fíjense que esta fórmula automáticamente “pesa” el atractor, ya que los puntos menos visitados entran menos veces en la suma, y contribuyen menos al resultado. En la figura podemos ver la región de caos, por encima de  $r_\infty$ , dentro de la cual aparecen las ventanas de comportamiento regular, evidenciadas por valores de  $\lambda < 0$ .



### 3.4 Autosimilaridad y renormalización

Vamos a esbozar algunos de los conceptos más importantes en el análisis cuantitativo de la cascada de bifurcaciones que caracteriza tanto al mapeo logístico como a muchos otros sistemas. Como en muchos temas centrales de la teoría del caos, el análisis está basado en una propiedad de *auto-similaridad*, que permite una operación de *renormalización*.

Observemos en la figura 3.9 la idea de la autosimilaridad. En las figuras 3.9(a), (b) y (c) vemos el gráfico de  $f$  correspondiente a tres valores del parámetro  $r$ : en (a) existe sólo el equilibrio trivial  $x^* = 0$ ; en (b) existe un equilibrio positivo estable  $p$ ; en (c) el equilibrio positivo  $p$  es inestable. En la línea inferior de la figura vemos los gráficos correspondientes a la segunda iteración,  $f^2$ , para los mismos valores de los parámetros. Vemos que cuando  $f$  tiene un solo equilibrio estable  $p$ ,  $f^2$  también tiene un solo

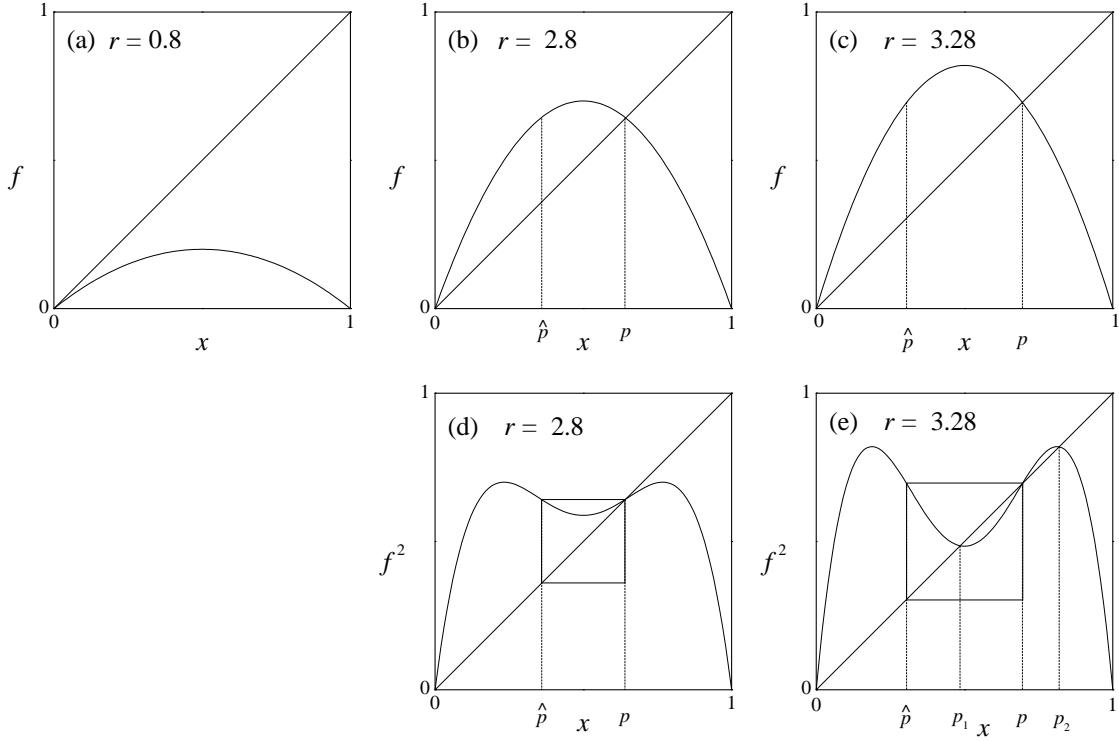


Figura 3.9: Gráficos de  $f$  y de  $f^2$  ilustrando la idea de autosimilaridad. Cada gráfico de  $f^2$  [(d) y (e)], restringido al cuadrado que se indica, es similar al gráfico de  $f$  de la columna anterior [(a) y (b)].

equilibrio no trivial, que coincide con  $p$  [figuras (b) y (d)]. En cambio, cuando el equilibrio de  $f$  es inestable,  $f^2$  tiene tres equilibrios:  $p$ ,  $p_1$  y  $p_2$  [figuras (c) y (e)]. Como sabemos, estos últimos definen el período-2 estable de la segunda bifurcación.

Sea  $\hat{p}$  la preimagen de  $p$  según  $f$ , es decir  $f(\hat{p}) = p$ . Observemos el gráfico de  $f^2$  restringido al intervalo  $[\hat{p}, p]$ , indicado con un cuadrado en las figuras (d) y (e). Puede observarse, sin entrar en demostraciones, que el intervalo  $[\hat{p}, p]$  es invariante a la acción de  $f^2$ , tal como el intervalo  $[0, 1]$  es invariante a  $f$ . Además, observemos que, a pesar de las marcadas diferencias entre  $f$  y  $f^2$  (número de extremos, etc.), el gráfico de  $f^2$  restringida a  $[\hat{p}, p]$  es parecido al gráfico de  $f$  correspondiente a otro valor de  $r$ . En

efecto, obsérvese que dentro del cuadradito en la figura (d),  $f^2$  tiene un solo punto fijo, ubicado en uno de los extremos del intervalo, y un solo extremo en el medio del intervalo, precisamente como  $f$  en la figura (a) (sólo que está dada vuelta). Similarmente, en la figura (e),  $f^2$  restringida al cuadradito tiene un punto fijo estable positivo, y el punto fijo trivial inestable en el extremo del intervalo, tal como  $f$  en la figura (b) (también, dada vuelta). En esta situación, decimos que los gráficos de  $f^2$  restringidos al intervalo  $[\hat{p}, p]$  son *similares* a los de  $f$  en  $[0, 1]$ , mediando una reflexión izquierda-derecha, una arriba-abajo y un cambio de escala.

De la misma manera podríamos analizar el gráfico de  $f^4$ , que resultaría similar al de  $f^2$ , y así sucesivamente para todos los órdenes de iteración. Esto sugiere que existe una función *universal*, a la cual tienden todas estas funciones, que eventualmente se podrá encontrar.

Para avanzar en el análisis cuantitativo, construyamos una función lineal que lleve el punto  $p$  al 0 y su preimagen  $\hat{p}$  al 1:

$$L_r(x) = \frac{1}{\hat{p}_r - p_r}(x - p_r), \quad (3.9)$$

donde estamos mostrando explícitamente que todas las cantidades dependen de  $r$ . La función inversa de  $L$  se obtiene de (3.9) despejando  $x$ :

$$L_r^{-1}(x) = p_r + (\hat{p}_r - p_r)x. \quad (3.10)$$

Definimos ahora un *operador de renormalización* que actúa sobre la función  $f_r(x)$ , con la idea de que la acción de éste contenga la idea de autosimilaridad de las  $f^k$ :

$$Rf_r(x) = L_r [f_r^2(L_r^{-1}(x))], \quad x \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

Obsérvese con cuidado la acción de  $R$ : primero  $L_r^{-1}$  contrae el intervalo  $[0, 1]$  al  $[\hat{p}_r, p_r]$  y lo invierte, después actúa  $f^2$ , y finalmente  $L_r$  vuelve a expandir el intervalito y a orientarlo normalmente. El resultado es la función que, según observamos en la Figura 3.9, es similar a  $f$ . En efecto, se puede chequear sin dificultad que  $Rf_r(x)$  comparte muchas propiedades de  $f$ , en particular la de anularse en los extremos del intervalo, y tener

un extremo en  $x = 1/2$ . También convierte órbitas de período 2 de  $f$  en puntos fijos de  $Rf$ , etc.

Ciertamente, sabemos (o sospechamos) que el fenómeno de autosimilaridad no se detiene en  $f^2$ , así que podemos continuar con el proceso de renormalización, renormalizando todos los órdenes de  $f$ . Definamos:

$$g_k(x) = L [f^k(L^{-1}(x))], \quad (3.12)$$

de manera que se satisface

$$g_k = R g_{k-1}. \quad (3.13)$$

Vemos que  $g_k$ , a medida que  $k$  crece, va heredando la forma de las iteraciones inferiores. Ahora, si existe el límite del que hablábamos en relación con la Fig. 3.9, este límite es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x), \quad (3.14)$$

la función universal que estamos buscando, y la manera de buscarla es mediante la ecuación que satisface, o sea (3.13) llevada al límite:

$$g(x) = Rg(x). \quad (3.15)$$

Es decir,  $g(x)$  es un punto fijo del operador de renormalización  $R$ , en el espacio de las funciones de variable real. Escribámoslo *in extenso*:

$$g(x) = -\alpha g[-x/\alpha], \quad (3.16)$$

donde  $\alpha$  es el factor de escaleo ( $\hat{p}_r - p_r$ ) de la Ec. (3.9) y hemos cambiado a un sistema de coordenadas en el que el origen coincide con el punto fijo  $p_r$ .

La solución de la Ec. (3.16) puede ser aproximada sucesivamente mediante un desarrollo en serie de  $g$ . Primero se elige  $g(0) = 1$ , y luego se propone una función par a determinar,  $g(x) = 1 + bx^2$ :

$$1 + bx^2 = -\alpha \left[ 1 + b \left( 1 + b \frac{x^2}{\alpha^2} \right)^2 \right] = -\alpha \left( 1 + b + 2b^2 \frac{x^2}{\alpha^2} \right) + o(x^4). \quad (3.17)$$

De aquí, identificando los coeficientes de igual potencia en  $x$ , obtenemos  $b \approx -1.366$  y  $\alpha \approx 2.73$ , un resultado aproximado al valor “exacto” de  $\alpha$  encontrado numéricamente, (3.8). La aproximación puede mejorarse tomando órdenes superiores en el desarrollo de  $g$ .

Sin entrar en detalles, observemos que el operador  $R$  define un mapeo —en el que  $k$  juega el papel de un tiempo discreto— que puede analizarse mediante todas las técnicas de los mapeos. En particular, se encuentra que el punto fijo  $g$  es un punto de ensilladura, a lo largo de cuya variedad estable nos acercamos en cada iteración. El autovalor a lo largo de la dirección estable nos dice cómo nos acercamos al punto crítico, y describe precisamente cómo se acercan los sucesivos puntos de bifurcación, ya que  $R$  convierte períodos- $2^k$  de  $f$  en períodos- $2^{k-1}$  de  $Rf$ . Este autovalor resulta ser  $\delta \approx 4.669201$ , que describe como se acercan los sucesivos  $r_n$  a  $r_\infty$  (Ec. (3.7)).

El poder de las ideas de renormalización reside en que, apropiadamente adaptadas, pueden ser usadas en una variedad de problemas. Por ejemplo, el razonamiento que hemos usado no está restringido al mapeo logístico, sino que se basa en la propiedad de autosimilaridad de  $f$  ejemplificada en la Fig. 3.9, compartida por una enorme familia de mapeos de una variable con un máximo no degenerado. En un caso así, se habla de *universalidad*. Ideas similares pueden aplicarse a otras rutas al caos, distintas de la cascada de bifurcaciones, tal como la intermitencia, en donde se puede calcular el tiempo pasado por la trayectoria cerca del punto fijo inestable.

Las leyes de escaleo y los demás aspectos cuantitativos de esta descripción han sido ampliamente confirmados en experimentos en sistemas químicos, fluidos y láseres, justificando *a posteriori* la utilidad del estudio del caos basado en los mapeos de Poincaré (que veremos un poco más adelante), y sugiriendo la universalidad de los mecanismos subyacentes al origen del caos en una variedad de fenómenos naturales.

## 3.5 Descripción probabilística del caos

Pasemos a estudiar el régimen caótico del mapeo logístico, correspondiente a valores del parámetro  $r_\infty < r \leq 4$ . Por diversas razones, resulta adecuado un tratamiento probabilístico del problema. Por un lado, vimos en los experimentos numéricos que algunas regiones del espacio de fases resultan más visitadas por las trayectorias que otras, de manera que parece adecuado hacer una descripción basada en una densidad de probabilidad. Por otro lado, supongamos un proceso de medición de la variable  $x$  en el que se tenga una resolución finita. En tal caso el “estado” del sistema debe entenderse no como un punto sino como una pequeña región en el espacio de fases. Si la dinámica del sistema subyacente fuese simple, regular, no habría diferencia entre una descripción puntual y una deslocalizada del problema, para una resolución suficientemente buena. Sin embargo, si la dinámica es caótica, sabemos que condiciones iniciales *arbitrariamente* cercanas acaban siguiendo trayectorias diferentes, cuya diferencia tiene típicamente el tamaño del atractor mismo. La única manera de resolver esta dificultad consiste en adoptar una descripción probabilística, en la cual la magnitud central es una *densidad de probabilidad*  $\rho_n(x)$  de encontrar al sistema en el estado  $x$  a tiempo  $n$ .

Si el estado inicial del sistema,  $x_0$ , se conoce con precisión infinita, decimos que el sistema está descripto por la densidad  $\rho_0(x) = \delta(x - x_0)$ . Al tiempo siguiente el estado será  $\rho_1(x) = \delta(x - f(x_0))$ , y así sucesivamente. Supongamos, en cambio, que  $\rho_0(x)$  es una función suave de  $x$ . Después de una iteración el estado del sistema será una superposición de los estados correspondientes a la evolución de cada condición inicial representada por  $\rho_0$ . Es decir, podemos escribir:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_E \delta(x - f(x_0)) \rho_n(x_0) dx_0, \quad (3.18)$$

donde integramos sobre todo el espacio de fases  $E$ .

La solución estacionaria de la Ec. (3.18),  $\rho_s(x)$ , recibe el nombre de *densidad (o medida) de probabilidad invariante*, y sus propiedades permiten clasificar los sistemas dinámicos de una manera muy general. Comence-

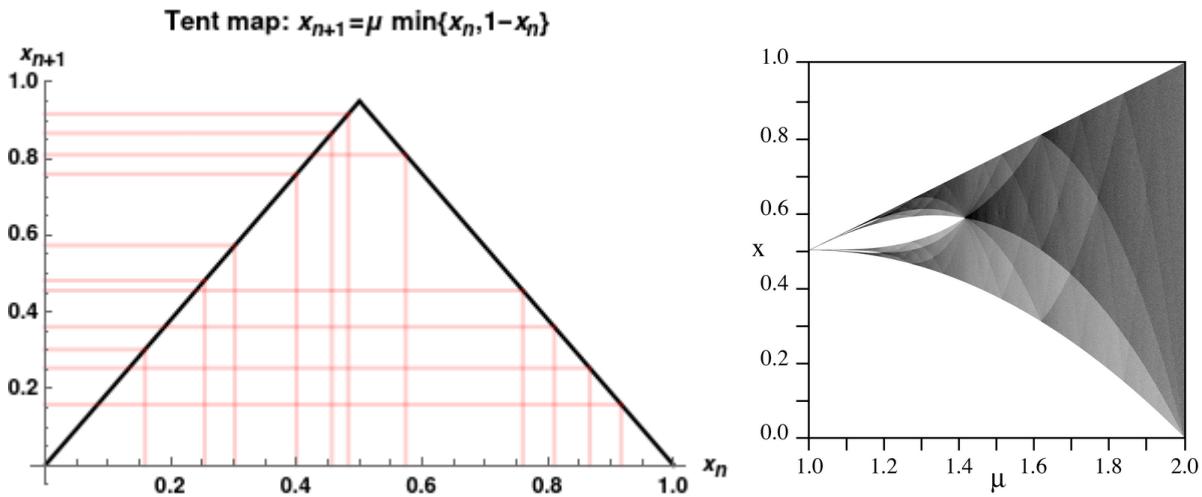


Figura 3.10: El *tent map*. Izquierda: las primeras 10 iteraciones, para  $\mu = 1.9$ . Derecha: diagrama de bifurcaciones. (Wikipedia)

mos con un caso sencillo, el mapeo lineal a trozos conocido como *tent map* (Fig. 3.10):<sup>5</sup>

$$y_{n+1} = T(y_n) = \begin{cases} \mu y_n, & 0 \leq y_n \leq 1/2, \\ \mu - \mu y_n, & 1/2 \leq y_n \leq 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Para el caso  $\mu = 2$ , Su densidad de probabilidad invariante debe satisfacer:

$$\rho_s = \int_E \delta(x - f(x_0)) \rho_s(x_0) dx_0, \quad (3.20)$$

$$= \int_0^{1/2} \delta(x - 2x_0) \rho_s(x_0) dx_0 + \int_{1/2}^1 \delta(x - (2 - 2x_0)) \rho_s(x_0) dx_0, \quad (3.21)$$

cuya única solución suave, integrable Lebesgue, adecuadamente normalizada, es simplemente:

$$\rho_s(x) = 1. \quad (3.22)$$

Es decir, en el régimen caótico la probabilidad de encontrar al sistema en un punto del espacio de fases es uniforme. (Incidentalmente, ¡tenemos

---

<sup>5</sup>Nótese la similaridad de este mapeo con el mapeo de Lorenz, que vimos en el Capítulo 2.

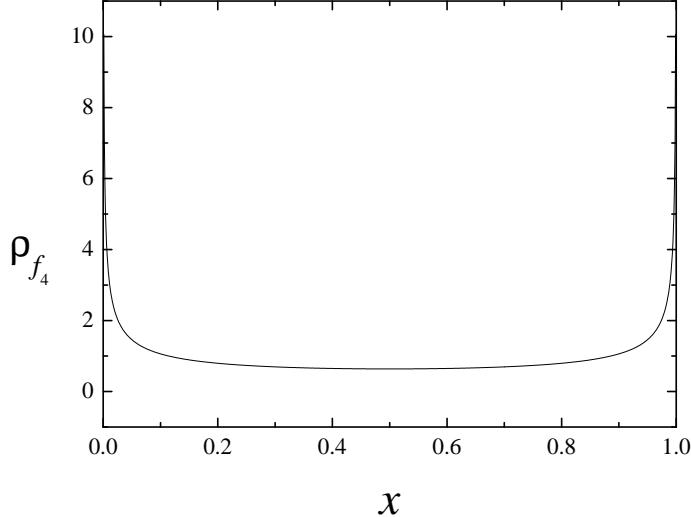


Figura 3.11: Densidad de probabilidad invariante del mapeo logístico para  $r = 4$ .

aquí un algoritmo para generar números pseudo-aleatorios con distribución uniforme!)

Ahora bien, el *tent map* es topológicamente equivalente al mapeo logístico para  $r = 4$  (llamémoslo  $f_4$ ), siendo la función que los relaciona:  $h(x) = 2/\pi \arcsin \sqrt{x}$ <sup>6</sup>. Entonces tenemos:

$$\rho_{f_4}(x) = \rho_T[h(x)] \left| \frac{dh}{dx} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (3.23)$$

que se ve en la Fig. 3.11. Esto explica por qué, en figuras como la 3.6, los puntos se amontonan solamente cerca de 0 y 1 en el extremo  $r = 4$ . Para valores de  $r$  entre  $r_\infty$  y 4, la densidad invariante tiene un soporte formado por uno o varios segmentos (cuyas longitudes, una vez más, satisfacen propiedades de escaleo universales) con varios picos. La densidad de puntos representados en el diagrama de bifurcaciones (Fig. 3.6 y similares) da una idea de la forma de la medida invariante para los distintos valores de  $r$ .

Recordemos ahora la definición de un *conjunto* invariante: un conjunto tal que coincide con su imagen para todo tiempo. Los sistemas dinámicos

---

<sup>6</sup>Ejercicio: Demostrar esto. Demostración:  $f_4[h_{-1}(x)] = \sin^2(\pi x) = h^{-1}[T(x)]$ .

tales que *todos* sus conjuntos invariantes son, o bien triviales, o bien todo el espacio de fases, se llaman *ergódicos*. En otras palabras, el espacio de fases de un sistema ergódico no puede descomponerse en subconjuntos invariantes de una manera no trivial. Un teorema (Lasota y Mackey, 1985) asegura que un sistema es ergódico si y sólo si tiene exactamente una densidad invariante que sea suave e integrable Lebesgue y positiva en casi todo el espacio de fases. El *tent map* y el mapeo logístico con  $r = 4$  resultan ser ergódicos, entonces. Una propiedad de las densidades invariantes de los sistemas ergódicos es que resultan estar extendidas a todo el espacio de fases, a pesar de la dinámica puramente determinista que las genera. Como consecuencia de esto, las fluctuaciones alrededor de valores medios resultan ser del orden de los valores medios mismos, a diferencia de lo que sucede en sistemas termodinámicos en los que la distribución de probabilidad es picuda alrededor de los estados más probables, *excepto en la inmediata vecindad de los puntos críticos de las transiciones de fase*. En cierto sentido, un sistema caótico como el logístico a  $r = 4$  puede pensarse como un sistema que se encuentra permanentemente en el estado crítico. De hecho, existe una profunda analogía entre la dinámica caótica y las transiciones de fase, que se escapa a este curso.



## Caos hamiltoniano

LOS SISTEMAS HAMILTONIANOS son el paradigma del movimiento ordenado en los sistemas físicos, como el de la Tierra alrededor del Sol. Pero se trata de un sesgo nacido de que los sistemas hamiltonianos familiares son los pocos que se pueden resolver analíticamente. En la gran mayoría de los casos hay que recurrir a soluciones numéricas, y a veces éstas son tan distintas de las que se encuentran en problemas resolubles analíticamente, que desafían la intuición y han dado lugar a toda una rama de la mecánica: el caos en los sistemas hamiltonianos. Vamos a estudiar un poquito de esto.

En general, el movimiento de un sistema hamiltoniano de más de 2 grados de libertad es extremadamente complejo. Inclusive el movimiento de un péndulo doble, que parece inocente cuando los ángulos son pequeños, se vuelve caótico cuando la energía es grande.<sup>1</sup> Son pocas las cosas que pueden decirse de ellos con total generalidad: que preservan el volumen en el espacio de fases es casi la única, me parece.<sup>2</sup> Consideremos un hamiltoniano con una energía cinética cuadrática en los momentos y un

---

<sup>1</sup>Hay una linda implementación interactiva en: [Double trouble](#).

<sup>2</sup>Una consecuencia de esto que no hay atractores en los sistemas hamiltonianos: no hay estabilidad asintótica, ni ciclos límite, ni nada de eso.

potencial que depende sólo de las posiciones, es decir:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + U(\{q_i\}).$$

En estos casos también que se conserva la energía mecánica, y que es igual al hamiltoniano,

$$\mathcal{H}(q_i, p_i) = E.$$

Esto hace que las trayectorias en el espacio de fases  $2n$ -dimensional estén *restringidas* a alguna variedad (un “espacio”) de  $2n - 1$  dimensiones. Hay propiedades incluso en sistemas de dos grados de libertad, así que para concretar (y para poder dibujar), pensemos en el movimiento de una partícula en dos dimensiones:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U(x, y).$$

Dadas condiciones iniciales en las posiciones y los momentos, la trayectoria está dada por las cuatro ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, & \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, \\ \dot{p}_y &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, & \dot{y} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}.\end{aligned}$$

El espacio de fases es 4D, pero la conservación de la energía mecánica vincula las cuatro variables y restringe estas trayectorias a una variedad 3D:

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = E.$$

Supongamos que, si la energía es suficientemente pequeña (por ejemplo, si hay un mínimo en un potencial efectivo, como en el caso de dos partículas con atracción gravitatoria), la partícula permanece confinada en alguna región del espacio de fases. Es decir, las órbitas están *acotadas* (¡yupi, pudimos decir algo más!).

Una clase importante de sistemas hamiltonianos es la de los *sistemas integrables*.<sup>3</sup> Para ellos podemos decir algo más sobre las trayectorias. Son los sistemas que tienen alguna otra cantidad conservada, otra función de las coordenadas y los momentos que se conserva. Este vínculo adicional de coordenadas y momentos restringe todavía más las trayectorias, que están obligadas a moverse en una variedad bidimensional. ¿Será un plano? ¿Será una esfera? ¿Será una silla de montar? Ahora lo veremos. El movimiento de los sistemas integrables se llama *regular*. Es lo que podemos llamar “simple”, pero vale la pena decir que la simplicidad puede no ser obvia, y las trayectorias pueden ser bastante complicadas. Si uno no sabe si un sistema es integrable, no existe receta para encontrar cantidades conservadas adicionales. Lo que sí puede haber son pistas de que existen, naturalmente manifestadas en las simetrías del sistema. Si hay más grados de libertad que constantes de movimiento, el movimiento puede ser caótico. Cuando el número de grados de libertad es grande (problemas mecánicos de muchos cuerpos, por ejemplo), la posibilidad de movimiento caótico es mayor.

Hay dos tipos de sistemas integrables que son familiares de los cursos de Mecánica: los *sistemas separables* y los *potenciales centrales*. En el caso de los sistemas separables, el potencial es la suma de dos funciones independientes de las coordenadas:

$$U(x, y) = U_x(x) + U_y(y),$$

de manera que el hamiltoniano es la suma de dos hamiltonianos de sólo un grado de libertad:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y; \quad \mathcal{H}_{x,y} = \frac{1}{2}p_{x,y}^2 + U_{x,y}.$$

Esto hace que el movimiento en cada coordenada se desacople del otro, y que cada hamiltoniano 1D se conserve por separado. Así que, además de la constante de movimiento  $E = \mathcal{H}_x + \mathcal{H}_y$ , tenemos su diferencia,  $\mathcal{H}_x - \mathcal{H}_y$ , por ejemplo, como segunda cantidad conservada.

---

<sup>3</sup>Se llaman integrables, en el sentido de Liouville, los sistemas hamiltonianos que tienen tantas cantidades conservadas independientes como grados de libertad. El concepto está relacionado con la integrabilidad por cuadraturas, también de Liouville.

En el caso de las fuerzas centrales:

$$U(x, y) = U(r); \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

tenemos que se conserva el momento angular  $p_\phi = xp_y - yp_x$ , con lo cual el hamiltoniano se convierte en:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p_r^2 + U(r) + \frac{p_\phi^2}{2r^2},$$

donde aparece el *potencial centrífugo* en el último término (el que hace que la Luna no se caiga). ¿Se acuerdan de todo esto? Una vez reducido el problema a un grado de libertad, las ecuaciones de Hamilton permiten “resolverlo”, evaluando alguna integral (por eso se llaman sistemas integrables). Los casos que estudiamos en el curso de Mecánica<sup>4</sup> son de este tipo.

## 4.1 Secciones de Poincaré y toros invariantes

Aunque el movimiento de los sistemas integrables es simple, a menudo no es obvio poner de manifiesto esta simplicidad. No existe ningún método analítico general para saber de antemano si existe esa segunda constante de movimiento, o para encontrarla. Una de las aplicaciones poderosas de las transformaciones canónicas, que también estudiamos en Mecánica, es precisamente convertir un sistema misterioso en otro, con la esperanza de que resulte igual a un sistema integrable conocido. O también simplemente generar familias de sistemas integrables a partir de sistemas conocidos, con la esperanza de que sirvan para algo (siempre sirven para algo).

Incluso para sistemas integrables, el cálculo numérico puede ser de poca ayuda, porque nos da las trayectorias, pero las trayectorias pueden ser muy complicadas aun para el movimiento regular. Por ejemplo, si tenemos un

---

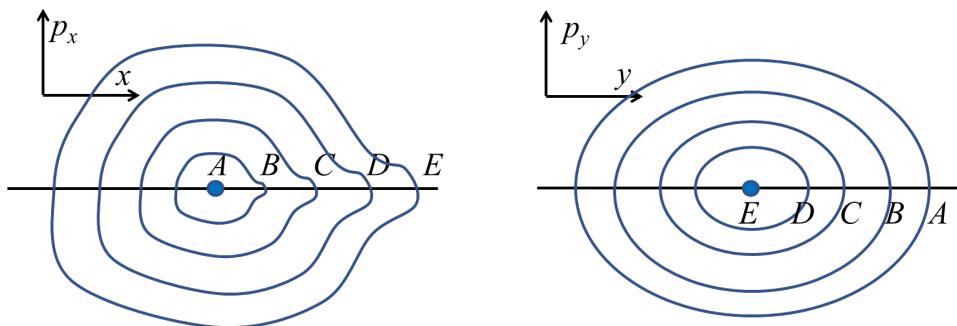
<sup>4</sup>G. Abramson, *Curso de Mecánica Analítica* (ISBN 979-8409487980).

potencial armónico en cada coordenada:

$$U_x = \frac{1}{2}\omega_x^2 x^2, \quad U_y = \frac{1}{2}\omega_y^2 y^2,$$

con las frecuencias  $\omega_x$  y  $\omega_y$  commensurables entre sí (cociente racional) se forman figuras de Lissajous que pueden ser muy complicadas, y no te digo nada si son incommensurables.

Una técnica muy astuta para detectar la integrabilidad de un sistema es un análisis más bien *topológico* del espacio de fases, que se le ocurrió a Poincaré.<sup>5</sup> Consideremos el caso del potencial separable. Como los movimientos en cada coordenada son independientes, podemos graficar las trayectorias en dos planos de fases,  $(x, p_x)$  e  $(y, p_y)$ . Recuerden que la partícula está confinada. Por ejemplo, si  $U_x$  y  $U_y$  tienen cada uno un mínimo simple, las trayectorias serán más o menos de este tipo:



La partícula se mueve en una curva cerrada en cada una de estas proyecciones del espacio 4D. Cada curva corresponde a cuánta energía mecánica hay en cada una de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Si cambiamos las

<sup>5</sup>Henri Poincaré (1854–1912), matemático francés. Su trabajo abarca no sólo la matemática y la física, sin también la ingeniería, la filosofía de la ciencia y la divulgación. Fue absolutamente genial, tal vez el último científico que se destacó en todos los campos de la ciencia de su época. Sus principales contribuciones fueron en la matemática pura, la física matemática y la mecánica celeste. En su investigación del problema de tres cuerpos, en ocasión del concurso por el sexagésimo cumpleaños del rey Oscar II de Suecia, presentó estas ideas y fue el primero en descubrir el caos determinista. Antes de Poincaré los tipos creían que todos los sistemas eran integrables, sólo que todavía no habían encontrado todas las cantidades conservadas. También fue el primero en poner las transformaciones de Lorentz en su forma actual, observando la invariancia de las ecuaciones de Maxwell. Casi tuvo la Relatividad Especial antes que Einstein.

condiciones iniciales y una de las curvas se agranda, la de la otra se achica porque  $E = E_x + E_y$ . En cada plano hay una curva máxima, que corresponde a que toda la energía esté en esa coordenada. Estas curvas son las intersecciones de la variedad bidimensional donde viven las trayectorias en el espacio de fases, con los espacios  $(x, p_x)$  e  $(y, p_y)$ . Por esta razón se llaman superficies de sección, o *secciones de Poincaré*. Las curvas cerradas en estas secciones son una manifestación de la integrabilidad del sistema.

Pudimos construir esta figura porque sabíamos la naturaleza del sistema separable. Pero podemos hacer algo similar para cualquier sistema, a partir de la trayectoria correspondiente a cada condición inicial. Supongamos que cada vez que observamos que una coordenada, digamos  $x$ , pasa por 0 con  $p_x > 0$ , dibujamos la posición de la partícula en el plano  $(y, p_y)$ . Es una visualización “estroboscópica” de la trayectoria.<sup>6</sup>

Si los períodos de los movimientos en  $x$  y en  $y$  son commensurables (su cociente es racional), estas observaciones darán unos puntos aislados en el plano, ya que las trayectorias se cierran y vuelven a pasar por los mismos lugares. Si los períodos son incommensurables (cociente irracional), las observaciones irán trazando unas curvas, correspondientes a una de las curvas cerradas en el caso separable. De esta manera podemos estudiar la topología del espacio de fases correspondiente a cualquier hamiltoniano analizando apenas las trayectorias.

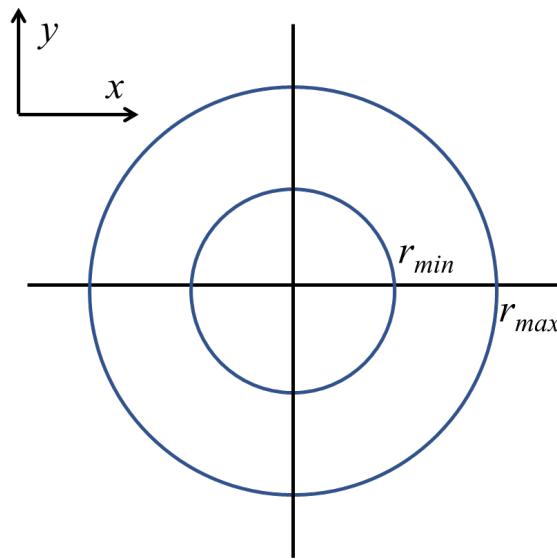
El caso de un potencial central sirve para ilustrar el comportamiento general de un hamiltoniano integrable. Para valores dados de la energía y del momento angular, el movimiento radial de una partícula confinada está acotado entre los puntos de retorno  $r_{in}$  y  $r_{out}$ . ¿Se acuerdan de dónde salen? Son las soluciones de la ecuación algebraica

$$E - U(r) - \frac{p_\phi^2}{2r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{in}, r_{out}.$$

En el plano  $(x, y)$ , estos dos radios definen una corona, o un anillo.

---

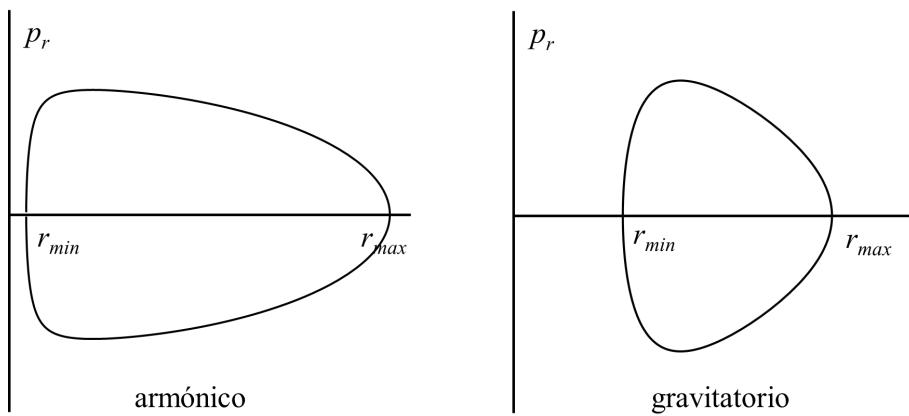
<sup>6</sup>La idea es parecida, pero no igual, a la del mapeo de Lorenz del Capítulo 2.



Más aun, la conservación del momento angular permite calcular, para cada valor de  $r$ , el momento  $p_r$ , que puede tomar sólo dos valores:

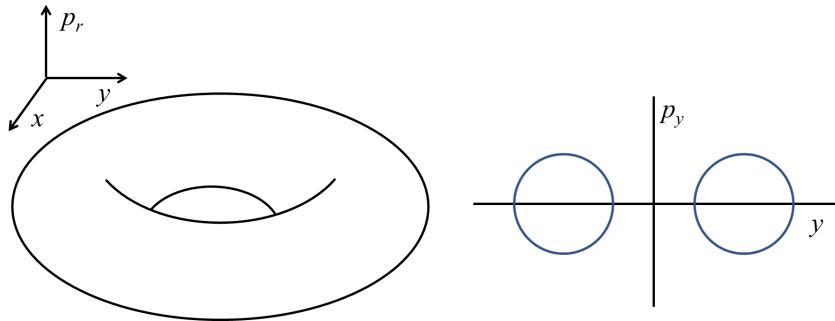
$$p_r = \pm \sqrt{2E - 2U(r) - \frac{p_\phi^2}{r^2}}.$$

Para los casos de potencial armónico y gravitatorio, estos se ven así:



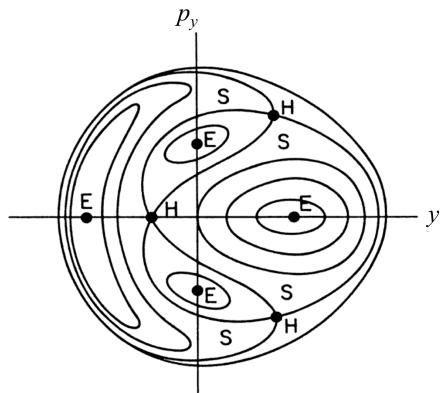
Son muy parecidos. Para otros potenciales tendrán otra forma, pero serán cualitativamente como estos. Estos valores del momento definen una variedad (una superficie) bidimensional en el espacio  $(x, y, p_r)$ , en donde

está contenida cada trayectoria. Esta superficie tiene la topología de un toro:



Si tomamos una sección de este toro, cuando  $x = 0$ , en el plano  $(y, p_r \equiv p_y)$  obtendremos dos curvas cerradas. Si dejamos la energía fija, pero cambiamos el momento angular (cambiando las condiciones iniciales), el tamaño de este toro cambia, y cambia el tamaño de las curvas en la sección de Poincaré.

Esta topología, ilustrada para los potenciales centrales, es común a todos los sistemas integrables. Para cada valor de las constantes de movimiento, las trayectorias se mantienen confinadas es estas superficies, que se llaman *toros invariantes*. Para cada valor de la energía, hay muchos toros invariantes; cada uno corresponde a un valor de la otra cantidad conservada (el momento angular, para el caso del potencial central). En general, la sección de Poincaré se ve como algo así:



Los puntos marcados E son *puntos fijos elípticos*, y corresponden a trayectorias que se repiten exactamente después de algún período. Son como los mínimos de un potencial efectivo. A su alrededor hay toros anidados. En el caso del potencial central hay un único punto elíptico correspondiente a la órbita circular de cierta energía. Los toros a su alrededor son de la misma energía, pero distinto momento angular (no confundir con las órbitas elípticas del mismo momento angular y distinta energía, que estudiábamos en el problema de Kepler).

Puede haber más de un punto elíptico, y separando los toros cercanos a unos y otros hay *separatrices* (S), que se cruzan en otros puntos fijos (H), llamados *hiperbólicos*, que también son la visión estroboscópica de trayectorias periódicas. Pero mientras los puntos elípticos corresponden a trayectorias estables ante pequeñas perturbaciones, los hiperbólicos corresponden a trayectorias que son estables frente a perturbaciones en una dirección (una asíntota de la hipérbola) e inestables en otra (o sea, como órbita, son inestables). Un teorema de Chirikov<sup>7</sup> demuestra que la existencia de estas intersecciones entre variedades estables e inestables es necesaria para que haya caos en un sistema hamiltoniano.

Ahora bien, una pregunta relevante es: ¿qué pasa con los toros de un sistema integrable ante una perturbación que destruye la integrabilidad? Para una perturbación “pequeña”, la mayor parte de los toros alrededor de los puntos elípticos resultan distorsionados, pero mantienen la topología de toros anidados. Esto es lo que dice el famoso teorema KAM, de Kolmogorov, Arnold y Moser. ¿Qué significa “la mayor parte”? Significa que en regiones adyacentes del espacio de fases las trayectorias se vuelven caóticas, que producen en las secciones de Poincaré algo que parece un desparramo aleatorio de puntos (ni puntos fijos, ni curvas regulares). Y dentro de estas regiones caóticas se encuentran otros puntos elípticos con sus toritos anidados, dando una topología infinitamente intrincada, jerarquizada y fascinante. Las trayectorias correspondientes se llaman *atractores extra-*

---

<sup>7</sup>Boris Chirikov es el autor del *mapeo estándar*, que es probablemente el sistema hamiltoniano caótico más sencillo, extensamente estudiado. Es el mapeo de Poincaré de un rotor que recibe un impulso por ciclo.

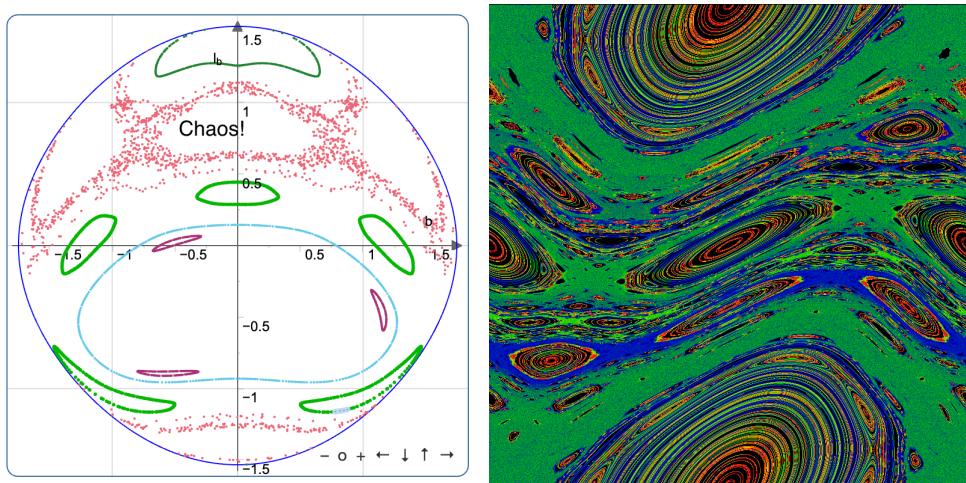


Figura 4.1: Secciones de Poincaré del péndulo doble (¿energía?), y del hamiltoniano estándar ( $K = 0.971635$ ).

*ños.*

## 4.2 El modelo de Hénon-Heiles

Dos astrónomos de Princeton, Michel Hénon y Carl Heiles<sup>8</sup>, estaban estudiando el movimiento de las estrellas en una galaxia de disco (como la Vía Láctea, donde la mayoría de las estrellas forman un disco relativamente fino). Suponiendo que el potencial gravitatorio tiene simetría cilíndrica,  $U = U(r, z)$ , producido por el conjunto de la distribución de estrellas, ¿cómo se mueve una estrella individual? Cuando la estrella esté por encima del disco, éste la atraerá hacia abajo hasta que lo cruce, y luego de nuevo hacia el lado de arriba. ¿Cómo serán las órbitas, planas como las de los planetas, con dos cruces del disco por órbita? ¿O harán vboritas cruzando el disco muchas veces? Entonces, se preguntaban, ¿qué fracción del espacio ocupa la trayectoria? ¿Eh?

<sup>8</sup>M Henon and C Heiles, *The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments*, The Astronomical Journal 69:73–79 (1964). Véase también: H Goldstein, C Poole and J Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed., chap. 11, *Classical chaos* (Addison-Wesley, 2000).

