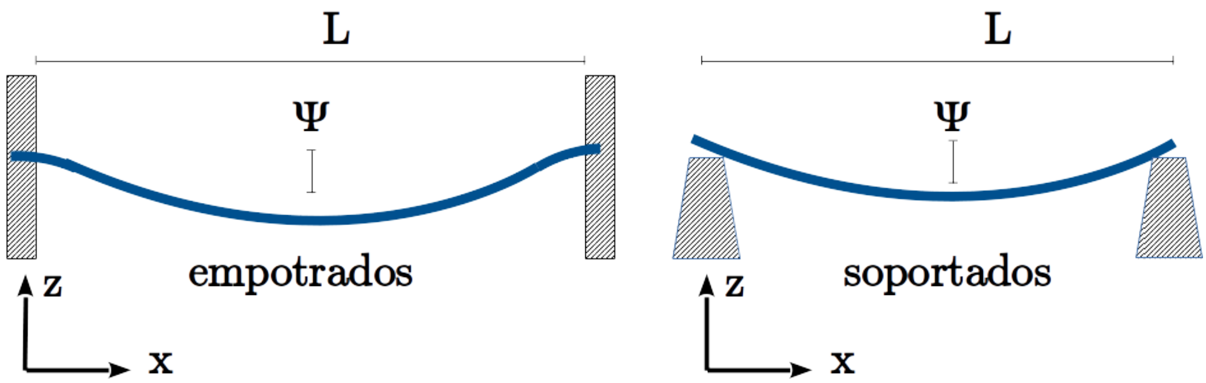
Flexión de una viga

Una viga horizontal (de longitud L en la dirección $\hat{x}$) puede flexionar transversalmente cuando se le aplica una presión en la dirección $\hat{z}$, según se muestra en la figura.



El modelo de pequeña amplitud $\psi(x)$ de la viga es

$$f(x) = \kappa \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \tag{1}$$

donde $f(x)$ es la fuerza aplicada sobre la viga por unidad de longitud, en la dirección $\hat{z}$. κ representa una constante elástica.

Para producir una flexión en la viga es necesario fijar los bordes $\psi(0) = 0$ y $\psi(L) = 0$. Sin embargo, a diferencia de una cuerda, el borde de una viga puede estar "empotrado" o "apoyado" (ver diagrama arriba). En cada caso, se debe añadir la siguiente condición de contorno

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{\text{borde}} = 0 & \text{empotrado} \\[2ex] \left.\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_{\text{borde}} = 0 & \text{apoyado} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Se desea obtener las frecuencias naturales de la viga. La ecuación dinámica de la viga es $f(x) = -\rho S \ddot{\psi}$, y su ecuación de autovalores (para $\ddot{\psi} = -\omega^2 \psi$) resulta

$$\omega^2 \psi = \frac{\kappa}{\rho S} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \tag{3}$$

donde ρ es la densidad volumétrica de la viga y S es el área transversal.

Aproxime la derivada de la expresión (3) por medio de las diferencias

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} \approx \frac{1}{\ell^4}\big[\psi_{n+2} - 4\psi_{n+1} + 6\psi_n - 4\psi_{n-1} + \psi_{n-2}\big] \tag{4}$$

en donde ψ_0, ..., ψ_{N+1} son los desplazamientos en puntos equidistantes a lo largo de la viga. Los desplazamientos en los bordes corresponden a $\psi_0 = \psi(0)$ y $\psi_{N+1} = \psi(L)$. La longitud $\ell = L/(N+1)$ es la distancia entre puntos consecutivos.

Escriba la expresión (3) como un sistema de ecuaciones lineales. Imponga las condiciones de borde de "empotrado" o "soporte" (elija una de ellas para ambos extremos; opcionalmente, puede analizar los dos casos: dos extremos "empotrados" y dos "soportados"). Recuerde que la aproximación de cada condición es

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\text{borde}} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \psi_{n\pm1} - \psi_n = 0 & \text{(empotrado)} \\[2ex] \left.\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|_{\text{borde}} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \psi_{n\pm1} - 2\psi_n + \psi_{n\mp1} = 0 & \text{(apoyado)} \end{cases} \tag{5}$$

Notar que la relación (4) involucra los desplazamientos en ψ_{-1}, ψ_{N+2}. Ambos están fuera de la viga. Sin embargo, como sabemos que $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$, ambos puntos puntos quedan fijados a partir de las respectivas condiciones en (5).

