麦克斯韦方程组

1. 矢量点乘、叉乘、散度、梯度、旋度。

$$grad \quad T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \text{a vector}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{h}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{h}_z}{\partial z} \quad \text{(divergence of } \boldsymbol{h}\text{)}$$

It has a physical significance!

scalar field: $\nabla' \cdot \boldsymbol{h}' = \nabla \cdot \boldsymbol{h}$ (invariant under a coordinate transformation)

$$\nabla \times \boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \boldsymbol{h}_x & \boldsymbol{h}_y & \boldsymbol{h}_z \end{vmatrix} \quad \text{curl of } \boldsymbol{h}$$

vector field

Also has a physical significance!

25

$$\nabla^2 \boldsymbol{h} = \left(\nabla^2 \boldsymbol{h}_x, \nabla^2 \boldsymbol{h}_y, \nabla^2 \boldsymbol{h}_z \right)$$

2. 球坐标：

$$\boldsymbol{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (1)$$

散度算符

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \qquad (2)$$

旋度算符

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \qquad (3)$$

拉普拉斯算符

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} u) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \qquad (4)$$

坐标系	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
直角	x	y	z	1	1	1
柱状	r	φ	z	1	r	1
球	r	θ	φ	1	r	rsinθ

梯度公式:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\overrightarrow{e_{u_1}} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\overrightarrow{e_{u_2}} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\overrightarrow{e_{u_3}}$$

散度公式:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2h_1h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$$

拉普拉斯:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{h_2h_3}{h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{h_1h_3}{h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{h_1h_2}{h_3}\right)\right]$$

旋度公式:

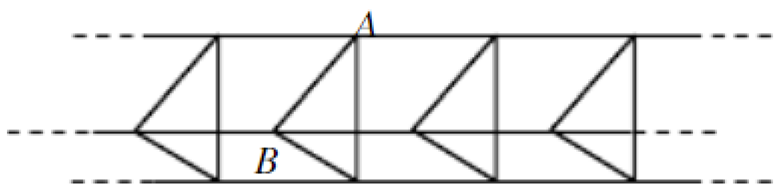
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{bmatrix} h_1\overrightarrow{e_{u_1}} & h_2\overrightarrow{e_{u_2}} & h_3\overrightarrow{e_{u_3}} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{bmatrix}$$

3. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ & $\oint \mathbf{E} \cdot ds = \int \rho dV/\epsilon_0 = \sum dQ/\epsilon_0$:高斯定理，如果给电荷分布，直接用高斯定理+对称性求场强，如果给场强，可以根据点乘公式求出各点电荷密度。
4. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ & $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot dS = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$:如果求场强，建议直接用感生电动势求（感生电动势= - 磁通量变化率）。如果求磁场，可以用叉乘做，求得$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$后对时间积分，这里积分会有常数，视情况可以忽略，还有可能会出现与位置有关，与时间无关的项，可以用第三个方程消掉，一般也会忽略。
5. $\nabla \cdot B = 0$ & $\oint \mathbf{B} \cdot dS = 0$:磁场的高斯定理，一般没啥用，表明磁场是（有旋）无源场，有时候用点乘形式得到磁场和位置的关系。
6. $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ & $\oint \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0\int j \cdot dS + \mu_0\epsilon_0\int\int\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot dS = \mu_0\sum I + \mu_0\int\int\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot dS$:最复杂的式子，右端第一项是磁场的安培环路定理，电场没有变的时候按照安培环路定理来做。右端第二项是位移电流（例：无限长直导线+电容器）：注意电介质情况下（$\mu_r \approx 1$）需要换成D来做，此时$\epsilon \neq \epsilon_0$。而如果有磁介质，需要变成真正的麦克斯韦方程：$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ & $\oint \mathbf{H} \cdot dl = \sum I + \int\int\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot dS$, 其中$\mathbf{B} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$。
7. 一般还需要用$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t = 0$，电荷守恒简化运算。
8. 边界条件：若电介质边界没有自由电荷，则有$D_{1n} = D_{2n}, E_{1t} = E_{2t}$。若磁介质边界没有电流，则有$B_{1n} = B_{2n}, H_{1t} = H_{2t}$。否则$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_e, H_{2t} - H_{1t} = di/dl$。
9. 真空中电磁波传播速度等于光速，光也是一种电磁波：$v = \omega/k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$。介质中$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$。电磁波矢$\hat{k}//E \times H$,定义坡印廷矢量$S = E \times H$，表明能量流密度。一般电磁波中同一时刻E和B成正比，振幅有$\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_r\mu_0}H_0$，可以得到$\bar{S} = \overline{E_0H_0(\sin\omega t)^2} = E_0H_0/2$。
10. 一般不用磁矢势A，除非特别说明。$B = \nabla \times A, E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$。库伦规范$\nabla \cdot A = 0$适用于静电场；而洛伦兹规范$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$适用于相对论协变。$\nabla^2 A - \frac{\partial^2 A}{c^2\partial t^2} = -\mu_0 j, \nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{c^2\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0 \to \Box^2 A_\mu = j_\mu/\epsilon_0$。

