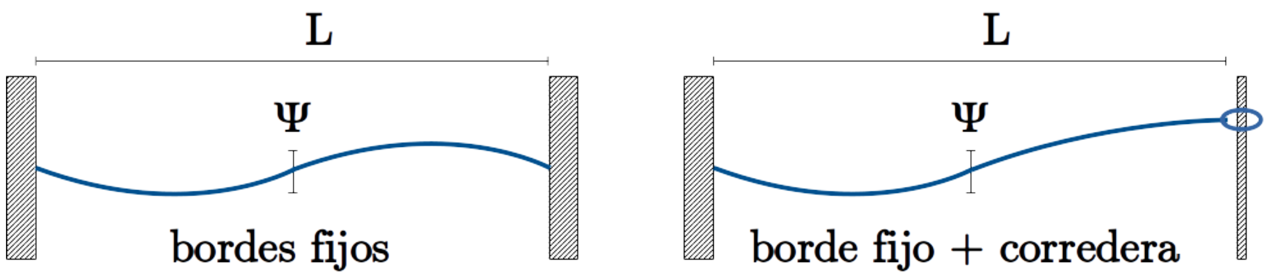
Cuerda

Una cuerda de densidad lineal ρ está fija en $x = 0$. La cuerda tiene longitud L. El borde en $x = L$ puede estar fijo, o bien, deslizarse sobre una corredera (sin fricción), según se muestra en la figura.



La condición de borde para el desplazamiento transversal ψ de la cuerda es

$$\begin{cases} \psi\big|_{\text{borde}} = 0 & \text{fijo} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{\text{borde}} = 0 & \text{corredera} \end{cases} \tag{1}$$

El modelo de pequeña amplitud transversal de la cuerda cuando está tensionada es el siguiente

$$f(x) = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{2}$$

donde $f(x)$ es la fuerza (tangencial) por unidad de longitud actuando en la cuerda, y T_0 es la tensión de la misma. ρ es su densidad lineal.

(a) Considere un movimiento armónico para cada punto de la cuerda $\ddot{\psi} = -\omega^2 \psi$. Determine las frecuencias naturales de la cuerda bajo la condición de borde “fijo” y de “corredera” en el punto $x = L$ (recuerde que $\psi(0) = 0$). Para ello, aproxime la derivada segunda en la ec.(2) del siguiente modo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} \left[\psi_{n+1}(t) - 2\,\psi_n(t) + \psi_{n-1}(t) \right] \tag{3}$$

donde los desplazamientos ψ_0, ψ_1,...,ψ_{N+1} corresponden a puntos equidistantes de la cuerda, separados por una distancia $h = L/(N+1)$. El desplazamiento ψ_0 corresponde al borde $x = 0$ y el desplazamiento ψ_{N+1} corresponde al borde $x = L$.

Exprese la ec. (2) como un sistema lineal. Imponga las condiciones de borde sobre ψ_0 y ψ_{N+1} de manera que el sistema quede expresado como función de los desplazamientos $(\psi_1, ..., \psi_N)$.

Identifique los auto-valores μ^2 asociados con los auto-vectores columna $(\psi_1, ..., \psi_N)$. Relacione los auto-valores μ^2 con la frecuencia natural ω y con la longitud de onda asociada $\lambda = 2\pi c/\omega$ ($c^2 = T_0/\rho$). Esta última resulta más práctica para visualizar el fenómeno.

Calcule las longitudes de onda λ compatibles con ambas condiciones de borde. Para ello, utilice un código computacional capaz de obtener los auto-valores μ^2 y sus longitudes asociadas. Si decide asistirse por `Python`, primero debe construir las matrices de coeficientes asociadas al sistema (2), y luego obtener los autovalores.

Una forma fácil de construir una matriz tridiagonal (de tamaño N) en `Python` es por medio del siguiente código

```
a = np.zeros(N)

a[0] = 2
a[1] = -1

first_row = np.array(a)
first_col = np.array(a)

B = toeplitz(first_col, first_row)

print(B)
```

Recuerde importar las librerías `numpy`, `scipy` y `pylab` para correrlo. Modifique este código para adaptarlo a sus necesidades.

El cómputo de los auto-valores μ^2 (y auto-vectores) se lo puede realizar por medio de las instrucciones

```
mu, v = la.eig(B)

print(np.sort(mu))
```

donde `mu` y `v` son los auto-valores μ^2 y auto-vectores, respectivamente. La instrucción `np.sort(mu)` es para que los auto-valores se impriman en orden ascendente.

(b) Analice las longitudes de onda λ asociadas a cada auto-valor μ. Para ello estudie la longitud de onda mínima $\lambda_{\rm min}$ que se obtiene para un número creciente de puntos $N = 2, 3, 4, 5, ..., 50$. Presente los resultados en un gráfico de $\lambda_{\rm min}$ vs. $h = L/(N+1)$ (considere, por simplicidad, $L = 1$). Verifique si $\lambda_{\rm min} \approx \pi h$.