Identifique los auto-valores μ^4 asociados con los auto-vectores columna $(\psi_1, ..., \psi_N)$. Relacione los auto-valores μ^4 con las frecuencias naturales ω^2 y con el número de onda $k(\omega)$.

Calcule las longitudes de onda $\lambda = 2\pi/k$ compatibles con la condición de "empotrado" o "soportado" (a su elección). Para ello, utilice un código computacional capaz de obtener los auto-valores μ^4 y sus longitudes asociadas. Si decide asistirse por `Python`, primero debe construir las matrices de coeficientes asociadas al sistema (3), y luego obtener sus auto-valores.

Una forma fácil de construir una matriz con diagonales adyacentes (de tamaño N) en `Python` es por medio del siguiente código

```
a = np.zeros(N)

a[0] =  6
a[1] = -4
a[2] =  1

first_row = np.array(a)
first_col = np.array(a)

B = toeplitz(first_col, first_row)

print(B)
```

Recuerde importar las librerías `numpy`, `scipy` y `pylab` para correrlo. Modifique este código para adaptarlo a sus necesidades.

El cómputo de los auto-valores μ^4 (y auto-vectores) se lo puede realizar por medio de las instrucciones

```
mu4, v = la.eig(B)

print(np.sort(mu4))
```

donde `mu4` y `v` son los auto-valores μ^4 y los auto-vectores, respectivamente. La instrucción `np.sort(mu4)` es para que los auto-valores se impriman en orden ascendente.

(b) Analice las frecuencias ω asociadas a cada auto-valor μ^2. Primero estudie la frecuencia mínima $\omega_{\min}$ que se obtiene para un número creciente de puntos $N = 4, 5, 6, 7, ..., 500$. Presente los resultados en un gráfico de $\omega_{\min}$ vs. $h = L/(N+1)$ (considere, por simplicidad, $L = 1$ y $\rho S/\kappa = 1$). Verifique si

$$\omega_{\min} = \begin{cases} \dfrac{22,4}{L^2}\sqrt{\dfrac{\kappa}{\rho S}} & \text{(empotrado)} \\[2ex] \dfrac{9,87}{L^2}\sqrt{\dfrac{\kappa}{\rho S}} & \text{(soportado)} \end{cases} \tag{6}$$

Además, compare los números de onda hallados con los valores teóricos para la viga que se obtienen analíticamente. Las fórmulas analíticas para los números de onda son las siguientes

$$\begin{cases} \cos(kL)\cosh(kL) = 1 & \text{(empotrado)} \\ \\ \operatorname{sen}(kL) = 0 & \text{(soportado)} \end{cases} \tag{7}$$

Realice la comparación por medio de un gráfico de las longitudes λ (obtenidas a partir de los auto-valores) versus las longitudes de onda determinadas a partir de (7). Grafique los casos $N = 10$ y $N = 100$ para comparar una situación con pocos puntos respecto de otra con muchos puntos, respectivamente. Puede elegir hacerlo para la viga "empotrada", o bien, para la "soportada". Si desea, puede hacerlo para ambas.

El cómputo de las longitudes de onda para el caso "empotrado" en (7) tendrá que realizarlo numéricamente. Es decir, debe hallar numéricamente las raíces de la ecuación

$$\cos(2\pi L/\lambda)\cosh(2\pi L/\lambda) - 1 = 0 \tag{8}$$

Si decide asistirse con `Python` debe importar la siguiente librería

```
from scipy.optimize import fsolve
```

Luego defina la función (8) del siguiente modo

```
def f(x): return np.cos(2*pi*L/x)*np.cosh(2*pi*L/x) - 1
```

`Python` busca la raíz de la función `f(x)` a partir de un valor inicial `x0` por medio de la intrucción `fsolve(f,x0)`. Puede imprimir el resultado de la búsqueda haciendo

```
y = fsolve(f,x0)
print(y)
```

Observe que un buen punto de inicio `x0` es cualquier longitud de onda λ hallada por medio de los auto-valores. Por lo tanto, si repite este procedimiento para todos los λ, obtendrá el valor teórico asociado (o más próximo) a ese λ. Si la coincidencia entre los valores de λ por auto-valor y los teóricos fuese perfecta, todos los puntos del gráfico caerían sobre una recta de pendiente unitaria. Puede incluir esta recta en el gráfico como referencia.

(c) Considere la condición de borde "empotrado" (si lo desea, puede repetir este mismo análisis para el caso de "soportado"). Aplique una fuerza vertical $F = -0{,}1$ sobre el punto central de la viga ($x = L/2$). Obtenga los desplazamientos de equilibrio ψ_n. Es conveniente que la cantidad de puntos N sea impar, de manera que uno de los desplazamientos corresponda al del punto medio de la viga.