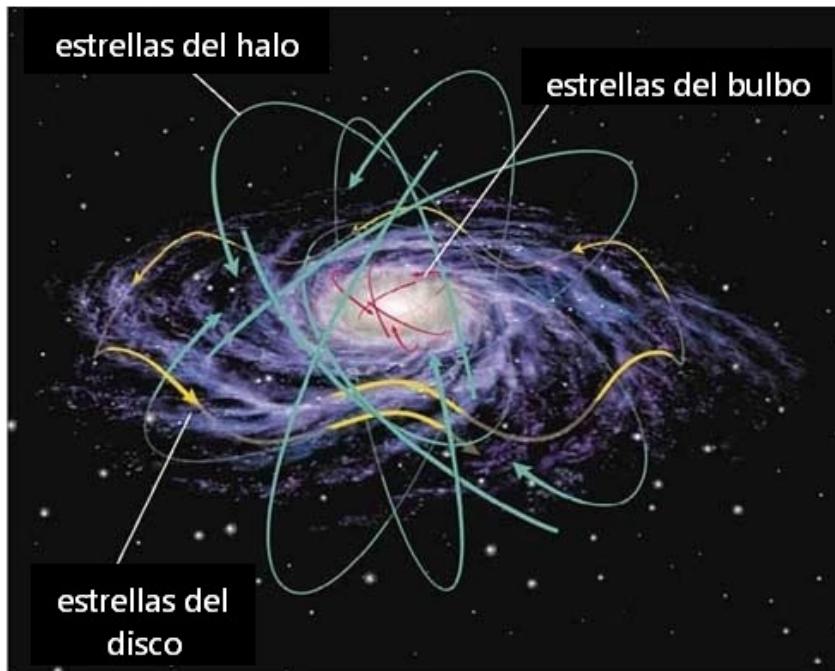
El sistema tiene 3 grados de libertad, con un espacio de fases de 6 dimensiones:  $r, z, \phi, p_r, p_z, p_\phi$ . Deberían existir 3 cantidades conservadas para que el sistema sea integrable, y como máximo 5 si el sistema fuera *superintegrable*<sup>9</sup>:

$$Q_j(r, z, \phi, p_r, p_z, p_\phi), \quad j = 1 \dots 5,$$

que sean constantes a lo largo de la trayectoria. Dos de ellas son viejas conocidas, la energía y el momento angular:

$$\begin{aligned} Q_1 &= E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + U(r, z), \\ Q_2 &= L_z = r^2\dot{\phi}, \end{aligned}$$

(noten que es sólo una componente de  $\vec{L}$  porque el potencial no es esférico, a diferencia del caso estudiado en el curso de Mecánica). Estas dos




---

<sup>9</sup>Los sistemas que tienen más cantidades conservadas que grados de libertad se llaman superintegrables. El problema de Kepler (el movimiento de una partícula en un potencial gravitatorio) es superintegrable: además de  $E$  y  $L$  se conserva el vector de Runge-Lenz.

integrales se llaman *aislantes* (en inglés, *isolating*), porque si uno da un valor de la energía, la ecuación

$$Q(r, z, \phi, p_r, p_z, p_\phi) = E$$

es una hipersuperficie que “aísla” una región del espacio de fases (por ejemplo, la corona definida por los ápsides en el problema gravitatorio). Las trayectorias están en las intersecciones de estas superficies, porque todas las cantidades conservadas se conservan independientemente. Es decir, tendríamos una función

$$f(r, z, \phi, p_r, p_z, p_\phi) = f(E, L_z).$$

No todas las constantes de movimiento tienen esta propiedad de aislar regiones en el espacio de fases. Obviamente, a las que no lo son se las llama *no aislantes*. Para ejemplificar la diferencia, veámoslo en un ejemplo más sencillo, en un oscilador armónico 2D:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \alpha(t - t_x), \\ y(t) &= B \sin \beta(t - t_y), \end{aligned}$$

donde  $\alpha/\beta$  puede ser racional o irracional,<sup>10</sup> ¿cuáles son las cantidades conservadas? Si derivamos la primera nos da un coseno:

$$\dot{x} = A\alpha \cos \alpha(t - t_x).$$

Así que con un seno y un coseno podemos armar una constante:

$$Q_1 = \dot{x}^2 + \alpha^2 x^2 = A^2(\alpha^2 + 1) = \text{cte } 1.$$

Esta constante restringe  $x$  al intervalo  $(-A, A)$ . Del mismo modo:

$$Q_2 = \dot{y}^2 + \beta^2 y^2 = B^2(\beta^2 + 1) = \text{cte } 2.$$

---

<sup>10</sup>Lo cual da trayectorias bien distintas... ¿en qué sentido?

Juntas,  $Q_1$  y  $Q_2$  “aíslan” la órbita a  $(-A < x < A, -B < y < B)$ . Hay una tercera cantidad conservada (el espacio de fases tiene dimensión 4). Para encontrarla, despejo  $t$  de las dos soluciones:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{asin} \frac{x}{A} + t_x = \frac{1}{\beta} \operatorname{asin} \frac{y}{B} + t_y, \\ \Rightarrow t_x - t_y &= \frac{1}{\beta} \operatorname{asin} \frac{y}{B} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{asin} \frac{x}{A} \equiv Q_3 = \text{cte } 3. \end{aligned}$$

Es decir, la diferencia de las fases iniciales es constante. Reescribo esto despejando  $x$ :

$$x = -A \sin \left( \alpha Q_3 - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{asin} \frac{y}{B} \right).$$

En esta fórmula, la función  $\operatorname{asin}(y/B)$  es periódica, de período  $2\pi$ . Así que el segundo término del paréntesis se repite cada  $2\pi \alpha/\beta$ . Y aquí es donde podemos ver la diferencia entre  $\alpha/\beta$  racional o irracional:

- Si  $\alpha/\beta$  es racional, para *cada* valor de  $y$ , existe una cantidad *finita* de valores de  $x \in (-A, A)$ , y la órbita es periódica. Así que  $Q_3$  tiene una cantidad finita de valores posibles, y  $Q_3$  es aislante.
- Si  $\alpha/\beta$  es irracional, el segundo término puede tener infinitos valores distintos, y lo mismo  $x$ , y entonces  $Q_3$  también, y no restringe adicionalmente a la órbita en  $(-A, A) \times (-B, B)$ . En tal caso  $Q_3$  es “no aislante”, y por más que desde un punto de vista matemático sea una constante de movimiento, desde un punto de vista físico no sirve para nada.

Moraleja: para un dado potencial, ¡algunas órbitas pueden tener más cantidades conservadas (aislantes) que otras! ¿No es sorprendente? Esto será responsable de una característica del espacio de fases que veremos en breve.

En el modelo de Hénon-Heiles, tenemos  $Q_1$  y  $Q_2$  aislantes. Otras dos, digamos  $Q_4$  y  $Q_5$ , puede demostrarse que son “generalmente” no aislantes (dicen en el paper, andá a saber). ¿Qué pasa con  $Q_3$ ? Dicen que durante

muchos años se creyó que  $Q_3$  era no aislante, simplemente porque nadie la había encontrado analíticamente a pesar del esfuerzo en tal sentido en la primera mitad del siglo XX. Sin embargo, la distribución de velocidades estelares en la proximidad del sistema solar, y también las primeras soluciones numéricas que se estaban estudiando en esos años, parecían indicar lo contrario.

Como el problema gravitatorio entero es medio inmanejable, Hénon y Heiles hacen “la Gran Lagrange”<sup>11</sup> y lo restringen a 2D. El potencial que eligen “*after some trials*” es un oscilador armónico con perturbaciones cúbicas<sup>12</sup>:

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \epsilon \left( x^2y - \frac{1}{3}y^3 \right).$$

Con estos términos cúbicos, las ecuaciones no se pueden integrar. Para simplificar el cálculo, el hamiltoniano se puede adimensionalizar y el parámetro  $\epsilon$  se puede absorber en la energía,  $E$ , que así se convierte en el apartamiento respecto del comportamiento integrable del oscilador armónico:

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = E = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

En coordenadas polares se pone de manifiesto la simetría triangular del potencial:

$$U(r, \phi) = r^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3}r \sin 3\phi \right).$$

Para  $E < U_0 = 1/6$  la “estrella” está confinada en un triángulo (Fig. 4.2, izquierda). Para energías mayores, se escapa en tres direcciones posibles (Fig. 4.2, derecha).

---

<sup>11</sup>Es decir, como en el problema restringido de tres cuerpos y los puntos de Lagrange.

<sup>12</sup>El potencial en este hamiltoniano definitivamente no tiene la forma de un problema gravitatorio. Pero como vimos arriba, la topología de las órbitas es la misma tanto si el potencial es gravitatorio como si es armónico. Hénon y Heiles justifican su elección diciendo simplemente que este potencial es: 1) analíticamente sencillo y con trayectorias fáciles de computar, y 2) suficientemente complicado para que esas trayectorias no sean triviales. Es un típico argumento de cualquier físico teórico.

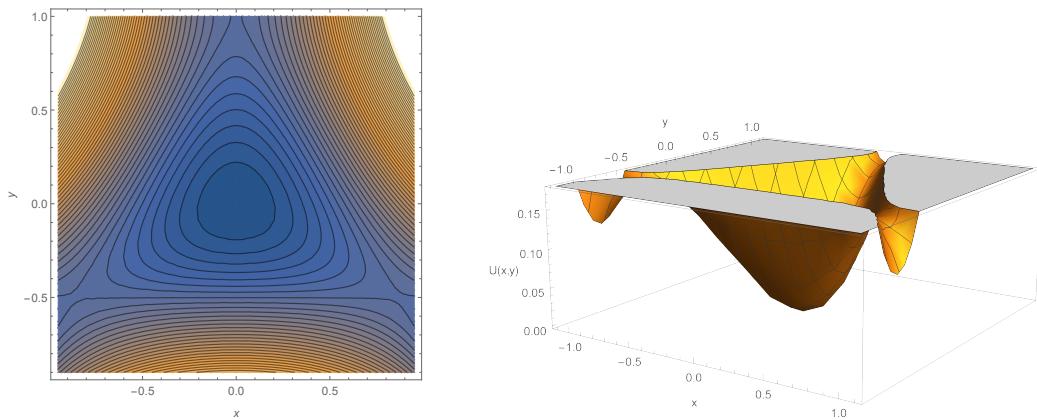


Figura 4.2: Potencial de Hénon-Heiles.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen sin problema con las ecuaciones de Hamilton, y forman el siguiente sistema de orden 1:

$$\dot{x} = p_x, \quad (4.1)$$

$$\dot{y} = p_y, \quad (4.2)$$

$$\dot{p}_x = -x - 2xy, \quad (4.3)$$

$$\dot{p}_y = -y - x^2 + y^2. \quad (4.4)$$

Como no podemos integrarlas analíticamente, vamos a explorar sus soluciones numéricamente, como hicieron Hénon y Heiles. Como nos interesa que se conserve la energía usamos un método simpléctico. El método de Verlet nos da la recurrencia<sup>13</sup>:

$$p_x^{n+1} = p_x^n - (x^n + 2x^n y^n)h, \quad (4.5)$$

$$p_y^{n+1} = p_y^n - (y^n + (x^n)^2 - (y^n)^2)h, \quad (4.6)$$

$$x^{n+1} = x^n + p_x^{n+1}h, \quad (4.7)$$

$$y^{n+1} = y^n + p_y^{n+1}h. \quad (4.8)$$

Noten que escribí primero las ecuaciones de los momentos, y después las de las posiciones, porque éstas usan los momentos a tiempo  $n + 1$ . Esto es

<sup>13</sup>Este esquema lo copié de un libro, pero me parece que no es Verlet. REVISAR. Es conservativo. Las secciones de Poincaré están hechas con NDSolve.

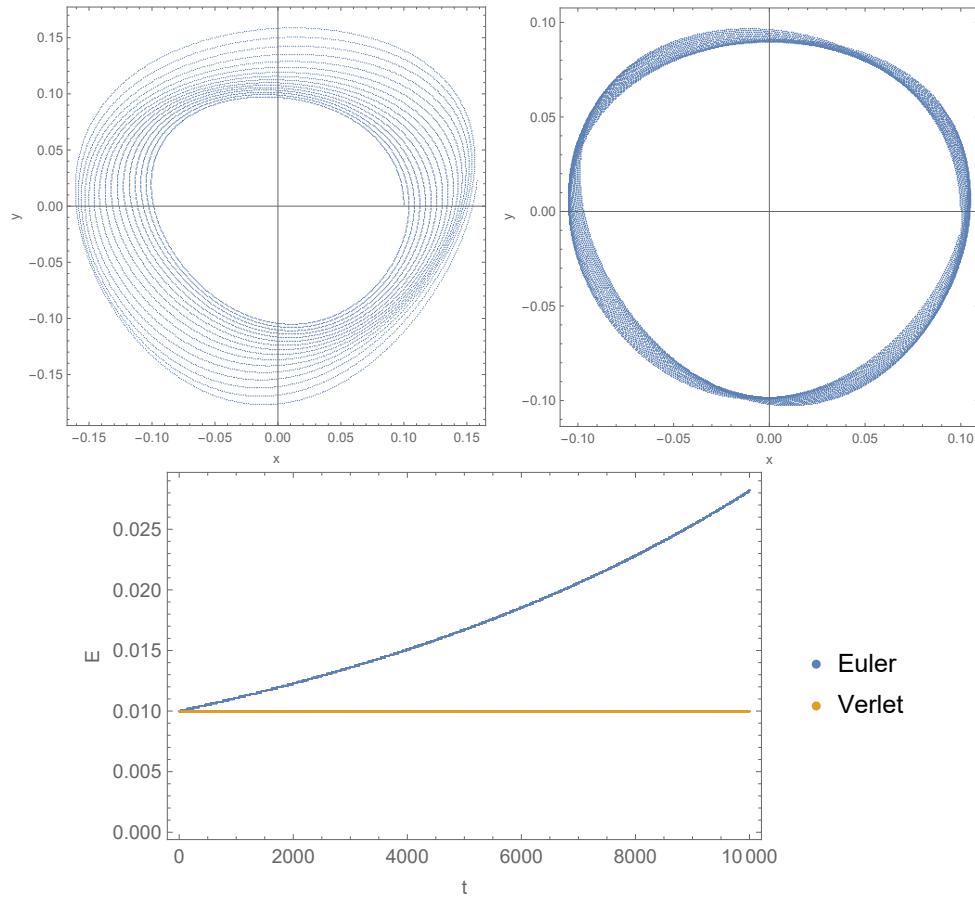


Figura 4.3:  $E = 0.01$ ,  $x = 0.1$ ,  $y = 0$ ,  $p_y = 0.1$ . Izquierda: Euler. Derecha: Verlet. Abajo: energía.

crucial, y es una posible fuente de error en la implementación numérica. Cuando lo escribí para generar los gráficos de la Fig. 4.3 las puse al revés, porque tenía escritas las ecuaciones (4.1-4.4), me daba súper mal, y me costó encontrar el error. El método de Euler no es muy distinto: en las ecuaciones (4.7) y (4.8) hay que usar  $p^n$  en lugar de  $p^{n+1}$ , pero la diferencia de los resultados es inmensa. Por ejemplo, si ponemos una energía pequeña ( $E = 0.01 \ll 1/6$ ), el sistema tiene que quedar confinado en el pocito del potencial. Con los dos métodos vemos órbitas abiertas, no periódicas, alrededor del origen. ¡Pero con Euler no son acotadas! Verlet, en cambio, da órbitas acotadas, como deben ser (Fig. 4.3).

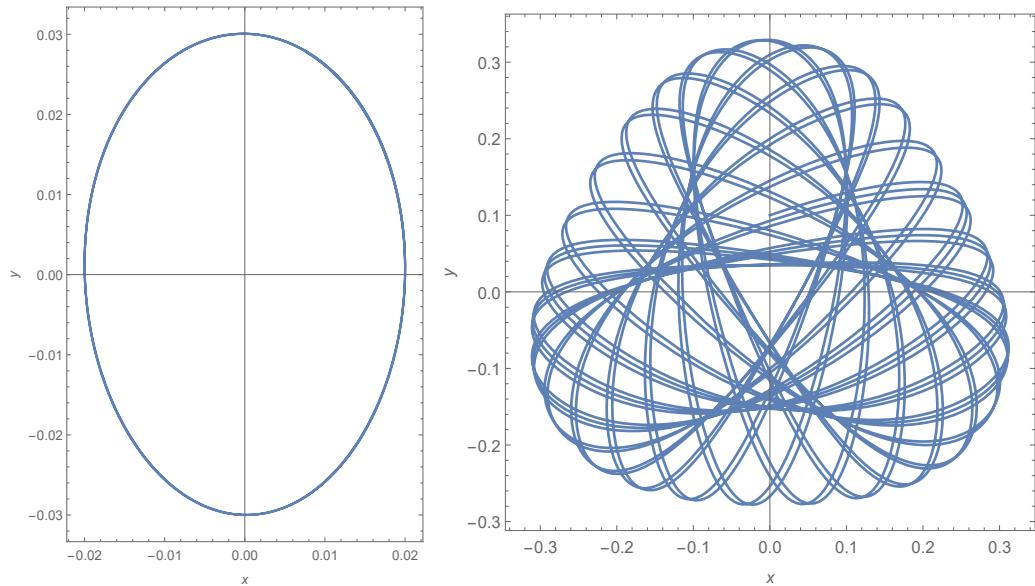


Figura 4.4: Izquierda:  $E = 0.0001$ ,  $x_0 = 0.02$ ,  $y_0 = 0.001$ ,  $p_{y0} = 0.03$ . Derecha:  $E = 0.05$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.1$ ,  $p_{y0} = 0.1$ .

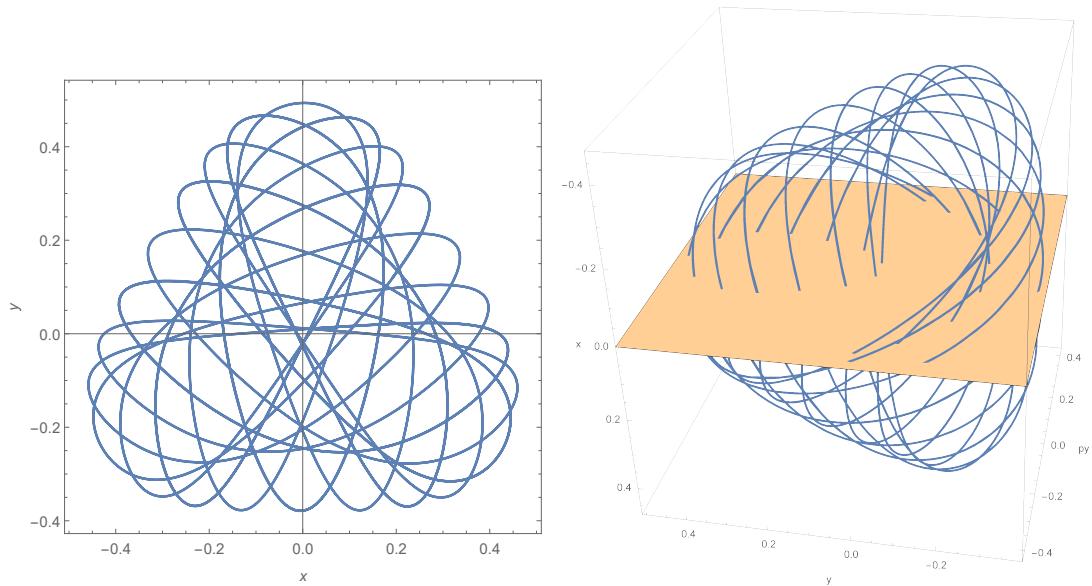


Figura 4.5:  $E = 0.1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.01$ ,  $p_{y0} = 0.03$ . Derecha: se muestra la trayectoria en el espacio de fases reducido  $(x, y, p_y)$ , y el plano  $x = 0$  que define la sección de Poincaré en el plano  $(y, p_y)$ .

Para energías muy pequeñas, las órbitas son sencillas y parecidas a las del oscilador armónico del fondo del pozo del potencial (Fig. 4.4, izquierda). Para energías más grandes, o para otras condiciones iniciales, las trayectorias en el espacio 2D o en el espacio de fases 4D son complicadas de analizar (Fig. 4.4, derecha). Una visualización más adecuada son las *secciones de Poincaré* que ya mencionamos.

Digamos que la trayectoria corta  $S$  en  $x$ , y luego en  $P(x)$ , y así sucesivamente. Para el análisis nos quedamos sólo con los puntos  $x, P(x), P^2(x), \dots$ , los puntos de intersección (Fig. 4.5). Es decir, el método convierte el sistema diferencial en un *mapeo iterado*,  $P(x)$ , y muchas propiedades se pueden analizar directamente en el mapeo. Si la órbita fuera periódica veríamos un solo punto, correspondiente al cruce de la sección una y otra vez por el mismo lugar. Pero las trayectorias no son periódicas. ¿Qué vemos?

En este problema, observemos el plano  $(y, p_y)$ , y marcamos un punto cada vez que la estrella pasa por  $x = 0$ , como se muestra en la Fig. 4.5, derecha (con  $p_x > 0$  o  $p_x < 0$ , por una simetría del sistema, ver Koonin p. 58).

Empecemos con  $E = 1/12$  (el primer gráfico que muestran en el paper), Fig. 4.6. Es una energía pequeña, cercana al fondo del pozo del potencial, así que las trayectorias son parecidas a las elipses que ejecutaría un oscilador armónico. Los puntos sucesivos del mapeo caen sobre una curva cerrada y continua. Esto parece indicar que *sí* existe una tercera integral de movimiento, porque esto parece la sección de un toro, sobre el cual se está enroscando la trayectoria. Esta trayectoria no es periódica, pero tiene cierta regularidad. Le decimos *cuasi-periódica*.

Para la misma energía, pero otras condiciones iniciales, tenemos el panorama que se muestra en el Fig. 4.7. La curva exterior señala el borde de la región accesible al sistema para esa energía. Dentro de ella vemos que hay cuatro regiones de curvas ovaladas, correspondientes a estas órbitas cuasi-periódicas. En medio de cada una de ellas hay *puntos fijos* del mapeo, de tipo *elíptico*. Separando estas regiones hay una trayectoria distinta. Es una única curva (recordar que estas curvas son trayectorias del mapeo), que se corta a sí misma tres veces, en los *puntos hiperbólicos*. Estas tres componentes son las cruciales para lo que va a ocurrir a continuación. Los

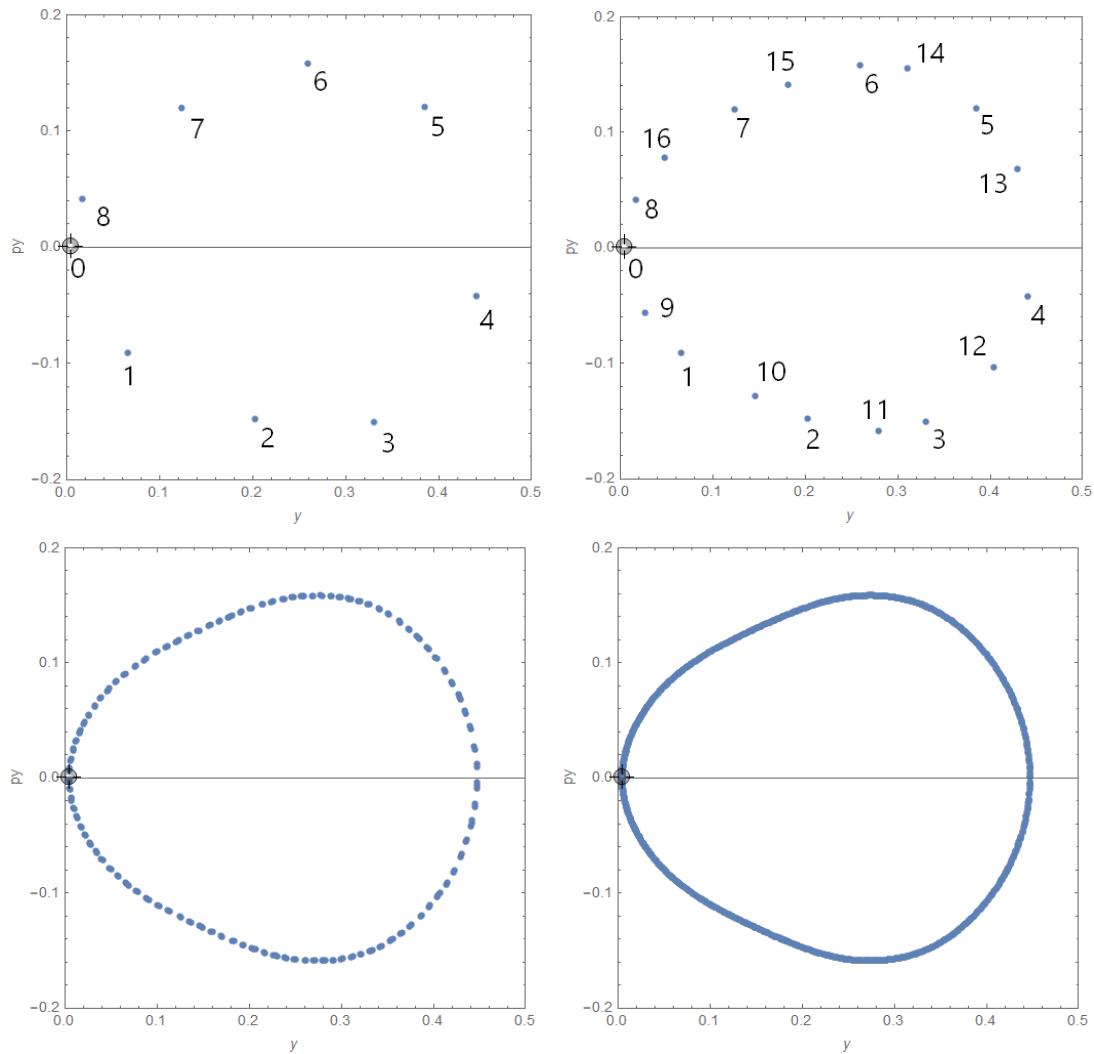


Figura 4.6: Secciones de Poincaré en el plano  $(y, p_y)$ , para  $E = 1/12$ . Se muestra una misma condición inicial (cerca del origen) y trayectorias del mapeo hasta tiempos progresivamente más largos. En los paneles de arriba se indica el orden de los puntos del mapeo, que van llenando la curva a medida que la órbita da vueltas en el correspondiente toro en el espacio de fases.

puntos hiperbólicos expulsan la órbita de su proximidad, y los puntos elípticos la pliegan a su alrededor. La acción conjunta produce un “amasado” del espacio de fases, con estiramientos y plegamientos sucesivos, que produce en el efecto familiar de un amasado de panadería: hacen desaparecer

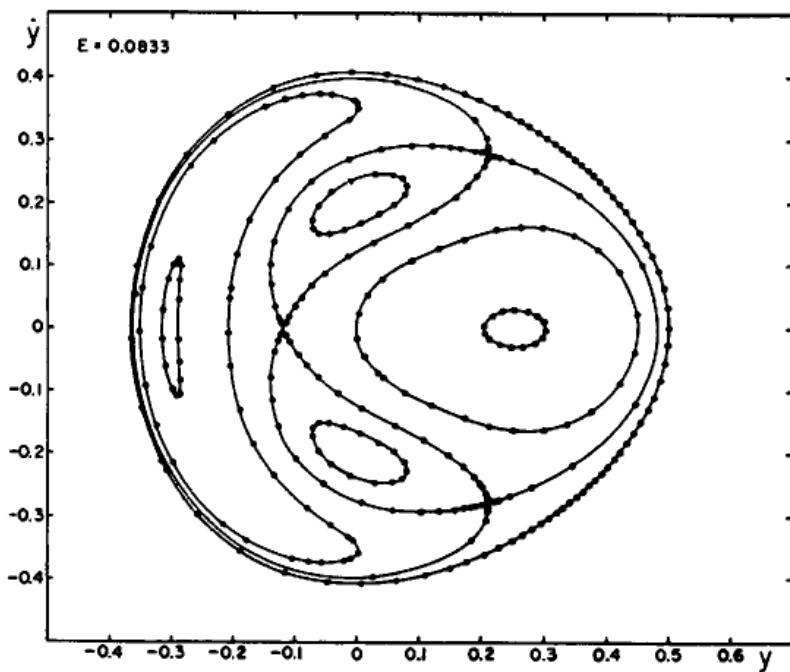


Figura 4.7: Secciones de Poincaré en el plano  $(y, p_y)$ , para  $E = 1/12$ . Se muestran las órbitas para varias condiciones iniciales (de Goldstein).

las condiciones iniciales.

Aumentando la energía a  $E = 1/8$  pasa algo inesperado (Fig. 4.8, izquierda). Todavía existen las curvas cerradas rodeando los puntos elípticos. Pero entre ellas ya no hay una curva continua, sino lo que parece un salpicado irregular de puntos aislados.

Si seguimos su orden, parecen saltar de manera irregular en la sección del Poincaré. Lo que pasó es análogo a lo que le pasó al mapeo logístico: se hizo caótico. Los puntos que vemos son una sección de una única trayectoria caótica (un *atractor extraño*) del sistema hamiltoniano. Que corta el plano  $(y, p_y)$  en puntos al azar.

Aumentando más la energía ( $E = 1/6$ , Fig. 4.8, derecha) vemos que el caos domina casi todo el espacio de fases. Una manera de cuantificar cuánto caos hay sería graficar el área relativa de las regiones regulares para cada valor de la energía. Es lo que se muestra en la Fig. 4.9. El caos

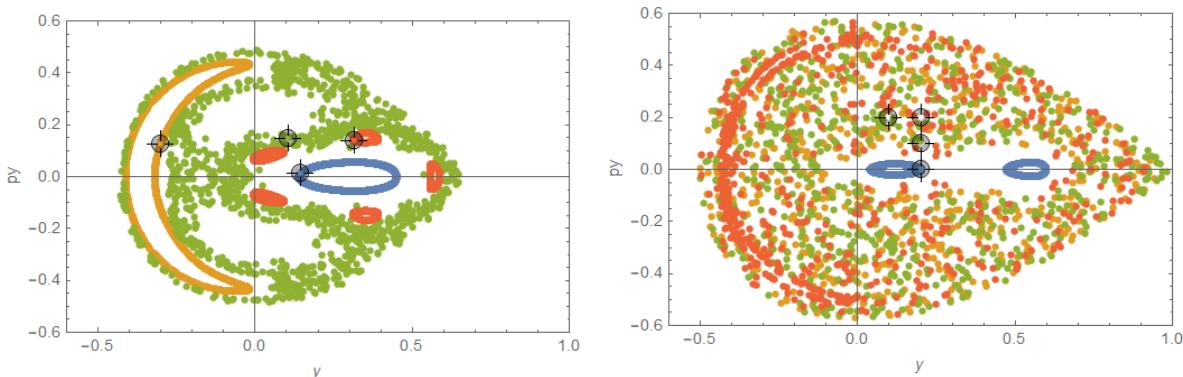


Figura 4.8: Secciones de Poincaré en el plano  $(y, p_y)$ , para  $E = 1/8$  (izquierda) y  $E = 1/6$  (derecha). Se muestran las órbitas para varias condiciones iniciales.

aparece en  $E \approx 1/9$ , y a partir de allí la región regular del espacio de fases se achica linealmente hasta el caos total en  $E \approx 1/6$ .

Otro aspecto inesperado es la existencia de “islas” de comportamiento regular (donde la tercera integral existe y es aislante, de las buenas) inmersas en el mar de caos (donde la tercera integral es no aislante), llamado “región ergódica”. Por ejemplo, para  $E = 1/8$  (Fig. 4.8) aparecen 5 islas rodeando uno de los óvalos. Si uno hace un zoom en el mar caótico, se encuentra con una jerarquía de islas, apretadas y con características auto-similares. Esto hace que el atractor extraño tenga una estructura fractal, de dimensión menor que 2 en la sección de Poincaré.

Las trayectorias caóticas son sensibles a las condiciones iniciales, igual que las que vimos en el caso disipativo del mapeo logístico. De mismo modo puede estudiarse la separación exponencial de trayectorias correspondientes a condiciones iniciales vecinas, y caracterizarlas por un exponente de Lyapunov. Como son trayectorias embebidas en más dimensiones, hay que estudiar cómo se alejan en cada dimensión, y obtener varios exponentes ordenados:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ . Si el mayor de ellos es positivo, la órbita es caótica. Pero hay una cantidad de sutilezas para medirlos en casos concretos, de manera que existen distintas técnicas numéricas para calcularlos.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>C Skokos, *The Lyapunov Characteristic Exponents and their computation*. In: Souchay and Dvorak (eds.), *Dynamics of small solar system bodies and exoplanets*, Lecture Notes in Physics,

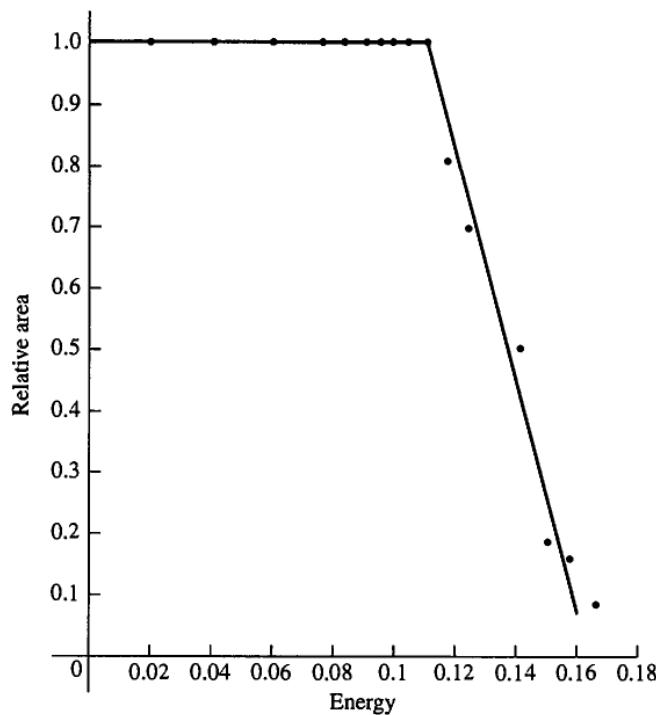


Figura 4.9: Fracción del espacio de fases del sistema de Hénon-Heiles ocupada por órbitas regulares, en función de la energía (de Goldstein y HH).

Lo más sencillo es calcular  $\log(d_1/d_0)$ , basado en la distancia normal a la trayectoria de referencia luego de un paso de integración. A continuación se renormaliza la condición inicial, a lo largo de esa dirección, para que vuelva a valer  $d_0$ , y se calcula un nuevo paso de integración, obteniendo  $\log(d_2/d_0)$ . Repitiendo el procedimiento un tiempo largo, se calcula el promedio de las  $\log(d_i/d_0)$ . Hay otras técnicas, que permiten calcular todos los exponentes usando un método variacional o mediante transformadas de Fourier de la trayectoria.

---

vol 790 (Springer, 2010). <http://arxiv.org/abs/0811.0882v2> es un buen review reciente.

## Autómatas celulares

LOS MAPEOS ITERADOS Y SU RICA DINÁMICA parecen desafiar la idea que a los físicos nos enseñan desde chiquitos: los modelos tienen que ser sencillos, porque los sistemas complicados tienen dinámica complicada. Pensemos, por ejemplo, en el sistema solar, lleno de planetas, satélites, asteroides y la mar en coche. La Tierra, ¿se caerá al Sol? ¿Chocará con Júpiter? ¿Saldrá eyectada al espacio interestelar? Es un lío. Mejor hacemos modelos de dos cuerpos, decimos los físicos, y ¡zas! nos salen las leyes de Kepler. ¿Y los espectros de los gases calientes? Trillones de átomos y moléculas, chocando entre sí, todo caliente, más el campo electromagnético... ¡otro lío! Mejor: el átomo de hidrógeno, y calculamos la serie de Balmer, ¡un éxito!

¿Qué podría ser más sencillo que el mapeo logístico? Si tiramos el término cuadrático queda algo más sencillo, pero nos pasamos de sencillo, porque el término lineal no nos sirve casi para nada. Vamos a estudiar a continuación una clase de modelos que son quizás los modelos dinámicos más sencillos posibles. No sólo el tiempo y el espacio son discretos (algo que acostumbramos a hacer en la resolución numérica de un sistema dinámico continuo, después de todo) sino que también son discretos los estados del sistema. Estos sistemas son ideales para estudiarlos en la computadora, ya que nos independizamos de los vericuetos de las variables “floating point”. Vamos a hacer que las transiciones entre estos estados, además, obedezcan a reglas sencillas, determinísticas y locales. Con todo, estos

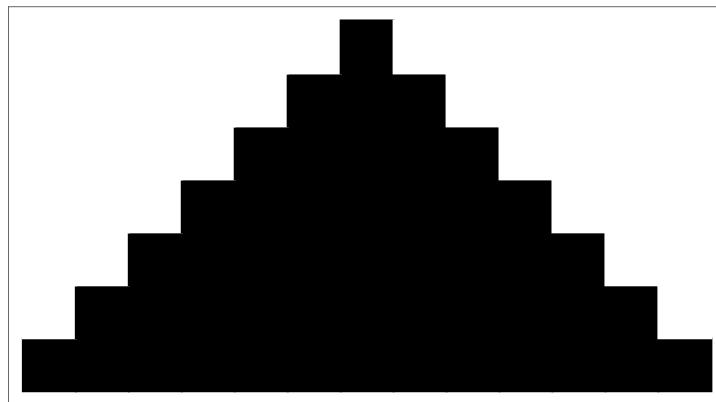
sistemas pueden tener comportamientos complejos, que parecen incluso no guardar relación con las reglas subyacentes. Más aun: la extraordinaria complejidad de formas que encontramos en el mundo natural muchas veces resulta de procesos que obedecen a reglas sencillas como las que vamos a usar. Estos sistemas se llaman *autómatas celulares*.

## 5.1 Autómatas celulares en una dimensión

Supongamos una red unidimensional, con cada celda en un estado blanco o negro (como si fueran bits). La regla para actualizar el estado de cada celda depende de su propio estado y del de sus vecinas. Los sucesivos pasos temporales los acomodamos arriba (o abajo) de esta red, produciendo una visualización espacio-temporal 2D del autómata.

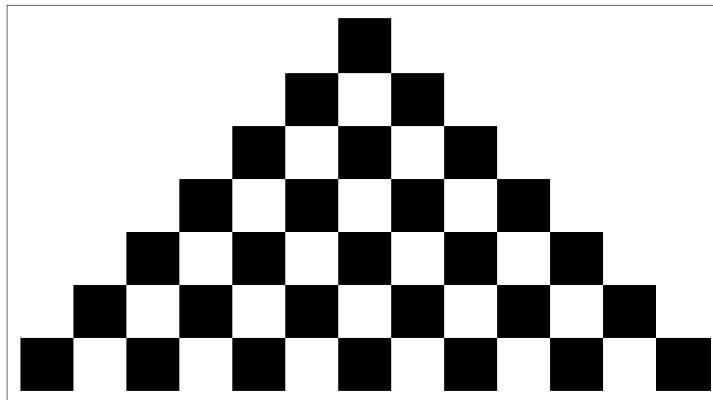
Nos preguntamos: dados un pattern inicial y una regla, ¿cómo evoluciona el arreglo? No es trivial. Veamos algunos ejemplos.

**Regla A.** La celda  $j$  se pone (o se queda) negra si una o más del vecindario  $[j - 1, j, j + 1]$  es negra. Si no, se pone (o se queda) blanca. Veamos la evolución partiendo de una celda negra aislada:



El resultado es un triángulo negro. Nada del otro mundo.

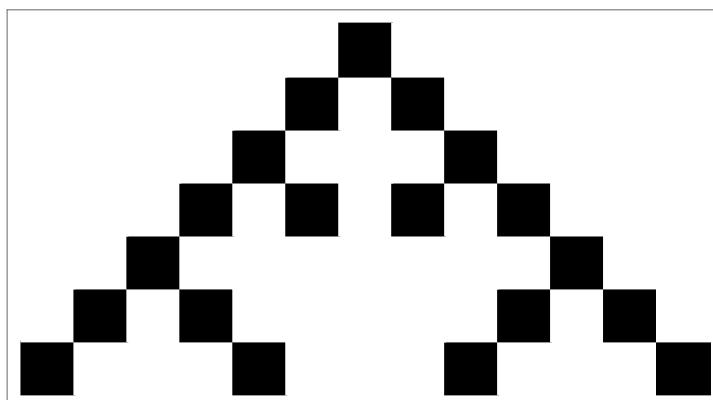
**Regla B.** La celda  $j$  se pone (o se queda) negra si una o ambas vecinas  $j - 1$  y  $j + 1$  son negras. Si no, se pone (o se queda) blanca. Partiendo de la misma celda negra aislada:



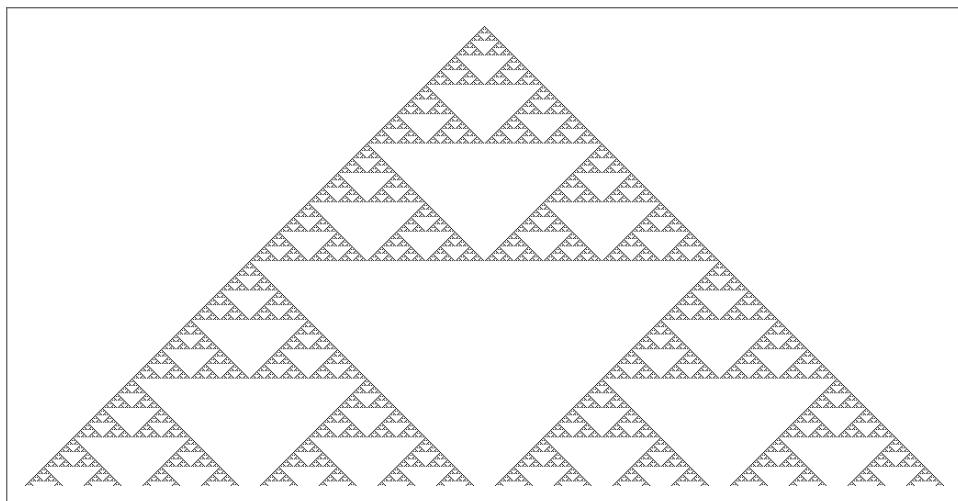
El pattern es de nuevo triangular, pero ahora pintado como un damero.

La verdad que estos dos autómatas, si uno mira fijo las reglas, se los puede imaginar sin mayor problema. Veamos otro.

**Regla C.** La celda  $j$  se pone (o se queda) negra si una y sólo una de sus vecinas  $j - 1$  o  $j + 1$  es negra. Si no, se pone (o se queda) blanca.



De nuevo vemos un triángulo envolvente, pero el patrón en su interior ya no es tan simple. Vemos que quedan espacios blancos, y en una corrida larga vemos que forman triángulos blancos invertidos, de muchos tamaños distintos, ordenados de manera regular. Esto pasa porque cuando se forma un pattern alternado (como en el paso 3) la regla hace que se reviertan todas las celdas interiores a blanco, y el crecimiento se reinicia desde los extremos (que están cada vez más lejos). Así se va repitiendo una secuencia de extinciones interiores, de todos los tamaños.

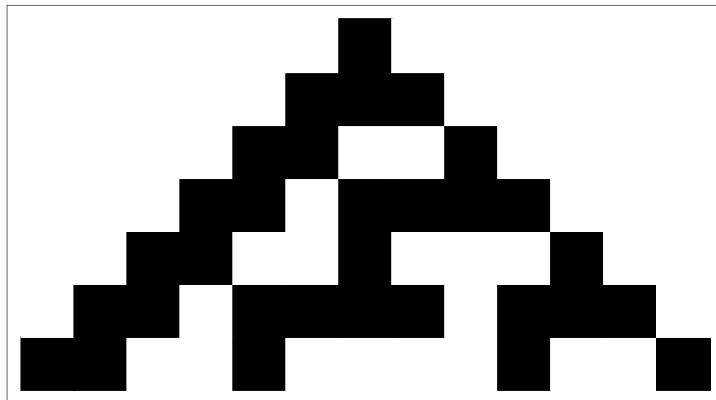


En una escala macroscópica como la de esta segunda figura, donde no vemos las celdas individuales en las que opera la regla, lo que vemos son triángulos anidados. La forma incluso sugiere que fue construida de otra manera: 3 copias de la imagen grande, achicadas con un factor de escala, tocándose por los vértices. Y cada copia, a su vez, satisface la misma *autosimilaridad*.

