Mapeo de Lorenz - Ejercicios 6 y 7

Ejercicio 6

Tenemos el mapeo de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= x(r-z)-y \\ \dot{z} &= xy-bz \end{cases} \tag{1}$$

Para explorar el límite de $r \to \infty$, vamos a usar una parametrización para r de forma tal que $r = \frac{1}{\varepsilon^2}$ y vamos a hacer el siguiente cambio de variables:

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \sigma\varepsilon^2 y, \quad Z = \sigma\varepsilon^2 z, \quad \tau = t/\varepsilon \tag{2}$$

Reemplazando en el sistema original nos queda

$$\begin{cases} X' &= Y - \varepsilon\sigma X \\ Y' &= -XZ - \varepsilon Y \\ Z' &= XY - \varepsilon b(Z-\sigma) \end{cases} \tag{3}$$

Que se reduce al sistema buscado cuando hacemos $\varepsilon \to 0$.

¿Se conserva el volumen en el espacio de fases?
- Sí, ya que la divergencia del vector velocidad $\mathbf{f} = (X', Y', Z')$ se anula para cualquier valor de (X, Y, Z):

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \partial_X X' + \partial_Y Y' + \partial_Z Z' = 0 + 0 + 0 = 0\,. \tag{4}$$

¿Hay cantidades conservadas?
- Sí, las cantidades conservadas son

$$A = \frac{1}{2}(Y^2 + Z^2), \qquad B = \frac{1}{2}X^2 - Z\,. \tag{5}$$

Demostración para A:

$$A' = YY' + ZZ' = Y(-XZ) + Z(XY) = 0\,. \tag{6}$$

Para B:

$$B' = XX' - Z' = XY - XY = 0\,. \tag{7}$$

Ejercicio 7

Quedó como ejercicio en las notas demostrar que el origen es un equilibrio globalmente estable cuando $r < 1$. Para eso definimos la función

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2\,, \tag{8}$$

Que es definida positiva. Veamos como es la derivada temporal de la función:

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = x(y-x) + yx(r-z) - y^2 + xyz - bz^2\,. \tag{9}$$

Algunos términos se cancelan y nos queda

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = -x^2 - y^2 - bz^2 + xy(1+r) = -(x+y)^2 - bz^2 + (r-1)xy\,, \tag{10}$$

que es negativa para cualquier (x, y, z) siempre que $r < 1$, lo que demuestra que $V(x, y, z)$ es una función de Lyapunov y que el origen es globalmente estable.