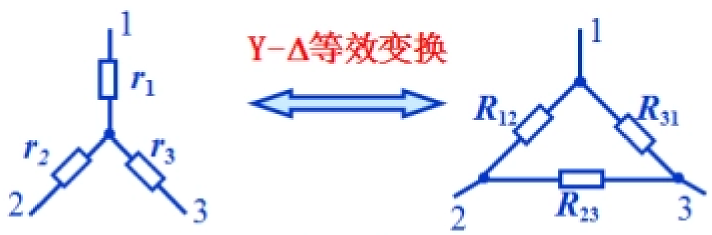
11. 推迟势：$\varphi(1,t)=\int\frac{\rho(r_2,t-r_{12}/c)dV_2}{4\pi\epsilon_0r_{12}},A(1,t)=\mu_0\int\frac{j(r_2,t-r_{12}/c)dV_2}{4\pi r_{12}}$。

交流电路

1. 电源：将其它形式的能转换成电能并向电路提供电能（电动势）的装置。一般电源有内电阻r，有全电路欧姆定律$I=E/(R+r)$，其中R是外界电阻。
2. 交流电源：能提供交变电流的装置，一般为正弦交流电源，产生电动势$E=E_0cos\omega t$。一般产生的电流也是正弦电流$I=I_0cos(\omega t+\phi)$。将电动势写作$E=E_0e^{i\omega t}$的实部，电流写作$I=I_0e^{i\omega t}$的实部。
3. 电阻：仍然遵循一般欧姆定律$V=RI$，复阻Z=R。
4. 电感：$V=LdI/dt=i\omega LI$,类似于欧姆定律$Z=i\omega L$。电压比电流超前$\pi/2$个相位。
5. 电容：$I=dQ/dt=CdV/dt=i\omega CV,V=I/(i\omega C)$类似于欧姆定律$Z=1/(i\omega C)$。电流比电压超前$\pi/2$个相位。
6. 电磁能量$U=VI$。
7. 基尔霍夫节点电流定律：进入节点的电流之和等于离开节点的电流之和。若进入为正，则有$\sum I_k=0$。
8. 基尔霍夫回路电压定律：沿着闭合回路电势差代数和为0。$\sum V_k=0$。
9. 解电路：假设所有段的电路的电流或者假设所有lattice回路的电流。
10. 诺尔顿定理：一坨电路，可以等效为一个电流源并联一个电阻，此电阻大小为这坨电路电阻大小（电源保留内阻），电流源大小为短路电流：每一个并联电路都可以看做有内阻r_k的电源E_k，则电流大小$I=\sum E_k/r_k$。串联电路电动势大小为各电源电动势大小之和（反向电源取负），电阻大小为各电阻（复阻）和内阻之和。
11. 戴维宁定理：同样这坨电路，也可以等效为一个有内阻的电源，内阻还是诺尔顿定理的电阻，电源电动势为开路电压：每一个并联电路都可以看做有内阻r_k的电源E_k，则电压大小$U=(\sum E_k/r_k)(\sum_k r_k)=I(\sum_k r_k)$。
12. 无限长电阻网络求电阻。（等效电阻法、电流流入法）



13. 对称电阻网络，星三角变换。



$$r_1=\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$
$$r_2=\frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$
$$r_3=\frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_{12}=r_1+r_2+\frac{r_1r_2}{r_3}$$
$$R_{23}=r_2+r_3+\frac{r_2r_3}{r_1}$$
$$R_{31}=r_3+r_1+\frac{r_3r_1}{r_2}$$

14. 传导线公式。