Recuerde que la expresión (1) corresponda a la fuerza por unidad de longitud, es decir, $f = F/\ell$. Suponga, por simplicidad, que $\kappa = 1$ y $L = 1$.

(d) Libere la fuerza y estudie la evolución temporal de la viga $\psi_n(t)$. Para ello, considere los desplazamientos hallados a partir de la aplicación de la fuerza como condición inicial de la evolución temporal. Recuerde que la viga alcanzó una condición de reposo al instante de ser liberada de la fuerza.

Las condiciones iniciales excitan muchos modos de la viga, por lo que debe dejar de lado la relación para un único modo $f = \rho S\, \omega^2 \psi_n$ y reemplazarla por $f = -\rho S\, \ddot{\psi}_n$. Hacemos la aproximación

$$\ddot{\psi}_n \approx \frac{1}{\tau^2}\big[\psi_n(t+\tau) - 2\,\psi_n(t) + \psi_n(t-\tau)\big] \tag{9}$$

donde τ es un pequeño intervalo temporal. Si expresa esta aproximación en términos del vector columna $\Psi = (\psi_1, ..., \psi_N)$ y se iguala con el sistema lineal hallado en el item (a), se arriba al esquema algorítmico de Verlet

$$-B\,\Psi(t) \approx \frac{\rho S}{\kappa}\,\frac{h^4}{\tau^2}\big[\Psi(t+\tau) - 2\,\Psi(t) + \Psi(t-\tau)\big] \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(t+\tau) \approx \left[2I - \frac{\kappa}{\rho S}\,\frac{\tau^2}{h^4}\,B\right]\Psi(t) - \Psi(t-\tau) \tag{11}$$

donde B es la matriz generada por medio del código `Python` en el item (a). I es la matriz identidad ($N \times N$). El esquema de Verlet es fácilmente codificable. En `Python` se escribe del siguiente modo

```
t = 0.0

r2 = (c**2)*(tau**2)/(h**4)

Psi0 = Psi1

while (t<tmax):

    Psi_new = (2*I-r2*B).dot(Psi1)-Psi0

    Psi0 = Psi1

    Psi1 = Psi_new

    t = t + tau
```

donde $c^2 = \kappa/(\rho S)$. `Psi0` y `Psi1` corresponden a $\Psi(t-\tau)$ y $\Psi(t)$, respectivamente.

Implemente el esquema de Verlet para las condiciones iniciales señaladas más arriba. Recuerde que la condición inicial $\dot{\psi}(0) = 0$ se puede aproximar a $\psi(\tau) \approx \psi(0)$. Explique qué suposiciones hace esta aproximación respecto de la aceleración y del equilibrio de fuerzas en el sistema.

Simule la evolución del sistema para once puntos equidistantes ($N = 11$) y un periodo de tiempo $0 < t \leq 10$. Suponga $\tau = 0{,}05$ y $c^2 = 0{,}001$. Muestre sus resultados por medio de "fotos" del sistema, o bien, por medio de una animación. Incluya los puntos ψ_0 y ψ_{N+1} en los gráficos.

Examine en detalle la evolución del movimiento de la viga para $c^2 = 0{,}004$, $c^2 = 0{,}005$ y $c^2 = 0{,}006$. Grafique el perfil de la viga en algún instante crítico (si lo hay). Además, grafique ψ_6 como función del tiempo, es decir, $\psi_6(0), \psi_6(\tau), \psi_6(2\tau), \psi_6(3\tau), \ldots$ para los valores de c^2 indicados y $c^2 = 0{,}01$.

Explique los fenómenos de "inestabilidad" que observa. Para ello, tenga en cuenta que la expresión (11) implica

$$
\begin{aligned}
\psi_n(t+\tau) &\approx 2(1-3\beta^2)\,\psi_n(t) - \psi_n(t-\tau) + \\
&+ 4\beta^2\big[\psi_{n+1}(t) + \psi_{n-1}(t)\big] - \beta^2\big[\psi_{n+2}(t) + \psi_{n-2}(t)\big]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

donde $\beta^2 = c^2\tau^2/h^4$. Realice un análisis de la solución oscilante $\psi \sim \exp[i(kx - \omega t)]$. Introduzca esta función en la expresión (12) y determine qué condición debe cumplir β^2 en este caso. Asocie este resultado con lo observado en los gráficos. Esta condición se conoce como condición de Courant.