

75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I 95.10/CB051 MODELACIÓN NUMÉRICA ECUACIONES NO LINEALES

Ing. Rodolfo A. Schwarz

Año 2024

Índice

1 INTRODUCCIÓN

2 MÉTODOS DE ARRANQUE

- Método de la Bisección
 - Criterios de interrupción
- Método de la «Regula-Falsi» o de la Falsa Posición
- Comparación de resultados

3 MÉTODOS DE REFINAMIENTO

- Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo
- Método de Newton–Raphson
- Método de la Secante

Índice

II

- Orden de convergencia
- Método Δ^2 de Aitken
- Método de Steffensen
- Método de Halley
- Método de Chebychev

4 RESUMEN

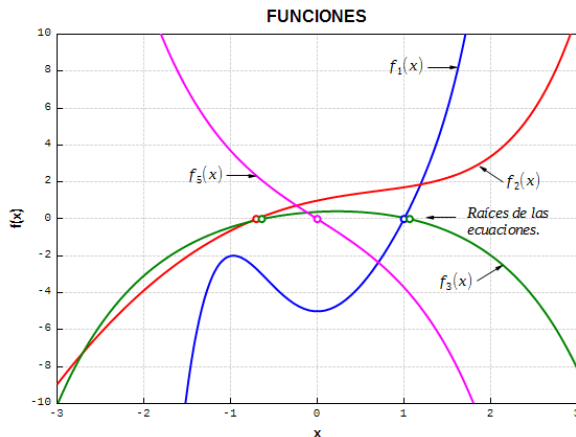
5 BIBLIOGRAFÍA

Introducción

- Supongamos que deseamos obtener los valores de x que anulan las siguientes ecuaciones:
 - ① Ejemplo 1: $f_1(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^2 - 5$;
 - ② Ejemplo 2: $f_2(x) = e^x - x^2$;
 - ③ Ejemplo 3: $f_3(x) = \ln(x + 4) - \cosh(x)$;
 - ④ Ejemplo 4: $f_4(x) = \frac{1}{x} + \cos(x)$;
 - ⑤ Ejemplo 5: $f_5(x) = x - 4 \sinh(x)$.
- Es evidente que para cada una de las funciones no hay solución algebraica para obtener en forma analítica el valor de x que haga que $f_i(x) = 0$.
- Solamente queda como posibilidad obtener soluciones aproximadas.

Ejemplos

Veamos las curvas de las funciones y sus raíces:



Ejemplos

- Los valores numéricos de estas raíces, obtenidas con ayuda de un programa que resuelve ecuaciones no lineales, son:
 - ① Ejemplo 1: $f_1(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^2 - 5$, $x_{f_1} = 1$ en el intervalo $(0; 2)$;
 - ② Ejemplo 2: $f_2(x) = e^x - x^2$, $x_{f_2} = -0,7035$ en el intervalo $(-1; 0)$;
 - ③ Ejemplo 5: $f_5(x) = x - 4\sinh(x)$, $x_{f_5} = 0$ en el intervalo $(-1; 1)$.
- Los ejemplos 3 y 4, por las características de las funciones, $f_3(x) = \ln(x + 4) - \cosh(x)$ y $f_4(x) = \frac{1}{x} + \cos(x)$, requieren un análisis diferente:
 - ① $f_3(x)$ tiene dos raíces; $x_{f_{31}} = -0,6401$ y $x_{f_{32}} = 1,0646$, en el intervalo $(-1; 1,5)$;
 - ② $f_4(x)$ tiene infinitas raíces.

Método de la Bisección

Tomemos esta otra función para analizar:

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right).$$

Si $T = 12$ s, $g = 9,8066$ m/s² y $d = 14$ m y escribimos la función como una ecuación, tenemos:

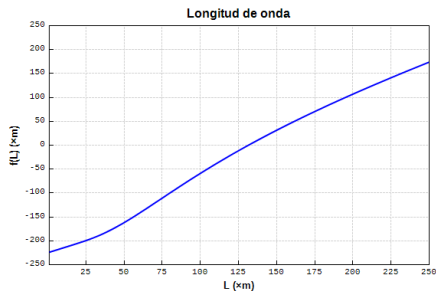
$$f(L) = L - \frac{9,8066 \text{ m/s}^2 \cdot (12 \text{ s})^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi \cdot 14 \text{ m}}{L}\right) = 0.$$

Método de la Bisección

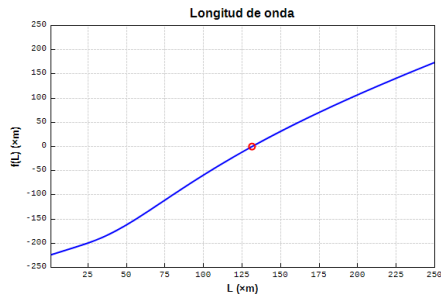
- Una forma «analítica» es aproximar la raíz tomando un intervalo, por ejemplo, (50 m, 200 m).
- Los valores de $f(L)$ para cada extremo son:
 - ① $L = 50 \text{ m} \Rightarrow f(50 \text{ m}) = -161,8 \text{ m};$
 - ② $L = 200 \text{ m} \Rightarrow f(200 \text{ m}) = 107,1 \text{ m}.$
- Vemos que para $L = 50 \text{ m}$ tenemos que $f(L) < 0$ y que para $L = 200 \text{ m}$ tenemos que $f(L) > 0$.
- Por el teorema del valor intermedio, sabemos que existe un $L = c$ tal que $f(c) = 0$, donde c es la raíz buscada.