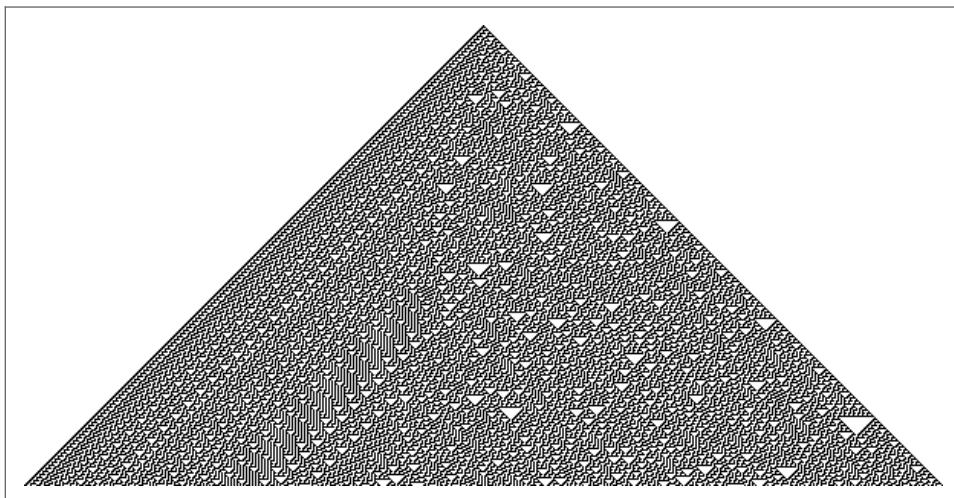
La autosimilaridad es la característica de las *estructuras fractales*. La figura que creamos con esta regla es muy parecida a un fractal famoso, el *triángulo de Sierpinski*, que se construye de una manera muy distinta. Más sobre fractales en el capítulo correspondiente.

**Regla D.** La celda  $j$  se pone (o se queda) negra si una y sólo una del vecindario  $[j - 1, j, j + 1]$  es negra, o si sólo  $j$  y  $j + 1$  son negras. Si no, se pone (o se queda) blanca.

Esta regla tiene un sesgo, a diferencia de las anteriores, que eran simétricas en la red.

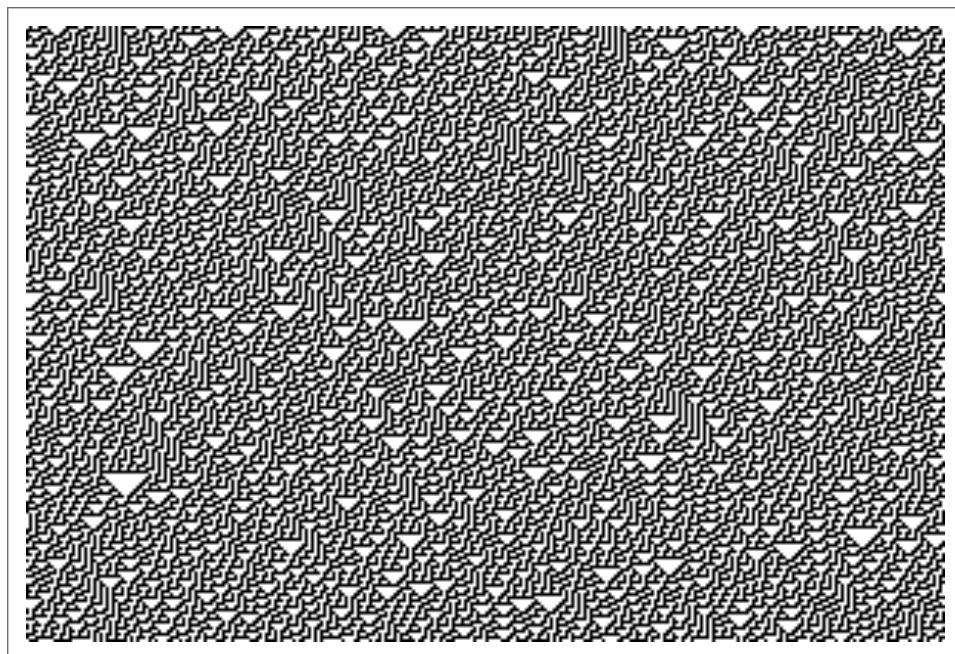


Vemos de nuevo el triángulo, pero el patrón interior no tiene ahora la simetría de inversión espacial de las anteriores. Pero también vemos que, si bien la mitad izquierda parece regular, ¡la mitad derecha no! Si vemos una vez más el efecto macroscópico en una corrida larga, podemos ver que toda la mitad derecha parece aleatoria.



Aparecen de nuevo los triángulos blancos invertidos, pero todos desordenados. Sin autosimilaridad. En la mitad izquierda se ven, en cambio, los triángulos “desplazándose” a la “velocidad” del borde.

El patrón que se forma en estos autómatas, además, puede depender de la condición inicial. Si aplicamos esta última regla a una condición inicial aleatoria perdemos la parte regular de la mitad izquierda:

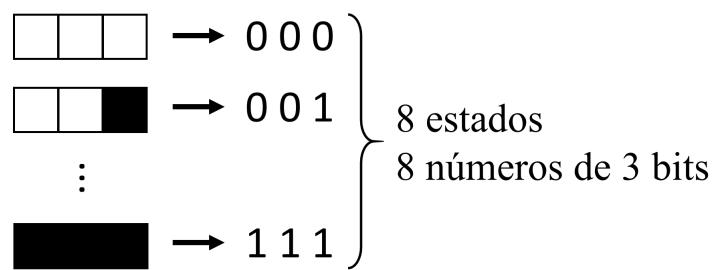


Es fascinante observar cómo se parecen estos patrones a estructuras naturales que, microscópicamente, crecen de manera parecida a los autómatas celulares. Muchos caracoles los tienen en sus caparazones, que crecen como sistemas 1D progresando en el tiempo a medida que el animal agrega líneas de calcificación.



## Código de Wolfram

La descripción en palabras de las reglas se vuelve rápidamente complicada. Es innecesaria, porque habiendo apenas 8 estados posibles del vecindario  $[j - 1, j, j + 1]$  podemos usar números binarios para describirlos:



Cada regla consiste en asignar el valor de la celda central a cada uno de estos 8 estados. Es decir, la regla es ella misma un número binario, de 8 bits (uno por cada estado inicial). Por ejemplo:

|     |     |     |     |     |     |     |     |                                 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------|
| 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | $\leftarrow$ 8 estados          |
| 0   | 0   | 0   | 1   | 1   | 1   | 1   | 0   | $\leftarrow$ la regla en 8 bits |

La fila de abajo es la lista de nuevos estados, y sirve para codificar la regla. Existen 256 números de 8 bits, así que existen 256 reglas distintas de los autómatas celulares 1D. Se acostumbra designarlas con el número decimal correspondiente. La que está ahí arriba es la Regla 30, porque  $11110_2$  es  $30_{10}$ . Las de los ejemplos son las reglas 254, 250, 90 y 30. Jueguen también con la regla 110, es una locura.

Las distintas reglas dan una diversidad de comportamientos que pueden clasificarse<sup>1</sup>. Conviene usar, para observarlos, una condición inicial aleatoria en una red con condiciones periódicas de contorno. Las clases son más o menos las siguientes.

**Clase I.** El comportamiento es “simple”, y casi todas las condiciones iniciales llevan al mismo estado estacionario uniforme. El ejemplo de la

---

<sup>1</sup>S Wolfram, *A new kind of science*, cap. 6.

regla A es de este tipo, aunque no necesitan ser todas las celdas del mismo color.

**Clase II.** Hay muchos estados finales posibles, que consisten en ciertas estructuras simples estacionarias, o que se repiten periódicamente (como en el ejemplo de la regla B).

**Clase III.** Comportamiento más complicado, de aspecto random, “no periódico”, pero con triángulos y otras estructuras pequeñas reconocibles a alguna escala. A pesar de la regularidad aparente, la regla del ejemplo C es de este tipo.

**Clase IV.** Todos los demás comportamientos. Tienen una mezcla de orden y azar, con estructuras localizadas simples que aparecen solas y se desplazan e interactúan con otras de maneras complicadas. En algún sentido, son las más interesantes.

Esta clasificación es medio cualitativa y admite interpretaciones, y hay reglas que tienen algunas características de una clase y otras de otra. Las cuatro categorías parecen seguir una conjetura de Ilya Prigogine<sup>2</sup>, de que hay 4 clases de sistemas termodinámicos, con estas características.

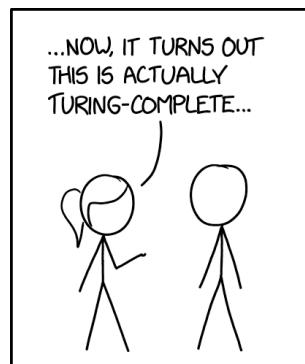
Wolfram ha conjeturado que las reglas de la Clase IV son capaces de computación universal (en el sentido de Turing). Esto ha sido demostrado para la regla 110 y para el Juego de la Vida, un fascinante CA de 2D (ver p. 90 y el Problema en p. 189).

## ¿Qué está pasando acá?

¿Cuál es la moraleja de todo esto? Uno podría pensar, por ejemplo, que el hecho de que todas las celdas de un CA obedecen la misma regla, implicaría que todas ellas deberían “hacer la misma cosa”. En lugar de esto, ¡parece haber celdas haciendo cosas distintas! Algunas forman un background regular, mientras otras forman parte de estructuras localizadas (como en la regla 110, por ejemplo). Mirando la formulación del problema no parece haber una manera realista de prever todo lo que pasa aquí. Pero

---

<sup>2</sup>Ilya Prigogine (1917-2003), físico-químico belga de origen ruso, premio Nobel por sus trabajos sobre estructuras disipativas y su rol en la termodinámica de los sistemas alejados del equilibrio, así como sistemas complejos e irreversibilidad.



THIS PHRASE EITHER MEANS  
SOMEONE SPENT SIX MONTHS  
GETTING A DISHWASHER TO  
PLAY MARIO OR YOU'RE UNDER  
ATTACK BY A NATION-STATE.

haciendo experimentos computacionales es relativamente fácil descubrirlo. Es como la exploración de un nuevo mundo.

Por otro lado, tenemos una vez más esta cuestión: reglas simples generando comportamiento complejo. Parece hasta anti-intuitivo. Un objeto complicado, un mecanismo por ejemplo, seguramente fue *construido* de manera complicada, a partir de planos complicados y procedimientos complicados. ¿O no?

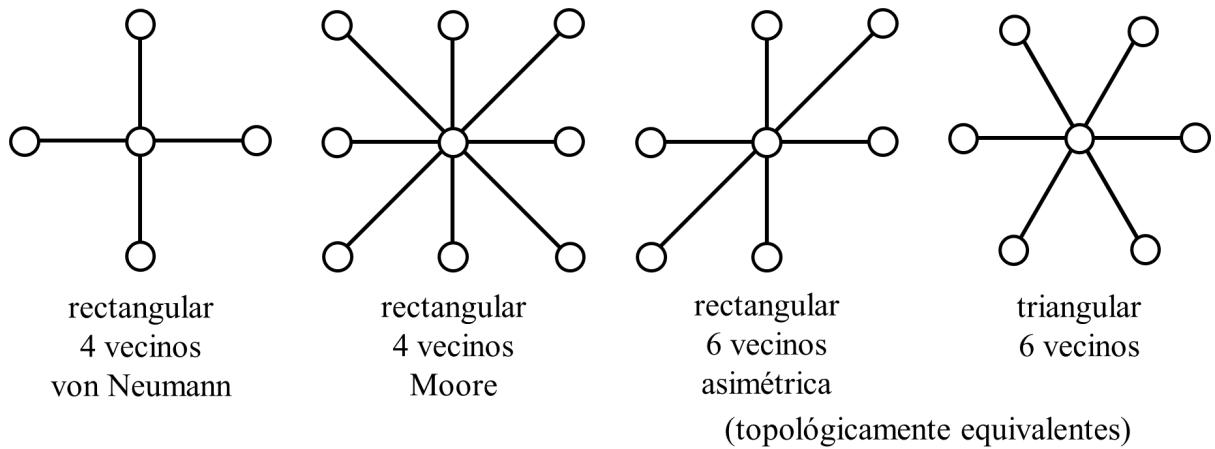
Bueno, parece que no siempre es así. Y el hecho de que estas estructuras complejas tengan aspecto “natural” es porque la naturaleza no opera como la ingeniería. No tiene un propósito de construir algo y diseña el procedimiento para hacerlo. No tiene ese constraint.

Es interesante que, para descubrir esto (en los años 1980s) hayamos necesitado justamente experimentar con los objetos más complejos de la ingeniería: las computadoras.

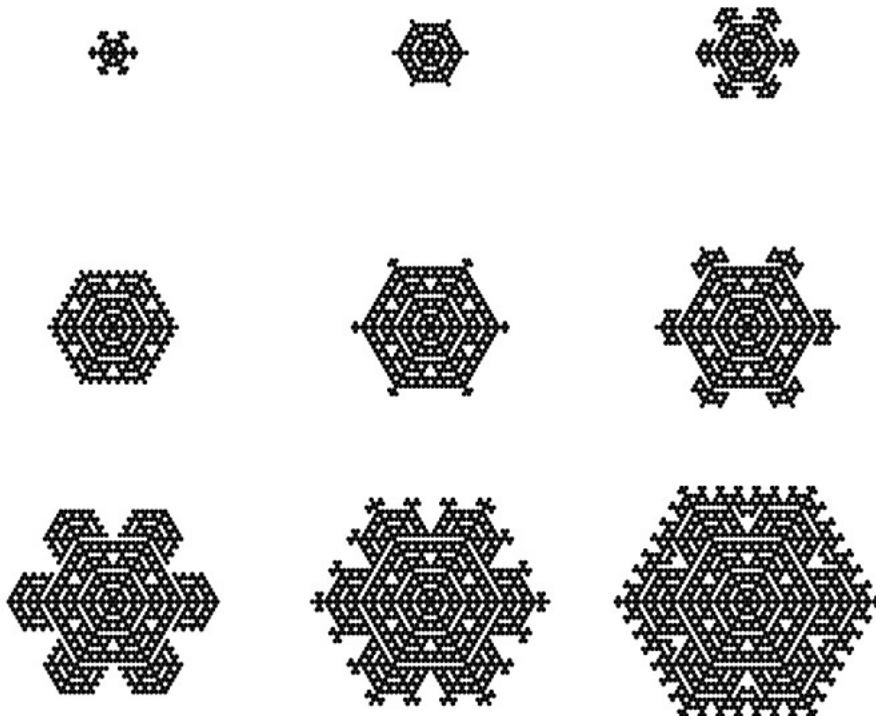
Si le intrigan estas reflexiones, le recomiendo *A new kind of science*, especialmente los primeros tres capítulos.

## 5.2 Autómatas celulares en dos dimensiones

Es inmediato generalizar los autómatas celulares a más dimensiones. Vamos a representarlos con los estados en nodos de la red, y el vecindario con conexiones entre ellos.



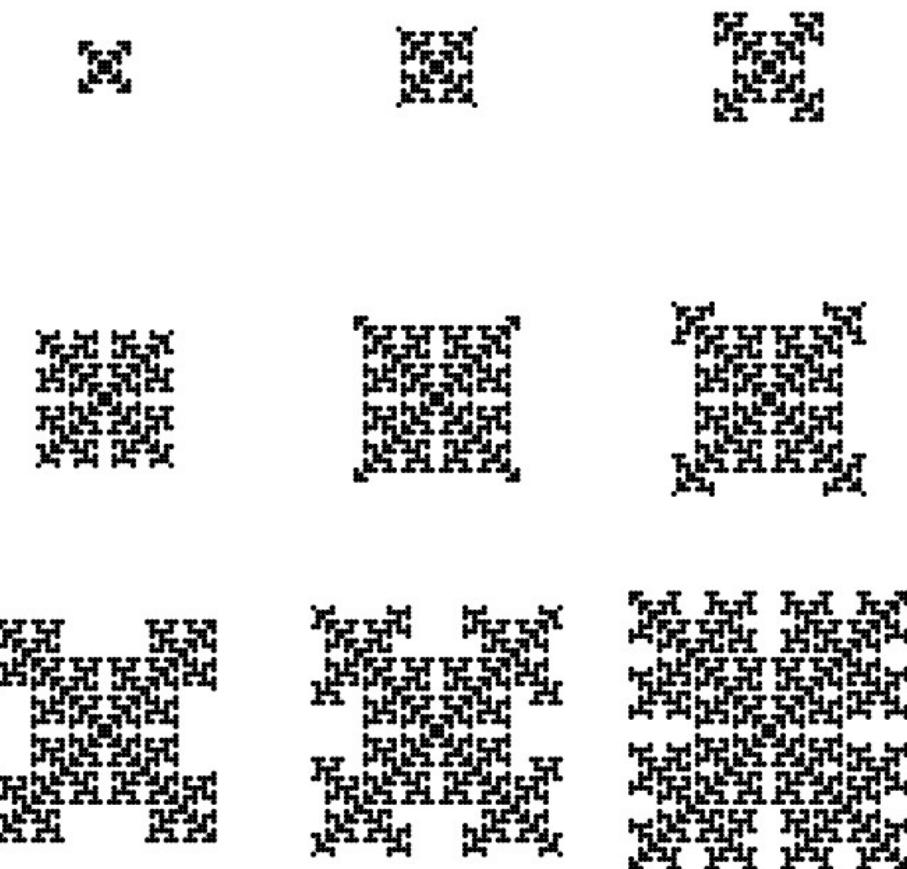
**Ejemplo.** Regla: Un nodo se pone negro (activo) si uno y sólo uno de sus vecinos está activo. Una vez activo (negro), se queda así. Casi no se puede hacer más simple.



A partir de un único nodo activo se propaga hacia afuera un chirimbolo, que va produciendo ramas radiales de sub-chirimbolos, de manera autosimilar. La simetría séxtuple de la red se manifiesta en la forma general, “macroscópica”, de la estructura, algo que podíamos esperar. Pero el intrincado detalle de negros y blancos que vemos dentro es inesperado. Y, nuevamente, vemos autosimilaridad en las sucesivas estructuras: la carpetita de abajo a la derecha parece una versión ampliada de la del medio a la izquierda (y otras por el estilo).

Por otro lado, ¿a qué se parecen estas estructuras? ¡Parecen copos de nieve! A pesar de que, por supuesto, no parece haber relación entre la dinámica geométrica que propusimos aquí con la dinámica de la verdadera nieve. ¡O sí?

La misma regla en una red rectangular con vecindario de Moore da unas carpetitas autosimilares cuadradas.



## Codificación de algunas reglas 2D

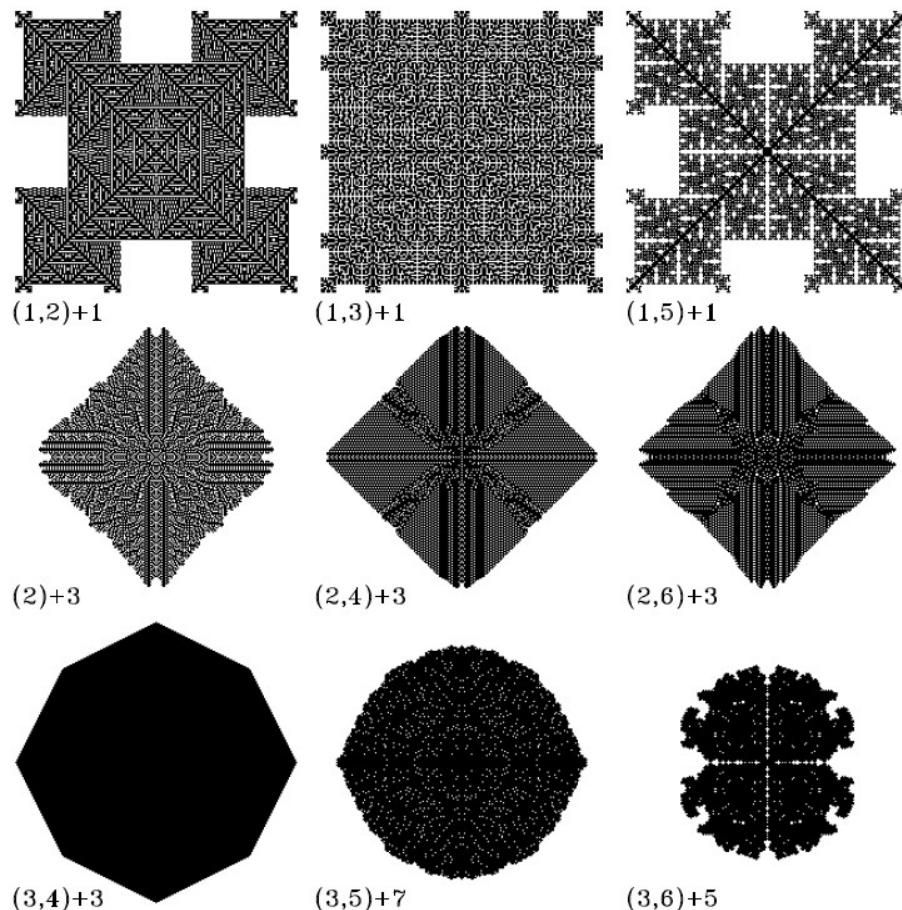
Restringámonos a redes rectangulares con vecindarios de Moore (8 vecinos). Consideremos reglas en las cuales:

1. Un nodo se activa si  $n_1$  o  $n_2$  nodos del vecindario están activos.
2. El número de nodos inicialmente activos es  $s$  (la semilla).

Llamemos a esta regla con el código:  $(n_1, n_2) + s$ , con  $1 \leq n_1, n_2 \leq 8$ , y  $n_1 < n_2$ .

Por ejemplo:  $(1, 5) + 1$  quiere decir que empezamos con  $s = 1$  nodo activo, y que un nodo se activa si tiene 1 o 5 vecinos activos (sin importar dónde estén en el vecindario). La regla de las carpetitas de más arriba

sería  $(1) + 1$ . Los siguientes son ejemplos de algunas de las estructuras producidas por reglas de este tipo.



Podemos ver que se producen una gran diversidad de estructuras, con algunos temas que se repiten: la autosimilaridad, la mezcla de orden y desorden, estructuras sólidas o porosas, etc. Algunas estructuras, como la  $(3,6)+5$ , no crean una estructura que crece monótonamente hacia afuera, sino que se pliega y rellena los huecos que quedaron de las iteraciones anteriores.

Podrían resumirse algunas tendencias generales de esta (*jsubclase!*) de CA 2D:

- Las reglas que empiezan con 1 producen cuadrados que crecen produciendo cuadrados en las esquinas (similar a  $(1) + 1$ ). El valor de  $n_2$  afecta el pattern interior.
- Las reglas que empiezan con 2 producen diamantes, que crecen por los lados, y con interiores ordenados o desordenados.
- Las reglas que empiezan con 3 producen estructuras compactas, sólidas o porosas, con ejes de simetría. Sugerencia: correr  $(3, 7) + 5$  y ver qué da.

**El Juego de la Vida.** Es el autómata celular más extraordinario de todos, y el más estudiado. Fue inventado por el matemático inglés John Conway, fallecido de COVID-19 durante la pandemia del 2020. Consiste en una red cuadrada 2D, con vecindario de Moore, en la que cada nodo puede estar en uno de dos estados (0 o 1, blanco o negro, activo o inactivo). En cada iteración, la red entera evoluciona de acuerdo a las reglas:

- Si un nodo activo tiene menos de dos vecinos activos, se inactiva (¿de tristeza?).
- Si un nodo activo tiene más de tres vecinos activos, se inactiva (¿de hartazgo?).
- Si un nodo inactivo tiene tres vecinos activos, se activa (¿de alegría?).
- Si un nodo tiene dos vecinos activos, queda igual.

Este autómata puede producir “organismos”, estructuras que se preservan en la dinámica, que se mueven, que interactúan de maneras interesantes y pueden reproducirse (Fig. 5.1, y si quiere ver ejemplos rápido y animados, revise el artículo en la Wikipedia). Además, el sistema es capaz de realizar computación universal, en el sentido de Turing. Viendo lo que hacen las estructuras “pequeñas” en el Juego de la Vida, uno no puede dejar de preguntarse lo que serán capaces de hacer estructuras realmente grandes y

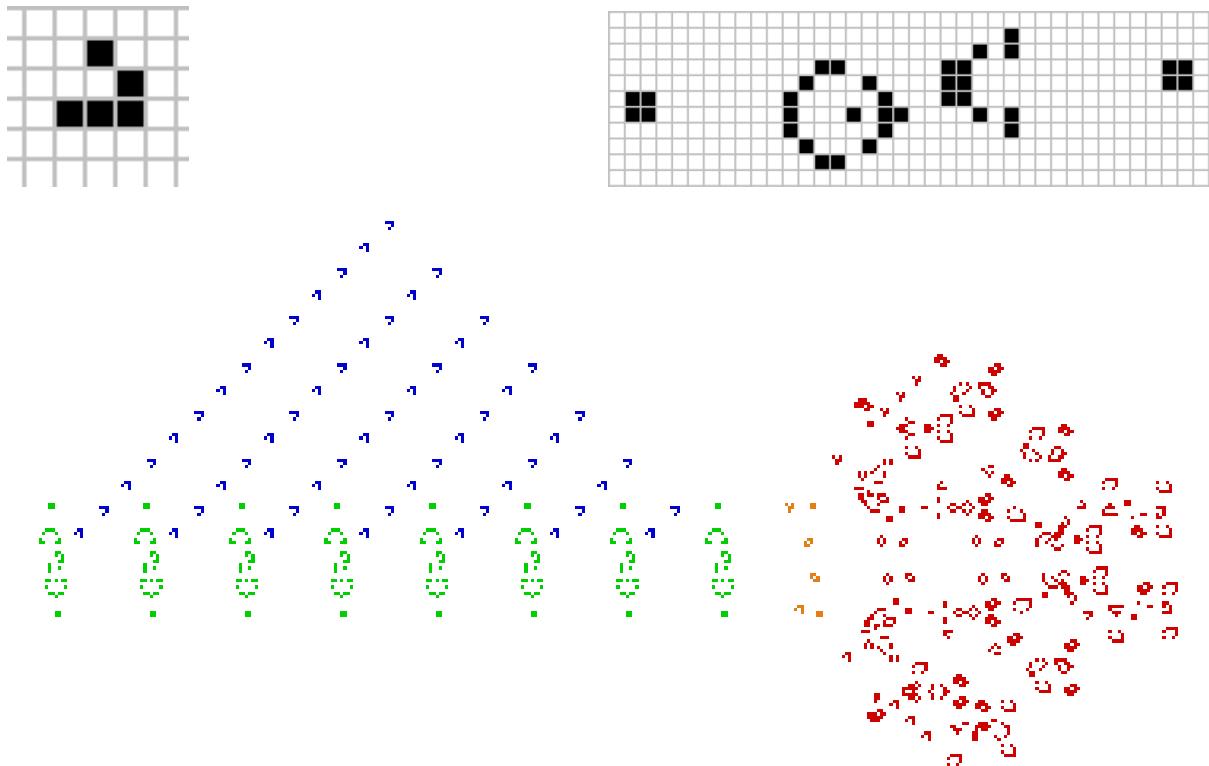


Figura 5.1: Un “glider” (que se mueve en diagonal ejecutando un período-4, un cañón de gliders (a su derecha), y abajo un “breeder” que va fabricando cañones de gliders que deja en una estela mientras avanza hacia la derecha.

complejas, para las cuales las celdas de la grilla sean lo que para nosotros son los átomos. ¿Habrá estructuras capaces de “pensar”, en algún sentido?

El sitio [conwaylife.com](http://conwaylife.com) es una wiki mantenida por una comunidad de usuarios con muchísima información sobre la dinámica del Juego de la Vida, y con implementaciones que pueden usar para comparar con la suya, para inspirarse, o para perderse. Hay muchísima más información en la web, incluso implementaciones interactivas [para correr en el navegador](#). Se han construido computadoras programables (no ya meras máquinas de Turing) que corren en el Juego de la Vida usando *gliders* en lugar de electricidad: ver [esta nota](#), el artículo en [la página del autor](#) y su video de [un programa calculando la secuencia de Fibonacci](#). En [un capítulo de Numberphile](#), John Conway cuenta la historia de cómo inventó el Juego

de la Vida inspirado por las máquinas de von Neumann, cómo se lo contó a Martin Gardner, quien lo publicó en Scientific American, donde se convirtió en el éxito más grande de los más de 100 años de la revista (yo lo leí allí en los 80s). También hay una linda implementación en los Complexity Explorables: [Nah dah dah nah nah... \(Opus, 1984\)](#).

Para reiterar lo que observamos al final de los autómatas 1D: algunos autómatas celulares, con reglas de crecimiento microscópicas simples, producen estructuras macroscópicas de regulares a muy complejas. Pocas de estas estructuras podrían anticiparse mirando las reglas.

## 5.3 Agentes

En los CA “clásicos” pensamos en los nodos fijos en la red, y cambiando de estado. Un mecanismo parecido de dinámica discreta e iterada considera en cambio elementos activos que se mueven en la red, interactuando con ella y con otros elementos. En general, se los llama *agentes*.

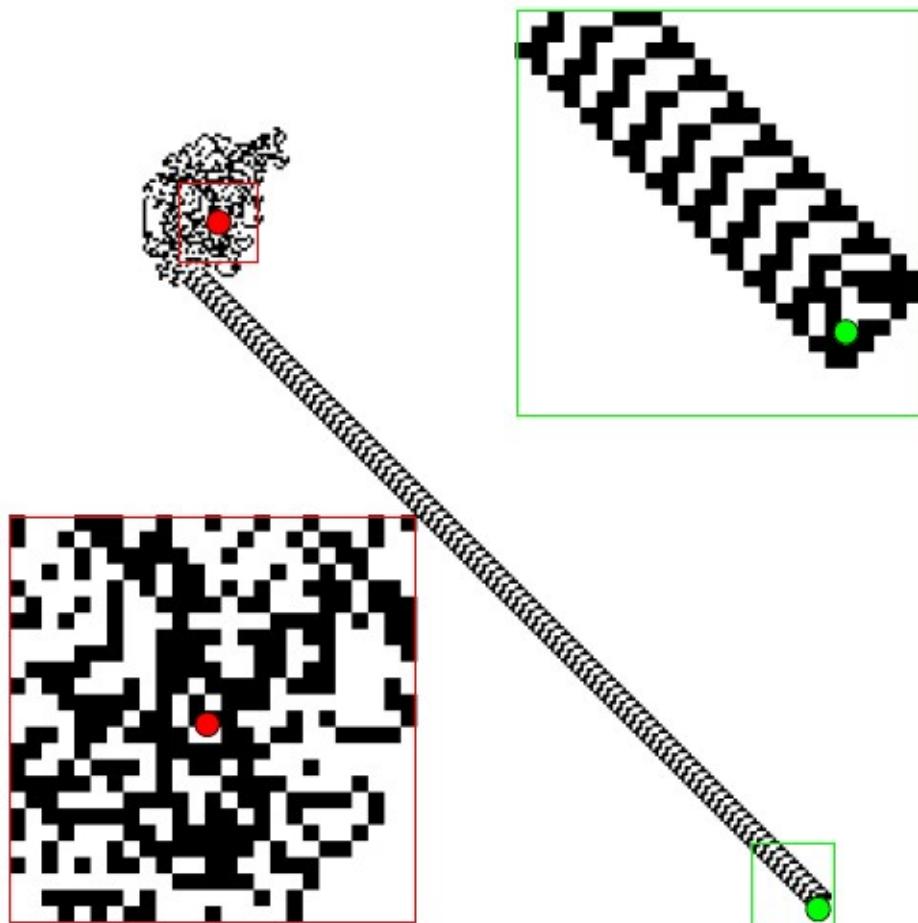
**Ejemplo: Hormigas.** Las hormigas se mueven así:

- Avanzar.
- Si el nodo es blanco, pintarlo de negro y girar  $90^\circ$  a la derecha.
- Si el nodo es negro, pintarlo blanco y girar  $90^\circ$  a la izquierda.

Parece simple, pero esconde sorpresas.

Las primeras miles de iteraciones producen una nube desordenada blanca y negra. De golpe, de la nada, surge un comportamiento periódico de la hormiga. Muy rebuscado, pero con un drift que va pintando una “calle” en diagonal en la red, con un pattern muy regular. ¿Quién se lo esperaba a partir de la regla?

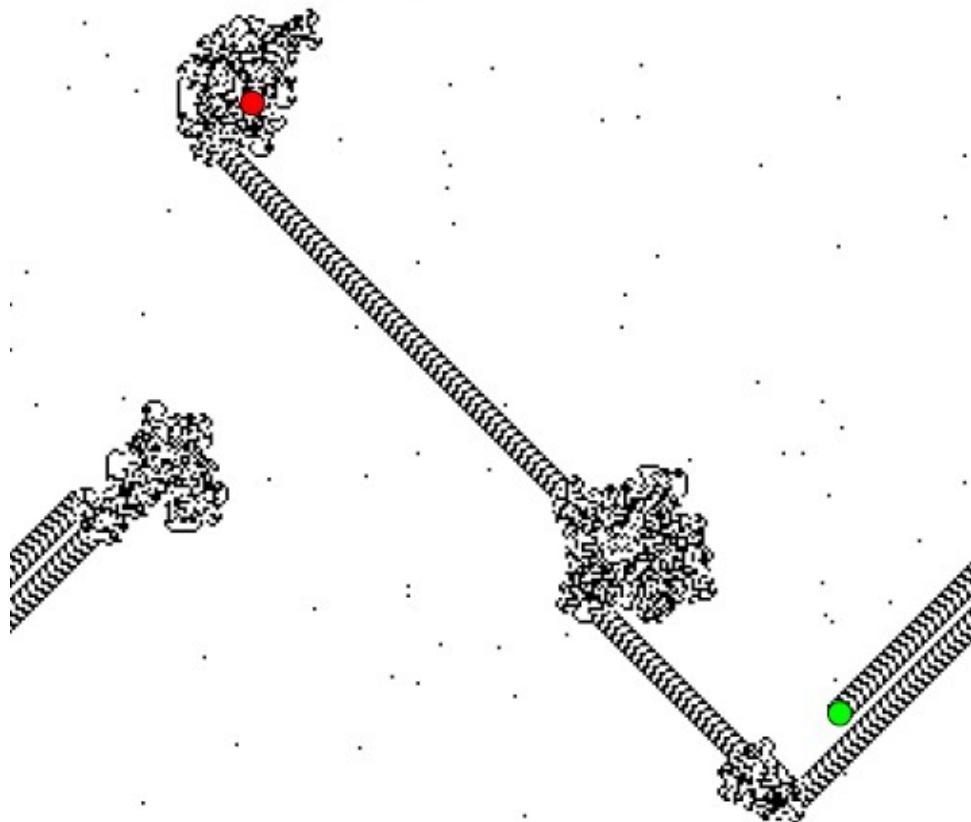
Si la red es periódica, la hormiga en la calle terminará chocando con su propia traza. Esto dispara una nueva racha de movimiento desordenado, hasta que surge una nueva calle. Si uno espera lo suficiente, al final se desordena toda la red.



Estas calles son delicadas e inestables. Si la red está inicialmente “suicia”, con algunos nodos negros, cuando la hormiga que está construyendo la calle choca con ellos se forma la nube desordenada, hasta que surge una nueva calle en otra dirección.

## Complejidad

Hemos visto que reglas simples pueden producir comportamientos complejos. ¿Deberíamos llamarlos complejos, si las reglas que los producen son tan simples? ¿Podemos llamarlos “complejos” porque sus estructuras visuales, o sus comportamientos, nos parecen así?



Definir la complejidad es difícil, y no existe una definición completamente satisfactoria. Es una de esas cosas de las cuales uno puede decir: la reconozco cuando la veo, pero no sé decir qué es. Igual de difícil es medirla, para lo cual se han propuesto muchas alternativas. Por ejemplo, dada una estructura:

- ¿Qué tan difícil es describirla?
- ¿Qué tan difícil es crearla?
- ¿Cómo está organizada dinámicamente?

Una alternativa en este sentido sería usar la *complejidad algorítmica*: la longitud del programa más pequeño que puede producirla (ya sea un pattern, una serie temporal, etc.). Parece razonable que patterns más complejos requieran programas más largos. Simular el clima requiere programas (mucho) más largos que un péndulo sin fricción en pequeñas oscilaciones. Pero ¿y los autómatas 1D que acabamos de ver? ¿Habría que considerar todos esos patrones, los regulares, los random, los mezclados, “igualmente complejos” porque el programa que los produce es idéntico?

Otra característica que podemos ver en estos sistemas es la *emergencia* de propiedades globales, o comportamientos, que no pueden ser inferidos de la dinámica operando a escala microscópica. Surgen, en cambio, de *interacciones*, y hay que ejecutarlos para tenerlas. Es lo que ocurre con los copos, las calles de hormigas, los cañones de gliders del Juego de la Vida, etc.



## Fractales

LAS ESTRUCTURAS QUE VIMOS con los autómatas celulares resultan generadas por reglas que son un tanto artificiales. En los procesos físicos que producen las estructuras que vemos en la naturaleza, en cambio, lo que suele haber es una interacción entre numerosas partículas u otros agentes, que producen un crecimiento de un agregado, o una dinámica del mismo. Muchos de estos sistemas son de interés de la física, tanto porque reflejan los mecanismos básicos de la dinámica de los sistemas que integran (y así dan lugar a modelos teóricos e investigaciones experimentales), como por las aplicaciones que permiten.

Algunos de los mecanismos relacionados con estos fenómenos son la adsorción, la agregación y la absorción, en las cuales nuevas partículas se adhieren a una estructura creciente. Muchas estructuras naturales crecen de este modo, por acumulación de componentes pequeñas de manera más o menos aleatoria. Así crecen los granos de polvo interplanetario a partir de moléculas individuales, y luego por agregado de otros granos, y acaban formando planetesimales y planetas. Así crecen los cristales de hielo y los copos de nieve, muchas veces alrededor de un grano de polvo interplanetario caído a la atmósfera. También así se adhieren las moléculas de un gas o de un líquido a una superficie catalizadora o de almacenamiento, como en la adsorción del hidrógeno en una matriz metálica, para usarlo como combustible. Es también lo que ocurre con la rugosidad de una superficie que sufre alguna transformación (combustión, por ejemplo). En estos

casos existe una clase de universalidad propia, que abarca una multitud de fenómenos, descripta por una ecuación en derivadas parciales para la altura de la superficie, llamada Kardar-Parisi-Zhang (KPZ).

Tales dinámicas no necesariamente ocurren en un vacío donde las partículas que producen la estructura se mueven libremente. Pueden también ocurrir en el interior de la materia condensada, ya sea un cristal ordenado, o un vidrio desordenado, o un cristal con defectos. El movimiento de partículas (o sus huecos) dentro de estas estructuras puede producir transiciones entre el orden y el desorden, producir fracturas, condensar agregados, cambiar la porosidad, determinar caminos de flujo o de conducción eléctrica, y muchos más fenómenos interesantes.

## 6.1 Agregación limitada por difusión

Vamos a estudiar uno de estos fenómenos, mediante un modelo estándar llamado *agregación limitada por difusión* (DLA). La idea es que hay partículas difundiendo, y que se quedan pegadas al entrar en contacto. Los agregados producidos de esta manera siguen creciendo al chocar con otras partículas, u otros agregados. El tamaño de estos va a ir creciendo, obviamente. Lo que no es obvio es la *forma* que van a adquirir. Como en el caso de los copos de nieve, estas estructuras aleatorias pueden dar lugar a enorme complejidad y regularidad al mismo tiempo.

La difusión, como sabemos, es la manifestación macroscópica de un proceso que a nivel microscópico es una caminata aleatoria. Así que la simulación de los DLA consiste básicamente en simular caminatas aleatorias. Ponemos  $N$  partículas a hacer sus caminatas, y cuando llegan a cierta *distancia de interacción*, las pegamos. Computacionalmente esto requiere calcular  $N^2/2$  distancias en cada paso temporal, lo cual es prohibitivo para  $N$  grande. Esto puede evitarse haciendo el RW en una red, ya que sólo hay que chequear los sitios vecinos de cada partícula, una tarea que es  $o(N)$ .

En la implementación (sencilla) que vamos a hacer, además, vamos a poner algunas “semillas” fijas en la red. Las partículas caminantes que se peguen en ellas, por supuesto, se quedan quietas. Y usaremos una red 2D

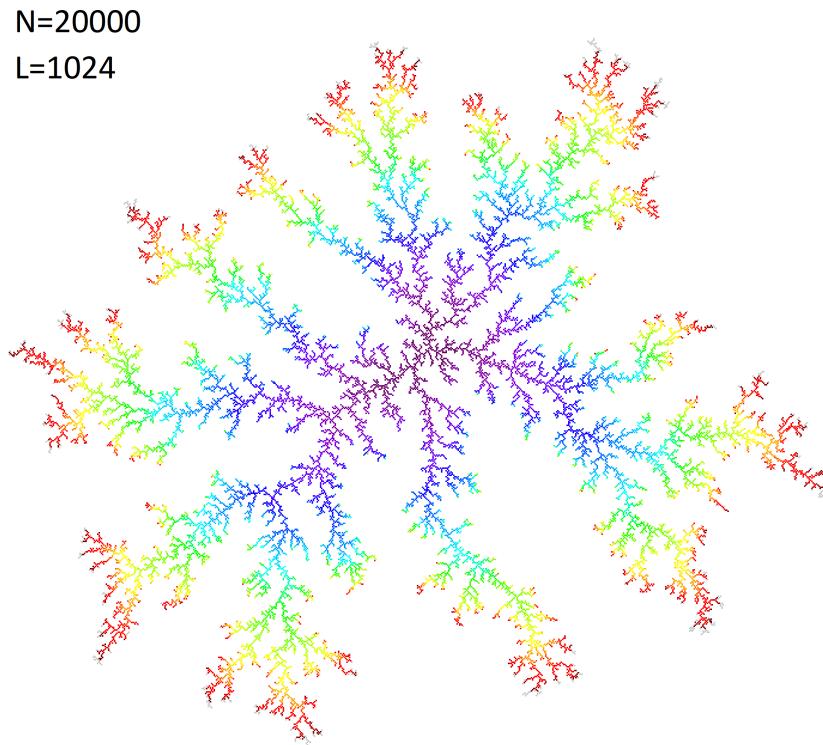


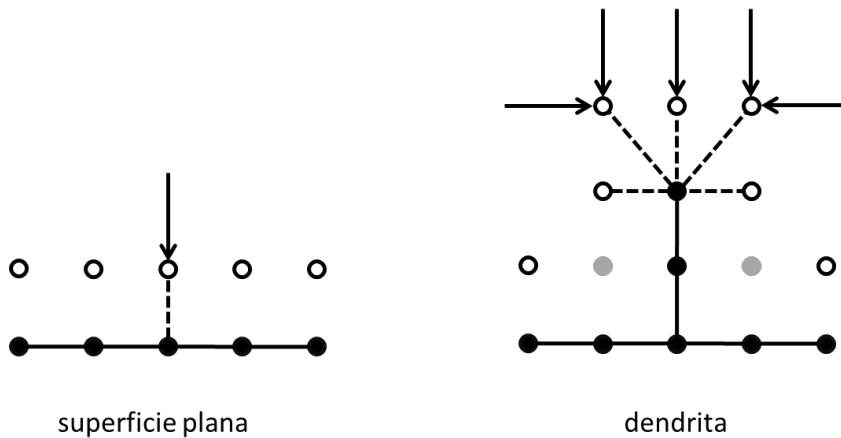
Figura 6.1: Estructura dendrítica obtenida por DLA de 20 000 partículas en una red periódica de  $1024 \times 1024$ . El color codifica el tiempo de adherencia. Código FORTRAN.

de  $L \times L$ , que es más fácil de visualizar que una 3D. Además, vamos a suponer que se pueden cruzar como fantasmas, sin pegarse entre sí; sólo se pegan al agregado quieto que va creciendo.

En la Fig. 6.1 vemos que el agregado crece desde el centro, como era de esperar. Pero su forma no es un bodoque amorfo y compacto. Es una estructura ramificada, con ramas que se proyectan hacia afuera y que a su vez se ramifican, llamadas *dendritas*. Si pintamos con colores el tiempo de captura podemos ver que generalmente las capturas se producen en o cerca de las puntas de las ramas existentes. Vemos además que la geometría de

la red *no* se refleja en la estructura, a menos que miremos a la escala de la red misma.

