

题目：基于动态规划的多波束测线布设模型

摘 要

多波束测深系统是一种多传感器系统，是现代信号处理技术、高性能计算技术、数字化传感器技术等多种技术的高度集成的复杂组合系统。本文基于几何原理，建立了海底坡面多波束测深平面模型、变化测线方向的多波束三维覆盖模型、单目标规划模型和微元测线规划模型以优化海域测线的布设。

针对问题一：本文首先基于平坦海面上多波束探测原理，明确条带覆盖特点，然后利用正弦定理等几何规律，推导覆盖宽度、相邻条带重叠率在海底为坡面情形下与海水深度、测线间隔之间的关系式，建立了海底坡面多波束测深平面模型，代入求解即可得出距离中心海域特定位置处的海水深度、覆盖宽度和重叠率。结果见表 1。

针对问题二：考虑实际情况中不同的测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角存在变化，建立变化测线方向的多波束三维覆盖模型。首先，根据已知信息建立海底坡面的三维坐标系。然后通过解析过测线与水平面垂直的面与海底坡面的交向量确定测线方向上的海水深度变化，随后通过发射波束平面与海底坡面的交向量确定覆盖区域方向，从而在该方向所在平面上研究覆盖宽度的变化。最后通过对两个平面的分析，结合问题一模型，求解变化测线方法情况下覆盖宽度随行进路程的变化。结果见表 2。

针对问题三：考虑到在东西长 4 海里，南北长 2 海里的海域内进行多波束测深。首先，以相邻测线间距为决策变量，以总测线长度最短为目标函数，以相邻条带重叠率在 10%~20%、完全覆盖海域为约束条件，建立单目标规划模型。本文使用动态规划进行求解，为保证总测线长度最短，就要使相邻测线间距最大，即相邻条带重叠率保持在 10%。通过比较东西走向、南北走向、斜线走向三种测线布设情况，可以得出南北走向的测线布设为最优解。结果显示，重叠率与测线数量成正线性相关，10%重叠率对应最少测线为 34 条，最短总测线长度为 125936m。

针对问题四：首先对已知历史单波束测线的深度数据进行可视化拟合，得到等深线分布图。然后将等深线分布图划分为 3 个区域分别进行讨论测线布设情况。其中两区域的等深线近乎平行，因此将其海底地貌拟合成一个具有固定坡度的坡面，固定最小覆盖率、以等深线走向设计测线。对于弯曲等深线区域，以最短测线为目标，布设过程中不超过区域边界为约束条件，建立基于微元法的单目标规划模型，然后利用遗传算法结合动态规划求解该单目标规划模型。最终求解得到：测线总长度为 308800m、漏测百分比为 0.2119%、重叠率超过 20%部分的总长度为 7408m。

关键词：多波束测深 多波束三维覆盖模型 动态规划 微元法 遗传算法

一、问题重述

单波束测深法是测量水体深度的常用方法之一。测量船换能器垂直向海底发射声波信号，并接收反射声波信号，利用发射波与反射波时间差实现海水测深。但是，单波束测深法基本只能测量沿航迹的深度数据。

为了获得某一海域较为全面的深度数据，通常使用多波束测深法测量海域深度状况。在单波束测深法的基础上，换能器同时向海底发射数十个乃至上百个波束，波束平面垂直于测线方向，这样就可以测量出以测量船为轴线且具有一定宽度的全覆盖水深条带。对于两个相邻测线，所测水深条带可能会有重叠部分，为确保测量的便利性与数据的完整性，相邻条带间重叠率应在 10%到 20%之间。建立数学模型解决以下问题：

(1) 与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条斜线，建立多波束测深的覆盖宽度与相邻条带重叠率的数学模型，并求解特定位置覆盖宽度、重叠率等指标。

(2) 若一矩形海域海底具有一定坡度，随着测线方向的改变，建立多波束覆盖宽度的数学模型。

(3) 在确保完全覆盖与适当重叠率的情况下，设计海底为坡面的矩形海域的多条测线，使得测线总长度尽量短。

(4) 现有一若干年前单波束测量某海域的深度数据，使用多波束测量法并设计测线，使得覆盖率尽可能高、重叠率适当、测线总长尽可能短，并求解相关指标。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

首先，明确多波束测深特点，接着从平坦海面出发，分析其条带覆盖情况，推导出重叠率的计算公式，然后将平坦海面模型推广到海底坡面上，由于在问题一所设情形下，在测线方向上船体所在海域的深度不变，因此可以将三维问题转化为平面问题，基于平面三角关系，推导覆盖深度与条带重叠率在海底坡面情况下的表达式，进而建立海底坡面多波束测深平面模型。最后根据该模型求解不同位置测线对应的海水深度、覆盖宽度、重叠率等指标。