Método de la Bisección

Veamos un gráfico de la función $f(L)$:



(a) Intervalo.



(b) Raíz de la función.

Figura: Función $f(L)$.

Método de la Bisección

- En el gráfico podemos aproximar la raíz de la función, si nos ayudamos de una escala gráfica y analizamos el punto donde la curva corta al eje L ($y = 0$).
- Reduzcamos ese intervalo aplicando la siguiente expresión:

$$L_1 = \frac{a + b}{2},$$

con $a = 50$ m y $b = 200$ m.

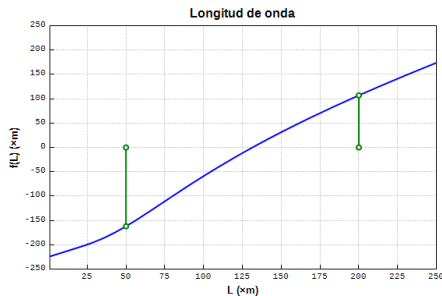
- El resultados es:

$$L_1 = \frac{50 \text{ m} + 200 \text{ m}}{2} = 125 \text{ m.}$$

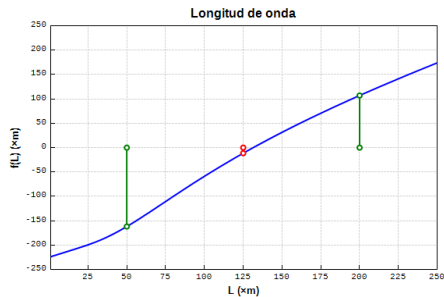
- Y calculemos $f(x_1)$:

$$f(L_1) = -11,4 \text{ m}$$

Método de la Bisección



(a)



(b)

Figura: Método de la Bisección.

Método de la Bisección

- Al aplicar el siguiente procedimiento, podemos determinar el nuevo intervalo:

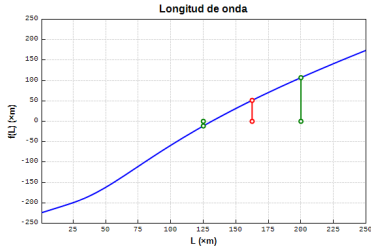
$$\text{Si } f(a) \cdot f(L_1) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \begin{cases} \text{el nuevo intervalo es } (L_1, b), \\ \text{el nuevo intervalo es } (a, L_1). \end{cases}$$

- Como en este caso $f(a) \cdot f(L_1) > 0$, el nuevo intervalo es (125 m, 200 m).
- Continuemos el procedimiento para reducir el intervalo.

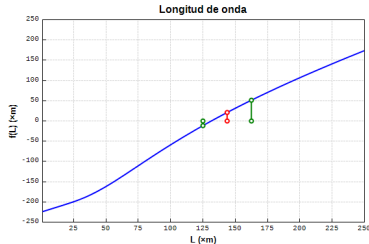
Método de la Bisección

- $L_2 = \frac{L_1+b}{2} = \frac{125 \text{ m}+200 \text{ m}}{2} = 162,5 \text{ m};$
- $f(L_2) = 51,5 \text{ m} \quad f(L_1) \cdot f(L_2) < 0 \Rightarrow (125 \text{ m}; 162,5 \text{ m})$
- $L_3 = \frac{L_1+L_2}{2} = \frac{125 \text{ m}+162,5 \text{ m}}{2} = 143,8 \text{ m};$
- $f(L_3) = 21,2 \text{ m} \quad f(L_1) \cdot f(L_3) < 0 \Rightarrow (125 \text{ m}; 143,8 \text{ m})$
- $L_4 = \frac{L_1+L_3}{2} = \frac{125 \text{ m}+143,8 \text{ m}}{2} = 134,4 \text{ m};$
- $f(L_4) = 5,2 \text{ m} \quad f(L_1) \cdot f(L_4) < 0 \Rightarrow (125 \text{ m}; 134,4 \text{ m})$
- $L_5 = \frac{L_1+L_4}{2} = \frac{125 \text{ m}+134,4 \text{ m}}{2} = 129,7 \text{ m};$
- $f(L_5) = -3,0 \text{ m} \quad f(L_1) \cdot f(L_5) > 0 \Rightarrow (129,7 \text{ m}; 134,4 \text{ m})$

Método de la Bisección



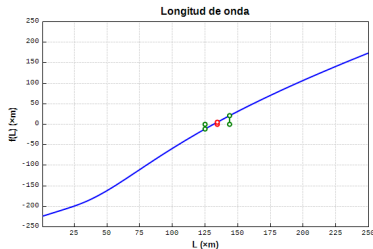
(a) Iteración 2.



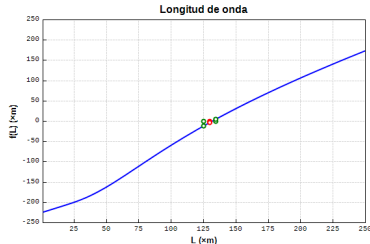
(b) Iteración 3.

Figura: Iteraciones del Método de la bisección.

Método de la Bisección



(a) Iteración 4.



(b) Iteración 5.