El crecimiento dendrítico se puede entender observando que la asperaza del agregado tiende a capturar más caminantes que una estructura plana.



Hay más maneras de capturar un caminante en una punta que en un plano, ya que las puntas “controlan” más sitios a su alrededor (las líneas punteadas en la figura). De paso, las puntas producen sitios inaccesibles, ya que para llegar a ellos, hay que pasar antes por sitios “controlados”. El resultado de esto es que el crecimiento produce cada vez más ramificaciones, en lugar de un llenado homogéneo de la red.

Si ponemos muchas semillas, cada una crecerá un agregado, algunos de los cuales pueden fusionarse cuando se toquen. En la Fig. 6.2 se ve que las estructuras son menos “circulares”. Esto es porque agregados vecinos “compiten” por las partículas móviles, y entonces crecen hacia donde no hay competencia y se van estirando. Y los agregados más aislados terminan siendo más grandes.

Si uno pone muchas más partículas móviles, el agregado queda apretadísimo. En la Fig. 6.3 hay 12 agregados, difíciles de ver (en el panel de la derecha están pintados, cada uno con un color). Son 5000 partículas en una red de  $128 \times 128$ , lo cual da una densidad de 1 en 3, no muy alta. El crecimiento en este caso es muy rápido, pero las estructuras igual son dendríticas.

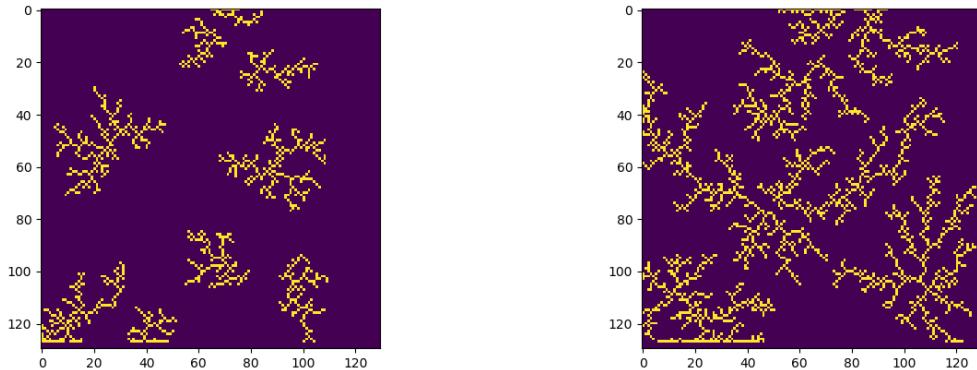


Figura 6.2: Estructura obtenida por DLA con 10 semillas iniciales, a dos tiempos de evolución. Red de 128, creo que no periódica. Código Python.

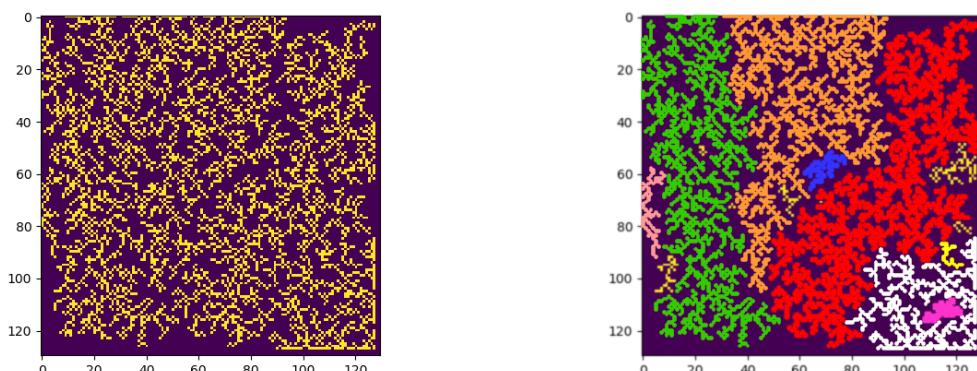


Figura 6.3: Estructura obtenida por DLA con muchas partículas móviles (5000). Parecen haberse fusionado en un única estructura, pero en realidad todavía forman varios clusters. Red de 128, creo que no periódica. Código Python.

Los agregados que crecen por DLA no sólo son espectaculares, sino que tienen propiedades geométricas peculiares: autosimilaridad e invariancia de escala, propiedades características de la geometría *fractal*.

Linda implementación interactiva: [Particularly stuck](#).

## 6.2 Fractales

Consideremos el siguiente proceso de crecimiento (Fig. 6.4). Empezando por un segmento de longitud  $L = 1$ , lo dividimos en 3 segmentos iguales. En el tercio del medio construimos un triángulo equilátero y removemos la base. La longitud total se alarga a 1.333. Repetimos lo mismo de manera iterada: en cada iteración agarramos cada segmento, lo dividimos en 3, y reemplazamos el tercio central por un triángulo. La curva resultante, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se llama *curva de Koch*.<sup>1</sup> No sólo es bonita, sino que tiene propiedades matemáticas peculiares. Hay una linda implementación de varias curvas del mismo tipo en [Hokus fractus](#).

En cada paso, la longitud de cada segmento se reduce en un factor 3. Pero el número de segmentos aumenta en un factor 4. Así que la longitud total en la iteración  $n$  es:

$$L(n) = 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Vemos que la longitud tiende a infinito, muy lentamente. Por ejemplo, si la dibujamos en una hoja de papel, con  $L(0) = 5$  cm, entonces  $L(100) \approx 155$  M km, o sea 1 unidad astronómica. Guau. Con  $n = 100$ , que es mucho menos que infinito. Eso es lo que mediría estirada, claro. ¿Cómo puede ser que semejante curva esté contenida en un pedacito de papel? ¿Circunscripta a un rectángulo de perímetro finito?

Está claro que la curva de Koch es un objeto matemático abstracto, pero en el mundo natural existen casos similares. Lewis Richardson intentó medir la costa de Gran Bretaña,<sup>2</sup> y se encontró con que la longitud aumentaba a medida que usaba mapas de escala cada vez menor, en lugar de converger a un “valor verdadero”. La isla, sin embargo, tiene un área finita. ¿Cómo puede tener un perímetro infinito? Así son los fractales.

---

<sup>1</sup>Helge von Koch (1870–1924), matemático sueco.

<sup>2</sup>Benoit Mandelbrot, *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*, Science 156:636-638 (1967). Lewis F. Richardson, *The problem of contiguity: An appendix to statistics of deadly quarrels*, General Systems 6:139-187 (1961).

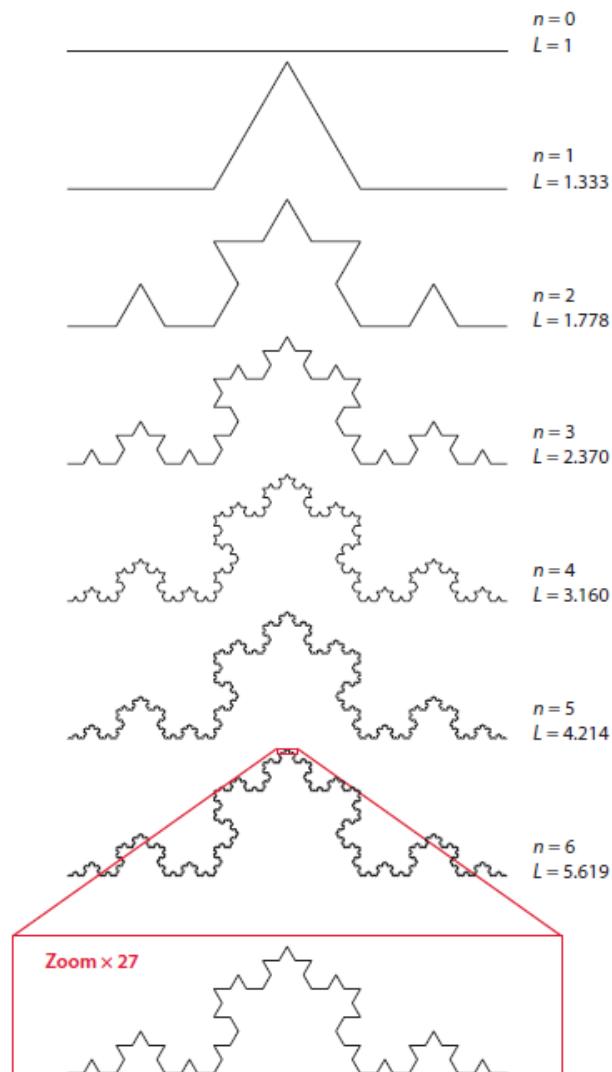
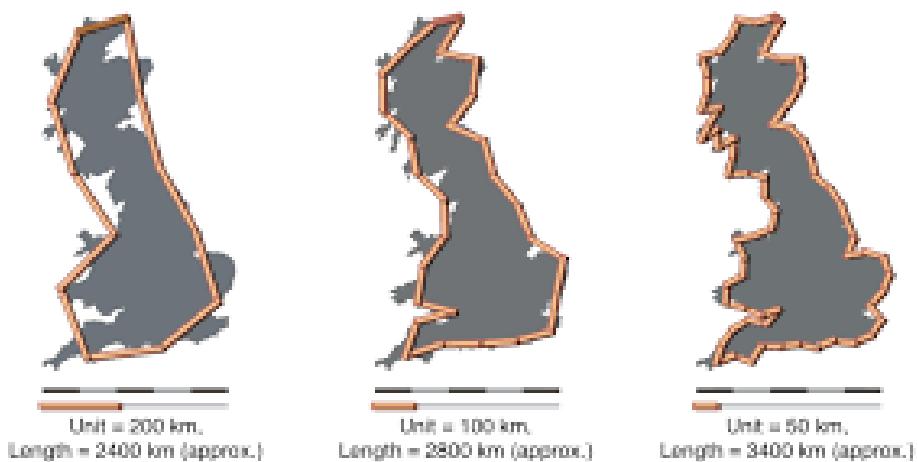


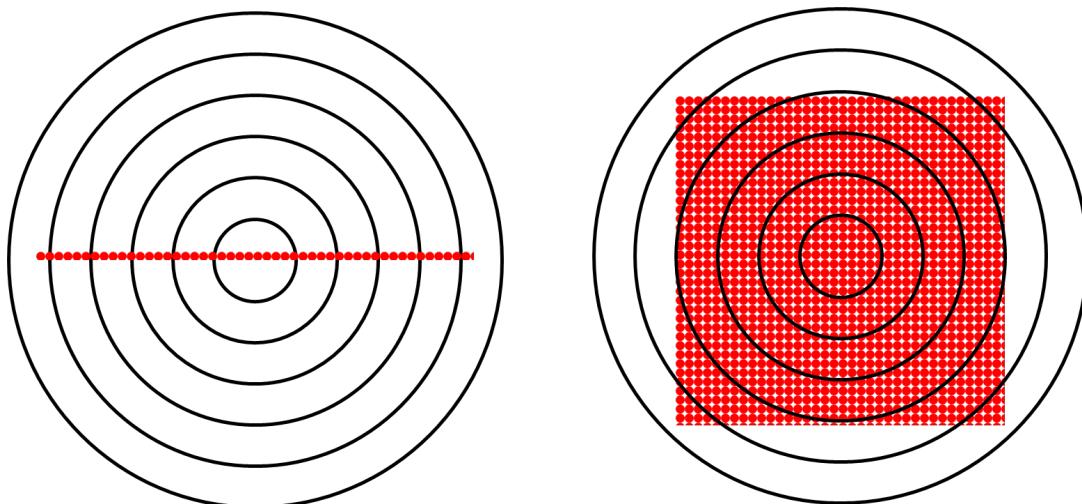
Figura 6.4: Primeras iteraciones de la construcción de la curva de Koch.



Dicho mal y pronto, es como si la curva de Koch y la costa británica fueran “más” que líneas, pero “menos” que áreas. Geométricamente, habría que darles una dimensión entre 1 y 2. Es decir, una *dimensión fraccionaria*, que les da el nombre de fractales.

El agregado DLA, por más complejo que nos parezca, tiene un número finito de partículas. Cada una de ellas tiene una posición  $(x, y)$ , dos números. Así que sería un objeto 2D. Lo mismo vale para los autómatas celulares que vimos. Sería un objeto 2D si empaquetásemos todas las partículas en un cuadrado compacto. Pero el agregado DLA definitivamente no se parece a un cuadrado. ¿Cómo cuantificamos la diferencia?

Consideremos una línea y un cuadrado:



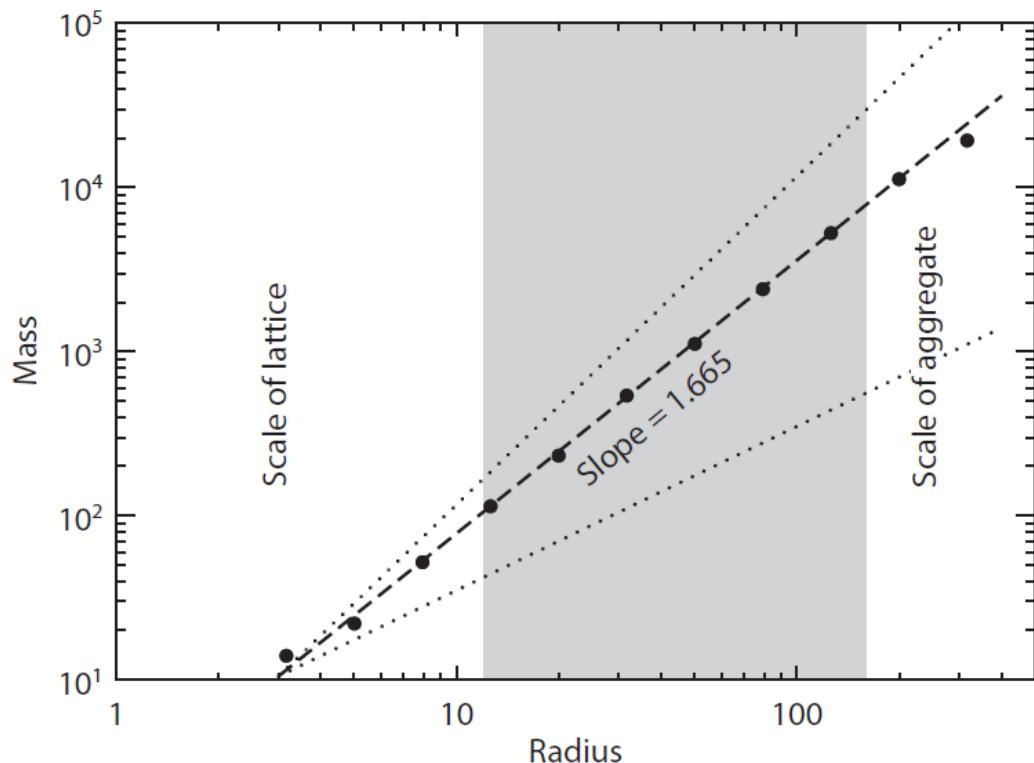
Pensemos que estén hechos de partículas individuales: son una línea y un cuadrado en una *escala macroscópica* solamente. Calculemos la densidad de ambos dibujando círculos de radio  $R$ , progresivamente más grandes. Cada  $R$  nos da una “masa” (la cantidad de partículas que queda dentro),  $M$ . Es obvio que  $M$  crece con  $R$ . En ambos casos resulta ser un comportamiento algebraico en forma de *potencia*:

$$M(R) \propto R^D,$$

con  $D = 1$  para la línea y  $D = 2$  para el cuadrado. El exponente  $D$  es una medida de la dimensión del objeto. Nótese que esta ley valdrá para  $R$

que sea bastante mayor que la escala microscópica, pero más chico que el tamaño macroscópico.

Si aplicamos este método a un DLA obtenemos un comportamiento de este tipo:



En un gráfico log-log el exponente  $D$  es la pendiente del comportamiento lineal, en un rango intermedio de  $R$ . Nos da  $D \approx 1.665$ , más que una línea, menos que una superficie. Claramente, se trata de un concepto de dimensión distinto del habitual en el álgebra y la geometría analítica, que es la cantidad de números independientes que necesitamos para definir los elementos de un conjunto.

Este método es más complicado de usar en objetos que no tengan un centro, como la semilla de nuestro DLA. En esos casos es mejor usar un método llamado *box counting*, apropiado para estructuras en redes, o pixeladas.

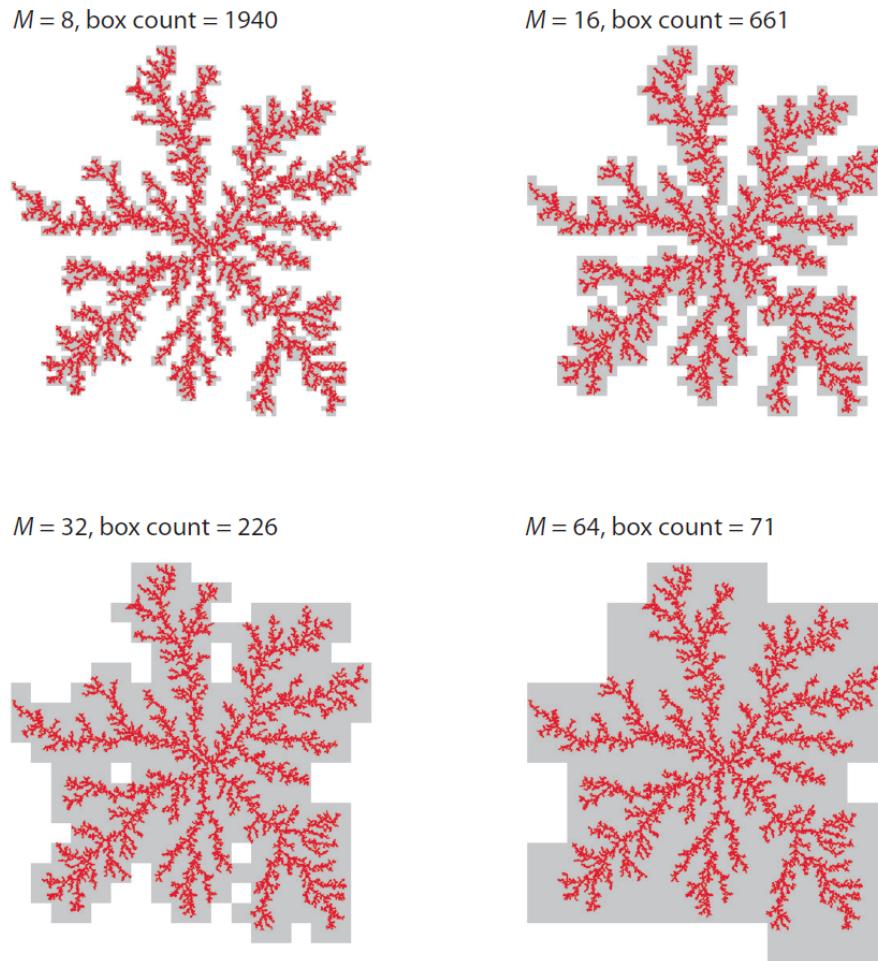


Figura 6.5: Cuatro pasos sucesivos del método *box counting*, aplicado a una estructura DLA. En cada paso se muestran, en gris, los cuadrados de  $M \times M$  que cubren la estructura, y se indica cuántos cuadrados se necesitan para hacerlo en cada caso. En cada paso se duplica el tamaño  $M$  de los cuadrados.

Imaginemos cubrir el DLA con un mosaico de cuadrados  $M \times M$  ( $1 \times 1$  es la red) (Fig. 6.5). Para cada valor de  $M$ , contamos las cajas que cubren el DLA:  $B(M)$ . Cuando  $M = 1$ ,  $B(1)$  es la cantidad de partículas. Cuando  $M$  es del orden del tamaño del DLA,  $B(M) = 1$ , y para cualquier  $M$  mayor también.

Aplicado al DLA, se obtiene un rango de comportamiento lineal en log-

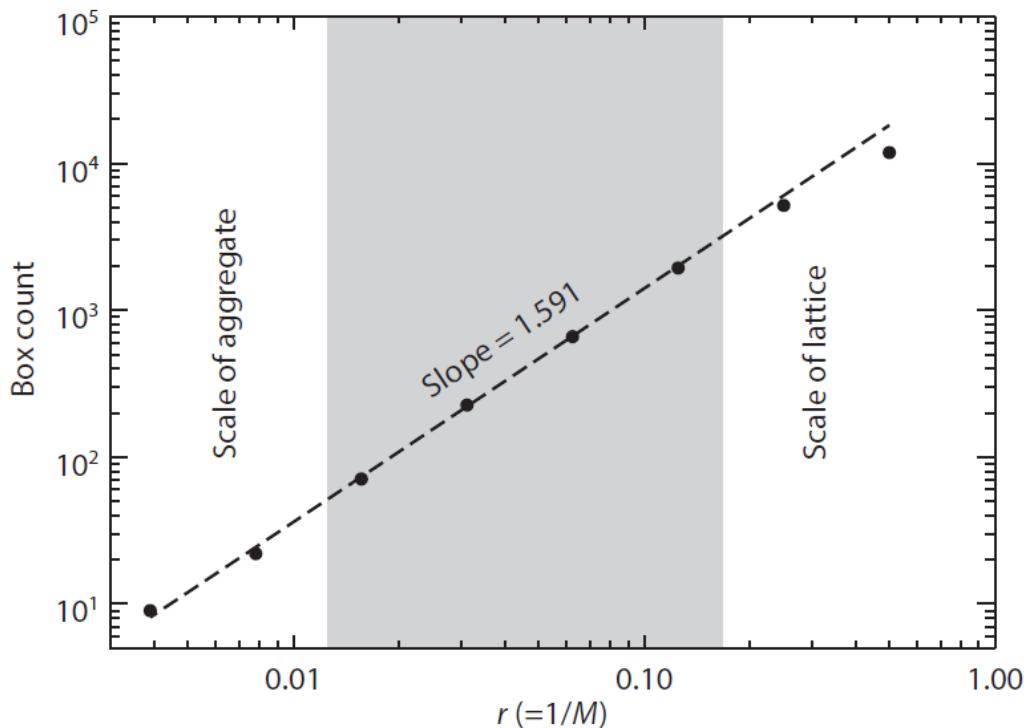


Figura 6.6: Dimensión fractal calculada por el método *box counting* de la Fig. 6.5.

$\log, B(r) \sim r^D$ , con un exponente (la dimensión box-counting)  $D \approx 1.591$ , en un rango intermedio de valores de  $r = 1/M$  (Fig. 6.6).

Nótese que el método de la densidad dio  $1.665 \neq 1.591$ . Para tener un valor único, habría que repetir los procedimientos sobre un ensemble de agregados, y promediar sobre el ensemble. En tal caso, nos daría  $D = 1.66$  (creo que hay un cálculo que da  $5/3$ , pero no logro ubicarlo), independientemente del método.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>La dimensión fractal de un agregado DLA en dos dimensiones (que es el caso más estudiado), es sorprendentemente frágil. Por ejemplo, si la difusión es continua, sin la red, la dimensión fractal es  $D \approx 1.71$ , bastante más grande que con la red cuadrada. Embebido en 3D, el agregado tiene una dimensión  $D \approx 2.5$ . Simulaciones numéricas en dimensiones grandes muestran que la dimensión fractal del DLA tiende a  $d - 1$ , donde  $d$  es la dimensión del espacio.

## 6.3 El conjunto de Mandelbrot

Vamos a darle una vuelta de tuerca al mapeo logístico, para conocer al fractal más famoso de todos. En primer lugar, hacemos una transformación lineal de la variable:

$$z_n = r \left( \frac{1}{2} - x_n \right). \quad (6.1)$$

Parece una pavada: es como cambiar de grados Farenheit a Celsius. Veamos cómo se transforma el mapeo. Despejando de (6.1), tenemos que:

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{z_n}{r}. \quad (6.2)$$

Ahora transformamos ambos miembros del mapeo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{z_{n+1}}{r} &= r \left( \frac{1}{2} - \frac{z_n}{r} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{z_n}{r} \right), \\ &= r \left( \frac{1}{2} - \frac{z_n}{r} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{z_n}{r} \right), \\ &= r \left( \frac{1}{4} - \frac{z_n^2}{r^2} \right), \text{ escrito como diferencia de cuadrados,} \\ -\frac{z_{n+1}}{r} &= -\frac{1}{2} + r \left( \frac{1}{4} - \frac{z_n^2}{r^2} \right), \text{ empiezo a despejar el } y_{n+1}, \\ z_{n+1} &= \frac{r}{2} - r^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{z_n^2}{r^2} \right), \\ &= \underbrace{\frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}}_{\equiv c} + z_n^2, \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{n+1} = z_n^2 + c,} \text{ usando el nuevo parámetro } c \text{ definido arriba.} \quad (6.3)$$

No esperamos un comportamiento distinto del logístico, ya que hicimos apenas una transformación lineal. Por ejemplo, en la Fig. 6.7 vemos una trayectoria para  $c = -1.37$ , que es un período-8, en medio de la cascada de bifurcaciones.

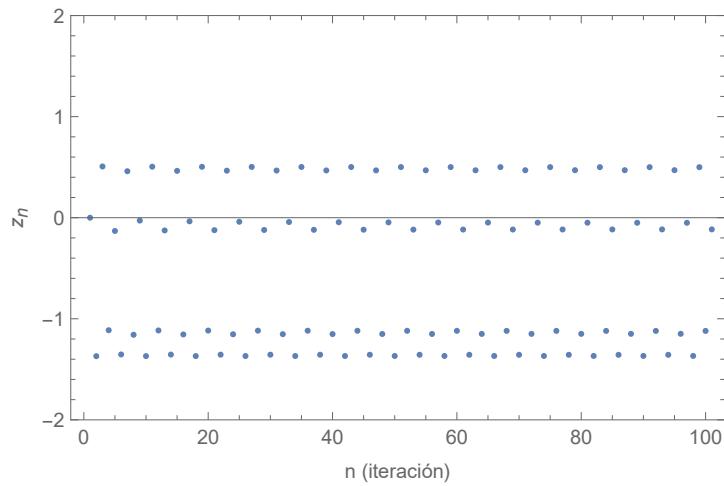


Figura 6.7: 100 iteraciones de (6.3), con  $c = -1.37$ .

Ahora viene lo realmente interesante: abandonamos el dominio real. Habíamos motivado el mapeo logístico imaginando la reproducción limitada de una población. Pero ¿quién nos impide hacer que  $z_n$  sea complejo? (por eso la llamamos  $z$ , ja.) Si usamos la condición inicial  $z_0 = 0$ ,  $c$  es la

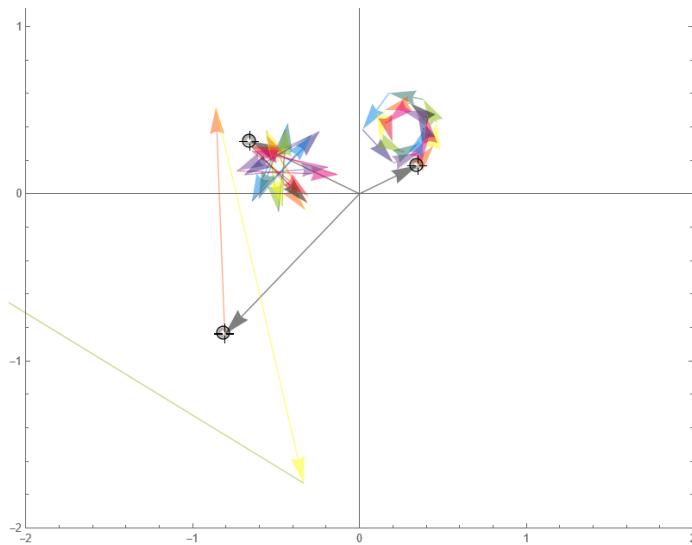


Figura 6.8: 20 iteraciones de (6.3) extendida al plano complejo, para tres valores de  $c$ .

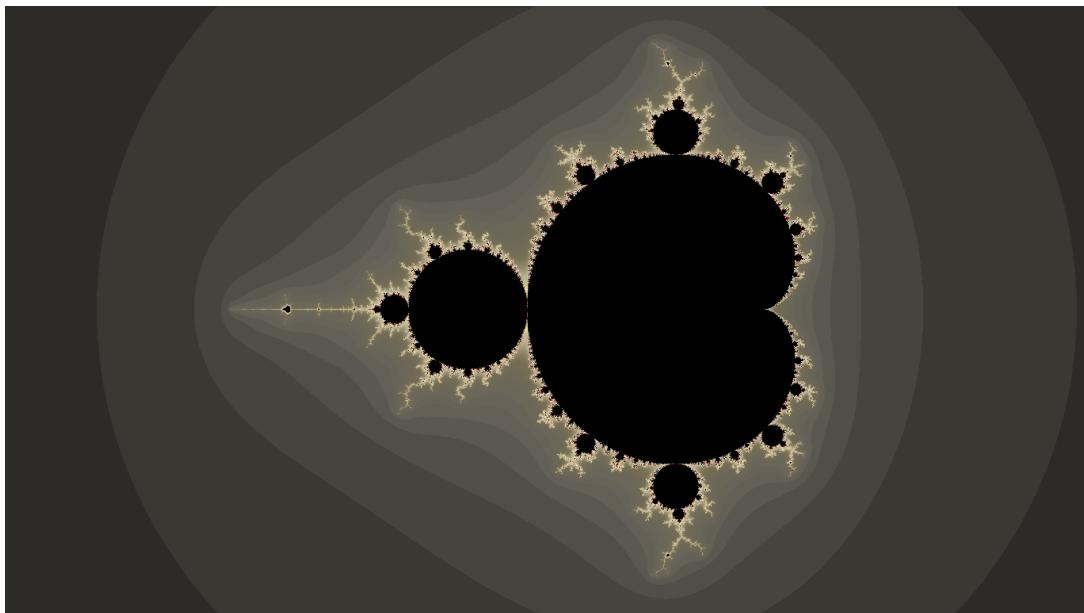


Figura 6.9: El conjunto de Mandelbrot.

primera iteración. Así que mientras  $c$  sea real, la trayectoria se mantendrá sobre el eje real, una situación idéntica a la ejemplificada en la Fig. 6.7. Pero apenas nos empezamos a mover con  $c$  en el plano complejo, las trayectorias empiezan a hacer volteretas bidimensionales. En la Fig. 6.8 hay tres ejemplos, correspondientes a tres valores de  $c$  señalados con una “mira”, en la punta de la primera flecha, gris, que corresponde a la primera iteración.

Como vemos en la Fig. 6.8, algunas trayectorias parecen quedar atrapadas cerca de la condición inicial (como las que mostramos con  $c$  en el primero y segundo cuadrantes), mientras que otras (como la que hicimos con  $c$  en el tercer cuadrante) parecen salir disparadas. Este comportamiento ilustrado aquí con unas pocas y cortas trayectorias es riguroso: existen números complejos  $c$  tales que la trayectoria diverge, y otros tales que no diverge. El conjunto de números complejos  $c$  tales que el mapeo no diverge se llama *conjunto de Mandelbrot*, y es el fractal más famoso y tal vez el más extraordinario. Son los puntos negros de la Fig. 6.9. Los puntos que divergen están coloreados de acuerdo a la velocidad a la que lo hacen.

El conjunto de Mandelbrot tiene dimensión dos, como se ve, pero lo extraordinario es su frontera, tan intrincada ¡que también tiene dimensión fractal 2!<sup>4</sup> El conjunto es conexo, aunque no parezca, y todas las isletas que vemos alrededor del bulbo mayor (así como infinitas más, que la resolución no alcanza a mostrar) están conectadas entre sí por hebras infinitamente intrincadas.

## 6.4 Autosimilaridad

La característica de *autosimilaridad* de los objetos fractales significa que parecen iguales a distintas escalas. En el mapeo logístico ya vimos algo así, y también en la curva de Koch y en varios autómatas celulares. También se ve en los DLA, haciendo zoom hasta que aparece la red.

La autosimilaridad se rompe a las escalas micro y macro, lo cual es responsable de la curvatura en los extremos izquierdo y derecho de las funciones que usamos para calcular  $D$ . El rango de validez del régimen lineal es el rango de la *invariancia de escala* del objeto. Muchas veces se toma la mera existencia de un régimen de ley de potencia como indicador de la invariancia de escala, pero es un asunto complicado. En términos matemáticos, la identificación entre leyes de potencia y la invariancia de

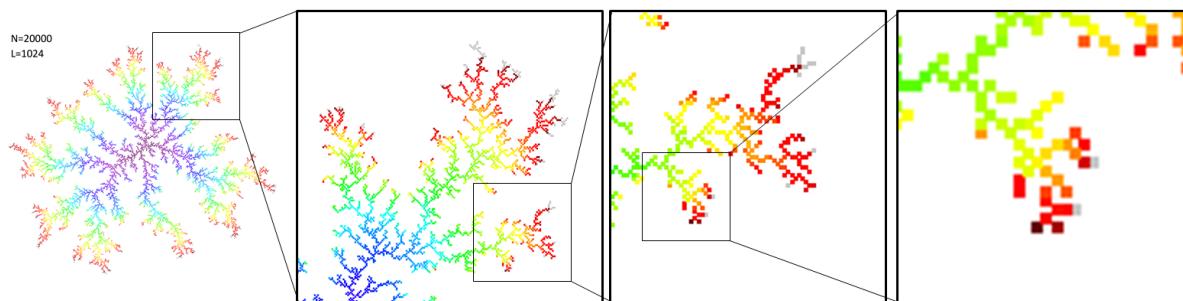


Figura 6.10: Autosimilaridad del agregado DLA.

---

<sup>4</sup>Shishikura M, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, doi:10.48550/arXiv.math/9201282.

escala se debe a lo siguiente. Sea una ley de potencia:

$$f(x) = c x^{-\alpha},$$

y hagamos un *cambio de escala*:

$$x' = a x.$$

Entonces:

$$f(x') = c (x')^{-\alpha} = c (ax)^{-\alpha} = c a^{-\alpha} x^{-\alpha}.$$

Defino  $c' = f_0 a^{-\alpha} \Rightarrow f(x') = c' x^{-\alpha}$ . Es decir, el cambio de escala no cambia ni la forma ni el exponente de la ley de potencia.

Los primeros fractales que se conocieron, como el de Koch, el de Sierpinski, el de Cantor, etc., eran considerados monstruos matemáticos. Eran usados mayormente como contraejemplos, para mostrar que existen curvas que pueden pasar por todos los puntos de un cuadrado, y cosas por el estilo. El punto de vista actual es completamente distinto, debido principalmente al trabajo de Mandelbrot, quien mostró que la naturaleza está llena de objetos de este tipo: montañas, ríos, nubes, árboles, tienen una estructura fractal (Fig. 7.7). Por supuesto, hay muchas diferencias entre estas estructuras naturales y los conjuntos abstractos de la matemática. Aunque las montañas fractales generadas por CGI en películas y juegos realmente *parezcan* reales, no son lo mismo que las verdaderas montañas por las que podemos caminar. Entre otras cosas, los fractales naturales siempre son el resultado de un proceso de desarrollo (crecimiento, evolución, erosión, adsorción, etc.), mientras que los matemáticos son más como el resultado de resolver una ecuación. Pero en modelos como el DLA, que representa más acabadamente un sistema físico, la invariancia de escala refleja la autosimilaridad del proceso: las ramas crecen produciendo ramas, aunque a nivel microscópico las partículas que se pegan operan ciegamente a nivel local, e ignoran lo que está pasando globalmente en el agregado. Es ciertamente posible prestar atención al proceso que genera ciertos fractales matemáticos, y es el caso de una familia de sistemas llamados Iterated Function Systems (IFS). A este tipo pertenece el modelo de Lindenmayer, basado en los fenómenos que gobiernan el crecimiento de las plantas,

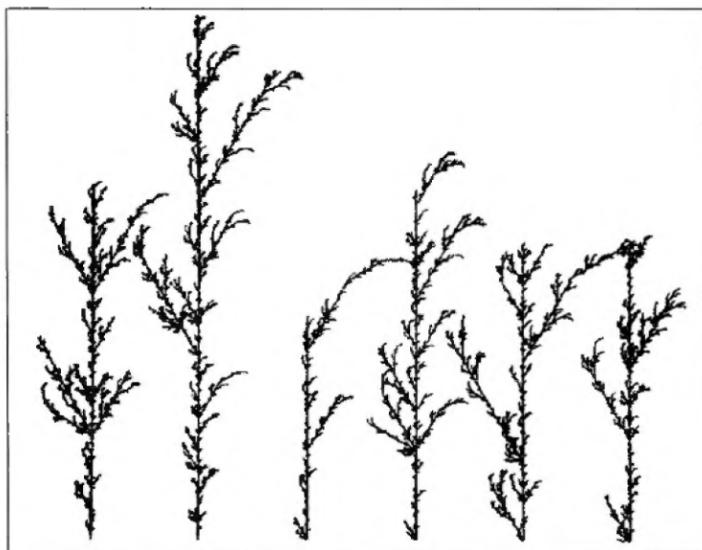


Figura 6.11: Hierbas producidas por un L-system. De Prusinkiewicz and Lindenmayer, *The algorithmic beauty of plants*, 1990.

que produce unos interesantes fractales “vegetales” (Fig. 6.11). Los pueden explorar en: [Weeds and trees](#).

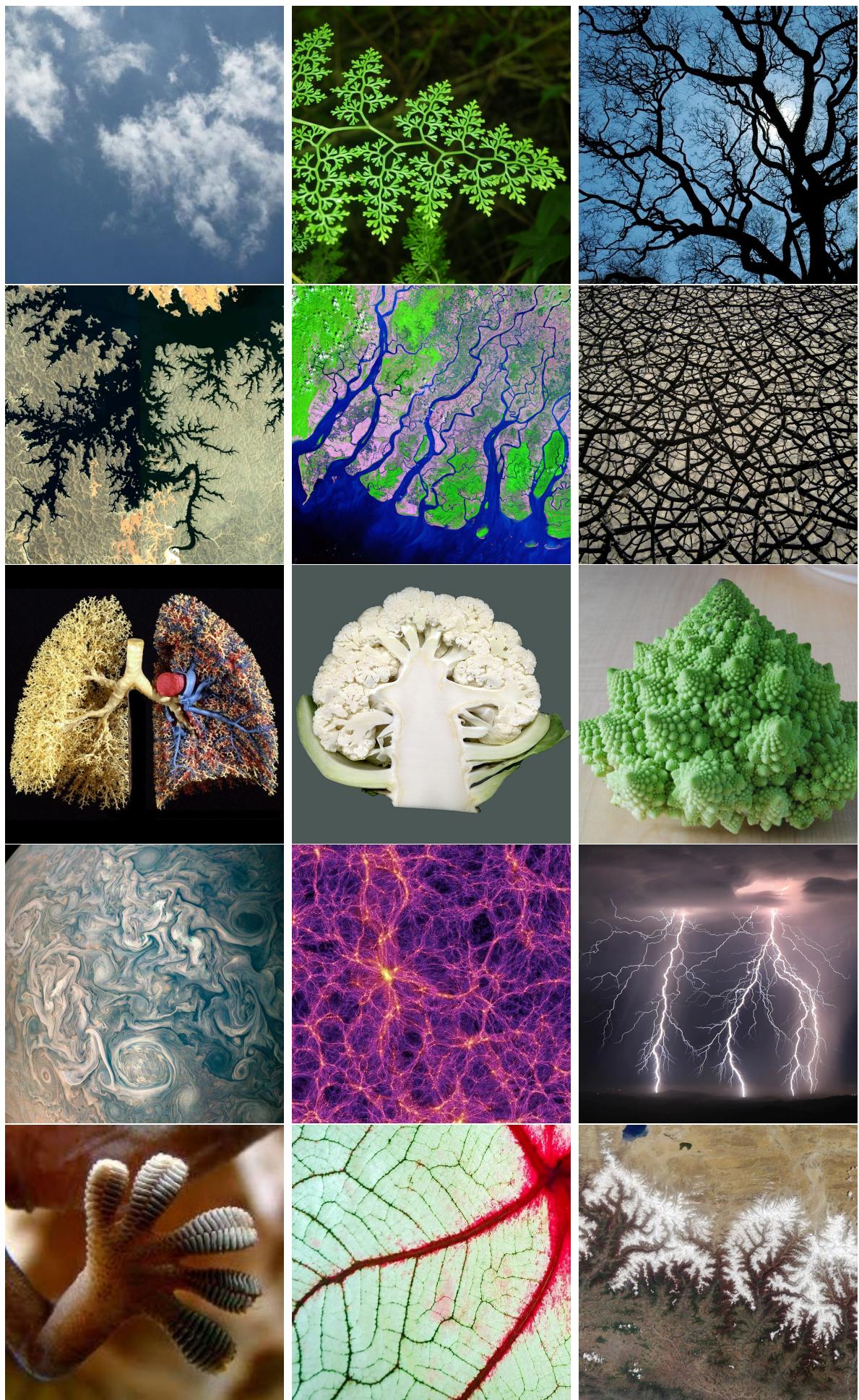


Figura 6.12: Fractales en la naturaleza.

# Percolación

LA PERCOLACIÓN ES UN CONCEPTO que se refiere al paso de un fluido de un lado al otro de un sistema, atravesando algún medio granular o poroso. La preparación del café es un ejemplo cotidiano, y existe un modelo de cafetera llamado “percolator”.<sup>1</sup> Se trata de un fenómeno extremadamente importante en muchas situaciones de la física aplicada o la ingeniería, que conecta la preparación de café con la extracción de petróleo o el enriquecimiento de uranio (casos CAB). Y en su formulación abstracta se ha convertido en un paradigma de los *fenómenos críticos*, comparable al caso del modelo de Ising para los fenómenos magnéticos,<sup>2</sup> pero es más sencillo aún que éste. Vamos a ver una versión súper resumida, que necesitamos tener como marco para varios temas que siguen.

## 7.1 Percolación en 1D

Sea una red regular de  $N$  sitios en una dimensión, que pueden estar ocupados con probabilidad  $p$ . La ocupación de cada sitio es independiente de la de los demás. Cuando  $p = 0$  el sistema está vacío, y cuando  $p = 1$ ,

---

<sup>1</sup>Sir Benjamin Thomson, Conde de Rumford, famoso por descubrir el equivalente mecánico del calor, inventó el percolador alrededor de 1810. También inventó el método de cocción *sous-vide*, que hoy está nuevamente de moda.

<sup>2</sup>Si no lo conoce, reviselo en Complexity Explorables: [I sing well-tempered](#). Yo escribí una nota en el blog en ocasión del centenario: [El modelo de Ising cumple 100 años](#).

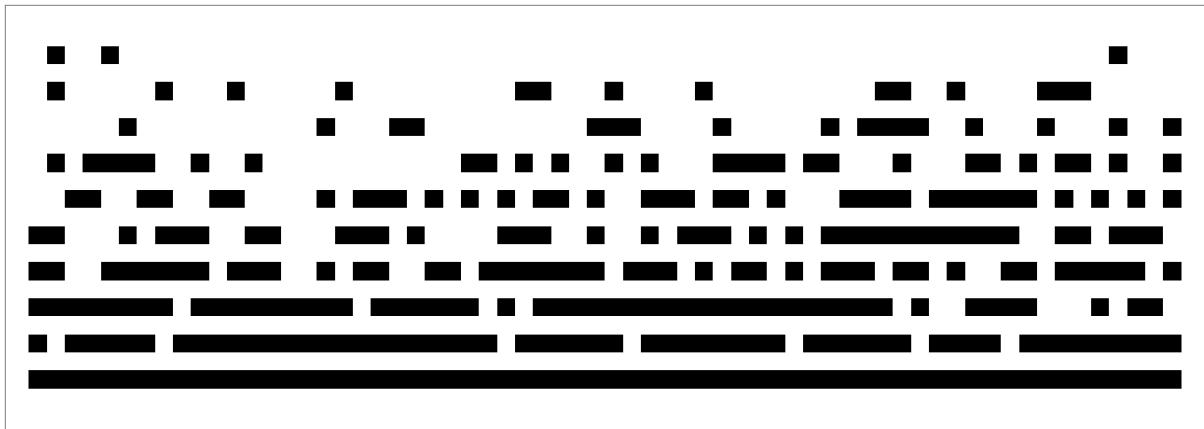


Figura 7.1: Sistemas 1D de 64 sitios, con probabilidades de ocupación creciente hacia abajo, desde  $p = 0.1$  hasta  $p = 1$ , cada 0.1.

está lleno. Cuando  $p$  es intermedio existen *clusters* de distintos tamaños. El modelo está ilustrado en la Fig. 7.1, para distintos valores de  $p$ .