Recuerde que la ec.(3) es equivalente a la siguiente relación de recurrencia.

$$\psi_{n+1} = \left(2 - \mu^2\right) \psi_n - \psi_{n-1} \tag{4}$$

Esta relación indica que sólo es posible obtener desplazamientos ψ_n oscilantes para un rango acotado de auto-valores μ^2. Justifique esta afirmación siguiendo razonamientos a su elección. Si lo desea, puede asistirse considerando soluciones de la forma $\psi_n \sim r^n$ (para algún r adecuado). Además, argumente (cualitativamente) por qué no se cumple estrictamente $\lambda_{\rm min} = \pi h$ para un número bajo de puntos N (muestrelo en el gráfico).

(c) Considere la condición de borde "fija" (si lo desea, puede repetir este mismo análisis para el caso de la "corredera"). Obtenga las longitudes λ para $N = 2, 3, 5, 7, 11$. Analice si las longitudes λ para $N = 2, 3$ son multiplos de las longitudes λ' obtenidas para $N = 5, 7, 11$. Es decir, $\lambda = m\lambda'$ donde $m = 2, 3, ...$ Tenga en cuenta que la correspondencia puede ocurrir para más de un valor entero m. Escriba las correspondencias halladas.

Concluya a partir de este estudio si la observación de puntos equidistantes permite identificar longitudes de onda "únicas". Explique qué significa esta "ambigüedad" y qué es el fenómeno de "aliasing" espacial. Si desea, puede ejemplificarlo interpolando sinusoidales de distinta λ entre los N puntos.

(d) Obtenga la evolución temporal de la cuerda $\psi_n(t)$ a partir de las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \psi_n(0) & = & 0{,}2\, nh/L & \text{si} \;\; 0 < nh \leq L/2 \\ \psi_n(0) & = & 0{,}2\,(1 - nh/L) & \text{si} \;\; L/2 < nh \leq L \\ \dot{\psi}_n(0) & = & 0 & \text{si} \;\; 0 < nh \leq L \end{array} \right. \tag{5}$$

Estas condiciones excitan muchos modos de la cuerda, por lo que debe dejar de lado la relación para un único modo $\ddot{\psi}_n = -\omega^2 \psi_n$ y reemplazarla por la aproximación

$$\ddot{\psi}_n \approx \frac{1}{\tau^2}\left[\psi_n(t+\tau) - 2\,\psi_n(t) + \psi_n(t-\tau)\right] \tag{6}$$

donde τ es un pequeño intervalo temporal. Si expresa esta aproximación en términos del vector columna $\Psi = (\psi_1, ..., \psi_N)$ y se iguala con el sistema lineal hallado en el item (a), se arriba al esquema algorítmico de Störmer-Verlet

$$-B\,\Psi(t) \approx \frac{h^2}{c^2\tau^2}\left[\Psi(t+\tau) - 2\,\Psi(t) + \Psi(t-\tau)\right] \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(t+\tau) \approx \left[2I - \frac{c^2\tau^2}{h^2}\,B\right]\Psi(t) - \Psi(t-\tau) \tag{8}$$

donde B es la matriz generada por medio del código `Python` en el item (a). I es la matriz identidad ($N \times N$). El esquema de Verlet es fácilmente codificable. En `Python` se escribe del siguiente modo

```
t = 0.0

r2 = (c**2)*(tau**2)/(h**2)

Psi0 = Psi1

while (t<tmax):

    Psi_new = (2*I-r2*B).dot(Psi1)-Psi0

    Psi0 = Psi1

    Psi1 = Psi_new

    t = t + tau
```

donde `Psi0` y `Psi1` corresponden a $\Psi(t-\tau)$ y $\Psi(t)$, respectivamente.

Implemente el esquema de Verlet para las condiciones iniciales detalladas en (5). Recuerde que la condición inicial $\dot{\psi}(0) = 0$ se puede aproximar a $\psi(\tau) \approx \psi(0)$. Explique qué suposiciones hace esta aproximación respecto de la aceleración y del equilibrio de fuerzas en el sistema.

Simule la evolución del sistema para cinco puntos equidistantes ($N = 5$) y un periodo de tiempo $0 < t \leq 10$. Suponga $\tau = 0{,}05$ y $c = 1{,}0$. Muestre sus resultados por medio de "fotos" del sistema, o bien, por medio de una animación. Incluya los puntos ψ_0 y ψ_{N+1} en los gráficos.

Examine en detalle alguno de los puntos (por ejemplo, el punto ubicado en el centro de la cuerda ψ_3). Para ello, grafique ψ_3 a lo largo del tiempo, es decir, $\psi_3(0), \psi_3(\tau), \psi_3(2\tau), \psi_3(3\tau), \ldots$. Repita este gráfico para $c = 3{,}33$, $c = 3{,}45$ y $c = 3{,}46$.

Explique los fenómenos de "inestabilidad" que observa. Para ello, tenga en cuenta que la expresión (8) implica

$$\psi_n(t+\tau) \approx 2(1-\beta^2)\,\psi_n(t) - \psi_n(t-\tau) + \beta^2\big[\psi_{n+1}(t) + \psi_{n-1}(t)\big] \qquad (9)$$

donde $\beta = c\tau/h$. Realice un análisis similar al del item (b) para saber por qué sólo es posible obtener desplazaminentos oscilantes acotados si $\beta^2 \leq 1$. Esta condición se conoce como condición de Courant.