Figura: Iteraciones del Método de la bisección. (Cont.)

Método de la Bisección

- Si continuamos con el proceso, obtendremos los siguientes resultados:
 - ① $L_6 = 132,0$ m;
 - ② $L_7 = 130,9$ m;
 - ③ $L_8 = 131,4$ m;
 - ④ $L_9 = 131,2$ m;
 - ⑤ $L_{10} = 131,3$ m;
 - ⑥ $L_{11} = 131,4$ m;
 - ⑦ $L_{12} = 131,4$ m.
- Hemos terminado el ciclo con el resultado de L_{12} , cuyo resultado da $f(L = L_{12}) = 0,02$ m, que podemos considerar como cero.

Método de la Bisección

- Podemos quedarnos con que la raíz de la función es $L = 131,4$ m y que hemos necesitado 12 iteraciones para obtenerla. Si generalizamos lo aplicado tenemos el siguiente algoritmo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{b - a}{2^i}$$

con la verificación

$$f(x_{i+1}) \cdot f(a) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow (x_{i+1}, b) \\ < 0 & \Rightarrow (a, x_{i+1}). \end{cases}$$

- Este algoritmo es muy lento pero tiene la ventaja que converge siempre. Nos falta determinar una forma menos arbitraria para interrumpir las iteraciones.

Criterios de interrupción

- Para determinar criterios de interrupción nos apoyaremos en los conceptos vistos en Errores.
 - ❶ Lo ideal sería que se cumpliera que $f(x_n) = 0$, pero eso no va a ocurrir.
 - ❷ El primer criterio será tomar un valor ε muy pequeño y que se cumpla que $|f(x_n)| \leq \varepsilon$.
 - ❸ Si bien es un criterio válido, por definición cualquier solución aproximada \tilde{x} tenderá a que $f(\tilde{x}) \approx 0$.
 - ❹ Un criterio más avanzado es tomar el error absoluto y definir que $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, asumiendo que el valor de x_n es el más cercano a la solución.
 - ❺ El criterio más avanzado es tomar el error relativo, definir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq \varepsilon$, y asumir que x_n es la raíz buscada.
- Lo usual es una combinación de uno de los últimos dos criterios con el primero, de manera de evitar que un valor intermedio pudiere ser una solución más precisa que aplicando solamente un criterio.

Método de la «Regula-Falsi»

- Vimos que el método de la bisección es un método que converge siempre que la misma es muy lenta.
- Analizaremos ahora otro método, el conocido como *Método de la «Regula-Falsi»* o de la *Falsa Posición*.
- El método se basa en usar la información que puede facilitarnos la función en estudio.
- La forma de utilizar esa información es generar una recta que una los valores extremos de nuestro intervalo ($a = 50$ m, $b = 200$ m):

$$c(L) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(L - a)$$

Método de la «Regula-Falsi»

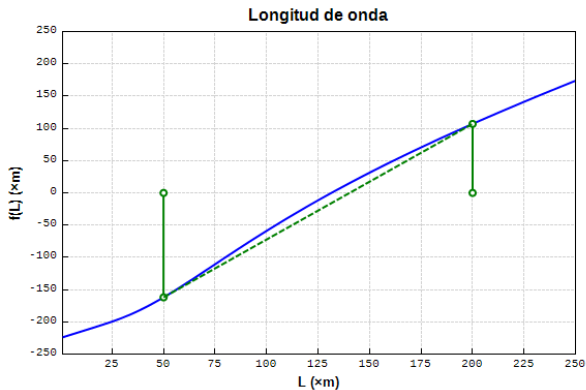


Figura: Método de la «Regula-Falsi».

Método de la «Regula-Falsi»

- El método consiste en buscar el valor que anula a la recta que hemos definido entre $f(a)$ y $f(b)$:

$$\begin{aligned}0 &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(L - a), \\-f(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(L - a), \\L - a &= -f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}, \\L &= a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}, \\x &= a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}\end{aligned}$$

Método de la «Regula-Falsi»

- Con este algoritmo aproximaremos un valor x_1 :

$$L_1 = 50 \text{ m} - f(50 \text{ m}) \frac{200 \text{ m} - 50 \text{ m}}{f(200 \text{ m}) - f(50 \text{ m})} = 147,3 \text{ m}$$
$$f(L_1) = f(147,3 \text{ m}) = 15,3 \text{ m}.$$

- El valor de $f(L_1)$ muestra que la aproximación es buena pero no es la raíz buscada.

Método de la «Regula-Falsi»

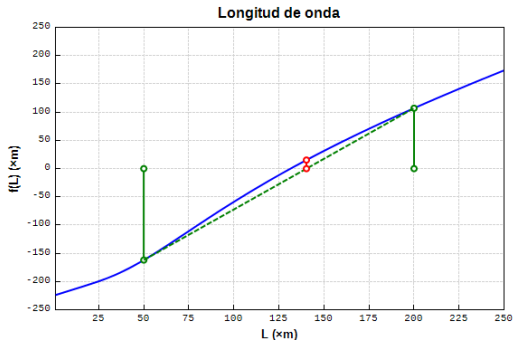


Figura: Aproximación de la raíz.