Vemos que cuando  $p = 1$  hay un único cluster que ocupa todo el sistema. Claramente, la desocupación de un único sitio es suficiente para romper esta situación. El valor de  $p$  para el cual existe un cluster que abarca todo el sistema se llama *umbral de percolación*,  $p_c$ . En 1D, tenemos que  $p_c = 1$ , y de hecho se puede demostrar que el tamaño,  $s$ , del mayor cluster para una dada  $p$  satisface:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s = \frac{1+p}{1-p},$$

que diverge para  $p \rightarrow 1$ .

## 7.2 Percolación en 2D

Consideraremos ahora una grilla regular con conexiones a los cuatro primeros vecinos. Nuevamente, ocupamos las celdas de manera independiente unas de otras, con probabilidad  $p$ . En este caso, los clusters son conjuntos de sitios ocupados contiguos, separados de otros clusters (o de sitios únicos, que son los clusters ínfimos) por sitios vacíos.



Figura 7.2: Sistema de  $64 \times 64$ , con probabilidades de ocupación  $p = 0.25, 0.5$  y  $0.75$ .

Ahora el umbral de percolación será el valor de  $p$  tal que exista un cluster que abarque todo el sistema, en el sentido de que “conecte” un lado con el opuesto. O sea, que “percole”. En la Figura 7.2 vemos que con  $p = 0.25$  (el extremo izquierdo) los clusters son más bien chiquitos, distribuidos uniformemente en el sistema. Obviamente, ninguno de ellos percola.

A  $p = 0.75$  (el caso del extremo derecho) el aspecto del sistema es bien distinto: los que parecen distribuidos al azar son los huecos. Como si fuera un medio poroso, o una esponja. El sistema tiene un único gran cluster, que llena casi toda la red. Así que  $0.75$  es mayor que el umbral de percolación.

El caso  $p = 0.5$  (el del medio) es más dudoso. ¿Hay muchos clusters grandes? ¿Hay un único cluster muy intrincado? Es difícil de decir por inspección visual. Pero lo que es obvio es que, a diferencia del caso unidimensional, en 2D  $p_c < 1$ . La razón es obvia: en 2D, donde hay un sitio vacío, el cluster percolante lo puede rodear.

La identificación de clusters en dos dimensiones, para poder contarlos y medirlos, no es trivial, así que no lo haremos en detalle (Problema 11.6). Mostremos directamente el cluster más grande en un sistema con  $p = 0.59$  (Figura 7.3).

Si graficamos el tamaño del cluster más grande en función de  $p$  (o mejor, su valor medio en muchas realizaciones, junto a su desviación estándar,

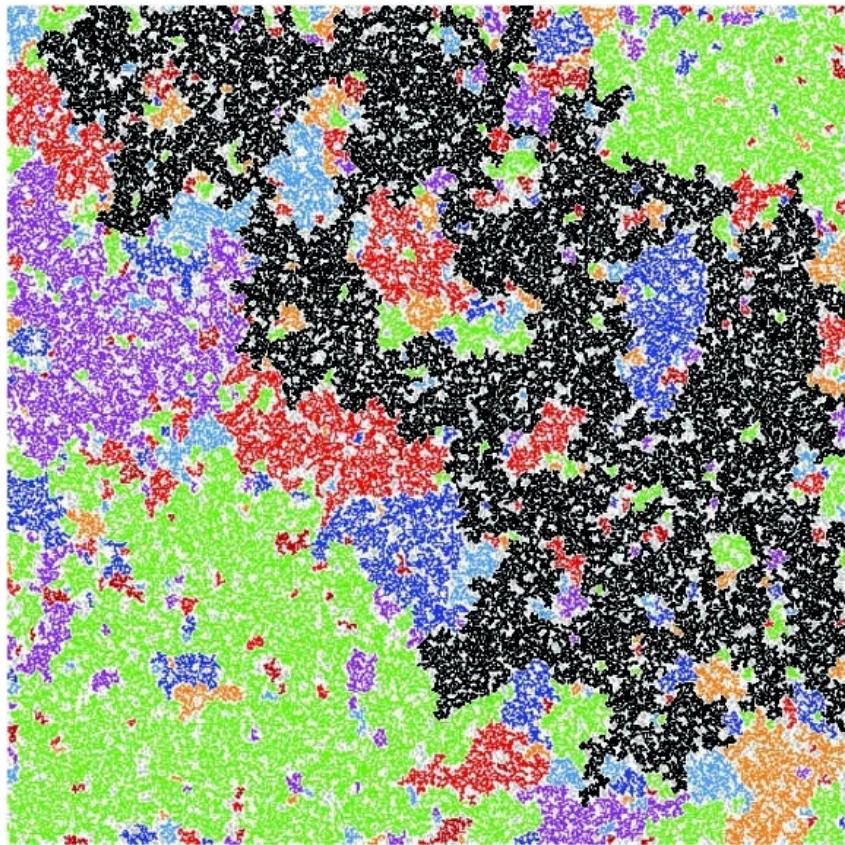


Figura 7.3: Sistema de  $512 \times 512$  y  $p = 0.59$ , con identificación de los clusters. El mayor es el negro

para cada valor de  $p$ ), se obtiene la Fig. 7.4. Vemos que, hasta  $p \approx 0.2$ , el tamaño del cluster mayor acompaña un crecimiento lineal. Pero entre 0.2 y 0.6 se hace superexponencial (cónico en log-lin). Y a partir de  $p \approx 0.6$  el tamaño se satura rápidamente en el valor  $N \times N$ .

El gráfico inferior en la Fig. 7.4 es una normalización de  $\langle S \rangle$ , dividiendo por la cantidad de sitios ocupados, que es  $pN^2$ :

$$F(p) = \frac{\langle S \rangle}{pN^2}.$$

El comportamiento de  $F$  es interesante porque nos permite ver algo más: hasta  $p \approx 0.5$ , tenemos  $F \approx 0$ . Es decir que aunque el cluster mayor ya sea grandecito, no se destaca con respecto al resto. Pero alrededor de ese

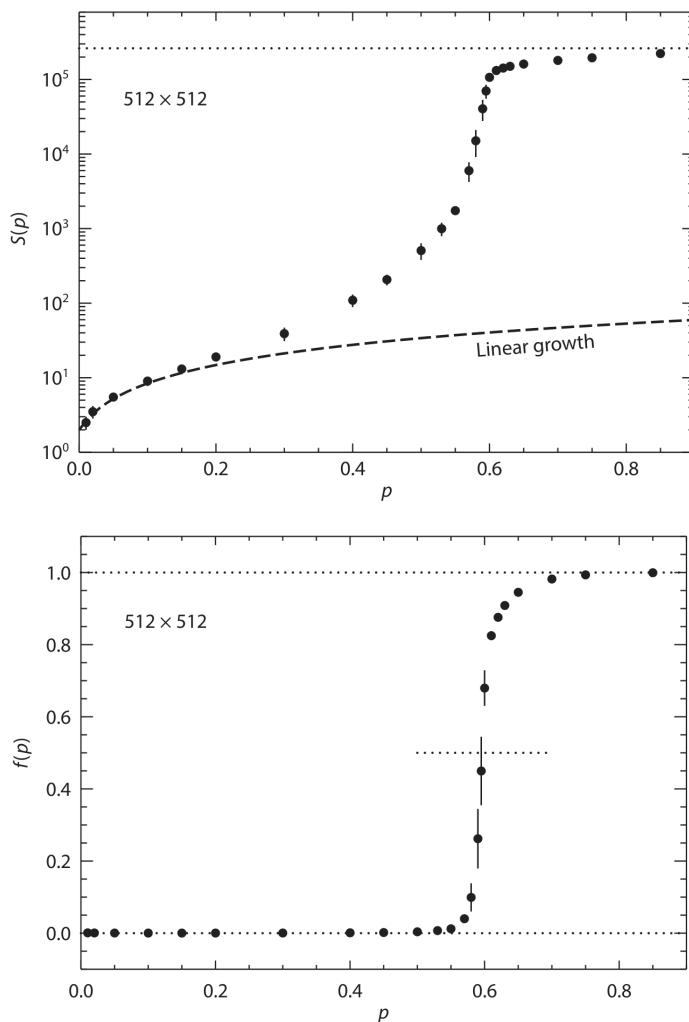


Figura 7.4: Tamaño del mayor cluster como función del parámetro de ocupación  $p$ . El gráfico inferior es el tamaño normalizado por la cantidad de sitios ocupados. Promedio de 10 realizaciones, mostrando la desviación estándar en cada punto

valor,  $F$  crece muy rápidamente, indicando que un cluster le está ganando abrumadoramente a los demás. Este comportamiento termina muy rápido a  $p \approx 0.5$ , donde ya capturó a todos los sitios ocupados. Alrededor de  $p \approx 0.6$ , el crecimiento de hecho parece divergir, con  $dF/dp \rightarrow \infty$ . Aquí está el umbral de percolación, que calculado de manera numérica resulta ser  $p_c = 0.592746\dots$

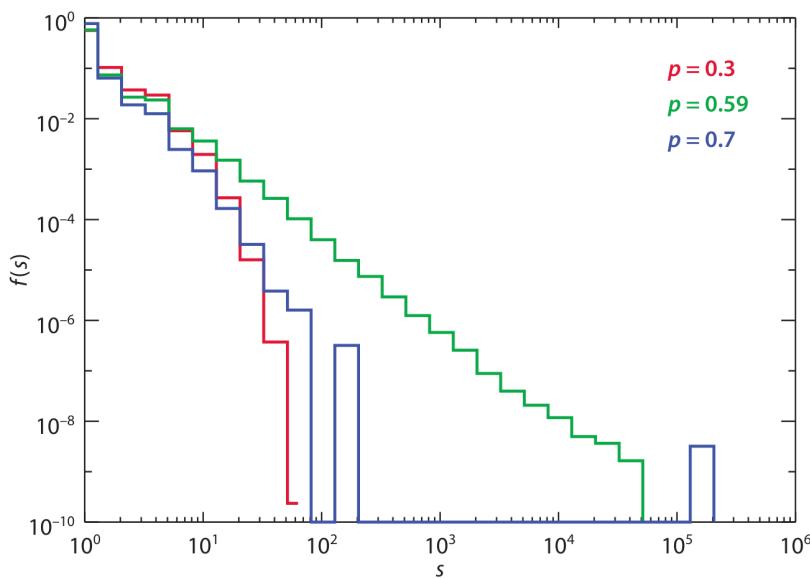


Figura 7.5: Densidad de probabilidad de los tamaños de cluster en sistemas de  $512 \times 512$ , para tres probabilidades de ocupación.

Algo también interesante ocurre con la distribución de tamaños de clusters, que mostramos en la Fig 7.5 para tres valores de  $p$ . Para  $p = 0.3$ , vemos que  $f(s)$  cae rápidamente. Para 0.7 hay un súper cluster (con más de  $10^5$  sitios en él), y una distribución de clusters metidos en sus huecos, que también cae rápidamente y es muy parecida a la de 0.3. Pero el caso  $p = 0.59$  es diferente. La distribución de tamaños de clusters es una ley de potencia:

$$f(s) = c s^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \approx 1.85.$$

El valor del exponente  $\alpha$  es independiente del tamaño de la red, ya sea que tenga algunos miles, o millones de sitios ( $N = 64$  a  $2048$ ). Decimos que el exponente es *universal* para estas redes 2D con cuatro primeros vecinos.

Una ley de potencia tan bien definida es indicativa de una invariancia de escala, como mencionamos en el capítulo anterior. Efectivamente, estos clusters en el umbral de percolación tienen aspecto fractal, con dimensión entre 1 y 2 (dentro de las limitaciones de la discretitud y la finitud del sistema, obviamente).

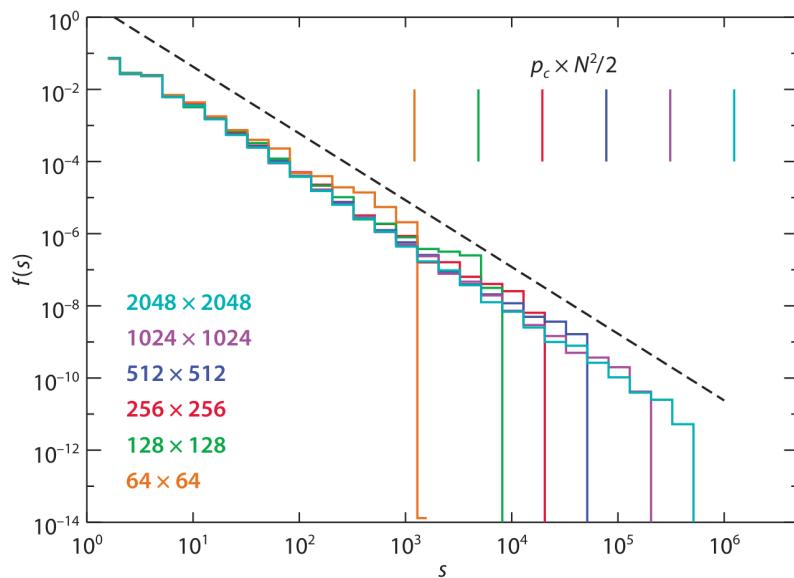


Figura 7.6: Scaling de la densidad de probabilidad de tamaño de cluster, para sistemas de distintos tamaños.

Todas estas características corresponden a lo que se llama un *estado crítico*. En mecánica estadística, estos son los sistemas que son muy susceptibles a los pequeños cambios microscópicos, como la transición líquido-vapor o la ferromagnética. En el caso de la percolación, esta susceptibilidad corresponde al tamaño de los clusters. Cuando  $p < p_c$ , ocupar un sitio más tal vez haga crecer un poquito a un cluster. Y cuando  $p > p_c$ , ya hay un cluster que percola, y ocupar un sitio nuevo no le cambia nada. Pero cuando  $p \approx p_c$ , ocupar un sitio puede conectar dos grandes clusters preexistentes y producir uno que percole, lo cual generalmente produce un cambio físico cualitativo. Si fuera un medio poroso, pasaría de ser impermeable a ser permeable; si fuera un conductor eléctrico, pasaría de ser aislante a ser conductor. La Figura 7.7 muestra el mayor cluster para valores muy cercanos al estado crítico.

Observemos por último, ya que tiene relevancia para los modelos que estudiaremos a continuación, que en el modelo de percolación, así como en los demás ejemplos que fuimos mencionando, existe un *parámetro de*

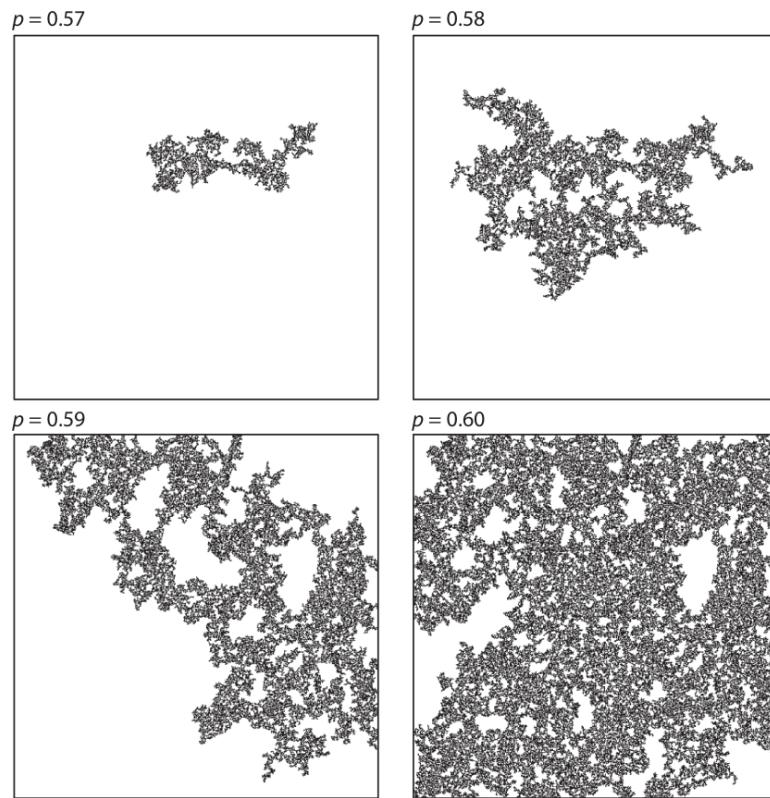


Figura 7.7: El cluster más grande en sistemas de  $512 \times 512$ , para cuatro probabilidades de ocupación cercanas al valor crítico.

*control* ( $p$  en este caso, la temperatura en el modelo de Ising, etc.) cuyo valor debe ser ajustado externamente, como con un potenciómetro, al valor del umbral, para que el sistema esté en el estado crítico. Esto hace pensar que debería ser raro encontrar sistemas en el estado crítico en la naturaleza, fuera de condiciones de laboratorio. Pero la naturaleza siempre se las arregla para sorprendernos.

Hay una linda implementación de la percolación en [Barista's secret](#). Ver también: [Swarmalators](#), que combina sincronización con movimiento colectivo.

## Pilas de arena

TODOS HEMOS TENIDO LA EXPERIENCIA, relajándonos en una playa soleada, de dejar escurrir un puñado de arena entre los dedos, y ver cómo se forma una pila cónica donde cae y se acumula. (Es también lo que podemos ver en un reloj de arena.) A medida que el montículo crece, se pueden ver pequeñas avalanchas de distintos tamaños, que acomodan los granos a medida que el cono crece. Si uno se fija con cuidado, verá que van aumentando la altura y el ancho de la pila, pero manteniendo la inclinación de la pendiente.

Este sistema se ha convertido en el prototipo de un mecanismo muy general, responsable de la producción de patrones y comportamientos complejos e invariantes de escala, llamado *criticalidad auto-organizada*. Vamos a estudiar un modelo de las pilas de arena, debido a Bak, Tang y Wiesenfeld.<sup>1</sup> El modelo es muy simplificado con respecto a las pilas naturales de medios granulares, cuyo comportamiento se venía estudiando en experimentos desde unos 10 años antes y que son mucho más que un entretenimiento de vacaciones. En particular, le faltan dos ingredientes fundamentales del sistema natural: fricción e inercia.<sup>2</sup> Fue inventado para

<sup>1</sup>P Bak, C Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise*, Phys. Rev. Lett. 59:381 (1987).

<sup>2</sup>La inercia hace que muchos de los sistemas investigados experimentalmente exhiban sólo un comportamiento oscilatorio de landslides, en lugar de avalanchas de tamaños distintos. Curiosamente, las pilas de arroz se comportan de manera más parecida a los modelos simples.

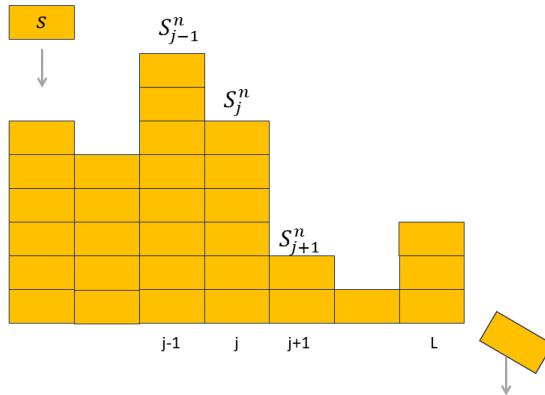


Figura 8.1: Ilustración de la pila de arena, con un grano cayendo desde arriba, y uno que se pierde por el borde.

capturar el comportamiento de las avalanchas de manera general y abstracta. Más adelante veremos otros sistemas que tienen el mismo tipo de comportamiento.

## 8.1 Modelo de Bak

El modelo de Bak (y Tang, y Wiesenfeld) es un autómata, donde el estado de las celdas de una red 1D de  $N$  sitios evoluciona de acuerdo a reglas locales en el espacio y el tiempo. En cada sitio tenemos una variable real  $S_j^n$ , que representa la altura de la arena.

A tiempo inicial tenemos un estado vacío:

$$S_j^0 = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

En cada iteración del autómata, agregamos una pequeña cantidad  $s$ , en un sitio elegido al azar, representando la caída de granos de arena desde arriba:

$$S_r^{n+1} = S_r^n + s, \quad r \in [0, N - 1], \quad s \in [0, \epsilon].$$

Tanto  $r$  como  $s$  las elegimos al azar con distribución uniforme. El valor de  $\epsilon$  es uno de los dos parámetros del modelo. Con esto tenemos que la pila

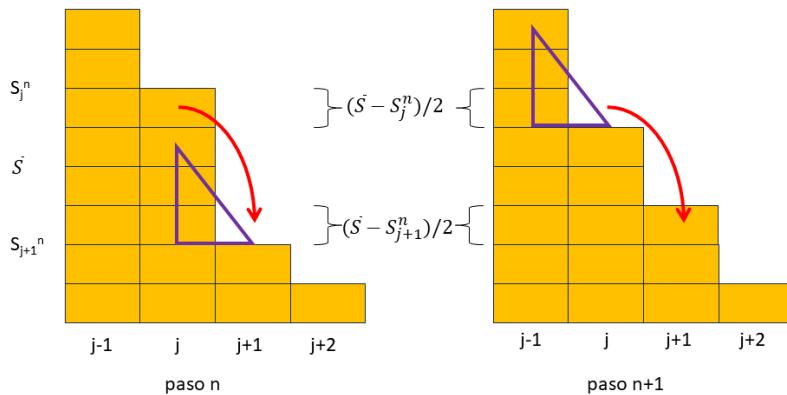


Figura 8.2: Ilustración de la regla de redistribución de la arena cuando la pendiente local excede el umbral (indicado por el triángulo púrpura). Como resultado del reacomodamiento, en el paso siguiente la pendiente en  $j - 1$  excede el umbral y producirá un nuevo movimiento de arena.

irá creciendo en el tiempo, con el aporte del agregado externo. Además de este forzado externo, definimos una dinámica interna de la siguiente manera. A cada paso de tiempo, calculamos la pendiente local, para cada par de sitios vecinos:

$$z_j^n = |S_{j+1}^n - S_j^n|, \quad j = 0, \dots, N - 2.$$

Si esta pendiente excede un umbral  $Z_c$  (el otro parámetro del modelo), decimos que el par de sitios es inestable, como si se excediera la condición de rozamiento estático entre granos de arena. Esto lleva a un movimiento local, redistribuyendo la arena hasta que eventualmente se restablezca el equilibrio. En el modelo, usamos:

$$S_j^{n+1} = S_j^n + \frac{1}{2}(\bar{S} - S_j^n), \quad (8.1)$$

$$S_{j+1}^{n+1} = S_{j+1}^n + \frac{1}{2}(\bar{S} - S_{j+1}^n), \quad (8.2)$$

donde:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}(S_j^n + S_{j+1}^n).$$

Es decir, la regla redistribuye el exceso de arena, reduciendo a la mitad la pendiente local  $Z_j$  (Fig. 8.2).

En el ejemplo de la figura vemos que esta redistribución reduce la pendiente local  $Z_j$ , tendiendo a la estabilización. Pero también vemos que, al hacerlo, modifica las pendientes vecinas, pudiendo hacer que alguna de ellas se desestabilice. En el ejemplo, resulta que  $Z_{j-1}$  ahora excede el umbral, lo cual lleva a un nuevo reacomodamiento. Este es el mecanismo responsable de las avalanchas.

Si el parámetro  $\epsilon$  es pequeño,  $\epsilon \ll S_j, S_{j+1}$  (es decir, un aporte lento de arena) entonces la pendiente local será mayor que la crítica por poquito, y la regla de redistribución alcanza para restablecer la estabilidad local.

Como dijimos, el cambio de  $S_j^n$  y  $S_{j+1}^n$  cambia las pendientes que involucran a los sitios  $(j-1, j)$  y  $(j+1, j+2)$ ,  $z_{j-1}$  y  $z_{j+1}$ , pudiendo hacer que alguno de ellos (o ambos) excedan el umbral. Como ocurre con  $z_{j+1}$  en la figura. Cuando ocurre esto, aplicamos de nuevo la regla de redistribución al par de sitios correspondiente. Claro que, al hacerlo, tenemos que verificar la pendiente de un nuevo par, y así sucesivamente. Este proceso creciente corresponde a una avalancha de arena desplazándose pendiente abajo, hasta finalizar cuando *todos* los pares de sitios vecinos satisfacen la condición de estabilidad.

¿Qué hacemos con los bordes? Podemos imaginar que la pila se forma sobre una mesa, y que la arena que llega al borde cae y se pierde. Así que usamos una condición de borde abierto:

$$S_{N-1}^n = 0, \quad N \geq 1 \dots,$$

excepto a  $n = 0$ , como si hubiera una barrera que removemos cuando empezamos a iterar. En el otro borde,  $j = 0$ , ponemos una barrera permanente. Como la regla de evolución es conservativa, y se agrega arena todo el tiempo, el borde es el único lugar donde se evacúa la arena. Esta condición es crucial, y podemos imaginar que existe un estado estacionario, caracterizado por una pendiente global  $Z_c$ , con avalanchas que transportan la arena desde la cima hasta la base a alguna velocidad media, y allí se pierde a la misma tasa a la que agregamos los granos. En efecto, se llega a un estacionario, pero es muy distinto de lo que imaginamos.

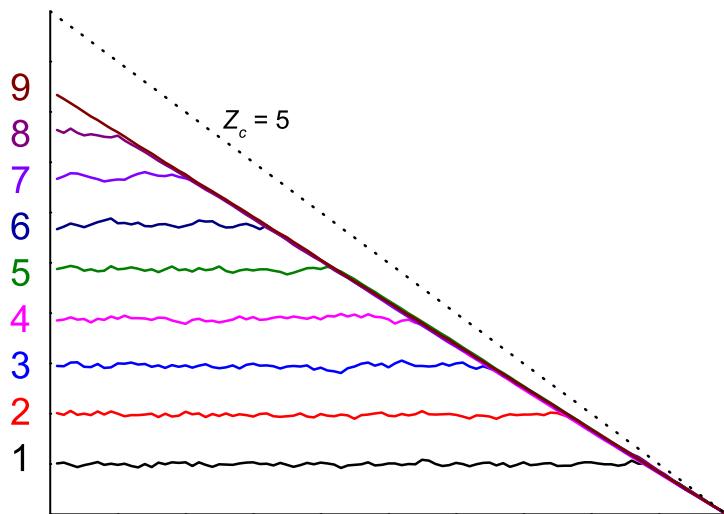


Figura 8.3: Una pila de 100 sitios creciendo, dibujada cada  $10^5$  pasos, hasta  $9 \times 10^5$ , inicialmente vacía, con agregados al azar uniforme en la red y abierta en el extremo derecho.

## 8.2 Implementación

- No actualizar el estado hasta terminar de mover arena. Es una *actualización sincrónica*. Mencionar mi modelo de actualización asincrónica: Globally coupled maps with asynchronous updating, Abramson G, Zanette DH. Phys. Rev. E (1998) 58:4454.
- Separación de escalas temporales: no agregar arena hasta que se restablezca el equilibrio.
- Medir la masa de la pila y la masa de arena de las avalanchas en función del tiempo.

## 8.3 Evolución

Mostrar una corrida representativa.  $N = 100$ , inicial vacío,  $\epsilon = 0.1$ ,  $Z_c = 5$ .

Observaciones (Fig. 8.3):

- Crecimiento al principio plano.
- Borde de perdida que induce una pendiente en el extremo derecho.
- Al principio localizado, pero creciente hacia la izquierda al pasar el tiempo.
- Extremo izquierdo donde la arena sólo se acumula sin caer.
- Este estado es transitorio, dura  $\approx 850000$  pasos durante los cuales, en promedio, la pila crece (hay más adición que pérdida).

Esta fase es razonable y hasta esperable, salvo por un detalle: la pendiente que se alcanza de manera progresiva *no es* la que esperamos,  $Z_c$ . El sistema tiende a un estado estacionario con una pendiente bastante menor. ¿Por qué este ángulo de reposo es menor que  $Z_c$ ? Como el forzado externo es estocástico, algunos sitios alcanzan el umbral de desequilibrio antes de que la pila en su conjunto adquiera una pendiente  $Z_c$ . Así que se estabiliza con una pendiente menor. El valor del ángulo de reposo depende de  $\epsilon$ , y tiende a  $Z_c$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Vale la pena ver cómo se desarrollan las avalanchas que desplazan la arena en la pila.

La Fig. 8.4 es un diagrama espacio-temporal que muestra 2000 iteraciones del sistema, con un par de acercamientos mostrando el desarrollo inicial de dos distintas.

Observaciones:

- Siempre empiezan en un par de sitios vecinos, tras el agregado de un grano en uno de ellos.
- Crecen cuesta abajo (derecha), pero también cuesta arriba.
- Las más pequeñas quedan acotadas, pero las más grandes alcanzan el borde abierto y descargan arena.
- La pendiente del frente de la avalancha en  $(j, n)$ , 1 sitio por unidad de tiempo, refleja la dinámica local de redistribución de arena al sitio vecino.

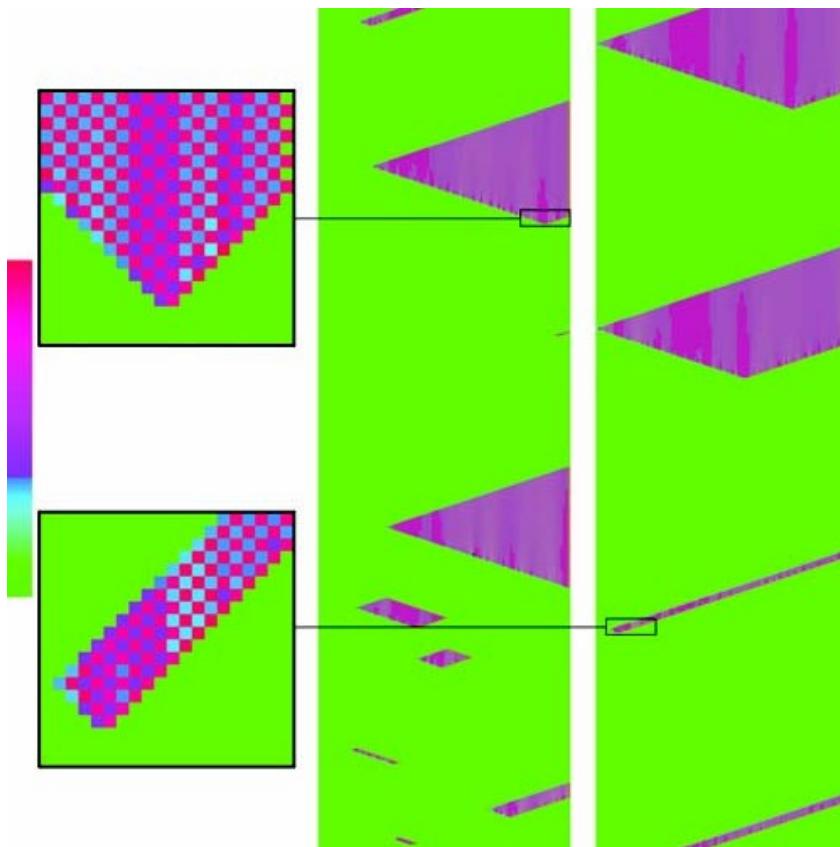


Figura 8.4: Evolución espacio-temporal de las avalanchas. El tiempo avanza hacia arriba, y el rectángulo de la derecha es la continuación del de la izquierda. La escala de colores corresponde a la cantidad de arena desplazada.

- Se ve una estructura interna: un damero, que corresponde a la regla de desestabilización y redistribución (que involucra un par de sitios vecinos).
- Más curiosas son unas estructuras verticales (es decir, casi quietas). Son las desestabilizaciones interiores de las avalanchas, las que surgen del reacomodamiento local, y que son las responsables de que las avalanchas crezcan.

Para evidenciar propiedades aun más interesantes conviene definir algunas magnitudes que se pueden ir midiendo durante la simulación. En

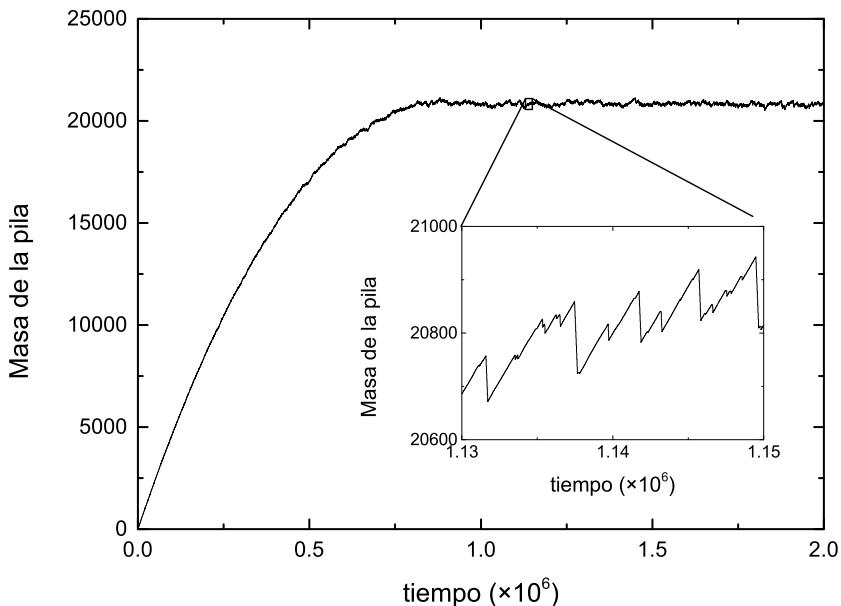


Figura 8.5: Masa de la pila de arena, mostrando un zoom.

primer lugar, la masa de la pila:

$$M^n = \sum_{j=0}^{N-1} S_j^n.$$

La masa crece durante el transitorio (Fig. 8.5), y se satura en un valor fluctuante. A pesar de que las fluctuaciones parecen pequeñas, haciendo un zoom se puede ver que son realmente fuertes. De hecho, la curva es autosimilar y tiene una dimensión fractal mayor que 1. Las subidas parecen lineales, con la masa creciendo a una tasa controlada por el parámetro  $\epsilon$ . Pero hay episodios de caída brusca, que ocurren cuando se pierde masa por el borde abierto. Así que la pila se encuentra en un estado estadísticamente estacionario, cuyo promedio a una escala temporal mucho mayor que el intervalo entre avalanchas, resulta constante.

Otra magnitud interesante para analizar es la masa que se mueve du-

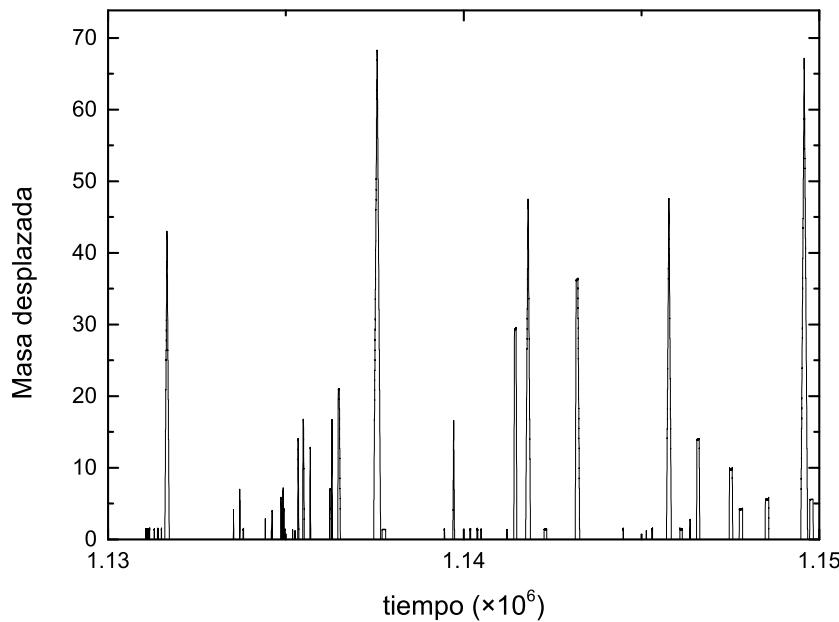


Figura 8.6: Masa masa desplazada correspondiente al zoom de la Fig. 8.5.

rante una avalancha:

$$\Delta M^n = \sum_{j=0}^{N-2} \delta S_j^n. \quad (8.3)$$

Esta  $\Delta M^n$  no es necesariamente igual a la diferencia de masa a pasos sucesivos,  $M^{n+1} - M^n$ , debido al borde abierto. Si una avalancha no alcanza el borde, la masa de la pila no cambia, aunque haya efectivamente una cantidad de arena desplazada dada por (8.3). De todos modos, se ve que la masa de la pila cambia muy poco, incluso cuando hay una avalancha grande que llega al borde ( $\approx 0.2\%$  del total!). Esto se debe a que las avalanchas involucran sólo una capita, mientras que el *bulk* de la pila permanece inmóvil en el estado estacionario.

En la Fig. 8.6 se ve que esta cantidad también es muy intermitente, con  $\Delta M = 0$  casi todo el tiempo, salvo durante las avalanchas. Se ve también que éstas aparecen en instantes al azar, y que tienen enorme diversidad de tamaños.

## 8.4 Avalanchas

Vimos que las avalanchas tienen diversidad de formas y tamaños. Vamos a caracterizarlas usando cantidades que podemos calcular a partir de las mediciones.

- Energía ( $E$ ): Suma de todas las  $\Delta M^n$  durante una avalancha. Representa la energía potencial, convertida en movimiento y luego disipada, de las avalanchas del mundo real.
- Pico ( $P$ ): Máximo  $\Delta M^n$  durante una avalancha.
- Duración ( $T$ ): Número de iteraciones desde el comienzo hasta la última redistribución y el nuevo equilibrio.

Es natural esperar que las avalanchas más grandes tiendan a durar más y a alcanzar picos más altos. Pero esta correlación entre  $E$ ,  $P$  y  $T$  es sólo estadística, principalmente debido al borde abierto.

Observaciones sobre la Fig. 8.7:

- Los puntos aparecen organizados de manera peculiar, en diagonales.
- Todos caen entre las líneas de  $E \propto T$  y  $E \propto T^2$ .

¿A qué se debe esto?

Pensemos en una pila en equilibrio, con la ladera suave y correspondiente al ángulo de reposo. Al agregar un grano, un par de sitios excede  $Z_c$  infinitesimalmente, disparando un movimiento de tamaño  $\delta S_j^n = Z_c/4$ . Esta es la avalancha más pequeña posible, el “cuanto” de avalancha o de energía desplazada,  $\delta M_0$ .

Supongamos que este movimiento desestabilice a  $(j+1, j+2)$ , pero no a  $(j-1, j)$ . Como toda la ladera está en equilibrio en el ángulo de reposo, este cuanto se moverá cuesta abajo un sitio por vez, hasta desaparecer en el borde. Si  $d = N - j$  es la distancia hasta el borde, la duración de esta avalancha será  $T = d$ , y la energía  $E = d \times \delta M_0 \Rightarrow E = \delta M_0 T$ , lineal.

Supongamos en cambio que se desestabilizan dos pares de sitios inicialmente, pero ninguno hacia arriba de ellos. Entonces se moverán dos

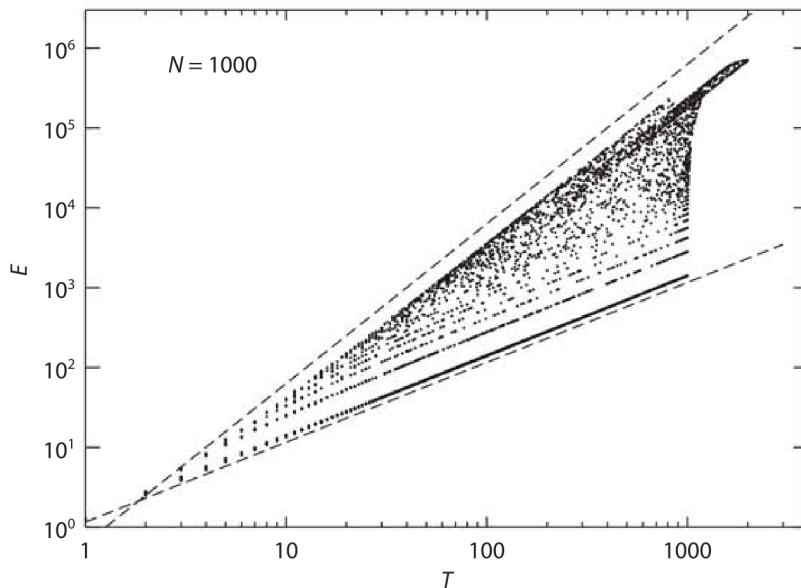


Figura 8.7: Correlación entre el la masa desplazada y la duración de las avalanchas. Las líneas de trazo tienen pendiente 1 y 2 en log-log, y corresponden a las curvas  $E \propto T$  y  $E \propto T^2$  respectivamente.  $N = 1000, 5 \times 10^6$  iteraciones.

cuantos de arena hacia abajo, y será  $E = 2\delta M_0 T$ . Y así sucesivamente. Todas estas avalanchas están limitadas en duración por el tamaño de la red. Son las avalanchas lineales del gráfico  $(j, n)$ , y tienen todas ellas pendiente 1 en  $E$  vs  $T$ . Forman una familia de “niveles de energía” disponibles para las avalanchas.

La línea que acota las energías por arriba se debe a la existencia de avalanchas que se propagan cuesta abajo y cuesta arriba, con repetidos reacomodamientos internos, hasta restablecer el reposo o descargar arena por el borde. Son las avalanchas “gruesas” en el diagrama  $(j, n)$ . El número de sitios involucrados crece linealmente con  $T$ , así que la masa integrada resulta  $\propto T^2$ . Como la regla de redistribución es local, el tamaño no puede crecer más rápido que  $T$ , y por eso la cota superior es  $T^2$ .

Todo tipo de comportamiento intermedio está permitido, y por eso los puntos pueblan el interior de la cuña definida por  $T$  y  $T^2$  en el gráfico doble logarítmico de  $E$  vs  $T$ .