Método de la «Regula-Falsi»

- Al igual que para el método de la bisección, debemos definir el nuevo intervalo. Lo haremos con el mismo procedimiento que usamos en ese método:

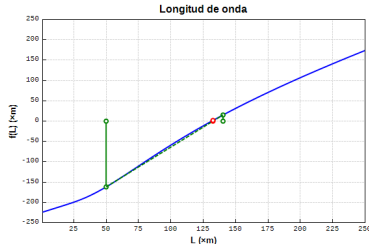
$$f(a) \cdot f(L_1) \begin{cases} > 0 & \text{intervalo } (L_1, b) \\ < 0 & \text{intervalo } (a, L_1) \end{cases}$$

- Con los valores de $f(a) = -161,8$ m y $f(L_1) = 15,3$ m, el nuevo intervalo es (a, L_1) . Calculemos más aproximaciones.

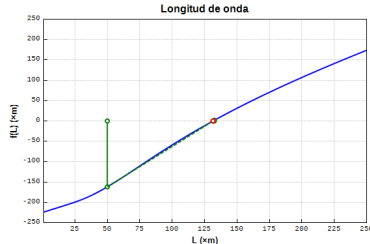
Método de la «Regula-Falsi»

- $L_2 = a - f(a) \frac{L_1 - a}{f(L_1) - f(a)} = 132,5 \text{ m};$
- $f(L_2) = 1,9 \text{ m} \quad f(a) \cdot f(L_2) < 0 \Rightarrow (50 \text{ m}; 132,5 \text{ m})$
- $L_3 = a - f(a) \frac{L_2 - a}{f(L_2) - f(a)} = 131,5 \text{ m};$
- $f(L_3) = 0,2 \text{ m} \quad f(a) \cdot f(L_3) < 0 \Rightarrow (50 \text{ m}; 131,5 \text{ m})$
- $L_4 = a - f(a) \frac{L_3 - a}{f(L_3) - f(a)} = 131,4 \text{ m};$
- $f(L_4) = 0,03 \text{ m} \quad f(a) \cdot f(L_4) < 0 \Rightarrow (50 \text{ m}; 131,4 \text{ m})$
- $L_5 = a - f(a) \frac{L_4 - a}{f(L_4) - f(a)} = 131,4 \text{ m};$
- $f(L_5) = 0,003 \text{ m.}$ El valor L_5 es la raíz buscada.

Método de la «Regula-Falsi»



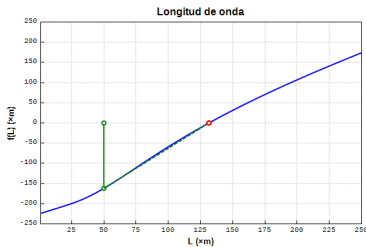
(a) Iteración 2.



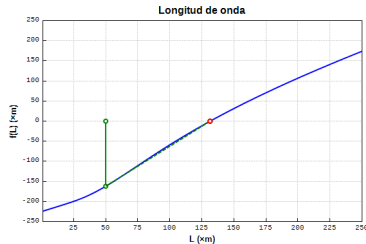
(b) Iteración 3.

Figura: Iteraciones del Método de la «Regula-Falsi».

Método de la «Regula-Falsi»



(a) Iteración 4.



(b) Iteración 5.

Figura: Iteraciones del Método de la «Regula-Falsi». (Cont.)

Comparación de resultados

- Comparemos los resultados obtenidos con el *Método de la «Regula-Falsi»* y con el *Método de la Bisección*, para verificar que efectivamente el primero converge más rápido que el segundo.
- Hemos adoptado el valor $\varepsilon = 0,1$, una tolerancia «grosera», y el criterio $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, efectivo en este caso para comparar resultados en forma rápida.
 - ① *Método de la Bisección*: $L_{12} = 131,4 \text{ m} \Rightarrow f(L_{12}) = 0,02 \text{ m}$;
 - ② *Método de la «Regula-Falsi»*: $L_5 = 131,4 \text{ m} \Rightarrow f(L_5) = 0,003 \text{ m}$
(Nota: los valores de L_i fueron redondeados a un decimal al escribirlos en esta presentación, pero los resultados de $f(L_i)$ fueron obtenidos con el valor completo.)
- Solamente con ver el subíndice de cada solución, podemos notar que el *Método de la «Regula-Falsi»* convergió más rápido.

Métodos de Refinamiento

- Hemos visto dos métodos para obtener la raíz de una ecuación. Con un ejemplo, hemos conseguido obtener aproximaciones de la raíz con diferentes «calidad».
- En el primer caso, usando el método de la bisección, la raíz la encontramos luego de 12 iteraciones, en tanto que aplicando el *Método de la «Regula–Falsi»* lo logramos en 5 iteraciones.
- Analizaremos ahora un serie de métodos cuya premisa principal es la de mejorar la calidad de las aproximaciones, tanto en cuanto a precisión como en la rapidez de convergencia.
- Se denominan «*Métodos de Refinamiento*».

Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo

- El primero de estos métodos es el más sencillo. Se denomina «Método de las Aproximaciones Sucesivas o de Punto Fijo».
- Consiste en escribir la ecuación de una forma levemente diferente:

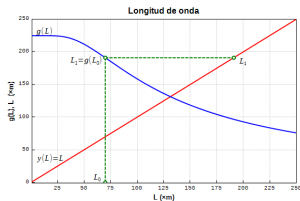
$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x - g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = g(x).$$

- En nuestro ejemplo, la ecuación queda así:

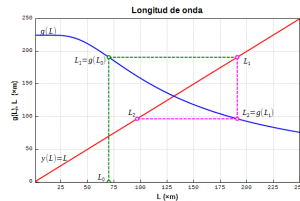
$$L = g(L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right).$$

- Comenzaremos esta vez con $L_0 = 70$ m.

Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo



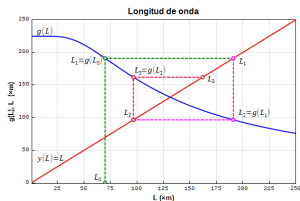
(a) Iteración 1.



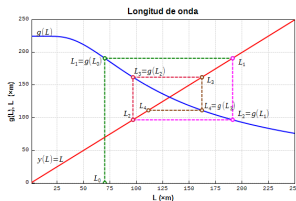
(b) Iteración 2.

Figura: Método de las Aproximaciones Sucesivas.

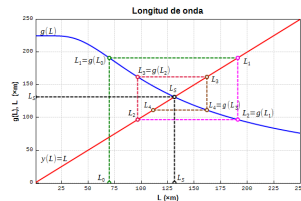
Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo



(a) Iteración 3.



(b) Iteración 4.



(c) Iteración 5.

Figura: Método de las Aproximaciones Sucesivas. (Cont.)

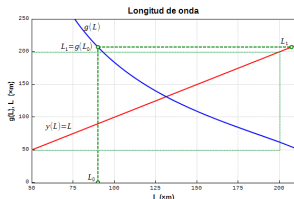
Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo

- Los gráficos anteriores nos muestran que el método va convergiendo hacia la solución como si fuera una espiral.
- Si bien lo hace lentamente, contrariamente a lo que hemos dicho, queda evidentemente que cada iteración está más cerca de la raíz buscada.
- Veamos que pasa si cambiamos la función $g(L)$ anterior por esta otra:

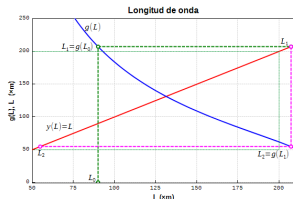
$$g(L) = 2 \cdot \pi \cdot d \frac{1}{\operatorname{arc} \tanh \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot L}{g \cdot T^2} \right)}. \quad (1)$$

- Y empezamos con $L_0 = 90$ m.

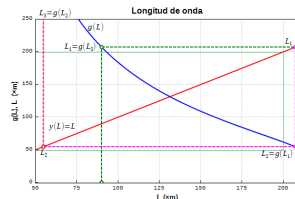
Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo



(a) Iteración 1.



(b) Iteración 2.



(c) Iteración 3.

Figura: Método de las Aproximaciones Sucesivas con una nueva función $g(x)$.

Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo

- En la última iteración, el valor no se ve en el gráfico porque se salió del intervalo en el que estamos trabajando.
- Queda evidente que esta nueva $g(L)$ no nos sirve para alcanzar nuestro objetivo.
- Esto nos lleva a que cualquier $g(L)$ que definamos debe cumplir con dos condiciones:

① Primero:

$$g(L) \in (a, b) \text{ para todo } L \in (a, b),$$

y si consideramos x en vez de L ,

$$g(x) \in (a, b) \text{ para todo } x \in (a, b),$$

② Segundo:

$$|g'(L)| \leq M < 1 \text{ para todo } L \in (a, b),$$

y de nuevo, si consideramos x en vez de L ,

$$|g'(x)| \leq M < 1 \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Aproximaciones Sucesivas o Punto Fijo

- Estas dos condiciones nos aseguran que la función $g(L)$ (o $g(x)$) va converger a la solución (la primera), y que esa solución va a ser única (la segunda).
- Sin embargo, no aseguran nada acerca de la existencia de la raíz.
- Si analizamos en detalle, vemos que las características de ambas curvas (las azules) muestran diferencias que se pueden apreciar gráficamente.
- La principal diferencia que puede notarse es la pendiente de esas funciones. En el caso de la primera función, la pendiente es más «suave» que en el caso de la segunda función.

$$g(L) = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \text{ (primera función),}$$

$$g(L) = 2 \cdot \pi \cdot d \frac{1}{\operatorname{arc} \tanh\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot L}{g \cdot T^2}\right)} \text{ (segunda función).}$$

Método de Newton–Raphson

- Si nos fijamos en la última condición impuesta, la misma se refiere a la derivada de la función $g(L)$ (o $g(x)$), que es la pendiente de la función $g(L)$ (o $g(x)$).
- De esa condición surge que cuanto más se acerque a cero la derivada de $g(x)$ ($|g'(x)| \leq M$ y $M \rightarrow 0$), más rápido convergerá la función $g(x)$ a la raíz buscada.
- La idea, entonces definir una nueva función $g(x)$ de manera tal que $g'(x) = 0$.
- Por eso vamos proponer esta función:

$$g(x) = x - \phi(x) \cdot f(x)$$

Método de Newton–Raphson

- Derivemos la función $g(x)$ propuesta:

$$\frac{d g(x)}{d x} = 1 - \phi'(x) \cdot f(x) - \phi(x) \cdot f'(x).$$

- Como queremos que la derivada se anule, nos queda:

$$1 - \phi'(x) \cdot f(x) - \phi(x) \cdot f'(x) = 0.$$

- Puesto que $f(x) \rightarrow 0$, entonces queda:

$$1 - \phi(x) \cdot f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Método de Newton–Raphson

- La nueva función $g(x)$:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

- Nuestro nuevo procedimiento es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

que es conocido como *Método de Newton-Raphson*.

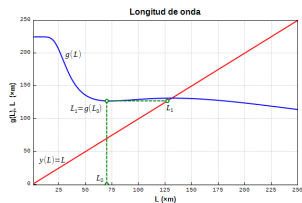
- Vamos a aplicar este método en nuestro ejemplo, con las siguientes funciones:

$$f(L) = L - \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right);$$

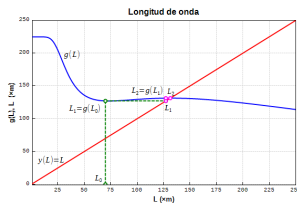
$$f'(L) = 1 + \frac{g \cdot T^2 \cdot d}{x^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d}{L}\right).$$

Método de Newton–Raphson

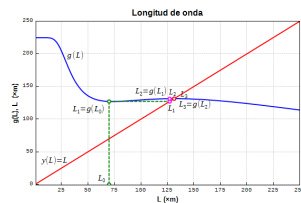
- Empezaremos otra vez con $L_0 = 70$ m



(a) Iteración 1.



(b) Iteración 2.



(c) Iteración 3.

Figura: Iteraciones con el Método de Newton–Raphson.

Método de Newton–Raphson

- En la última iteración, obtenemos $L_3 = 131,4$ m.
- Como vimos, en apenas tres iteraciones alcanzamos una muy buena aproximación del valor buscado.
- Es evidente que el método converge mucho más rápido que los anteriores.
- ¿Qué pasa si no podemos calcular la derivada o resulta muy laborioso hacerlo?

Método de la Secante

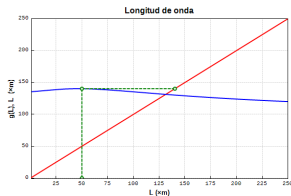
Una forma de resolver el problema sin calcular la derivada es aplicar una aproximación de la misma mediante esta expresión:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

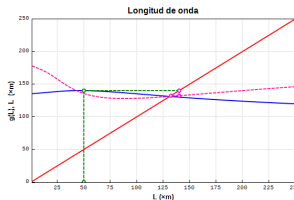
Debemos guardar el valor previo (x_{i-1}) para poder aplicar el método. Apliquemos este método a nuestro ejemplo.

Método de la Secante

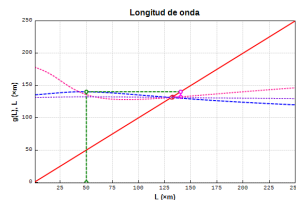
- Empezaremos esta vez con $L_0 = 50$ m



(a) Iteración 1.



(b) Iteración 2.



(c) Iteración 3.

Figura: Iteraciones con el Método de la Secante.

Método de la Secante

- En la última iteración, obtenemos $L_3 = 131,4$ m.
- Al ser un método que discretiza la derivada, la convergencia se da también en tres iteraciones.
- En este caso el método converge tan rápido como el de Newton-Raphson.
- Debemos analizar la convergencia para establecer la «calidad» de los métodos.

Orden de convergencia

- Para analizar la velocidad de convergencia tenemos la siguiente fórmula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x} - x_n|^\alpha} = \lambda.$$

- En el caso del **Método de las Aproximaciones Sucesivas** tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x} - x_n|} = m.$$

- En el caso del **Método de Newton-Raphson** tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x} - x_n|^2} = \frac{M}{2}.$$

Orden de convergencia

- En el caso del **Método de la Secante** se puede demostrar que $\alpha = 1,65$.
- Es evidente que un método de con mayor orden convergencia aproxima mejor y más rápido la solución buscada.
- El **Método de Newton-Raphson** es un método muy potente (tiene un orden de convergencia cuadrático) pero requiere disponer de la derivada primera.
- El **Método de la Secante** es un muy buen método pero su orden de convergencia es «supralineal».
- Analicemos una forma de obtener un método que mejora la convergencia de un método lineal.

Método Δ^2 de Aitken

- Supongamos que tenemos una sucesión de resultados obtenidos por el *Método de las Aproximaciones Sucesivas*:

$$\{x_i\}_{i=0}^{n \rightarrow \infty}.$$

- De esa sucesión, asumiendo que existe \bar{x} (solución teórica) y para un i suficientemente grande, tomemos los siguientes valores:

$$x_i, x_{i+1}, x_{i+2},$$

que cumplan con lo siguiente:

$$\text{signo}(x_i - \bar{x}) = \text{signo}(x_{i+1} - \bar{x}) = \text{signo}(x_{i+2} - \bar{x}).$$

Método Δ^2 de Aitken

- En base a lo anterior, vamos a plantear lo siguiente:

$$\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{x_i - \bar{x}} = \frac{x_{i+2} - \bar{x}}{x_{i+1} - \bar{x}}.$$

- Si operamos algebraicamente tenemos:

$$(x_{i+1} - \bar{x})^2 = (x_{i+2} - \bar{x})(x_i - \bar{x}).$$

y al desarrollar ambos miembros tenemos:

$$x_{i+1}^2 - 2 x_{i+1} \bar{x} + \bar{x}^2 = x_{i+2} x_i - (x_{i+2} + x_i)\bar{x} + \bar{x}^2.$$