La otra cosa interesante de estas magnitudes son sus propiedades es-

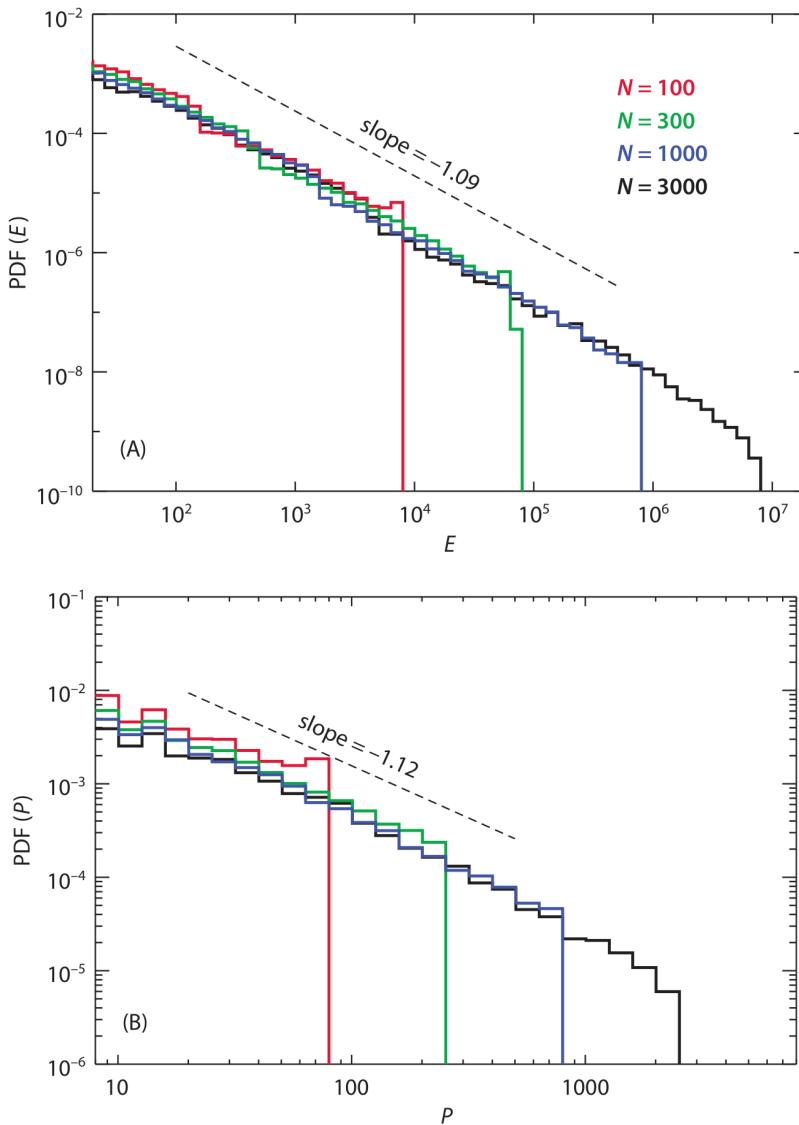


Figura 8.8: Distribuciones de probabilidad de  $E$  (arriba) y de  $P$  para sistemas de distintos tamaños:  $N = 100, 300, 1000$  y  $3000$ , mismo  $Z_c = 5$  y  $\epsilon = 0.1$ .

tadísticas.

Las distribuciones de  $E$  y de  $P$  (Fig. 8.8) son algebraicas, con forma de ley de potencia, con un exponente (la pendiente en log-log) independiente del tamaño: los sistemas más grandes tan sólo extienden este comportamiento hacia la derecha.

Este comportamiento de ley de potencia es característico de otros sistemas que exhiben una invariancia de escala. Aquí refleja que, en el estado estacionario, las avalanchas son autosimilares, sin un tamaño característico. En otros sistemas, como el modelo de Ising o la percolación, esta característica de invariancia de escala corresponde al que llamamos *estado crítico*, por ejemplo cuando la temperatura es la de Curie, o la probabilidad de conexión es la crítica. Estos son parámetros fijados y ajustados desde el exterior. ¿Acá también es así?

## 8.5 Criticalidad auto-organizada

Este párrafo podría ir al principio:

La situación es como si, de todas las maneras posibles de mover arena y desalojarla por el borde, el sistema automáticamente “seleccionara” una en la cual las avalanchas son libres de escala. Como hay una cantidad de sistemas que se comportan así, el modelo de pila de arena se ha convertido en un prototipo, y el comportamiento se llama *criticalidad auto-organizada* (SOC, por *self-organized criticality*).

En el estado crítico, los sistemas que exhiben autosimilaridad o invariancia de escala —como Ising o percolación— hay una máxima sensibilidad a los cambios microscópicos. El calor específico del modelo de Ising, por ejemplo, tiene un máximo. O el agregado de una nueva conexión en el sistema de percolación une dos clusters, y el sistema se vuelve conductor. Esto ocurre cuando  $T = T_c$ , o cuando  $p = p_c$ . En la pila de arena, el equivalente al umbral de percolación podría ser el ángulo de reposo de la pila. Si la pendiente es menor (como en el transitorio) el agregado de arena produce reacomodamientos confinados, pero no avalanchas libres de escala que lleguen a abarcar todo el sistema. Si la pendiente es mayor que el ángulo de reposo, la arena está en fuerte redistribución con avalanchas grandes. Sólo en el ángulo de reposo la adición de un único grano de arena puede hacer cualquier cosa entre ambos extremos, entre que no pase nada o que se desate una avalancha que abarque todo el sistema. Es decir, a diferencia de la probabilidad crítica de percolación, o de la temperatura

de Curie, que deben ser fijadas como parámetros externos, aquí el ángulo de reposo se alcanza de manera “natural” o “automática”, como resultado de la propia dinámica. Por esta razón el fenómeno se llama *criticalidad auto-organizada*.

Aun después de muchos años de su descubrimiento, todavía no está del todo claro cuáles son las condiciones que un sistema necesita para tener esta criticalidad auto-organizada. Las siguientes parecen ser suficientes (y tal vez necesarias):

1. Sistema abierto y disipativo.
2. Sujeto a un forzado lento.
3. Sujeto a una inestabilidad localizada.
4. Capaz de reacomodarse para restaurar el equilibrio.

Una gran variedad de sistemas naturales satisfacen estas condiciones y muestran características similares a las pilas de arena: incendios forestales, terremotos, cuencas hidrológicas, tormentas geomagnéticas, fulguraciones solares, extinción de especies biológicas, crashes de mercados financieros, cortes de electricidad, guerras, y quién sabe cuántos más. Algunos de estos casos son más especulativos que otros, pero de todos modos parece haber algo en común que no terminamos de entender.

## Incendios forestales

LOS CLUSTERS QUE VIMOS en el modelo de percolación son estáticos. Pero objetos similares pueden surgir dinámicamente, como resultado “natural” en sistemas que aparentemente no guardan relación con el fenómeno de percolación. Es el caso, por ejemplo, del modelo de incendios forestales que vamos a estudiar a continuación.

Se trata de un autómata celular estocástico. Sea una red 2D, tal que cada celda puede estar en uno de tres estados:

- vacío: sin árbol.
- árbol: con árbol, inactivo.
- fuego: activo, con árbol ardiendo.

Las reglas del autómata (las transiciones entre los estados) son las siguientes:

1. vacío → árbol, con probabilidad  $p_g$ .
2. árbol → fuego, con probabilidad  $p_f$  (imaginen la caída de un rayo).
3. árbol → fuego, si uno o más vecinos están ardiendo en el paso anterior.

4. fuego → vacío al paso siguiente (extinción por consunción del combustible).

Las reglas 1 y 2 son estocásticas, mientras que las 3 y 4 son deterministas. Podemos imaginar que el fuego avanzará en un frente de incendio, dejando sitios vacíos detrás. Pero los detalles de cómo ocurre esto son interesantes y sorprendentes.

También es de notar que otros sistemas, aparentemente muy distintos, se pueden modelar de la misma manera. Por ejemplo, un sistema epidémico con susceptibles, infectados y recuperados, con pérdida de inmunidad de los recuperados (un modelo SIRS), es idéntico si asociamos árbol con S, fuego con I, y vacío con R. Hay una implementación interactiva en: [Critical HexSIRSize](#). Algo similar se puede hacer con otros fenómenos de propagación, como un rumor, por ejemplo.

La condición inicial del sistema es el estado vacío. En los bordes podemos poner sitios fantasma (vacío constante, para acotar el espacio) o condiciones periódicas. La actualización del estado es sincrónica, y el vecindario que consideramos es el de 9 sitios (vecindario de Moore). Notar que, a diferencia de la pila de arena, pueden iniciarse nuevos incendios por rayos mientras hay otros incendios en desarrollo (no detenemos la dinámica, como hicimos esperando que finalizaran las avalanchas en el modelo de pila de arena).

La Fig. 9.1 muestra snapshots, cada 10 pasos, de una corrida representativa:  $100 \times 100$ ,  $p_g = 10^{-3}$ ,  $p_f = 10^{-5}$ . Vemos el desarrollo de un gran incendio, que tiene un frente inicialmente circular, pero luego se hace intrincado, determinado por la estructura del bosque en el cual se propaga. En el sistema existen distintas escalas de tiempo. Escala media: crecimiento de nuevos árboles (10 árboles por iteración en todo el sistema). Larga: intervalo entre rayos,  $(pN^2 p_f)^{-1}$ , donde  $p$  es la ocupación de la red (que no es un parámetro). En este caso,  $p \approx 0.2 \Rightarrow 1$  rayo cada 50 pasos. Pero un gran incendio puede reducir  $p$  drásticamente, como vemos en el ejemplo.

El cluster de todos los árboles quemados en el incendio. Tiene huecos, es similar al cluster de percolación, y es un fractal.

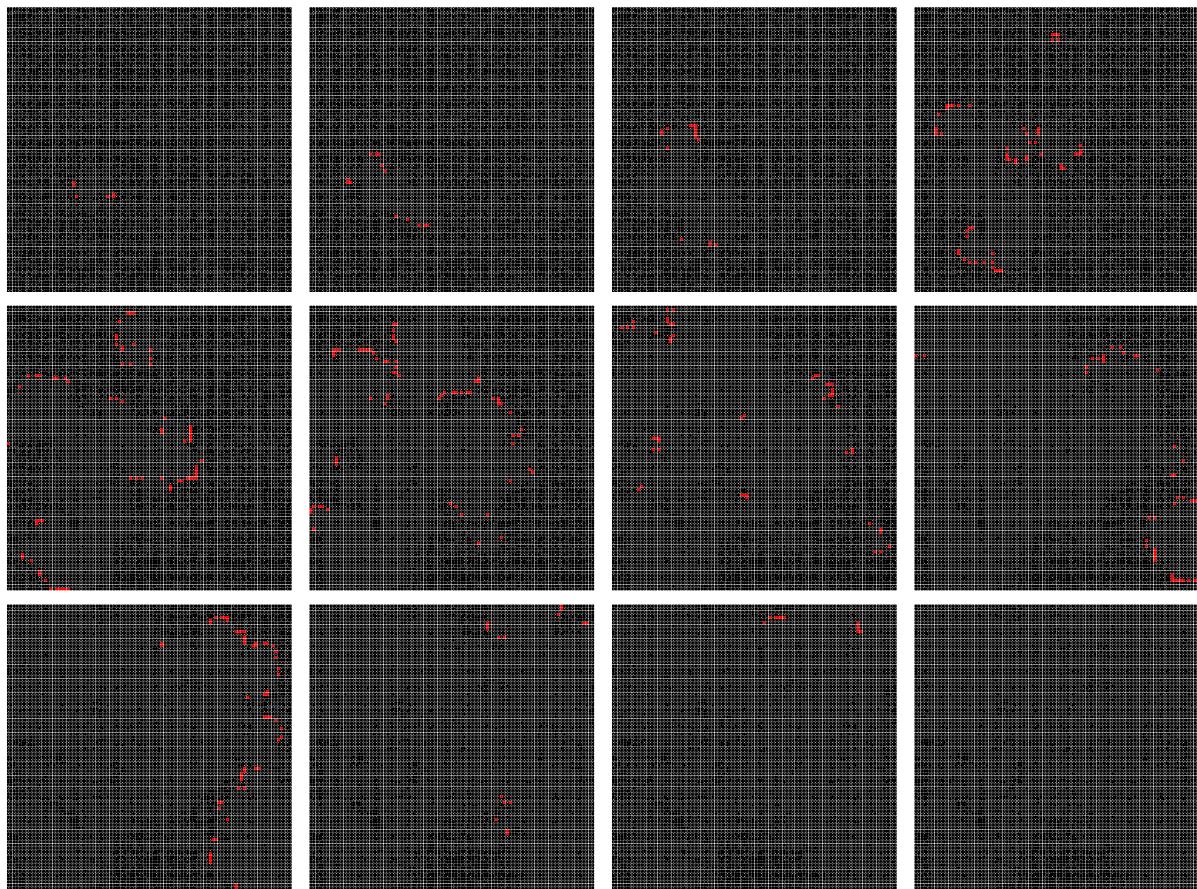


Figura 9.1: Desarrollo de un gran incendio, mostrando el estado del sistema cada 10 pasos de tiempo.

Figura de la secuencia temporal  $\text{fuego}(n)$ . Incendios de distintos tamaños y diversidad de actividad. Incendios grandes duran más y son más intensos (altura en el gráfico).

Distintas combinaciones de  $p_g$  y  $p_f$  dan variedad de comportamientos, como vemos en las Figura 9.2 y 9.3, para un sistema de  $100 \times 100$ . La Fig. 9.2 muestra un caso con  $p_f \approx p_g \approx 10^{-4}$ , donde la tasa de rayos es similar a la de crecimiento. Hay muchos incendios chicos todo el tiempo, y la cantidad de árboles permanece más o menos constante. La ocupación es pequeña ( $p \sim 1500/(100 \times 100) = 0.15$ ), y hay pocos árboles vecinos, lo cual limita la magnitud de los incendios.

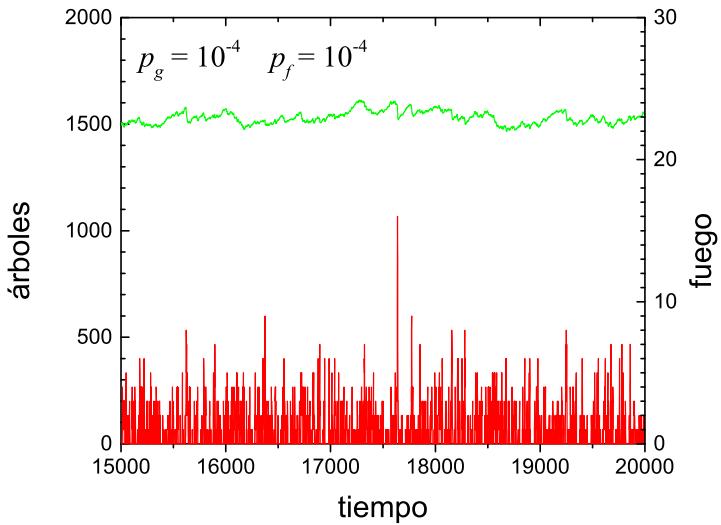


Figura 9.2: Evolución de un sistema de  $100 \times 100$ , mostrando árboles vivos y árboles incendiados en función del tiempo, para  $p_g = p_f = 10^{-4}$ .

En cambio, si la tasa de crecimiento es mayor que la de rayos,  $p_g = 10^{-2} \gg p_f$  (Fig. 9.3), los árboles crecen rápido, la densidad es el doble ( $\sim 0.3$ ), hay más vecinos, los incendios se propagan más fácil y no paran porque los nuevos árboles siguen apareciendo. Así que los incendios son más grandes.

La Figura 9.4 muestra la estructura que adoptan los frentes de incendio en un sistema grande, donde se apagaron los rayos después de 50 pasos. Los frentes están por todos lados, creciendo, achicándose, fragmentándose, fusionándose e interactuando. Muchos parecen espirales, del tipo de las que se ven en los sistemas químicos excitables.

Ecológicamente, ninguna de estas situaciones es realista. La situación ecológicamente más realista tiene  $p_g$  menor, por ejemplo  $10^{-3}$ , y rayos muy raros, por ejemplo  $10^{-6}$ . Como los rayos son raros, el sistema alcanza a llenarse entre rayos. Pero cuando cae uno, es devastador, porque la ocupación es alta. Se produce así un ciclo de carga/descarga casi periódico, de destrucción total y crecimiento desde cero. Ejemplo:  $100 \times 100$ , con  $p \approx 0.5$  cuando impacta un rayo.

Con  $p_f$  tan pequeña, la manera de romper el ciclo es reducir todavía

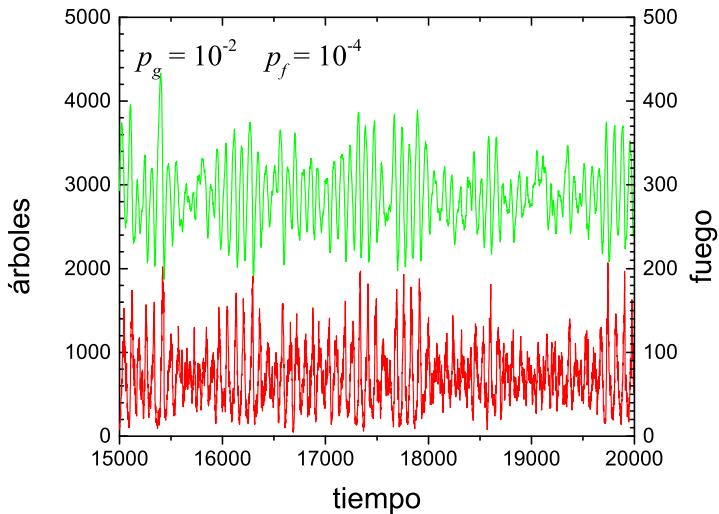


Figura 9.3: Evolución de un sistema de  $100 \times 100$ , mostrando árboles vivos y árboles incendiados en función del tiempo, para  $p_g = 10^{-2}$  y  $p_f = 10^{-4}$ .

más  $p_g$ , por ejemplo a  $10^{-4}$ . Ahora el crecimiento es más lento y el sistema no se llena tanto. Los incendios son más chicos. La serie temporal de sus tamaños ahora tiene la pinta de las avalanchas de arena. Y como los incendios mayormente no se superponen, podemos caracterizarlos de manera parecida, aunque la dinámica acá no espera que se extinga uno para empezar otro.

Magnitudes medidas:

- $E$ : número total de árboles quemados
- $P$ : pico de árboles quemados en cada incendio
- $T$ : duración del incendio

La distribución  $f(E)$  es bien distinta para los dos casos (Figura 9.8). El caso más periódico tiene un pico de aspecto gaussiano bien definido (panel superior), y el autosimilar, por supuesto, una ley de potencia (panel inferior):

$$f(E) = f_0 E^{-\alpha}, \quad \alpha = 1.07$$

Cálculo de  $\langle E \rangle$ . Mostrar.

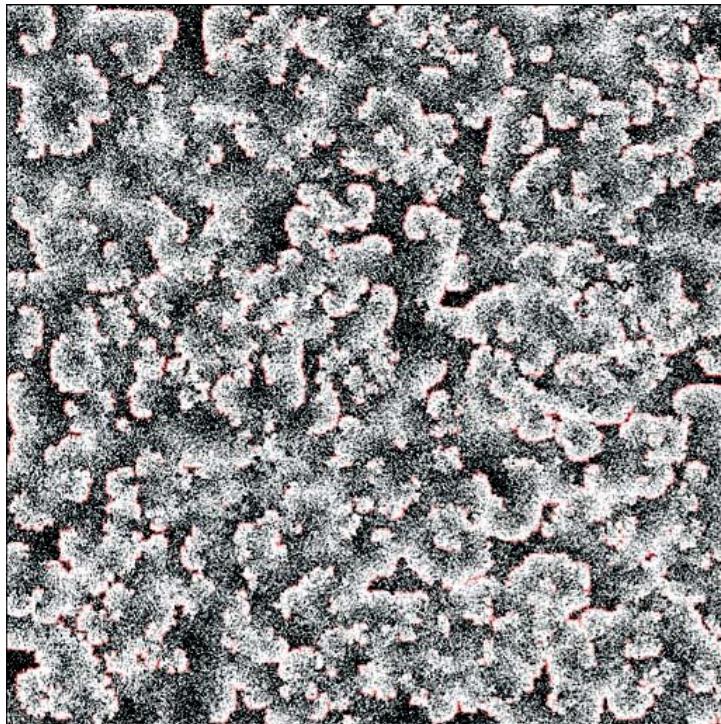


Figura 9.4: Estado de un sistema en el que se apagan los rayos después de las primeras 50 iteraciones, con  $p_g = 10^{-2}$  y  $p_f = 10^{-5}$ . Los árboles vuelven a crecer tan rápido que el fuego persiste, formando incendios por todos lados, que interactúan unos con otros.

Con esta  $f(E)$  podemos calcular el valor medio de la magnitud de los incendios:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{f_0}{2 - \alpha} (E_{max}^{2-\alpha} - E_{min}^{2-\alpha}) \\ &\approx \frac{f_0}{2 - \alpha} E_{max}^{2-\alpha}, \quad (\alpha < 2),\end{aligned}\tag{9.1}$$

ya que  $\alpha \approx 1.07 \Rightarrow 2 - \alpha \approx 1 > 0 \Rightarrow E_{max}^{2-\alpha} > E_{min}^{2-\alpha}$ , y además  $E_{max} \approx 10^4 \gg E_{min} \approx 1$ . (Si  $\alpha > 2$ , sería al revés.) Así que los incendios grandes son los que dominan la evolución del ecosistema.

Con la condición  $p_g \ll 1$ , cada sitio contribuye con sólo un árbol quemado al incendio. Es distinto que en la pila de arena, donde un mismo sitio podía activarse repetidamente durante una misma avalancha. Aquí, si el incendio destruye  $E$  árboles, es porque un rayo impactó en un cluster

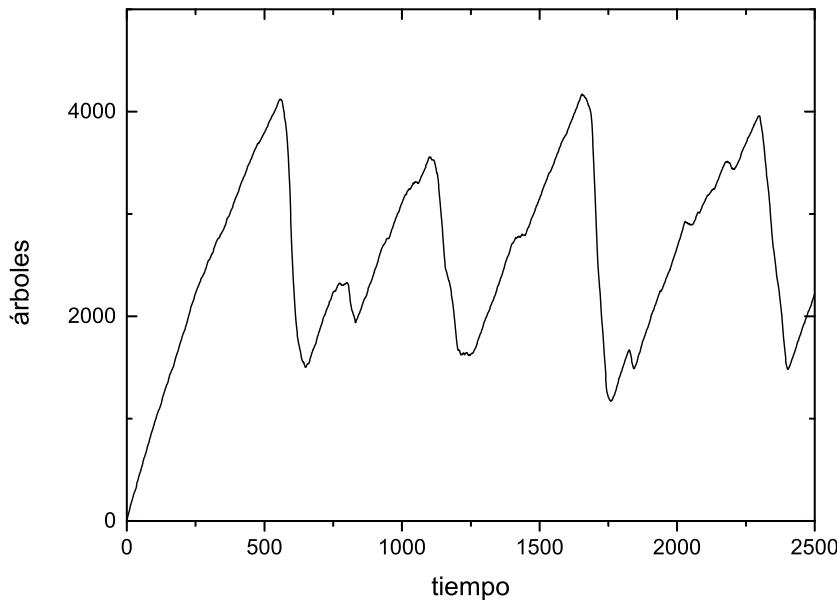


Figura 9.5: Árboles vivos en función del tiempo.

de  $E$  árboles vivos conectados. La probabilidad de tal impacto también es proporcional a  $E$ , porque el rayo puede caer en cualquiera de ellos. Así que, si la distribución de incendios es  $f(E) \sim E^{-\alpha}$ , la distribución de tamaños de clusters debe ser:

$$p(E) \approx E^{-(\alpha+1)} \approx E^{-2.07}.$$

En el modelo de percolación, la distribución algebraica del tamaño de clusters correspondía al caso del sistema crítico,  $p = p_c$ . ¿Acaso el modelo de incendios, que adquiere esta distribución sin ajustar ningún parámetro, es SOC? En realidad es más complicado. En el modelo de percolación, la probabilidad de ocupación es homogénea en la grilla. En el modelo de incendios la probabilidad de que haya un árbol no lo es.

En la Figura 9.9 se ve que hay unos dominios grandes, dentro de los cuales la densidad es aproximadamente constante. Esos dominios son el resultado de incendios anteriores. Cada uno de ellos es como un sistema de percolación independiente, con una densidad de árboles que va aumentando lentamente desde el último incendio, que la redujo a  $p \approx 0$ .

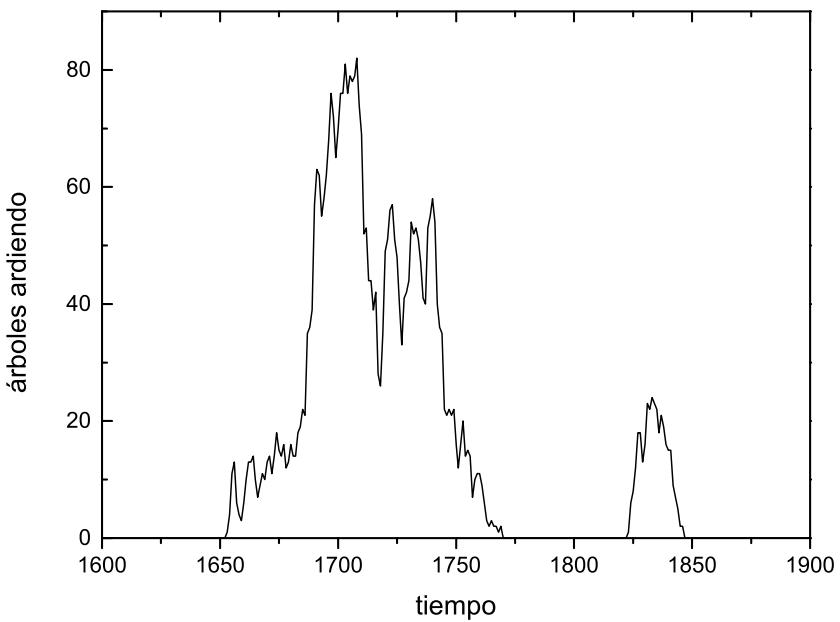


Figura 9.6: Cantidad de árboles ardiendo en función del tiempo.

Eventualmente alcanzará  $p \approx 0.4072$  (que es el valor crítico para un sistema con 8 vecinos). A partir de allí, el dominio será muy susceptible a incendiarse por completo cuando caiga un rayo.

Los dominios mismos, su tamaño y su forma, evolucionan muy lentamente, ya sea cuando una parte se incendia antes de “percolar” o cuando dos dominios vecinos, ya percolados, se fusionan. Estas dos cosas ocurren cuando un rayo impacta “demasiado pronto” o “demasiado tarde”. Así que la pdf de tamaño de incendio depende del pasado, al menos  $p_g^{-1}$  pasos, que es un tiempo muy largo. Esto es un indicio de que existen, en el sistema, correlaciones temporales largas.

Esto puede estudiarse cuantitativamente y resulta que, en el régimen  $p_f \ll p_g \ll 1$ , tanto el tamaño como la duración de los incendios tienen distribuciones en forma de ley de potencia. Los exponentes son siempre los mismos, y para sistemas grandes son independientes del tamaño (satisfacen finite size scaling). Es decir, los sistemas son críticos sin ajustar un parámetro externo, o sea SOC.

En términos de las condiciones que mencionamos en el contexto de la

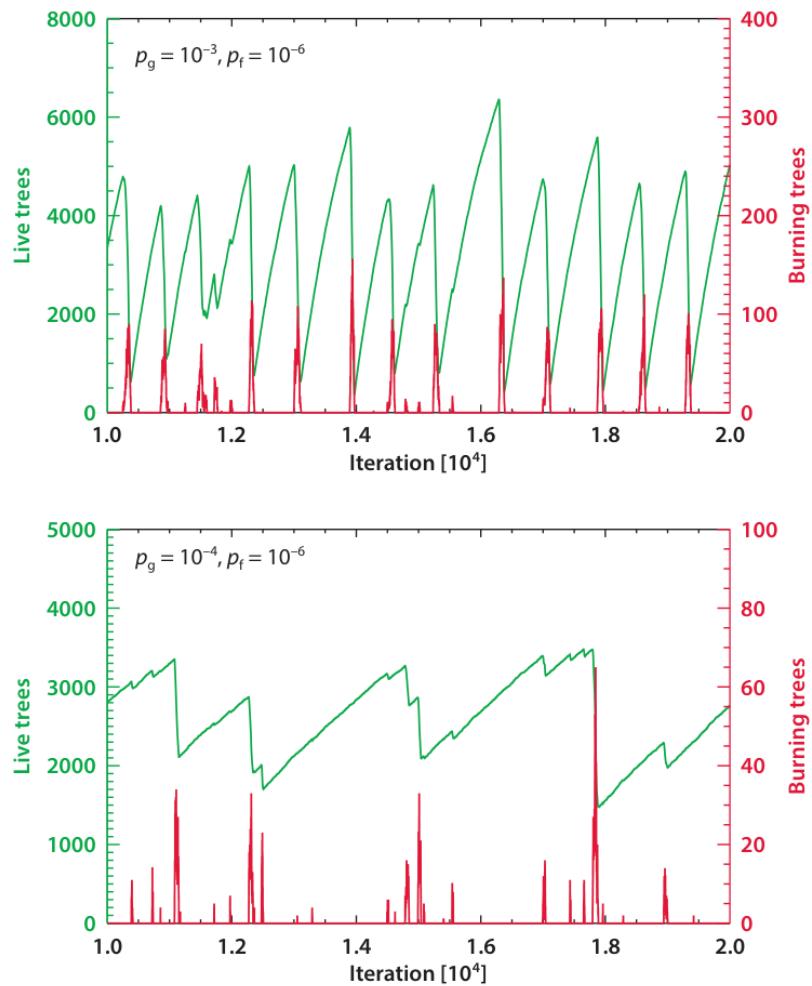


Figura 9.7: Árboles vivos e incendios. REHACER

pila de arena, tenemos:

- Forzado lento: crecimiento de árboles.
- Inestabilidad local: los árboles son inflamables.
- Redistribución local: propagación del fuego.
- Abierto: nuevos árboles.
- Disipativo: árboles quemados.

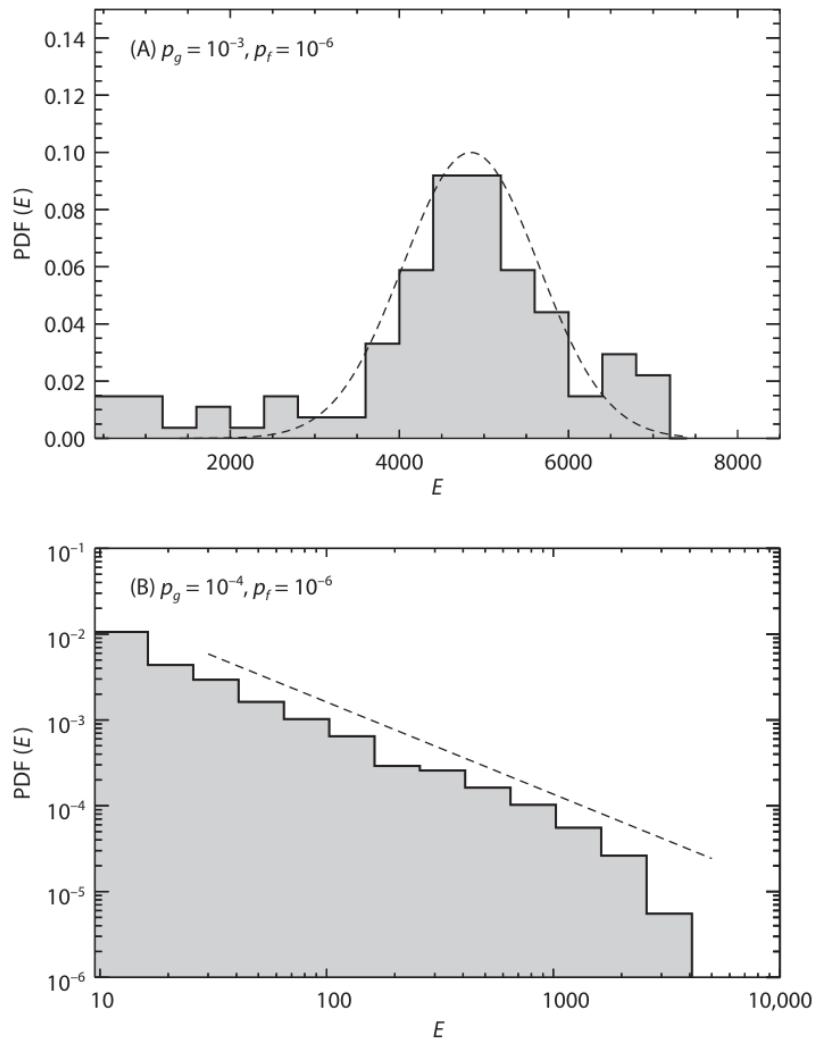


Figura 9.8: Distribución de probabilidad de la magnitud de los incendios, para dos situaciones que difieren en la probabilidad de nuevos árboles  $p_g = 10^{-3}$  en el panel superior, donde la distribución es acampanada, mientras que  $p_g = 10^{-4}$  en el inferior, donde es aproximadamente una ley de potencia con exponente  $-1.07$ .

## 9.1 Manejo de incendios

Los incendios forestales son severos y muchas veces trágicos, difíciles de manejar y combatir.

En principio, parece sensato apagarlos ni bien empiezan. Esto se puede

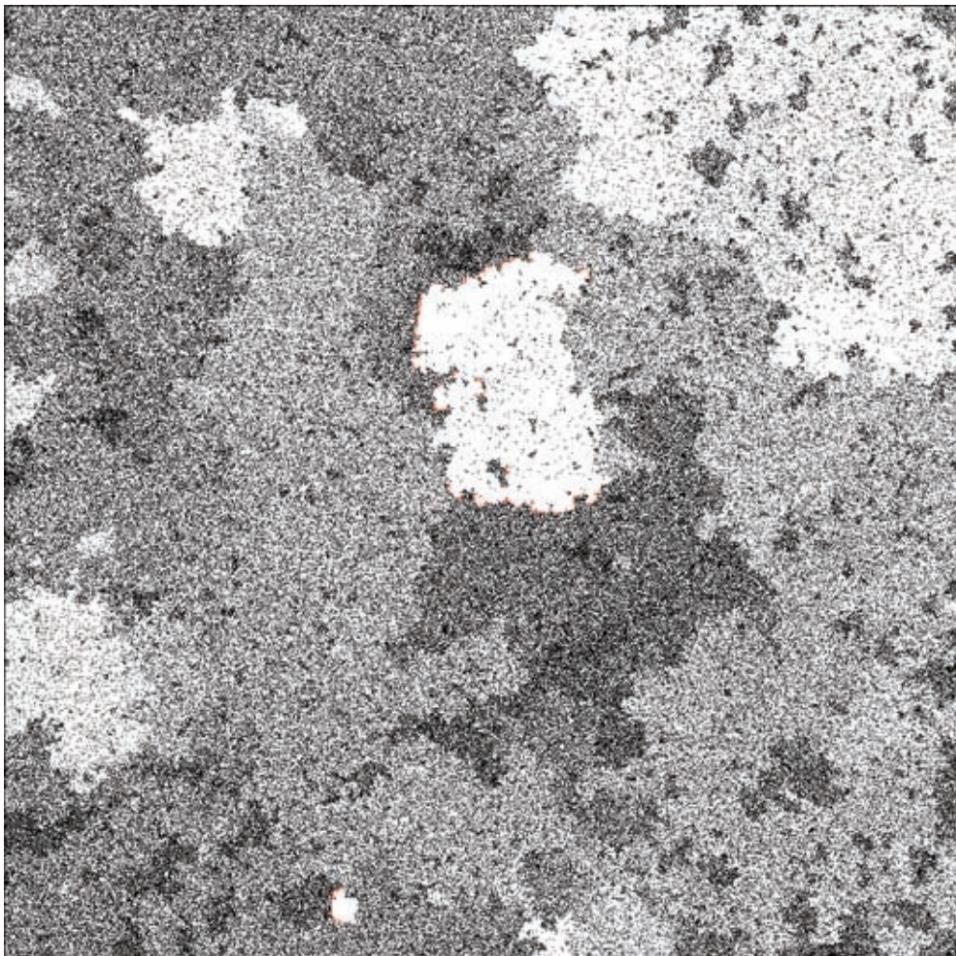


Figura 9.9: Estado del sistema en una red grande, de  $1024 \times 1024$ , con  $p_g = 10^{-4}$  y  $p_f = 10^{-7}$ . Los tonos de gris son representativos de la densidad de árboles vivos. Se ve una densidad aproximadamente constante dentro de dominios grandes, irregulares pero bien definidos, que son el resultado de incendios anteriores. Las regiones más claras son las que tuvieron incendios más recientes, y muestran islas más oscuras, que son árboles que sobrevivieron.

simular fácilmente en el modelo:

$$p_e = \begin{cases} 0.2/n_b(t) & \text{si } n_b \leq 10, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \quad (9.2)$$

donde  $p_e$  es una probabilidad de extinción de todos los árboles que están quemándose,  $n_b$ , a tiempo  $t$ . El valor 10 es un umbral, impuesto como un

parámetro. Si el incendio ya tiene más de 10 sitios ardiendo, es inmanejable y no se lo puede apagar. ¿Qué produce esta dinámica adicional?

Todos los incendios empiezan siendo pequeños, así que claramente la reducción del número de estos producirá una reducción de la cantidad de incendios. De todos modos, como  $f(E)$  es una potencia, la mayoría de los incendios serían pequeños por sí mismos. Extinguirlos sólo deja combustible para cuando llegue uno grande. Y, cuando llegue, la densidad de árboles será más grande que si hubieran ardido los incendios menores. Así que la cantidad de incendios tal vez disminuya, pero su tamaño aumentará.

## 9.2 Modelos realistas de incendios

Por supuesto, es posible agregar muchos de los detalle que afectan la propagación de los incendios forestales en el mundo real, tales como el viento, las pendientes del terreno, la densidad local de árboles, la heterogeneidad de la vegetación, etc. El modelo de Laneri,<sup>1</sup> por ejemplo, implementa una aproximación al problema en forma de ecuaciones de reacción-difusión-convección, que finalmente resuelve de manera numérica en un simulador.

---

<sup>1</sup>K Laneri, S Waidelich, V Zimmerman and M Denham, *First steps towards a dynamical model for forest fire behaviour in Argentinian landscapes*, J. Comp. Sci. & Technol. 20:80–89 (2020).

## Osciladores no lineales

EN MUCHÍSIMOS SISTEMAS NATURALES, y en particular en los sistemas biológicos, parece existir un principio de auto-organización consistente en la repetición rítmica de algún proceso. En muchas ocasiones estos son procesos químicos, de manera que los fenómenos rítmicos observados corresponden a reacciones químicas acopladas, cuyas interacciones producen soluciones oscilatorias en las concentraciones. A veces la interacción misma forma un ciclo (como es el caso del ciclo de Krebs); otras veces es una forma elemental de un ciclo químico (por ejemplo, la autocatálisis), la responsable de las oscilaciones. En diversos tejidos, la actividad química en las células puede ir acompañada de una actividad eléctrica, como es el caso de las neuronas y los miocitos. Esta actividad eléctrica, de polarización de la membrana celular, también resulta cíclica.

En todos estos casos, el acoplamiento de numerosos subsistemas cílicos da lugar a fenómenos colectivos macroscópicos, caracterizados por el “entrainment” y la sincronización. El resultado es generalmente un fenómeno periódico macroscópico, muchas veces complejo, tal como el pulsar del corazón, el ciclo menstrual, los ritmos circadianos de sueño, etc.

Ejemplos de estos comportamientos son:

- El ciclo de Krebs y otros ciclos intracelulares (glicólisis...).
- El latir del corazón.

- Sistemas neuronales y comportamientos cílicos asociados (caminar, nadar, Hodkin-Huxley, ...).
- Ritmos circadianos (asociados a periodicidades externas al organismo).
- Ritmos menstruales (hormonas, tejidos).
- El ciclo celular mismo, involucrando la reproducción celular.
- Los fenómenos colectivos observados en microorganismos como *Dictyostelium discoideum*, una colonia de amebas cuyos movimientos resultan organizados por ondas de cyclic-AMP.
- Las oscilaciones observadas en sistemas ecológicos (modelos de Lotka, Lotka-Volterra).
- Ciclos epidémicos, observados en la incidencia de muchas enfermedades infecciosas.

Muchas veces, el comportamiento periódico ocurre no en el tiempo sino en el espacio, dando lugar a la formación de estructuras espaciales periódicas más o menos complejas. Un campo donde es fácil imaginar estos fenómenos es en el desarrollo embrionario, en el que se forman estructuras que dan lugar a los diversos órganos a partir de una masa de células indiferenciadas, mediante mecanismos como el de Turing que ya hemos analizado.

En este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades de los osciladores no lineales.

## 10.1 Osciladores de relajación

A diferencia de los osciladores lineales, muchos osciladores no lineales se caracterizan por tener, en su dinámica, más de una escala de tiempo. Imaginemos que hay dos, una de variación rápida y otra de variación lenta, que se suceden en cada período del ciclo. Vamos a estudiar un fenómeno

de este tipo en un oscilador prototípico: el oscilador de van der Pol. Estos osciladores de relajación aparecen en una gran variedad de contextos, tales como la oscilación *stick-slip* de la cuerda del violín, el disparo de las neuronas, y la división celular.

Comenzamos entonces con el oscilador de van der Pol *fuertemente no lineal*, correspondiente al régimen  $\mu \gg 1$  en la ecuación:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (10.1)$$

Vamos a convertirlo en un sistema de orden 1 (como cuando hacemos  $y = \dot{x}$ , pero no lineal). En primer lugar, observemos que:

$$\ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} + \mu \left[ \frac{x^3}{3} - x \right] \right).$$

Definimos:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x,$$

y la nueva variable:

$$\omega = \dot{x} + \mu F(x), \quad (10.2)$$

con lo que van der Pol se escribe:

$$\dot{\omega} = \ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = -x. \quad (10.3)$$

Reescribimos ésta como:

$$\dot{x} = \omega - \mu F(x), \quad \text{de (10.2)}, \quad (10.4a)$$

$$\dot{\omega} = -x, \quad \text{de (10.3)}. \quad (10.4b)$$

Ahora, hacemos un último cambio de variables para poner de manifiesto el rol que juega  $\mu$ :

$$y = \frac{\omega}{\mu},$$

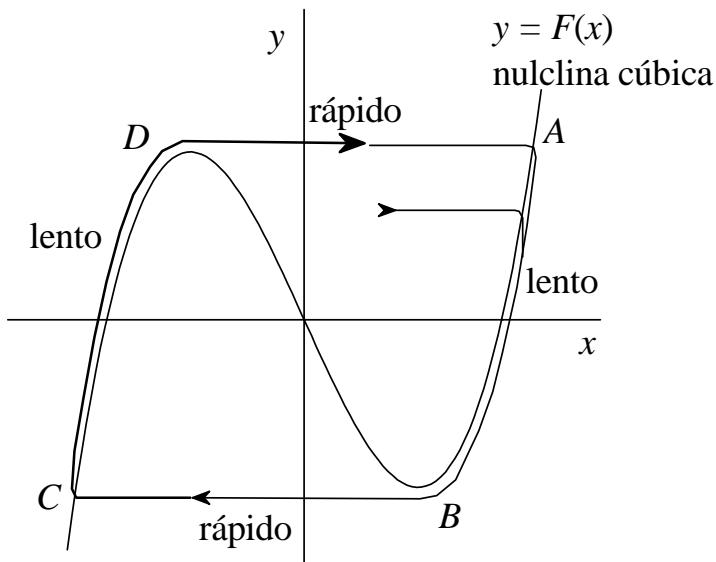
con lo cual el sistema queda:

$$\dot{x} = \mu[y - F(x)], \quad (10.5a)$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{\mu}x, \quad (10.5b)$$

donde vemos que las dos variables obedecen a ecuaciones que tienen órdenes temporales muy distintos, ya que  $\mu \gg 1$ .