Método Δ^2 de Aitken

- Al reagrupar los términos, queda:

$$(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i) \bar{x} = x_{i+2} x_i - x_{i+1}^2.$$

- Si despejamos \bar{x} , obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{x_{i+2} x_i - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

que también podemos escribir así:

$$\bar{x} = \frac{x_{i+2} x_i - 2x_{i+1} x_i + x_i^2 - x_{i+1}^2 + 2x_{i+1} x_i - x_i^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

Método Δ^2 de Aitken

- Nuevamente, reagrupamos los términos y obtenemos la siguiente expresión:

$$\bar{x} = \frac{(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)x_i - (x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i},$$

que podemos escribir así:

$$\bar{x} = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i},$$

y es una nueva aproximación del valor buscado.

Método Δ^2 de Aitken

- Con la fórmula anterior podemos crear una nueva sucesión de aproximaciones de la solución:

$$\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{n \rightarrow \infty}, \quad \tilde{x}_i = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}.$$

- Si definimos:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$\Delta^2 x_i = \Delta(\Delta x_i) = \Delta(x_{i+1} - x_i) = \Delta x_{i+1} - \Delta x_i,$$

$$\Delta^2 x_i = (x_{i+2} - x_{i+1}) - (x_{i+1} - x_i) = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i.$$

Método Δ^2 de Aitken

- La nueva sucesión de aproximaciones la escribimos de esta forma:

$$\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{n \rightarrow \infty}, \quad \tilde{x}_i = x_i - \frac{(\Delta x_i)^2}{\Delta^2 x_i}.$$

- Este nuevo método es el que se conoce como «*Método Δ^2 de Aitken*».
- Este método transforma una sucesión de convergencia lineal en otra de convergencia cuadrática.

Método de Steffensen

- Una forma de aplicar el *Método Δ^2 de Aitken* es la siguiente:
 - A partir del valor inicial x_0 obtenemos mediante el *Método de las Aproximaciones Sucesivas* las aproximaciones x_1 y x_2 :

$$x_0^{(0)} \rightarrow x_1^{(0)} = g(x_0^{(0)}) \rightarrow x_2^{(0)} = g(x_1^{(0)}).$$

- Al aplicar el *Método Δ^2 de Aitken*, obtenemos:

$$x_0^{(1)} = x_0^{(0)} - \frac{(\Delta x_0^{(0)})^2}{\Delta^2 x_0^{(0)}}.$$

- Ahora tenemos un nuevo valor inicial, $x_0^{(1)}$, a partir del cual calculamos dos nuevas aproximaciones.

Método de Steffensen

- Con este nuevo valor obtenemos, mediante el *Método de las Aproximaciones Sucesivas*, las aproximaciones $x_1^{\langle 1 \rangle}$ y $x_2^{\langle 1 \rangle}$:

$$x_0^{\langle 1 \rangle} \rightarrow x_1^{\langle 1 \rangle} = g(x_0^{\langle 1 \rangle}) \rightarrow x_2^{\langle 1 \rangle} = g(x_1^{\langle 1 \rangle}).$$

- Nuevamente, al aplicar el *Método Δ^2 de Aitken*, obtenemos::

$$x_0^{\langle 2 \rangle} = x_0^{\langle 1 \rangle} - \frac{(\Delta x_0^{\langle 1 \rangle})^2}{\Delta^2 x_0^{\langle 1 \rangle}}.$$

- Así podemos continuar hasta que se cumpla que:

$$\frac{|x_0^{\langle i \rangle} - x_2^{\langle i-1 \rangle}|}{|x_0^{\langle i \rangle}|} \leq TOL.$$

Método de Steffensen

- Esta forma de aplicar el *Método Δ^2 de Aitken* se conoce como *Método de Steffensen*.
- Existe otra forma de escribirlo que facilita la aplicación del mismo.
- Por el *Método de las Aproximaciones Sucesivas*, tenemos:

$$x = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) - x \Rightarrow g(x) = x + f(x)$$

por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= g(x_i) = x_i + f(x_i), \\x_{i+2} &= g(x_{i+1}) = x_{i+1} + f(x_{i+1}).\end{aligned}$$

Método de Steffensen

- Si tomamos la expresión del *Método Δ^2 de Aitken*:

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{(x_{i+2} - x_{i+1}) - (x_{i+1} - x_i)},$$

podemos escribirla así:

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{(x_i + f(x_i) - x_i)^2}{(x_{i+1} + f(x_{i+1}) - x_{i+1}) - (x_i + f(x_i) - x_i)} = x_i - \frac{[f(x_i)]^2}{f(x_{i+1}) - f(x_i)},$$

$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{[f(x_i)]^2}{f[x_i + f(x_i)] - f(x_i)},$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{[f(x_i)]^2}{f[x_i + f(x_i)] - f(x_i)}.$$

Método de Steffensen

- Con esta nueva forma de escribir el *Método de Steffensen* resulta mucho más rápida la evaluación de los resultados.
- Basta con verificar que:

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} \leq TOL,$$

para dejar de iterar.

- Además, su formulación es parecida al *Método de la Secante*, con la ventaja de que la convergencia tiende a ser cuadrática.
- La desventaja es que hay que pasar dos veces por la función $f(x)$: para calcular $f(x_i)$ y para calcular $f[x_i + f(x_i)]$.