Las trayectorias en el plano de fases  $(x, y)$  son:



Justificación: pensemos en una condición inicial no muy cerca de la nulclina cúbica,  $y - F(x) \sim O(1)$ .

$$\left. \begin{array}{l} (10.5a) \Rightarrow |\dot{x}| \sim O(\mu) \gg 1 \\ (10.5b) \Rightarrow |\dot{y}| \sim O(1/\mu) \ll 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{trayectoria casi horizontal,} \\ \text{para un lado o para el otro,} \\ \Rightarrow \text{hacia la nulclina} \end{array}$$

$\Rightarrow$  se acerca hasta que  $y - F(x) \sim O(1/\mu^2) \Rightarrow |\dot{x}| \sim |\dot{y}| \sim O(1/\mu) \Rightarrow$  cruza la nulclina (verticalmente) y se mueve lentamente, a velocidad  $O(1/\mu)$  hasta alcanzar la “rodilla” y “saltar” al otro lado. Los saltos requieren un tiempo  $\Delta t \sim O(1/\mu)$  y las partes lentas un  $\Delta t \sim O(\mu)$ , que se ven claramente en la forma de las ondas  $x(t)$ :

El período  $T$  es esencialmente el tiempo requerido para recorrer las ramas lentas, y como son simétricas:

$$T \approx 2 \int_{t_A}^{t_B} dt.$$

Busquemos una expresión para  $dt$ , para integrar en el espacio. En las ramas lentas:  $y \approx F(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} \approx F'(x) \frac{dx}{dt} = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt}.$$

Y como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\frac{x}{\mu} \quad (\text{por 10.5b}) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\mu(x^2 - 1)} \\ \Rightarrow dt &= \frac{-\mu(x^2 - 1)}{x} dx \quad \text{sobre una rama lenta.} \end{aligned}$$

Es fácil verificar que  $x_A = 2$  y  $x_B = 1$ , y por lo tanto

$$T \approx 2 \int_2^1 \frac{-\mu(x^2 - 1)}{x} dx = 2\mu \left( \frac{x^2}{2} - \ln x \right) \Big|_1^2 = \mu(3 - 2 \ln 2) \approx 1.6\mu$$

que es  $O(\mu)$ , como esperábamos.

## 10.2 Osciladores débilmente no lineales

Vamos a presentar una técnica para el estudio de osciladores llamados *débilmente no lineales*, cuya dinámica está descripta por:

$$\ddot{x} + x + \epsilon h(x, \dot{x}) = 0. \quad (10.6)$$

Vemos que los dos primeros términos constituyen un oscilador lineal. La parte no lineal está dada por una función  $h$  arbitraria suave. Este término no lineal está multiplicado por un parámetro de intensidad  $0 \leq \epsilon \ll 1$ , a diferencia del oscilador de relajación visto anteriormente.

Son ejemplos de esta clase de osciladores el oscilador de van der Pol ( $\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$ ) y el oscilador de Duffing ( $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$ ).

El análisis que faremos va a explotar el hecho de que el oscilador está “cerca” de un oscilador armónico simple. Veremos que, al igual que en el oscilador de relajación, existen dos escalas de tiempo, pero actúan a la vez y no en secuencia. Para ver las dificultades de este tipo de problema

vamos a intentar primero una técnica que parece sensata, pero que fracasa estrepitosamente.

Ya que  $\epsilon$  es un parámetro pequeño, busquemos soluciones de (10.6) en forma de una serie de potencias de  $\epsilon$ :

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$$

con la esperanza de que el comportamiento relevante sea capturado por unos pocos (¡dos!) términos. Esta técnica, de *perturbaciones regulares*, a veces funciona, y otras veces no...

## Fracaso de una solución perturbativa

Para practicar y fijar ideas, analicemos en primer lugar un ejemplo elemental. Sea el siguiente oscilador **lineal**, débilmente amortiguado:

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = 0, \quad (10.7)$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Siendo un oscilador lineal, conocemos su solución exacta:

$$x(t, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin(\sqrt{1 - \epsilon^2} t). \quad (10.9)$$

Busquemos una solución perturbativa. Usamos  $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 \dots$  en (10.7):

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 + \epsilon x_1 + \dots) + 2\epsilon \frac{d}{dt}(x_0 + \epsilon x_1 + \dots) + (x_0 + \epsilon x_1 + \dots) = 0.$$

Agrupamos potencias de  $\epsilon$ :

$$(\ddot{x}_0 + x_0) + \epsilon(\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1) + o(\epsilon^2) = 0. \quad (10.10)$$

La expresión (10.10) debe valer  $\forall \epsilon$ , si es que el desarrollo en potencias de  $\epsilon$  es válido. Entonces anulo los coeficientes de cada orden por separado:

$$\begin{aligned} o(1) : \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 \quad (\text{oscilador armónico}) \\ o(\epsilon) : \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1 &= 0 \\ o(\epsilon^2) : \dots &\text{ ignoramos} \end{aligned}$$

Vemos que el primer orden nos dice que el primer orden de la solución es la solución de un oscilador armónico. Usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &= x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \dots \Rightarrow x_0(0) = 0 \\ &x_1(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 &= \dot{x}_0(0) + \epsilon \dot{x}_1(0) + \dots \Rightarrow \dot{x}_0(0) = 1 \\ &\dot{x}_1(0) = 0 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos orden por orden:

$o(1)$ : es un oscilador armónico simple:

$$x_0(t) = \sin t. \quad (10.12)$$

$o(\epsilon)$ : es un oscilador armónico forzado con una fuerza sinusoidal que sale de (10.12):

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\dot{x}_0 = -2 \cos t.$$

La presencia de una fuerza armónica nos dice que debemos esperar una resonancia:

$$\Rightarrow x_1(t) = -t \sin t,$$

¡que nos da una amplitud que crece ilimitadamente!

En definitiva:

$$x(t, \epsilon) = \sin t - \epsilon t \sin t + o(\epsilon^2). \quad (10.13)$$

De hecho, si uno desarrolla la solución (10.9), obtiene este desarrollo en los dos primeros términos. Inclusive, el desarrollo es **convergente**. Es decir, para un dado  $t$ , (10.13) es una buena aproximación para un  $\epsilon$  suficientemente chico ( $\epsilon t \ll 1$  de modo que  $o(\epsilon^2 t^2)$  sea despreciable). ¡El

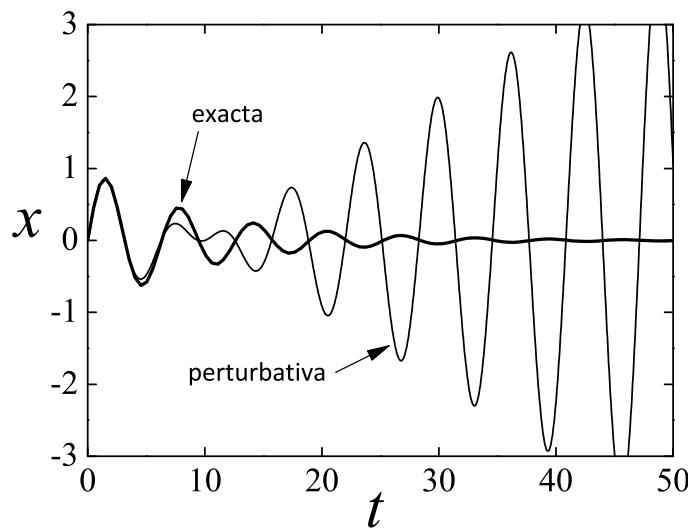


Figura 10.1: Solución exacta del oscilador lineal amortiguado (línea gruesa) y solución perturbativa (línea delgada), con  $\epsilon = 0.1$ .

problema es que a uno le interesa, en cambio,  $\epsilon$  fijo, no  $t$  fijo! En tal caso, la aproximación funcionaría bien para todo  $t \ll o(1/\epsilon)$ . Obsérvese la Figura 10.1.

Identifiquemos los problemas asociados con este fracaso.

En primer lugar, la solución (10.9) tiene **dos escalas de tiempo**: una rápida  $t \sim o(1)$  en la sinusode, y una lenta  $t \sim o(1/\epsilon)$  en la exponencial decreciente que modula la amplitud. La solución perturbativa representa incorrectamente la escala lenta. De hecho, sugiere que la amplitud crece en una escala  $t \sim o(1)$ . La causa de esto es el desarrollo  $e^{-\epsilon t} = 1 - \epsilon t + o(\epsilon^2 t^2)$ , que a orden  $\epsilon$  parece **crecer** con el tiempo (bueno: en módulo; lo que digo es que no tiende a cero). Matemáticamente no hay sin embargo ningún problema: todo se corrige agregando todos los términos del desarrollo, ya que es convergente. Desde un punto de vista práctico, sin embargo, esto no nos sirve de nada, ya que lo que buscamos es una solución que funcione bien con unos pocos términos.

En segundo lugar, la frecuencia en (10.9) es  $\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2} \approx 1 - 1/2\epsilon^2$ , que difiere de  $\omega = 1$  de (10.13). Vemos que el error se acumulará de manera significativa en una escala de tiempo adicional,  $\sim o(1/\epsilon^2)$ . (Observar en la Figura 10.1 que alrededor de  $t \sim 20$  los máximos y mínimos de ambas

soluciones están en oposición de fase debido a esto.)

## Dos escalas temporales

Vamos a intentar otra aproximación al problema, incorporando las dos escalas de tiempo en el análisis (en general, es posible hacer esto con **múltiples** escalas de tiempo).

Sean:

$$\begin{aligned}\tau &= t, && \text{escala rápida, } o(1) \\ T &= \epsilon t, && \text{escala lenta, } o(\epsilon)\end{aligned}$$

Y las consideraremos como si fueran **variables independientes**. Hay gente a la que le repugna hacer esto, pero en fin, funciona, y no es éste el lugar para discutirlo.

Desarrollamos la solución en potencias de  $\epsilon$ :

$$x(t, \epsilon) = x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + o(\epsilon^2).$$

Calculamos las derivadas con la Regla de la Cadena:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial x}{\partial T}$$

ya que  $T = \epsilon\tau$ . Vemos que la variación de  $x$  es  $o(1)$  en la escala  $\tau$  y  $o(\epsilon)$  en la escala  $T$ .

Con esto tenemos, en la solución perturbativa:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \partial_\tau(x_0 + \epsilon x_1) + \epsilon \partial_T(x_0 + \epsilon x_1) \\ &= \partial_\tau x_0 + \epsilon(\partial_T x_0 + \partial_\tau x_1) + o(\epsilon^2),\end{aligned}$$

$$\ddot{x} = \partial_{\tau\tau} x_0 + \epsilon(\partial_{\tau\tau} x_1 + 2\partial_{T\tau} x_0) + o(\epsilon^2).$$

Apliquemos esta solución perturbativa, de manera ilustrativa, en el oscilador amortiguado  $\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$  que analizamos antes mediante perturbaciones regulares. Obtenemos:

$$\partial_{\tau\tau} x_0 + \epsilon(\partial_{\tau\tau} x_1 + 2\partial_{T\tau} x_0) + 2\epsilon\partial_\tau x_0 + x_0 + \epsilon x_1 + o(\epsilon^2) = 0.$$

Juntando los órdenes de  $\epsilon$ :

$$o(1) : \partial_{\tau\tau}x_0 + x_0 = 0, \text{ oscilador armónico simple en la escala rápida} \quad (10.14a)$$

$$o(\epsilon) : \partial_{\tau\tau}x_1 + 2\partial_{T\tau}x_0 + 2\partial_\tau x_0 + x_1 = 0, \text{ conteniendo las dos escalas} \quad (10.14b)$$

De (10.14a) obtenemos de inmediato:

$$x_0 = A \sin \tau + B \cos \tau, \quad (10.15)$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones (“lentas”) de  $T$  a determinar.

Aparte:

$$\partial_\tau(A \sin \tau + B \cos \tau) = +A \cos \tau - B \sin \tau$$

$$\partial_{T\tau}x_0 = +A' \cos \tau - B' \sin \tau$$

Usando (10.15) en (10.14b):

$$\begin{aligned} \partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 &= -2(\partial_{T\tau}x_0 + \partial_\tau x_0) \\ &= -2[A' \cos \tau - B' \sin \tau + A \cos \tau - B \sin \tau] \\ &= -2(A' + A) \cos \tau + 2(B' + B) \sin \tau \end{aligned} \quad (10.16)$$

Nuevamente vemos, en (10.16), una ecuación de un oscilador armónico con una fuerza resonante, que dará lugar a términos seculares de tipo  $\tau \sin \tau$ , **¡que es lo que queremos evitar!** Pero ahora tenemos  $A$  y  $B$  indeterminados, y ¡los usamos para anular los términos resonantes! Es decir, hacemos:

$$\begin{aligned} A' + A &= 0 \Rightarrow A(T) = A(0) e^{-T}, \\ B' + B &= 0 \Rightarrow B(T) = B(0) e^{-T}, \end{aligned}$$

donde  $A(0)$  y  $B(0)$  las obtenemos de las condiciones iniciales. Vemos que la variación de  $A$  y de  $B$  es una exponencial en la “escala lenta”.

Veamos entonces las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0 = x_0(0, 0) + \epsilon x_1(0, 0) + o(\epsilon^2)$$

$$\Rightarrow x_0(0, 0) = 0 \\ x_1(0, 0) = 0$$

Además:

$$\dot{x}(0) = 1 = \partial_\tau x_0(0, 0) + \epsilon(\partial_T x_0(0, 0) + \partial_\tau x_1(0, 0)) + o(\epsilon^2)$$

$$\Rightarrow \partial_\tau x_0(0, 0) = 1 \\ \partial_T x_0(0, 0) + \partial_\tau x_1(0, 0) = 0$$

$$\text{De: } \left. \begin{array}{l} x_0 = A \sin \tau + B \cos \tau \\ x_0(0, 0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B(0) = 0 \Rightarrow B(T) = 0$$

$$\text{De: } \left. \begin{array}{l} x_0 = A \sin \tau \\ \partial_\tau x_0(0, 0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0) = 1 \Rightarrow A(T) = e^{-T}$$

Por lo tanto:

$$x_0(\tau, T) = e^{-T} \sin \tau.$$

Y finalmente:  $x = e^{-T} \sin \tau + o(\epsilon) \Rightarrow$

$$x(t) = e^{-\epsilon t} \sin t + o(\epsilon). \quad (10.17)$$

Si queremos ir al orden siguiente hay que resolver  $x_1$ , o introducir una escala de tiempo super-lenta  $\mathcal{T} = \epsilon^2 t$ , que nos dará el corrimiento en frecuencia, que ocurre en esa escala temporal. Pero el gráfico de la figura 10.2 muestra la excelente aproximación a este orden.

## Dos escalas temporales en un sistema no lineal

Pasemos a un ejemplo no-lineal, del cual no conozcamos la solución exacta. Analicemos una vez más el oscilador de van der Pol. Vamos a calcular la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones. Tenemos:

$$\ddot{x} + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0. \quad (10.18)$$

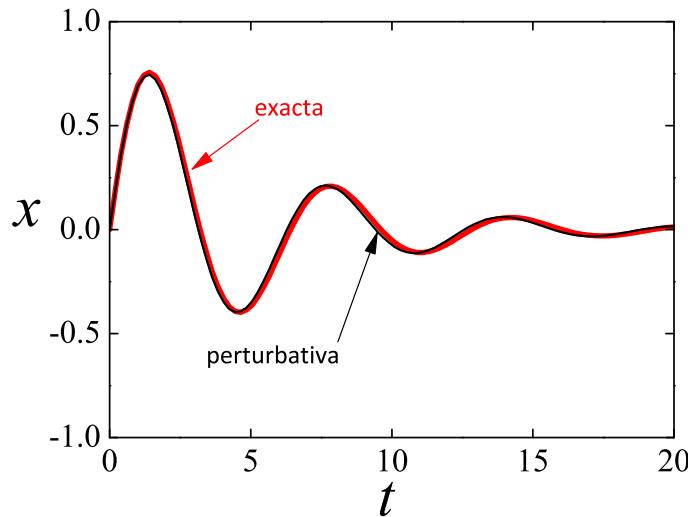


Figura 10.2: Solución exacta del oscilador lineal amortiguado (línea gruesa roja) y solución de dos tiempos (línea delgada negra). Notar que la escala es distinta para que se aprecien las dos soluciones, que son muy parecidas aunque el parámetro es bastante grande ( $\epsilon = 0.2$ ).

Aplicando el mismo ansatz que en la sección anterior obtenemos el equivalente de las Ecs. (10.14a,10.14b):

$$o(1) : \partial_{\tau\tau}x_0 + x_0 = 0, \text{ oscilador armónico simple} \quad (10.19)$$

$$o(\epsilon) : \partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 = -2\partial_{T\tau}x_0 - (x_0^2 - 1)\partial_\tau x_0. \quad (10.20)$$

$$\Rightarrow x_0 = A(T) \sin \tau + B(T) \cos \tau \quad \text{de (10.19), o mejor:} \quad (10.21)$$

$$= r(T) \cos(\tau + \phi(T)) \quad \text{amplitud y fase lentas} \quad (10.22)$$

Ahora, con (10.22) en (10.20):

$$\begin{aligned} \partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 &= 2[r' \sin(\tau + \phi) + r\phi' \cos(\tau + \phi)] \\ &\quad + r \sin(\tau + \phi)[r^2 \cos^2(\tau + \phi) - 1], \end{aligned}$$

donde vemos que, además de los términos obvios de resonancia (primera línea), hay términos resonantes en la segunda línea, de la forma:

$$\sin(\tau + \phi) \cos^2(\tau + \phi) = \frac{1}{4}[\sin(\tau + \phi) + \sin 3(\tau + \phi)]$$

de modo que nos queda:

$$\begin{aligned}\partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 &= [2r' - r + \frac{1}{4}r^3] \sin(\tau + \phi) \\ &\quad + 2r\phi' \cos(\tau + \phi) + \frac{1}{4}r^3 \sin 3(\tau + \phi).\end{aligned}$$

Anulamos ahora los términos resonantes (seculares):

$$2r' - r + \frac{1}{4}r^3 = 0 \tag{10.23}$$

$$2r\phi' = 0 \tag{10.24}$$

Primero, de (10.23):

$$r' = \frac{1}{2}r \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} r^* = 0 & \text{inestable} \\ r^* = 2 & \text{estable} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Además (10.24)} \Rightarrow \phi' = 0 \Rightarrow \phi(T) = \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0(\tau, T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2 \cos(\tau + \phi_0)$$

Luego, a primer orden:

$$\begin{aligned}x(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2 \cos(t + \phi_0) + o(\epsilon) \\ &\Rightarrow \boxed{\text{ciclo límite de radio } 2 + o(\epsilon)}.\end{aligned}$$

Para encontrar la frecuencia de este ciclo derivamos el argumento del coseno:

$$\Rightarrow \omega = \frac{d}{dt}(\tau + \phi) = (\partial_{\tau} + \epsilon\partial_T)(\tau + \phi) = 1 + \epsilon\phi' = \boxed{1 + o(\epsilon^2)},$$

ya que  $\phi'$  es cero a primer orden. Como dijimos antes (en el ejemplo lineal), si queremos una fórmula explícita para la corrección  $o(\epsilon^2)$  de la frecuencia, tenemos que incorporar en el análisis una escala temporal super-lenta,  $\mathcal{T} = \epsilon^2 t$ .

### Observaciones:

El tratamiento completamente general a veces se llama *método de los promedios* (Guckenheimer-Holmes, por ejemplo). Para funciones  $h$  genéricas (pero periódicas) se pone un desarrollo de Fourier de  $h$ , y las ecuaciones que anulan las resonancias tienen promedios de  $h$  en un ciclo, del tipo:

$$r' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta \, d\theta \equiv \langle h \sin \theta \rangle.$$

Validez:  $x_0$  es una buena aproximación ( $o(\epsilon)$ ) de  $x$  para tiempos hasta  $t \sim o(1/\epsilon)$  (si  $x$  y  $x_0$  tienen las mismas condiciones iniciales). Si  $x$  es *periódica* la aproximación vale *para todo*  $t$ .

**Ejercicio:** Note el término armónico superior en el ejemplo. La generación de armónicos superiores es característica de los sistemas no lineales. Resuelva  $x_1$ , suponiendo condiciones iniciales  $x(0) = 2$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , para encontrar el efecto de este término.

En el libro de Strogatz [4] hay más ejemplos y ejercicios.

## 10.3 Sincronización

Los sistemas oscilantes, rítmicos, son una constante en todo el mundo animado (¡y también en buen parte del inanimado!). En muchas ocasiones los sistemas biológicos están formados por poblaciones más o menos grandes de unidades caracterizadas por una dinámica osculatoria de este tipo, autosostenida, con las características de un ciclo límite. Estas unidades suelen interactuar unas con otras, mediante un mecanismo adicional y complementario a la dinámica individual. Este acoplamiento puede tomar muchas formas: puede ser global (todos con todos), local (con un alcance hasta determinados vecinos en el espacio), con topología compleja (con los individuos posicionados en los nodos de una red), etc. En estos casos, como resultado del juego mutuo entre la dinámica local y el acoplamiento, surge una dinámica colectiva en el sistema, que involucra a un número macroscópico de individuos en la población. Muchas veces esta dinámica

le permite al sistema desarrollar una tarea que cada individuo por separado no podría hacer. Piénsese, por ejemplo, en el tejido cardíaco. Cada miocito del corazón puede oscilar independientemente de los otros. Pero se necesita su movimiento coordinado para que el corazón pueda funcionar como una bomba.

Desde un punto de vista físico se puede apreciar que un comportamiento de este tipo conlleva una drástica reducción del número de grados de libertad del sistema. El comportamiento colectivo más característico y paradigmático (y el más sencillo de describir) es precisamente la sincronización: una situación en la que numerosos osciladores individuales sincronizan sus frecuencias y sus fases, y acaban oscilando como si fueran un solo oscilador.<sup>1</sup> Vamos a estudiar la fenomenología básica de estos sistemas. Un tratamiento divulgativo interesante se encuentra en *Scientific American*<sup>2</sup>, y en el mucho más extenso *Sync*.<sup>3</sup>

## Conjuntos de osciladores de fase idénticos

En general, la evolución temporal de una población de osciladores acoplados puede ser descripta matemáticamente por un modelo del tipo:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\mathbf{f}_i(\mathbf{r}_i)}_{\text{evol. libre}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N U_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}_{\text{interacción}}, \quad i = 1 \dots N.$$

La variable de estado  $\mathbf{r}$  es un vector multidimensional, con una componente para cada elemento  $i$  del sistema de  $N$  elementos. Las funciones  $\mathbf{f}$  son tales que la solución de la ecuación elemental (sin interacciones) es periódica (o se aproxima a un ciclo límite).

<sup>1</sup>Sorprendentemente puede ocurrir también con sistemas caóticos acoplados, en la fase de dinámica caótica, pero no nos ocuparemos aquí de este caso.

<sup>2</sup>Strogatz S and Stewart I, *Coupled oscillators and biological synchronization*, Sci. Am. (December 1993).

<sup>3</sup>Strogatz S, *Sync: How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life* (Hyperion, 2004).

Para osciladores arbitrarios el problema es muy complicado, de manera que conviene utilizar una descripción fenomenológica basada en *osciladores de fase*, debida a Arthur Winfree<sup>4</sup>. Winfree observó que si el acoplamiento es débil, los osciladores se mantienen cerca de sus ciclos límite. Esto permite ignorar las variaciones de amplitud que puedan sufrir, y concentrarse sólo en las variaciones de fase. El modelo simplificado provee una representación tratable de los fenómenos de sincronización.

La representación simplificada consiste en usar, para cada elemento, una variable de **fase**  $\phi(t)$ , que varía como  $\phi(t) = \omega t + \phi(0)$  y que, al alcanzar el valor  $2\pi$ , se resetea a 0. La ecuación de movimiento de cada oscilador de fase es, entonces, sencillamente:

$$\dot{\phi} = \omega \quad \leftarrow \text{frecuencia natural}$$

Un *ensemble* o *sistema* de osciladores de fase en interacción es entonces:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N F_{ij}(\phi_i, \phi_j), \quad i = 1 \dots N,$$

donde las funciones  $F$  son doblemente  $2\pi$ -periódicas,  $F_{ij}(\phi_i + 2\pi n_i, \phi_j + 2\pi n_j) = F_{ij}(\phi_i, \phi_j)$ ,  $n_i, n_j \in \mathbb{Z}$ .

Si  $F_{ij}$  depende sólo de la *diferencia* de fases,  $F_{ij} = F_{ij}(\phi_i - \phi_j)$ , el sistema es invariante bajo la transformación  $\phi_i \rightarrow \phi_i + \psi(t)$ , con  $\psi(t)$  arbitraria, con lo cual también tenemos (derivando la transformación):  $\omega_i \rightarrow \omega_i + \dot{\psi}(t)$ .

---

<sup>4</sup>Winfree A, *The geometry of biological time* (Springer, 2010).

## Caso sencillo: dos osciladores

Comencemos con el caso sencillo de dos osciladores:<sup>5</sup>

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + F_{12}(\phi_1, \phi_2), \quad (10.25a)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 + F_{21}(\phi_1, \phi_2). \quad (10.25b)$$

Existen diversas maneras de visualizar la dinámica de un sistema como éste. En primer lugar, notando que las variables son fases, podemos representarlo como un par de puntos en el plano complejo, moviéndose a lo largo del círculo unidad. Cada punto representa la coordenada de uno de los elementos del sistema. Esta representación es la que vemos en la figura 10.3(a). En su movimiento, los puntos se alejan y se acercan entre sí, siempre engarzados en el círculo unidad. Por otro lado, siendo ambas variables fases, podemos usarlas como coordenadas en un toro. El estado del sistema es un punto que se mueve sobre el toro, como vemos en la figura 10.3(b). Desplegando el toro en un cuadrado con condiciones periódicas de contorno, el estado es un punto que se mueve siguiendo una trayectoria como se muestra en la figura 10.3(c).

Aun en ausencia de acoplamiento la solución de la ecuación (10.25) puede ser complicada. Sin interacción uno tiene  $\dot{\phi}_1 = \omega_1$ ,  $\dot{\phi}_2 = \omega_2$ , con lo cual  $d\phi_2/d\phi_1 = \omega_2/\omega_1$  es la pendiente en las trayectorias (rectas) de la representación de la figura 10.3(c). Si  $\omega_2/\omega_1$  es un racional  $p/q$ , las trayectorias son curvas cerradas con  $p$  “vueltas” en una coordenada y  $q$  en

---

<sup>5</sup>El estudio de la sincronización de dos osciladores comenzó con las observaciones y experimentos de Christiaan Huygens en 1665. Durante una enfermedad que lo tuvo en cama algún tiempo, el inventor del reloj de péndulo observó que dos de sus aparatos batían los segundos de manera sincrónica. Huygens sabía que era algo prácticamente imposible. Él mismo los había fabricado, y sabía que sus períodos eran tan sensibles a los parámetros del péndulo que no podían ser iguales. Imaginó —correctamente— que la sincronización se debía a una interacción entre ambos aparatos, y verificó que desaparecía si se llevaban a uno de los relojes a una habitación lejana, y que se recuperaba si volvían a colgarlos uno junto al otro. Huygens nunca desentrañó el mecanismo que producía la sincronización, ni su formulación matemática. El área permaneció casi inexplorada hasta fines del siglo XX, con los trabajos de Winfree, Kuramoto, Strogatz y otros.

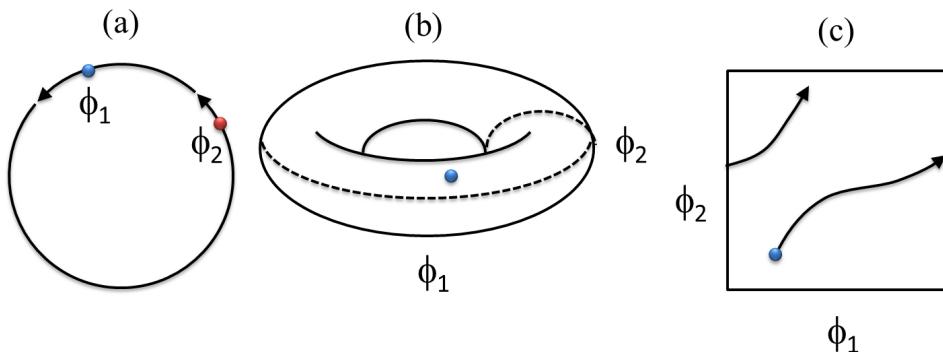


Figura 10.3: Distintas representaciones de la dinámica de un sistema de dos osciladores de fase.

la otra. Por ejemplo, si  $p/q = 3/2$ , la trayectoria en el toro es un trébol como el de la figura:



Estas curvas se llaman “nudos del toro” y hay toda una rama de la matemática dedicada a ellas. Por otro lado, si  $\omega_2/\omega_1$  es irracional, la trayectoria no se cierra nunca y el movimiento es *cua*siperiódico.

Supongamos que la interacción es antisimétrica o impar (tipo acción-reacción), por ejemplo un seno:

$$F_{12}(\phi_1, \phi_2) = -F_{21}(\phi_1, \phi_2) = \frac{k}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1).$$

donde  $k$  es la **intensidad del acoplamiento**. Tenemos que si  $k > 0$  la interacción es atractiva, y si  $k < 0$  es repulsiva.

Las ecuaciones de las fases son:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \frac{k}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \frac{k}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2)\end{aligned}$$

Definimos unas nuevas variables, suma y diferencia de fases:

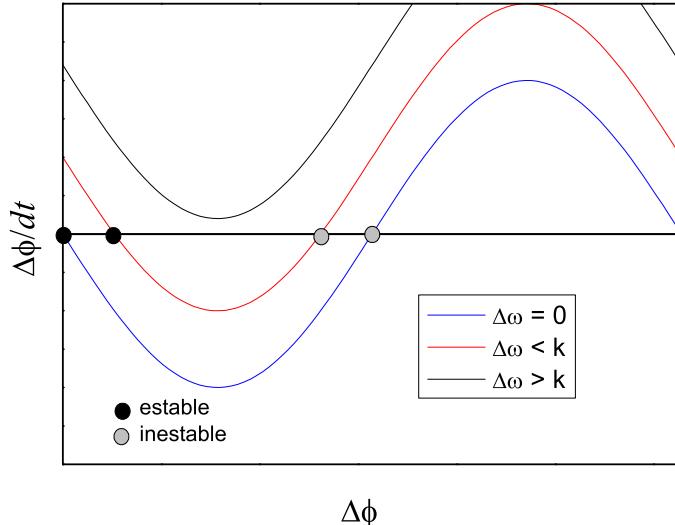
$$\begin{aligned}\rho &= \phi_1 + \phi_2 \\ \delta &= \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1\end{aligned}$$

con las cuales las ecuaciones resultan:

$$\dot{\rho} = \omega_1 + \omega_2 + \overbrace{(F_{12} - F_{21})}^{=0} = \omega_1 + \omega_2, \quad (10.28a)$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega_2 - \omega_1 + \frac{k}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2) - \frac{k}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ &= \underbrace{\Delta\omega}_{\omega_2 - \omega_1} - \frac{k}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) - \frac{k}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ &= \Delta\omega - k \sin \delta.\end{aligned} \quad (10.28b)$$

Vemos en (10.28a) que la suma de las fases crece uniformemente con frecuencia suma:  $\rho = \rho(0) + (\omega_1 + \omega_2)t$ . La diferencia de las fases, por su parte, tiene un comportamiento más sutil, como se ve en la figura.



Podemos ver en el gráfico que cuando las frecuencias naturales son iguales,  $\Delta\omega = 0$ , tenemos tres puntos fijos (equivalentes a dos):  $\Delta\phi = 0$ ,  $\pi$  y  $2\pi \equiv 0$ . El primero es estable, y el segundo inestable (si  $k > 0$ , o sea interacción atractiva). En este caso, asintóticamente, los dos osciladores alcanzan un estado de **sincronización total**:  $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \Omega t$ , con  $\Omega = \omega_1 = \omega_2$ .

Si la interacción es repulsiva,  $k < 0$ , la estabilidad de los equilibrios es al revés, y  $\Delta\phi = \pi$  es estable. En este caso:  $\phi_1(t) = \Omega t$ ,  $\phi_2(t) = \Omega t + \pi$ . (Este caso no está en la figura.)

Si la interacción es positiva, pero con  $\omega_1 \neq \omega_2$ , hay dos situaciones posibles, caracterizadas por  $\Delta\omega \leq k$ . Veámoslos por separado.

Si  $\Delta\omega < k$ , hay también dos puntos fijos, uno estable y uno inestable. Los osciladores no alcanzan la sincronización total, pero alcanzan un estado, llamado **sincronización de frecuencia** (*phase-locking*), en el que se mueven con la misma frecuencia “de compromiso”:

$$\dot{\delta} = 0 \Rightarrow \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_1 = \omega_1 + \frac{k}{2} \sin \delta^*,$$

y como de (10.28b):

$$\sin \delta^* = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k}$$

nos queda

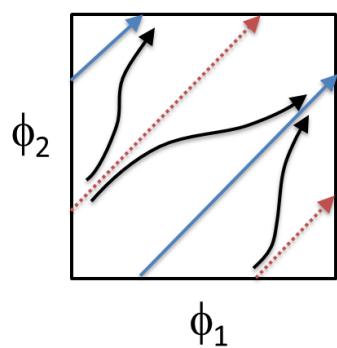
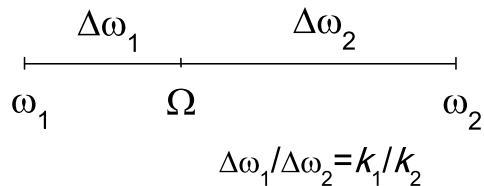
$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + \frac{k}{2} \frac{\omega_2 - \omega_1}{k} = \omega_1 + \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_1}{2} = \boxed{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \Omega}.$$

En general, si las intensidades de acoplamiento mutuo son distintas, se tiene:

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + k_1 \sin(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_2 + k_2 \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{k_1 \omega_2 + k_2 \omega_1}{k_1 + k_2}.$$



En el estado de sincronización de frecuencia, las fases evolucionan como:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \Omega t \\ \phi_2(t) &= \Omega t + \arcsin \frac{\Delta\omega}{k}.\end{aligned}$$

Finalmente, si  $\Delta\omega > k$ , las frecuencias naturales son muy distintas y el acoplamiento no es capaz de lograr ninguna sincronización: se tiene un **movimiento incoherente**. La diferencia de fase crece de la forma

$$\Delta\phi(t) = 2 \arctan \left\{ \frac{k}{\Delta\omega} + \sqrt{1 - \frac{k^2}{\Delta\omega^2}} \tan \left[ \frac{\sqrt{\Delta\omega^2 - k^2}}{2}(t - t_0) \right] \right\}$$

con

$$t_0 = \frac{2}{\sqrt{\Delta\omega^2 - k^2}} \arctan \left\{ \frac{k - \Delta\omega \tan[\Delta\phi(0)/2]}{\sqrt{\Delta\omega^2 - k^2}} \right\}.$$

Obsérvese que esta diferencia de fase se puede escribir como

$$\sqrt{\Delta\omega^2 - k^2}t + \tilde{\phi}(t) \leftarrow \text{función periódica},$$

es decir,  $\Delta\phi$  crece linealmente en promedio, indicando la imposibilidad de sincronizarse.

En este estado las fases evolucionan como:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}\tilde{\phi}_0(t) + \phi_1(0) \\ \phi_2(t) &= \text{idem} + \phi_2(0)\end{aligned}$$

con  $\tilde{\phi}_0(t) = \tilde{\phi}(t) - \tilde{\phi}(0)$ .

La evolución temporal de los tres modos de sincronización se muestran en la figura 10.4. Un diagrama de fases completo de este sistema está en la figura 10.5.

## Acoplamiento global

Los osciladores pueden estar acoplados a unos pocos vecinos (tal como los que dan origen a las oscilaciones neuro-musculares en el intestino), o a

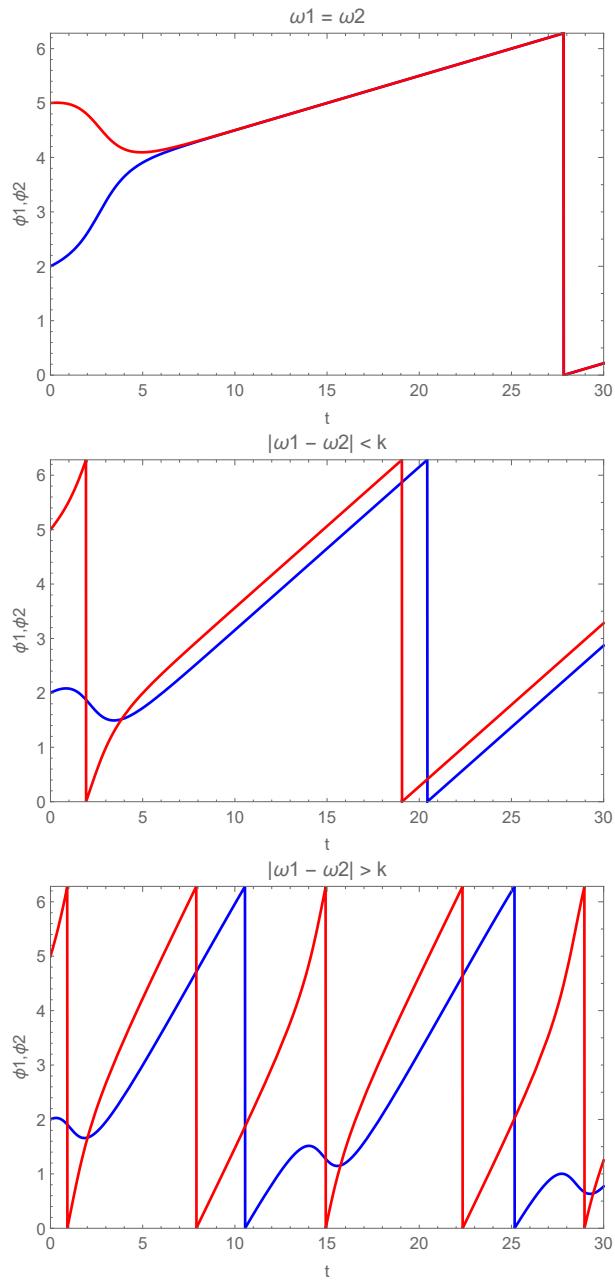


Figura 10.4: Sincronización total, sincronización en frecuencia, y movimiento incoherente de dos osciladores acoplados senoidalmente con intensidad  $k = 1$ , con  $\omega_1 = 0.1$  y  $\omega_2 = 0.1, 0.5$  y  $1.2$ .

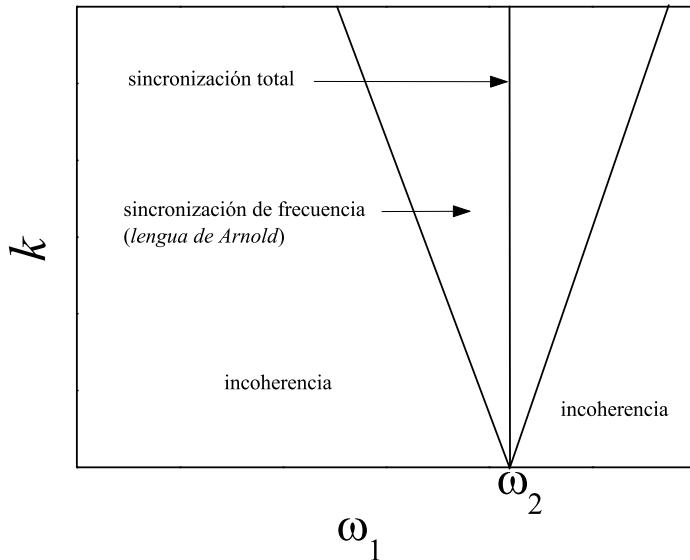


Figura 10.5: “Lengua de Arnold”: región de sincronización de osciladores acoplados.

todos los demás en una comunidad (como las células del nodo sino-atrial, el marcapasos del corazón, que tiene unos 10 mil osciladores).

Consideremos ahora un ensemble de osciladores de fase con acoplamiento homogéneo, es decir con  $F_{ij}(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_i, \phi_j)$ , y en particular usemos el acoplamiento senoidal:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i)$$

donde vemos que  $k/N$  es la constante de interacción. Desarrollando el seno ( $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ ) tenemos:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + k \left[ \frac{1}{N} \sum_j \sin \phi_j \cos \phi_i - \frac{1}{N} \sum_j \cos \phi_j \sin \phi_i \right] \quad (10.32a)$$

$$= \omega_i + k[\langle \sin \phi \rangle \cos \phi_i - \langle \cos \phi \rangle \sin \phi_i] \quad (10.32b)$$

donde los corchetes angulares denotan promedios sobre el sistema.

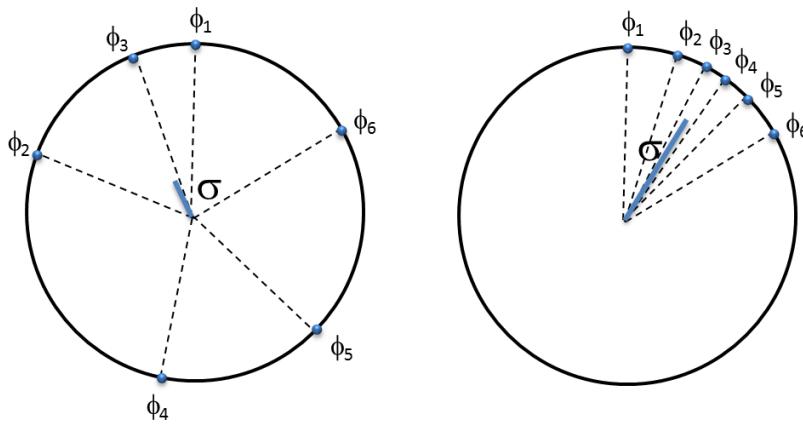


Figura 10.6: Parámetro de orden de un sistema de fases. Izquierda: si las fases se encuentran desparramadas, el módulo del parámetro de orden es pequeño. Derecha: si las fases están agrupadas, el parámetro de orden es grande.

Para representar el efecto del promedio del sistema sobre cada oscilador podemos definir un *parámetro de orden* complejo:

$$\sigma(t)e^{i\Phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)}. \quad (10.33)$$

La figura 10.6 permite apreciar claramente el significado de este parámetro de orden complejo.

Usando el parámetro de orden podemos escribir una ecuación de campo medio del sistema. Observemos que:

$$\begin{aligned} \sigma \cos \Phi &= \frac{1}{N} \sum \cos \phi, \\ \sigma \sin \Phi &= \frac{1}{N} \sum \sin \phi, \end{aligned}$$

con lo cual, en (10.32), podemos escribir:

$$\boxed{\dot{\phi}_i = \omega_i + k\sigma \sin(\Phi - \phi_i).} \quad (10.34)$$

La Ec. (10.34) es una ecuación de *campo medio* del sistema: vemos que la dinámica individual está acoplada al campo medio de la población. Si

el campo medio es nulo (incoherencia), entonces (10.34) nos dice que la dinámica individual es como si no hubiese acoplamiento, y cada oscilador sigue su frecuencia natural. Por otro lado, si el campo medio es distinto de cero, el comportamiento es menos trivial.

Tenemos entonces el problema de resolver (10.34) para cada oscilador, cada uno con su fase inicial, y para  $\sigma(t)$  y  $\Phi(t)$  arbitrarias, y de resolver  $\sigma$  y  $\Phi$  de manera autoconsistente dada la definición (10.33).

En primer lugar, consideremos osciladores idénticos,  $\omega_i = \omega$ , y pongamos  $\omega = 0$  gracias a la simetría del sistema:

$$\dot{\phi}_i = \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i). \quad (10.35)$$

Nótese que la intensidad del acoplamiento,  $k$ , fija la constante de tiempo del sistema.