Método de Halley

- Hasta ahora hemos visto métodos con convergencia lineal y cuadrática. Pero, ¿habrá métodos con orden de convergencia mayor?
- El primer método con esta característica será un método con convergencia cúbica.
- Cuando obtuvimos el *Método de Newton-Raphson*, lo hicimos a partir del *Método de las Aproximaciones Sucesivas*.
- Asumimos que la derivada de $g(x)$, $g'(x)$, debía tender a cero, y propusimos una función $g(x)$ que cumpliera esa premisa.
- Ahora vamos a proponer una mejora del *Método de Newton-Raphson*:

$$x = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)},$$

con la función $\phi(x)$ que mejora el método.

Método de Halley

- Vamos a proponer la siguiente función $\phi(x)$:

$$\phi(x) = f(x) \cdot \gamma(x).$$

- Esta función deberá cumplir lo siguiente:

$$\phi'(x) \neq 0, \quad \phi''(x) = 0 \quad \text{y} \quad \phi'''(x) \neq 0.$$

- Como $\phi''(x) = 0$, queda:

$$f''(\bar{x}) \gamma(\bar{x}) + 2 f'(\bar{x}) \gamma'(\bar{x}) + f(\bar{x}) \gamma''(\bar{x}) = 0,$$

con \bar{x} solución de la ecuación y, por lo tanto, $f(\bar{x}) = 0$.

- En consecuencia, la ecuación queda:

$$f''(\bar{x}) \gamma(\bar{x}) + 2 f'(\bar{x}) \gamma'(\bar{x}) = 0.$$

Método de Halley

- Si la convertimos en una ecuación diferencial:

$$f''(x) \gamma(x) + 2 f'(x) \gamma'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} = -\frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)},$$

obtenemos la función $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{f'(x)}}.$$

- La nueva función $\phi(x)$ queda:

$$\phi(x) = f(x) \cdot \gamma(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}.$$

Método de Halley

- Ahora tenemos nuestro nuevo método:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\phi(x_i)}{\phi'(x_i)} = x_i - \frac{\phi(x_i)}{\left. \frac{d\phi(x)}{dx} \right|_{x=x_i}}.$$

- Al desarrollar la expresión, queda:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2}{2 - \frac{f(x_i) f''(x_i)}{f'(x_i)^2}} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

que se conoce como *Método de Halley* y es de convergencia cúbica.

Método de Chebychev

- Existe otro método de convergencia cúbica.
- Lo obtenemos mediante un desarrollo de la serie de Taylor, si proponemos que $f(x) = y = 0$ y $x = \phi(y) = \phi(0)$.
- El desarrollo resulta:

$$\phi(0) = \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 + \frac{1}{2}\phi''(y_0)y_0^2 \quad \text{con} \quad x_0 = \phi(y_0),$$

$$\phi(0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{1}{2} \frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3} [f(x_0)]^2,$$

que resulta en la siguiente iteración:

$$x_{i+1} = x_i - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f(x_i) f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right) \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

conocido como el *Método de Chebychev*.

Resumen

- ① Métodos de arranque
 - Método de la Bisección.
 - Método de la «Regula-Falsi» o de la Falsa Posición.
- ② Métodos de refinamiento
 - Método de las Aproximaciones Sucesivas.
 - Método de Newton-Raphson.
 - Método de la Secante.
 - Método Δ^2 de Aitken.
 - Método de Steffensen.
 - Método de Halley.
 - Método de Chebychev.

Resumen

- **Método de la Bisección:** converge siempre; es muy lento; sirve como arranque para acotar el intervalo.
- **Método de la «Regula-Falsi» o de la Falsa Posición:** similar al anterior; converge un poco más rápido.
- **Método de las Aproximaciones Sucesivas:** la convergencia depende de $g(x)$; si $g'(x) \approx 0$ su convergencia es rápida; es un método de refinamiento muy usado.
- **Método de Newton-Raphson:** convergencia cuadrática (aunque no siempre); derivado del anterior (*refinamiento*); requiere conocer la derivada primera y que la misma no se anule en el intervalo.
- **Método de la Secante:** convergencia supralineal; fácil de operar; aproxima la derivada de la función; muy usada en las calculadoras.

Resumen

- **Método Δ^2 de Aitken:** convergencia cuadrática (*refinamiento*); requiere una sucesión para afinar la aproximación; poco práctico de programar; muy bueno si no se conoce la función.
- **Método de Steffensen:** convergencia cuadrática (*refinamiento*); no requiere conocer la derivada primera; requiere pasar dos veces por la función; alternativa interesante al método de la secante.
- **Método de Halley:** convergencia cúbica (*refinamiento*); requiere conocer las dos primeras derivadas; poco práctico para programar.
- **Método de Chebychev:** convergencia cúbica (*refinamiento*); requiere conocer las dos primeras derivadas; menos preciso que el método de Halley.

Bibliografía

- Burden, R. L., Faires, J. D. & Burden, A. M. *Análisis Numérico*. Décima Edición, CENGAGE Learning, 2016.
- Samarski, A. A. *Introducción a los métodos numéricos*. Editorial Mir, 1986.
- Higham, N.J. *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM. 1996.
- Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. y Salanova, M. A. *El método de Halley: posiblemente el método más redescubierto del mundo*. Universidad de La Rioja, España. 2001.