La ecuación (10.35) tiene una solución estacionaria:  $\phi_i = \phi^* \forall i$ , arbitrario. En consecuencia  $F(\phi^*, \phi^*) = 0$ , y la interacción no juega ningún rol en este estado. Como  $\omega_i = 0$ , la oscilación cesa. Es un estado de **sincronización total**, que se alcanza dinámicamente si es estable:

$$\phi_i(t) = \phi^* + \epsilon_i(t), \quad \epsilon_i \ll 1 \quad \forall i.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \dot{\phi}_i &= \dot{\epsilon}_i = \frac{k}{N} \sum_j \sin(\phi^* + \epsilon_j - \phi^* - \epsilon_i) \\ &\approx \frac{k}{N} \sum_j (\epsilon_j - \epsilon_i) = -\frac{k}{N} \epsilon_i \mathcal{N} + \frac{k}{N} \sum_j \epsilon_j. \\ \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}_i &\approx -k\epsilon_i + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N \epsilon_j. \end{aligned}$$

Tenemos estabilidad si y sólo si las soluciones de este sistema decaen, es decir si la matriz

$$A_{ij} = \frac{k}{N} (1 - N\delta_{ij})$$

tiene todos sus autovalores con partes reales no positivas.

Esta matriz tiene un autovalor  $\lambda_1 = 0$  (¿por qué?), con autovector  $(1, 1 \dots 1)$ , correspondiente a la invariancia del sistema ante una rotación de todas las fases en una constante (el autovalor  $(1, 1 \dots 1)$  en el espacio de las desviaciones de las fases  $\epsilon$ , se llama *longitudinal*). El resto de los autovalores se llaman *transversales*, y sus autovalores son  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_N = -k$ . Esto garantiza la estabilidad lineal si  $k > 0$ . La resolución numérica muestra que, además, es globalmente estable.

Además del estado de sincronización total, el sistema (10.35) tiene muchos otros estados estacionarios, soluciones de

$$\sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i) = 0, \quad i = 1 \dots N.$$

Para  $k > 0$  todos ellos son inestables. Sin embargo, pueden volverse estables para interacciones repulsivas,  $k < 0$ , cuando la sincronización total es inestable. En estos estados las fases se acercan asintóticamente a valores fijos, uniformemente distribuidos en  $[0, 2\pi)$ , y las frecuencias convergen a la frecuencia natural común a todos los osciladores.

## Ensembles de osciladores heterogéneos

La heterogeneidad y las fluctuaciones siempre presentes en sistemas naturales macroscópicos tienen como consecuencia la diversidad en las propiedades de los componentes individuales. Otro tanto ocurre con la existencia de fuerzas externas aleatorias.

Supongamos en primer lugar la heterogeneidad, para lo cual permitimos que los osciladores sean distintos en sus frecuencias naturales. Veremos que puede alcanzarse un estado de sincronización parcial. Sea el sistema:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (10.36)$$

donde las  $\omega_i$  están distribuidas aleatoriamente con distribución  $g(\omega)$ . Este modelo se llama de Kuramoto (ver la linda implementación interactiva en [Ride my Kuramotocycle.](#))

El movimiento individual, como resultado de la interacción, es complicado y típicamente caótico. En general, la frecuencia real de cada oscilador, la derivada temporal de su fase, resulta diferente de su frecuencia natural ( $\dot{\phi}_i \neq \omega_i$ ) y conviene definir una *frecuencia efectiva*:

$$\omega'_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi}_i(t) dt.$$

Lo que se observa es que a un valor crítico del acoplamiento  $k$  se forma un cluster con una fracción de los osciladores moviéndose con igual frecuencia efectiva  $\Omega$ . Las fases de estos osciladores no son idénticas. El número de osciladores en el cluster crece a medida que  $k$  crece por encima del valor crítico  $k_c$ . Los valores de  $\Omega$  y  $k_c$  dependen de la distribución  $g(\omega)$ . La sincronización de frecuencia en este sistema tiene características de fenómeno crítico en el límite  $N \rightarrow \infty$ .

Pasemos al análisis. Para llevar adelante una descripción estadística del sistema definamos una *densidad de fase*:

$$n(\phi, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta[\phi - \phi_i(t)],$$

con lo cual el producto  $n(\phi, t)d\phi$  representa la fracción de osciladores en el intervalo  $d\phi$  de  $[0, 2\pi]$  a tiempo  $t$ , o sea la probabilidad de encontrar un oscilador en  $d\phi$ . Está normalizada:

$$\int_0^{2\pi} n(\phi, t) d\phi = 1 \quad \forall t.$$

Usamos la densidad de fase para reemplazar la suma de (10.36) por una integral:

$$\frac{1}{N} \sum_j \sin(\phi_j - \phi_i) \rightarrow \int_0^{2\pi} n(\phi) \sin(\phi - \phi_i) d\phi$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_i = \omega_i + k \int_0^{2\pi} n(\phi) \sin(\phi - \phi_i) d\phi$$

que tiene la forma:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + k\sigma \sin(\Phi - \phi_i) \quad (10.37)$$

(tal como en el sistema de osciladores idénticos), con el *parámetro de orden*:

$$\sigma(t) e^{i\Phi(t)} = \int_0^{2\pi} n(\phi, t) e^{i\phi} d\phi. \quad (10.38)$$

En el estado estacionario más sencillo, con los osciladores distribuidos uniformemente en  $[0, 2\pi]$ ,  $n = 1/2\pi$ , obtenemos  $\sigma(t) = 0$ , con lo que el efecto del acoplamiento desaparece y cada oscilador se mueve con su frecuencia natural.

El movimiento *colectivo* más sencillo consiste en rotaciones rígidas a frecuencia  $\Omega \Rightarrow n(\phi, t) = n_0(\phi - \Omega t)$ , y  $\Phi(t) = \Phi_0 + \Omega t$ . Entonces:

$$\sigma e^{i\Phi_0} = \int_0^{2\pi} n_0(\phi) e^{i\phi} d\phi$$

es independiente del tiempo (resultado que se obtiene de hacer formalmente la integral en (10.38), haciendo el cambio de variable  $u = \phi - \Omega t$ ).

Si introducimos la *fase relativa*  $\Phi_i$  de cada oscilador respecto de la fase promedio  $\Phi(t)$ ,  $\Phi_i = \phi_i - \Phi(t) = \phi_i - \Phi_0 - \Omega t$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\Phi}_i &= \dot{\phi}_i - \Omega \\ &= \omega_i + k\sigma \sin(\Phi - \phi_i) - \Omega, \quad \text{de (10.37)}, \end{aligned}$$

y con  $\sin(\Phi - \phi_i) = -\sin(\phi_i - \Phi) = -\sin \Phi_i$ :

$$\Rightarrow \dot{\Phi}_i = \omega_i - \Omega - k\sigma \sin \Phi_i. \quad (10.39)$$

Y tanto  $\Omega$  como  $\sigma$  deben resolverse autoconsistentemente.

La ecuación (10.39) es idéntica a la ecuación para diferencia de fase de dos osciladores acoplados:

$$\dot{\delta} = \Delta\omega - K \sin \delta,$$

identificando  $\Delta\omega$  con  $\omega_i - \Omega$  y  $K$  con  $k\sigma$ . Recordando el análisis realizado en la Sección 10.3, la dinámica tiene un punto fijo estable cuando  $|\omega_i - \Omega| < k\sigma$ , es decir cuando  $\omega_i$  es cercano a  $\Omega$ , en cuyo caso (análogamente a la sincronización de frecuencia de dos osciladores):

$$\Phi_i(t) = \Omega t - \boxed{\psi_i} \leftarrow \Phi_0 + \arcsin[(\omega_i - \Omega)/k\sigma].$$

O sea, a causa de la interacción, cada oscilador con  $\omega_i$  cercano a  $\Omega$  ha corrido su frecuencia de  $\omega_i$  a  $\omega'_i = \Omega$ .

Por otro lado, si  $|\omega_i - \Omega| > k\sigma$ , la solución es:

$$\Phi_i(t) = \omega'_i t + \psi[(\omega_i - \Omega)t]$$

con  $\psi$  una función  $2\pi$ -periódica de  $t$  y

$$\omega'_i = \Omega + (\omega_i - \Omega) \sqrt{1 - \left(\frac{k\sigma}{\omega_i - \Omega}\right)^2}.$$

Para  $|\omega_i - \Omega| \gg k\sigma$  ( $\sqrt{\cdot} \approx 1$ ),  $\omega'_i \approx \omega_i$ .

Para  $|\omega_i - \Omega| \approx k\sigma$  ( $\sqrt{\cdot} \approx 0$ ),  $\omega'_i \approx \Omega$ .

En ambos casos, vemos que los osciladores no se sincronizan totalmente.

Para una distribución de  $\omega_i$  y un valor de  $k$  dados, los osciladores caen en dos grupos, correspondientes a alguna de las dos categorías recién expuestas. Aquéllos para los cuales  $|\omega_i - \Omega| \leq k\sigma$  se clusterizan y giran con frecuencia  $\Omega$ . El resto se mueve de manera incoherente. El tamaño de estos grupos está dado por  $\Omega$  y  $\sigma$ .

Volvamos al parámetro de orden del movimiento colectivo:

$$\sigma e^{i\Phi_0} = \int_0^{2\pi} n_0(\phi) e^{i\phi} d\phi \quad (10.40)$$

y observemos que  $\sigma$  determina el tamaño del cluster sincrónico. La densidad  $n_0(\phi)$  de éste puede calcularse a partir de la distribución de frecuencias naturales usando:

$$n_0(\phi) d\phi = g(\omega) d\omega$$

(relación funcional entre  $\omega$  y  $\phi$ : dado  $\omega$  y condiciones iniciales, los osciladores con esa  $\omega$  dan una cierta fase  $\phi(\omega)$ ), y:

$$\phi_i = \Omega t + \psi_i$$

$$\Rightarrow n_0(\phi) = \begin{cases} k\sigma g[\Omega + k\sigma \sin(\phi - \Phi_0)] \cos(\phi - \Phi_0), & \text{si } |\phi - \Phi_0| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Poniendo esto en (10.40):

$$\sigma = k\sigma \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\Omega + k\sigma \sin \phi) \cos \phi e^{i\phi} d\phi \quad (10.41)$$

que define  $\sigma$  de manera implícita. Hay una solución  $\sigma = 0$  para todo conjunto de parámetros. Suponiendo que existe una solución  $\sigma \neq 0$ , separamos partes real e imaginaria en dos ecuaciones acopladas para  $\sigma$  y  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \text{Re: } 1 &= k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\Omega + k\sigma \sin \phi) \cos^2 \phi d\phi \\ \text{Im: } 0 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\Omega + k\sigma \sin \phi) \cos \phi \sin \phi d\phi \end{aligned}$$

Para la parte imaginaria:  $\cos \phi \sin \phi$  es impar. Para que la integral sea cero,  $g$  debe ser par alrededor de  $\Omega$  (ya que a  $\Omega$  le sumo  $k\sigma \sin \phi$  que es impar). Ergo,  $\Omega$  debe ser  $\omega_0$ , el máximo de la  $g$ , que debe ser par.

Para la parte real: si  $k$  es chico, me queda  $g(\omega_0)$  y la integral del  $\cos^2 \phi$ , con  $k$  multiplicando  $\Rightarrow$  no me alcanza para que dé 1. Para que dé 1,  $k$  debe ser más grande que un cierto valor. Es decir, existe una bifurcación.

**Ejercicio:** Si  $k \rightarrow \infty$ , mostrar que se tiene la solución  $\sigma = 1$ . Pista:  $x = k\sigma \sin \phi$  y aproximar  $g(\omega_0 + x)$  por una  $\delta(x)$ , o interpretar geométricamente.

$$1 = \frac{1}{\sigma} \int_{-k\sigma}^{k\sigma} g(\omega_0 + x) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{k\sigma}\right)^2} dx$$

La solución que se bifurca para  $k > k_0$  tiene la forma de una transición de fase de segundo orden muy rápida (figura 10.7).

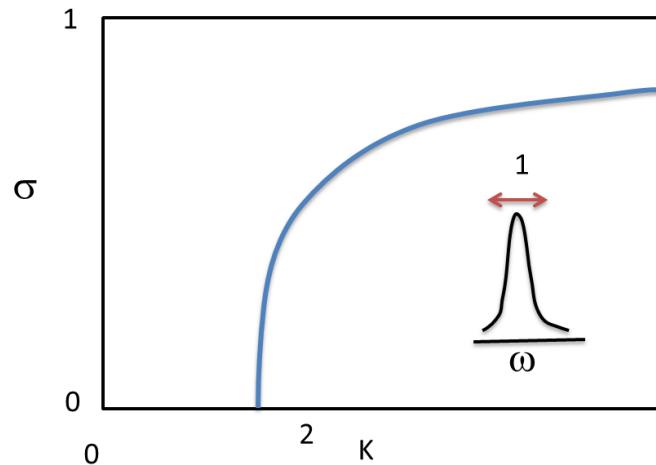


Figura 10.7: Parámetro de orden como función de la intensidad del acoplamiento, para un sistema heterogéneo con distribución gaussiana de frecuencias naturales.

Para analizar este comportamiento, podemos usar la expresión de la parte real, con  $\Omega = \omega_0$  y  $\sigma \approx 0$ , y desarrollar  $g(\omega_0 + k\sigma \sin x)$  hasta segundo orden alrededor de  $\sigma = 0$ . Con esto, tenemos:

$$\underbrace{\frac{\pi}{2}kg(\omega_0)}_a + \underbrace{\frac{\pi}{16}k^3 g''(\omega_0)}_b \sigma^2 = 1,$$

( $g'' < 0$  porque  $g$  tiene un máximo). Es decir, buscamos soluciones reales de:

$$\begin{aligned} b\sigma^2 + a - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \sigma &= \pm \sqrt{\frac{1-a}{b}} \quad (\text{elijo el signo +}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1-a}{b} > 0$$

Y reemplazando  $a$  y  $b$ :

$$\Rightarrow \frac{\pi}{16} k^3 \underbrace{g''}_{<0} \underbrace{(1 - \frac{\pi}{2} k g)}_{<0} > 0$$

↓

$k > \frac{2}{\pi g(\omega_0)} \equiv k_c$

Y finalmente, tenemos el comportamiento de  $\sigma$  cerca de  $k_c$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{8g(\omega_0)}{k_c^3 |g''(\omega_0)|}} (k - k_c)$$

Es decir,  $\sigma \approx (k - k_c)^{1/2}$ , comportamiento válido para cualquier  $g(\omega)$  simétrica con un máximo en  $\omega_0$ , siempre que no se anule en  $g''(\omega)$  (que no sea “chata”). El exponente 1/2 es característico de las transiciones de fase de segundo orden en la aproximación de campo medio.

Si  $g(\omega)$  es *asimétrica*, pero con un máximo simple, la situación es cuantitativamente similar (figura 10.8).

La distribución de frecuencias del sistema sincronizado también se puede calcular para una distribución  $g(\omega)$ . Los osciladores que forman el cluster sincronizado, ciertamente, pueden representarse con una delta:

$$G_0(\omega) = r\delta(\omega - \Omega)$$

mientras que el resto sigue una distribución  $G(\omega)$ . Lo que se observa es que  $G(\omega)$  es una versión deprimida de  $g(\omega)$  alrededor de  $\omega_0 = \Omega$  (figura 10.9).

### Clustering

Cuando la distribución  $g(\omega)$  tiene más de un máximo, pueden formarse clusters. Si los máximos están bien separados, una vez formados los clusters estos se comportan como osciladores únicos, interactuando con los demás clusters. Si los máximos se solapan apreciablemente la emergencia de la sincronización es más sutil, con distinto número de clusters formándose a distintos valores de  $k$ .

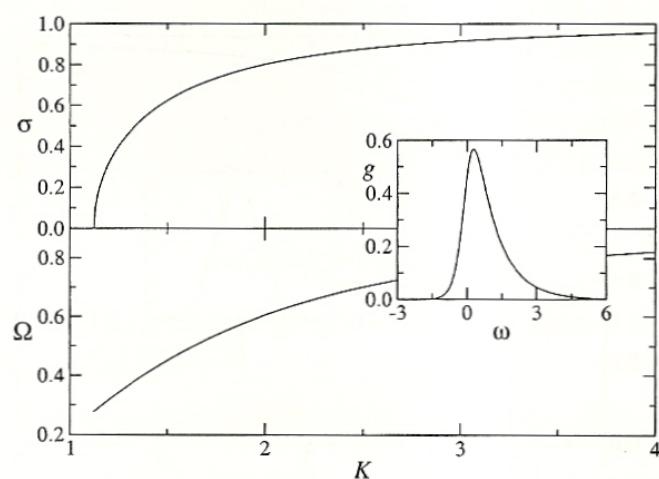


Figura 10.8: Parámetro de orden como función de la intensidad del acoplamiento, para un sistema heterogéneo con distribución asimétrica de frecuencias naturales ( $g(\omega) \propto [\exp(-4\omega) + \exp(\omega)]^{-1}$ , mostrada en el inserto). (De [5].)

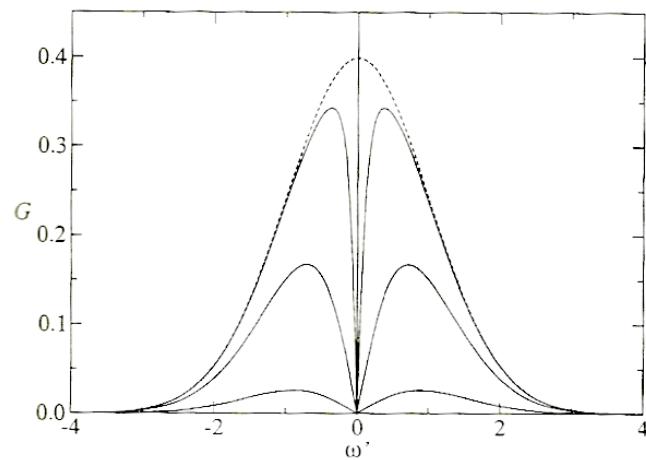


Figura 10.9: Distribución de frecuencias en el sistema heterogéneo sincronizado. (De [5].)

## Trabajos prácticos

*You would think, that if a thing is governed by very simple rules, there would be a simple way of telling whether this very simple thing is a consequence of those very simple rules. But there isn't a simple way of telling.*

John Conway

### 11.1 El sistema de Lorenz

Programe la solución numérica del sistema de Lorenz:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (11.1)$$

$$\dot{y} = r x - y - xz, \quad (11.2)$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (11.3)$$

usando un integrador adecuado (puede ser un RK4, o similar). Suponga  $\sigma = 10$  y  $b = 8/3$ , y use los valores de  $r$  que se indican en cada caso a continuación. Grafique, por lo menos,  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $(z(t), x(t))$ , descartando el transitorio. Observe y describa las trayectorias en los siguientes casos.

1. Caos:  $r = 28$ . Muestre la evolución de varios miles de condiciones iniciales muy cercanas, que terminan llenando el atractor extraño.
2. Caos intermitente:  $r = 166.3$ .
3. Periodicidad ruidosa:  $r = 212$ .
4. Duplicaciones de período, en el intervalo:  $145 < r < 166$ .

5. Histéresis entre un punto fijo y el atractor extraño. Suponga que modula lentamente el parámetro  $r$ , específicamente haciendo  $r(t) = 24.4 + \sin \omega t$ , con  $\omega$  pequeño comparado con las típicas frecuencias orbitales correspondientes al atractor.

6. Considere el límite  $r \rightarrow \infty$ . Haciéndolo de manera adecuada,<sup>1</sup> se pueden eliminar todos los términos disipativos. Sea  $\epsilon = r^{-1/2}$ , de manera que  $r \rightarrow \infty$  corresponde a  $\epsilon \rightarrow 0$ . Encuentre un cambio de variables (que involucra a  $\epsilon$ ), tal que cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  el sistema resulta:

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -XZ, \\ Z' &= XY. \end{aligned}$$

Encuentre dos cantidades conservadas (constantes de movimiento) del nuevo sistema. Muestre que se conserva el volumen en el espacio de fases. Explique físicamente por qué el sistema de Lorenz debería tener algunas propiedades conservativas en el límite  $r \rightarrow \infty$ .

7. En el Capítulo 2 quedaron unos resultados analíticos sin detallar. Demuéstrelos.

## 11.2 El mapeo logístico

Considere el mapeo logístico:

$$x_{t+1} = r x_t (1 - x_t).$$

1. Grafique trayectorias  $x_t$  para los siguientes valores del parámetro de control:

$$r = 1.5, 2.9, 3.3, 3.5, 3.55, 3.59, 3.83, 4.$$

Para cada valor, use varias condiciones iniciales para descartar el transitorio e identificar los atractores. ¿Qué atractor corresponde a

---

<sup>1</sup>KA Robbins, *Periodic solutions and bifurcation structure at high  $r$  in the Lorenz system*, SIAM J. App. Math. 36:457–472 (1979).

cada caso? Para los atractores caóticos, construya un histograma para caracterizar la distribución de  $x$  (observe que el histograma va mejorando a medida que alarga el tiempo de observación).

2. Construya un diagrama cobweb e identifique las primeras bifurcaciones de período (hasta el p-8). Muestre que el  $p-2n$  es un punto fijo estable de la iteración  $f^{2n}$  (donde  $f \equiv f(x)$  es el miembro de la derecha del mapeo). Encuentre analíticamente los valores de  $r$  correspondientes a los tres primeros puntos de bifurcación (la desestabilización del 0, la del punto fijo a  $p-2$ , y la de  $p-2$  a  $p-4$ ).
3. Construya un diagrama de bifurcaciones, mostrando los atractores en función del parámetro  $r$ , con  $r \in (1, 4)$ . Observe que, cerca de los puntos de bifurcación, los transitorios son más largos y es más difícil identificar el atractor. Haga ampliaciones del gráfico con:

$$\begin{array}{ll} r \in (3, 3.678), & x \in (0.7287, 0.2722), \\ r \in (3.45122, 3.59383), & x \in (0.4105, 0.594), \\ r \in (3.54416, 3.57490), & x \in (0.46, 0.5359). \end{array}$$

Tendrá que hacer más iteraciones y refinar los valores de  $r$  en cada ventana.

4. Calcule y grafique el exponente de Lyapunov para  $r \in (2.5, 4)$ .

## Mapeos interesantes

Ya que programó el diagrama de bifurcaciones del mapeo logístico, aquí tiene otros mapeos interesantes para explorar:

1.  $x_{n+1} = r \cos x_n$  (lindo, con  $r \in (0, 10)$ ).
2.  $x_{n+1} = e^{-rx_n}$  (aburrido, una bifurcación y listo, con  $r \in (0, 10)$ ).
3.  $x_{n+1} = r \tan x_n$  (un lío,  $r \in (0.5, 2)$ ).
4.  $x_{n+1} = rx_n - x_n^3$  (simétrico, usar más de un  $x_0$  para cada  $r$ ).

## 11.3 Sistema de Hénon-Heiles

El sistema de Hénon-Heiles es un modelo simplificado del movimiento de una estrella en una galaxia de disco. Consiste en una partícula sujeta al potencial bidimensional:

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3.$$

1. Identifique el equilibrio del sistema, y grafique el potencial (ya sea en 3D, o en cortes, o en equipotenciales). ¿Para qué valores de la energía mecánica  $E$  podrá observarse una órbita acotada?
2. Encuentre las ecuaciones de movimiento en el formalismo hamiltoniano, y programe un método de Verlet para resolverlas. ¿Por qué Verlet?
3. Programe el código de manera de poder fijar el valor de la energía mecánica  $E$ , y los valores de las condiciones iniciales  $y_0$ ,  $p_{y0}$ , con  $x_0 = 0$ . ¿Cuánto debe valer  $p_{x0}$ , para completar las condiciones iniciales necesarias? ¿Qué condición debe satisfacer  $y_0$  para que la trayectoria sea acotada? Dadas  $E$  e  $y_0$  que satisfagan la condición encontrada, ¿qué condición debe satisfacer  $p_{y0}$ , para que una partícula con  $p_{x0} = 0$  no se escape?
4. Explore algunas trayectorias hasta tiempos entre 20 y 100, con energías cercanas al fondo del pozo del potencial (entre 0 y 1/12). Identifique los puntos fijos elípticos e hiperbólicos del mapeo de Poincaré.
5. Calcule secciones de Poincaré en el plano  $(y, p_y)$  (detectando los puntos donde  $x$  cambia de signo). Use valores de la energía en todo el rango  $0 < E < 1/6$ . Para cada valor de la energía, elija condiciones iniciales que permitan observar la variedad de órbitas. Discuta las características de las órbitas regulares y caóticas que se ven en el mapeo de Poincaré, y cómo cambian con el valor de la energía.
6. Hénon y Heiles proponen una caracterización de las diversas estructuras mediante un parámetro que mide la proporción de área del espacio  $(y, p_y)$  que ocupan las islas de comportamiento regular. El método es un cálculo crudo de la separación exponencial de Lyapunov. Se basa en tomar dos puntos muy próximos, e integrar el sistema hasta tener unos 25

puntos del mapeo de Poincaré. Si los dos puntos están en una isla regular, la distancia de las imágenes sucesivas aumenta lentamente. Si están en la región caótica, la distancia aumenta aproximadamente en forma exponencial. El método es aproximado y está bien descripto en el paper. Úselo para caracterizar la transición al caos, graficando la fracción de islas regulares en función de la energía (Fig. 7 de [1]).

7. A energías mayores que el valor crítico que calculó al principio, las trayectorias pueden escapar al infinito. Esto permite definir *cuencas de escape*, que tienen una encantadora estructura fractal. eligiendo valores de la energía adecuados (le doy uno como para empezar:  $E = 0.25$ ) grafique estas cuencas, pintando con tres colores distintos las condiciones iniciales cuyas trayectorias escapen por cada uno de los tres canales posibles del potencial.

## Bibliografía

- [1] Hénon and Heiles, *The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments*. The Astronomical Journal 69:73–79 (1964).
- [2] Goldstein, Poole and Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Chap. 11, Classical chaos (Addison-Wesley, 2000).

## 11.4 Autómatas celulares en una dimensión

Explore cualitativamente los autómatas celulares 1D que obedecen a las siguientes reglas, que dan comportamientos distintos de los que vimos en clase:

1. La celda  $j$  se pone (o queda) negra sólo si tanto  $j - 1$  como  $j$  son blancas; si no se queda (o se pone) blanca.
2. La celda  $j$  se pone (o queda) negra si dos cualesquiera de la terna  $[j - 1, j, j + 1]$  son negras, o si tanto  $j - 1$  como  $j$  son blancas; si no se queda (o se pone) blanca.

3. La celda  $j$  se pone (o queda) blanca si  $j - 1$  y  $j$  son negras, o si la terna  $[j - 1, j, j + 1]$  es toda blanca; si no se queda (o se pone) negra.
4. La celda  $j$  se pone (o queda) negra si la celda  $j - 1$  y al menos una del par  $[j, j + 1]$  son negras, o si la terna  $[j - 1, j, j + 1]$  es toda blanca; si no se queda (o se pone) blanca.
5. La celda  $j$  se pone (o queda) blanca si  $j + 1$  y  $j$  son ambas blancas, o si la terna  $[j - 1, j, j + 1]$  es toda negra; si no se queda (o se pone) negra.

Identifique el número de cada una de ellas de acuerdo a la codificación de Wolfram. Asegúrese de correrlas varios cientos de generaciones y en una red grande (especialmente las dos últimas), a partir de semillas o de condiciones iniciales random. ¿A qué clase pertenece cada una?

## Hormigas: un autómata en dos dimensiones

El modelo de *hormigas* consiste en un agente (la hormiga) que se mueve en una red e interactúa con ella, de acuerdo a la iteración de las reglas:

- Moverse un paso adelante.
- Si el nodo es blanco, pintarlo de negro y girar 90 grados a la derecha.
- Si el nodo es negro, pintarlo de blanco y girar 90 grados a la izquierda.

Explore cualitativamente la dinámica de una hormiga. Comience con una única hormiga en una red cuadrada de varios cientos de nodos blancos, con condiciones periódicas en los bordes. Corra la simulación algunas decenas de miles de pasos, hasta que la hormiga choque con su propio rastro negro. Luego repita la condición inicial, pero en una grilla con algunos cientos de nodos negros desparramados uniformemente al azar.

## El Juego de la Vida

El autómata celular más extraordinario de todos, y el más estudiado, es el Juego de la Vida, inventado por el matemático inglés John Conway (fallecido en la pandemia de covid-19). Consiste en una red cuadrada 2D, periódica, con vecindario de Moore (8 vecinos), en la que cada nodo puede estar en uno de dos estados (0 o 1, blanco o negro, activo o inactivo). En cada iteración, la red entera evoluciona de acuerdo a las reglas:

- Si un nodo activo tiene menos de dos vecinos activos, se inactiva (¿de tristeza?).
- Si un nodo activo tiene más de tres vecinos activos, se inactiva (¿de hartazgo?).
- Si un nodo inactivo tiene tres vecinos activos, se activa (¿de alegría?).
- Si un nodo tiene dos vecinos activos, queda igual.

Este autómata puede producir “organismos”, estructuras que se preservan en la dinámica, que se mueven, que interactúan de maneras interesantes y pueden reproducirse (si quiere ver ejemplos rápido, revise el artículo en la Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s\\_Game\\_of\\_Life](https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life)). Además, es capaz de realizar computación universal, en el sentido de Turing.

1. Programe un Juego de la Vida y córralo a partir de condiciones iniciales aleatorias, para observar los patrones que emergen de manera espontánea. El sitio <https://www.conwaylife.com> es una wiki mantenida por una comunidad de usuarios con muchísima información sobre la dinámica del Juego de la Vida, y con implementaciones que puede usar para comparar con la suya, para inspirarse, o para perderse. Hay muchísima más información en la web, incluso implementaciones interactivas para correr en el navegador. En un capítulo de Numberphile: <https://www.youtube.com/watch?v=R9Plq-D1gEk>, John Conway cuenta la historia de cómo inventó el Juego de la Vida inspirado por las máquinas de von Neumann, cómo se lo contó a Martin Gardner, quien lo publicó

en Scientific American, donde se convirtió en el éxito más grande de los más de 100 años de la revista (yo lo leí allí en los 80s).

## 11.5 Estructuras fractales

### Agregación limitada por difusión

1. Simule un proceso de agregación limitada por difusión en una red cuadrada con condiciones de borde periódicas. Indicativamente<sup>2</sup>, use una red de  $1024 \times 1024$ , con una semilla quieta en el centro y del orden de  $2 \times 10^4$  caminantes aleatorios que parten de posiciones distribuidas uniformemente al azar. Considere que los caminantes quedan pegados a la estructura por contactos a lo largo de los enlaces de la red y a  $45^\circ$ .
2. Haga un gráfico de la estructura dendrítica, coloreando las partículas de acuerdo al orden en que se pegaron.
3. Usando círculos de radio  $r$  con centro en la semilla, calcule la masa  $M$  contenida en el círculo en función del radio. Identifique en el gráfico log-log de  $M(r)$  los tres regímenes, correspondientes a la escala de la red, la escala del agregado, y la región invariante de escala. Calcule la dimensión fractal de la estructura dendrítica. Observe que, para obtener un resultado sensato, los radios tienen que abarcar al menos un orden de magnitud en la región central.
4. Implemente el método de *box-counting* para cubrir el agregado. Grifique la cantidad de cajas,  $N$ , necesaria para cubrir la estructura, en función de la resolución  $r$  ( $r = 1/d$  si  $d$  es el tamaño lineal de las cajitas; una posible elección de  $d$  son potencias de 2, usando cajas el doble de grandes en cada escala). En el gráfico log-log de  $N(r)$  identifique nuevamente los tres regímenes y calcule la dimensión fractal en la región invariante.

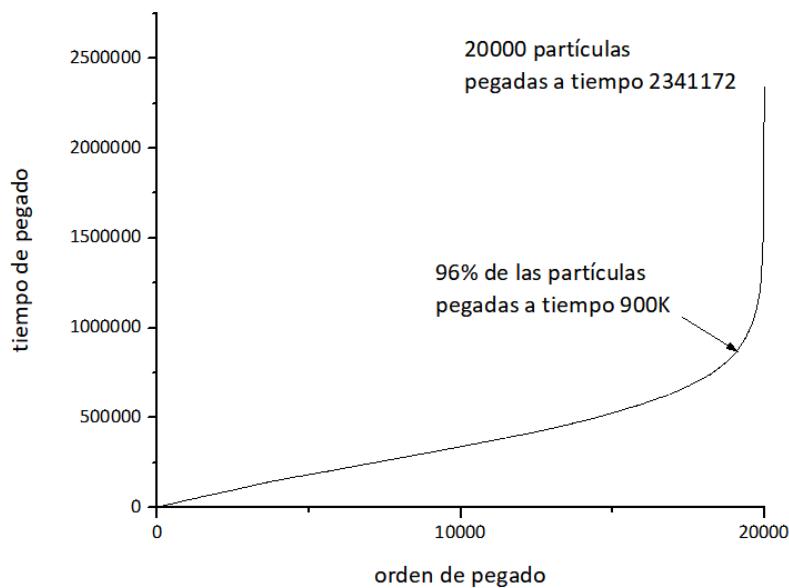
---

<sup>2</sup>Tarda unos 15 minutos en mi laptop i5 1.8GHz de 3a generación, y 11 en la Ryzen 7 3700 de 2.3 GHz, en Fortran escrito así nomás. Si quiere hacerlo más grande, o probar con varios tamaños, adelante. Ojo que en Python o Mathematica es MUCHO más lento; recomendamos usar un lenguaje compilado para esta simulación, y usar adecuadas opciones de optimización del compilador.

Vale la misma observación acerca del rango de magnitudes que tiene que abarcar  $r$  para obtener un buen resultado.

5. Si sus programas corren en un tiempo razonable, calcule la dimensión *box-counting* para un ensemble de agregados del mismo tamaño.

Nota sobre el coloreado según el tiempo de pegado: es posible que la escala de colores aparezca toda concentrada hacia las puntas de las ramas, mientras toda la parte de “adentro” del fractal quede con un color muy uniforme. La causa es que las últimas partículas tardan muchísimo en pegarse. Si uno grafica el tiempo de pegado en función del orden de pegado obtiene algo así:



La curva se pone muy vertical hacia el final. Esto hace que los tiempos de pegado estén distribuidos de manera muy inhomogénea entre 1 y el final. ¿Cómo resolver esto, para que el DLA quede pintado con una escala de colores que muestre variaciones a lo largo de las ramas? Una posibilidad sería elegir una escala de colores que cambie más rápido en los tiempos cortos, y más lento en los tiempos largos. Se podría hacer a mano, por ejemplo, con un solo color para los tiempos entre  $t_{max}/2$  y  $t_{max}$  (serán las

puntas de las ramas) y todo el resto de la escala de colores distribuidos uniformemente entre 0 y  $t_{max}/2$ . O algún hacker podría programar una escala de colores usando esa curva de ahí arriba. La otra posibilidad sería notar que la inmensa mayoría de las partículas ya están pegadas cuando la curva pica para arriba. Es decir, uno podría cortar el programa cuando se pegaron el 95% de las partículas, el fractal sería casi igual, el tiempo de corrida sería menos de la mitad, y los tiempos de pegado serían más o menos uniformes.

## Múltiples agregados

Use el programa que escribió para el sistema DLA para explorar el efecto de cambiar el número de semillas y partículas iniciales. ¿A qué densidad (número de partículas sobre número de sitios de la grilla) obtiene un agregado monolítico?

## Agregación sobre una pared

Haga crecer un agregado a partir de semillas ubicadas todo a lo largo de uno de los lados de la grilla. ¿Qué tipo de agregado se obtiene?

## Variaciones de DLA

Modifique la regla de agregación, haciendo que los caminantes se peguen sólo si tienen el agregado en alguno de los cuatro primeros vecinos (el vecindario de con Neumann, es decir, sólo N, S, E, W, pero no a 45 grados). Use nuevamente una semilla central. ¿Qué cambios se observan en el agregado? Inspecciónelo visualmente y, si su programa es rápido, haga un agregado grande y calcule su dimensión fractal.

Otra variación interesante es la implementada en Complexity Explorables: [Particularly stuck](#). El sistema es abierto: empieza con unas 300 partículas en el cuadrado, y un núcleo de partículas fijas en el centro. Pero a medida que las difusivas se pegan a la dendrita, entran nuevas partículas por el borde externo. Además de la difusión (homogénea e isótropa),

las partículas están sujetas a una atracción hacia el centro, lo cual acelera el crecimiento del agregado. Hay también un movimiento circular, que permite generar estructuras espiraladas.

## 11.6 Percolación

1. Dada una red de sitios “vacíos” (ceros) y un número  $p \in (0, 1)$ , se “ocupa” cada sitio (se pone en 1) con probabilidad  $p$ . El algoritmo es así de sencillo. Prográmelo para una red 2D de  $512 \times 512$  o similar.
2. Observe el tipo de estructura que se forma con  $p = 0.25$ ,  $p = 0.5$  y  $p = 0.75$ . Para las  $p$  menores, se ven una cantidad de agregados (*clusters*) disconexos, de distintos tamaños. Cuanto mayor sea  $p$ , más lleno queda el sistema, y más grandes son algunos de los clusters. Existe un valor de  $p$  crítico,  $p_c$ , tal que si  $p > p_c$ , el cluster más grande tiene un tamaño comparable al de todo el sistema, y abarca la red de lado a lado. Se dice que *percola*.
3. Identificar el cluster más grande no es trivial. Un método fácil de entender e implementar (si bien no súper eficiente) es el siguiente. Elija un sitio ocupado e imagine que lo pinta de rojo (ponele). A continuación, pinte de rojo todos sus primeros vecinos ocupados (en un vecindario de 4 vecinos, NSEO), y luego los vecinos de los vecinos, y así sucesivamente, hasta que no haya más vecinos ocupados, y guarde el tamaño. Luego repita con otro nodo ocupado, todavía no pintado, y mida el tamaño del nuevo cluster. Continúe haciendo esto hasta que no haya más sitios ocupados sin pintar. Así habrá calculado el tamaño de todos los clusters. ¡Este algoritmo es mucho más complicado que el que usó para genera el sistema! En [Barista's secret](#) está implementada una versión simplificada, que pinta sólo el cluster conectado a una semilla central.
4. Calcule el tamaño del mayor cluster para valores de  $p$  entre 0 y 1. Para este sistema,  $p_c \approx 0.59$ , así que le conviene apretar los valores de  $p$  alrededor de  $p_c$ , y espaciarlos más lejos, para analizar el fenómeno de percolación. Grafique el tamaño del mayor cluster en función de  $p$  (pruebe

distintas escalas, lineales y logarítmicas, *a piacere*). Observe que la cantidad de sitios ocupados depende de  $p$ , así que mejor le conviene *normalizar* el tamaño de los clusters, con la cantidad de sitios ocupados para cada valor de  $p$ . Grafique este tamaño normalizado y observe la transición de percolación.

5. Ya que calculó todos los tamaños de cluster, haga un histograma normalizado que aproxime la función de distribución de tamaños de cluster. Hágalo para  $p = 0.3$ ,  $p = 0.59 \approx p_c$  y  $p = 0.7$ . Grafíquelas juntas en log-log, y observe cómo la del punto crítico obedece a una ley de potencia (una recta en log-log, mejor definida cuánto más grande sea el sistema, pero con 512 tendría que dar bastante bien) mientras que las otras no. Calcule el valor del exponente crítico (la pendiente en log-log, debería dar  $-1.85$ ).

6. Esta ley de potencia refleja la existencia de una invariancia de escala en los clusters. Muy cerca de  $p_c$ , los clusters son esponjosos, con filamentos y cavidades de muchos tamaños, y son fractales si el sistema es infinito. En 3D, es parecida a la estructura de la materia (oscura y normal) que forma las galaxias y cúmulos de galaxias que llenan el universo. Grafique los clusters más grandes para  $p = 0.58$ ,  $0.59$  y  $0.69$  para ver la diferencia.

7. De memoria, sin programar nada: ¿cuánto vale  $p_c$  para una grilla 1D?

## 11.7 Pilas de arena

1. Verifique que la regla local definida en el modelo es conservativa:  $S_j^{n+1} + S_{j+1}^{n+1} = S_j^n + S_{j+1}^n$ , y que lleva a que la cantidad de arena desplazada sea:  $\delta S_j^n = \frac{1}{4}z_j^n$ .

2. Implemente el modelo 1D discutido en clase para reproducir algunos de los resultados. Además, registre la cantidad de arena que cae por el borde abierto. El resultado será una serie temporal distinta de la de arena desplazada. Úsela para calcular las correspondientes magnitudes  $E$ ,  $P$  y

$T$ , así como sus distribuciones de probabilidad. ¿Son invariantes de escala? ¿Cómo se relacionan con las definidas a partir de la arena en movimiento?

## Pilas 2D

El modelo de pila de arena unidimensional es sólo marginalmente SOC, ya que las correlaciones espacio-temporales no son de largo alcance. Pero su generalización bidimensional es realmente SOC. Implemente una versión 2D, generalizando el criterio de estabilidad y de redistribución de la arena. Mida las magnitudes que caracterizan las avalanchas,  $E$ ,  $P$  y  $T$  en el estado estacionario, y verifique que sus distribuciones de probabilidad son leyes de potencia.

## 11.8 Incendios forestales

Programe el sistema de incendios forestales, para los parámetros: xxx.

Asegúrese de correrlo un tiempo suficiente para que ocurran varios centenares de incendios.

Calcule las magnitudes  $E$ ,  $P$  y  $T$ , y analice cómo se relacionan entre ellas. En ambos casos, analice si la magnitud del incendio  $E$  se correlaciona con el tiempo transcurrido desde el final del incendio anterior, o con su tamaño.

## Variantes

Implemente alguna de las siguientes modificaciones (en un sistema de  $100 \times 100$ ).

1. Hágalo más parecido a la pila de arena: suspenda el crecimiento de nuevos árboles mientras está ardiendo un incendio.
2. Haga que la probabilidad de un nuevo árbol dependa del número de árboles presentes en el vecindario,  $n$ , por ejemplo  $p_g(1 + n)$ .

3. Implemente la estrategia de manejo, con una probabilidad de extinción:

$$p_e = \begin{cases} \beta/n_b(t) & \text{si } n_b \leq 10, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad (11.4)$$

Analice cómo cambian la distribución de la magnitud de los incendios, y la magnitud del incendio más grande, al cambiar el parámetro  $\beta$  (0.1, 0.2, 0.3 y 0.5). ¿Cómo diseñaría una estrategia óptima de manejo en este escenario?

Recuerde excluir el transitorio para calcular las distribuciones, y hacer simulaciones suficientemente largas para que haya al menos varios centenares de incendios. Corra todos los casos la misma cantidad de tiempo.

## 11.9 Sincronización

Expandir el enunciado:

Resuelva numéricamente el sistema de osciladores de fase acoplados:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i),$$

para  $N \approx 5$  osciladores. Grafique la fase y la frecuencia de todos ellos en función del tiempo (bueno, la fase no hace falta), y verifique que, para cada conjunto de frecuencias naturales  $\omega_i$ , un acoplamiento  $k$  suficientemente fuerte produce la sincronización de frecuencias. Verifique, cambiando las frecuencias naturales, que la frecuencia de sincronización es el promedio de las frecuencias naturales.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Bellamente implementado en Mathematica por B. Altunkaynak, *Synchronization of Coupled Phase Oscillators*, <http://demonstrations.wolfram.com/SynchronizationOfCoupledPhaseOscillators>.

## Bibliografía

EL CONTENIDO DE ESTAS NOTAS está basado en mis libros favoritos de sistemas complejos y en mi propia experiencia.

- [1] P Charbonneau, *Natural Complexity* (Princeton UP, 2017).
- [2] H-O Peitgen, H Jürgens and D Saupe, *Chaos and fractals*, 2nd ed. (Springer, 2004).
- [3] S Wolfram, *A new kind of science* (Wolfram Media, 2002).
- [4] S Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos* (Westview Press, 2015).
- [5] S Manrubia, A Mikhailov and DH Zanette, *Emergence of dynamical order: Synchronization phenomena in complex systems* (World Scientific, 2004).
- [6] G Pruessner, *Self-Organised Criticality: Theory, models and characterisation*, (Cambridge University Press, 2012).

Algunos textos adicionales, para temas puntuales, están citados como notas al pie de las referencias correspondientes.