2.2 问题二的分析

与问题一不同，问题二中测线方向会发生改变，在测线方向上海水深度可能会发生变化，平面模型已经不再适用，需要建立变化测线方向的多波束三维覆盖模型。首先，根据已知信息建立海底坡面的三维坐标系。然后通过测线垂面与海底坡面的交向量确定沿测线方向深度变化率，也即确定深度线，在深度线所在平面内研究测线方向上深度的变化。进一步利用波束平面与测线垂面相互垂直的特性，通过波束平面与海底坡面的交向量确定覆盖区域的方向，进而在该方向所在平面上研究覆盖宽度的变化。这就将三维

问题降维成两个平面问题，基于此建立变化测线方向情况下的覆盖宽度模型。然后通过对两个平面的分析，结合问题一模型，求解变化测线方法情况下覆盖宽度随行进路程的变化。

2.3 问题三的分析

考虑到在东西长 4 海里，南北长 2 海里的海域内进行多波束测深。首先，以相邻测线间距为决策变量，以总测线长度最短为目标函数，以相邻条带重叠率在 10%~20%、完全覆盖海域为约束条件，建立单目标规划模型。需要使用动态规划进行求解，为保证总测线长度最短，就要使相邻测线间距最大，即相邻条带重叠率保持在 10%。通过比较东西走向、南北走向、斜线走向三种测线布设情况，求解其中最优的测线走向。

2.4 问题四的分析

问题四需要将前几问的模型应用到实际海域中去。现有一实际海域，我们已知其历史单波束测深数据。首先，对该数据进行拟合得到大致深度分布图像，通过分析等深线的分布，可以将实际海域分成若干个区域，然后分别对这些区域进行求解。在一些等深线互相平行且两两之间距离近似相等的区域内，可以将该区域拟合为一个固定坡面，转化为问题三模型求解。对于不平行的区域，则需要使用微元法步步设计测线。对于覆盖率等求解问题，我们可以在每次求解过程中固定覆盖率设计测线，以最短测线长度为目标进行单目标优化，根据覆盖区域特点求解重叠率与漏测百分比。

三、模型假设

为了将模型进行简化，我们做出以下假设：

- (1) 假设测量船航行平面为海平面，忽略风浪等因素引起的横摇与纵摇。^[4]
- (2) 假设测量船在接收反射声波的过程中不受航行速度的影响。
- (3) 为方便测量，假设测线方向笔直。
- (4) 假设测量过程中各设备运行正常。
- (5) 假设海水密度不变，忽略海水分层对声波的折射作用^[5]。
- (6) 忽略声波传播过程中的能量衰减。

四、符号说明

符号	符号含义
D	海水深度
d	测线间隔
θ	换能器开口角度

W	平坦覆盖宽度、坡面覆盖长度
w	坡面覆盖宽度
α	坡面真实坡度
η	覆盖区域重叠率
β	测线方向与坡面法向水平分量夹角
\vec{n}_0	海底坡面法向量
\vec{n}_1	测线垂面法向量
\vec{n}_2	发射波面法向量
γ_1	深度线与水平面夹角
γ_2	覆盖区域方向与水平面夹角
l	测量船沿测线方向行进距离
x	南北平行测线东西位置坐标

五、问题一：海底坡面多波束测深分析

声波波束测深法是利用波传播原理进行海水测深的常用方法，使用多波束测深可以测得更为丰富的深度数据。在使用多波束测深法测量具有一定坡度的海底深度时，波束覆盖宽度与覆盖条带重叠率与深度、坡度相关。本问建立海底坡面多波束测深平面模型，对覆盖条带重叠率、波束覆盖宽度、海水深度进行分析求解。

5.1 海底坡面多波束测深平面模型建立

在使用多波束测深方法测量海底深度时，在船只横向一次形成上百个波束，扫掠海底一定宽度，因此，其每一次测量不仅可以像单波束测深方法一样测量到船体正下方对应海底的深度情况，还可以测量出船体两侧对应海底的深度情况，即可测量区域呈条带状。在多次测量过程中，可以得到一系列测量条带，形成幅式连续记录。因此在每次测量之间可能会出现重叠的情况。条带重叠率与测量覆盖宽度、测线之间距离密切相关。本文从这些角度出发，建立海底坡面多波束测深平面模型。

5.1.1 平坦海面条带覆盖分析

首先，对多波束测深的覆盖情况在平坦海面上进行分析，得到测量海深与覆盖宽度、测线间隔、覆盖率的基本关系，再由该基本关系扩展到具有一定坡度的海面。在测量船底部安装有换能器，换能器可以垂直向海底发射多个声波束，声波束接触海底时发生反

射，换能器再接收这些反射的波，记录从声波发射到信号接收的传播时间，进而计算出海底深度。

若海底平坦，换能器在与航行方向垂直的平面上发射多个波束，即波束平面垂直于航行方向(也即测线方向)。波束的覆盖平面以测线方向为轴线向两侧延伸，在海底深度为定值的情况下，波束覆盖区域宽度为 W ，换能器的开角 θ 可以在 $[0^\circ, 180^\circ]$ 范围内调节，从而控制覆盖宽度 W 。

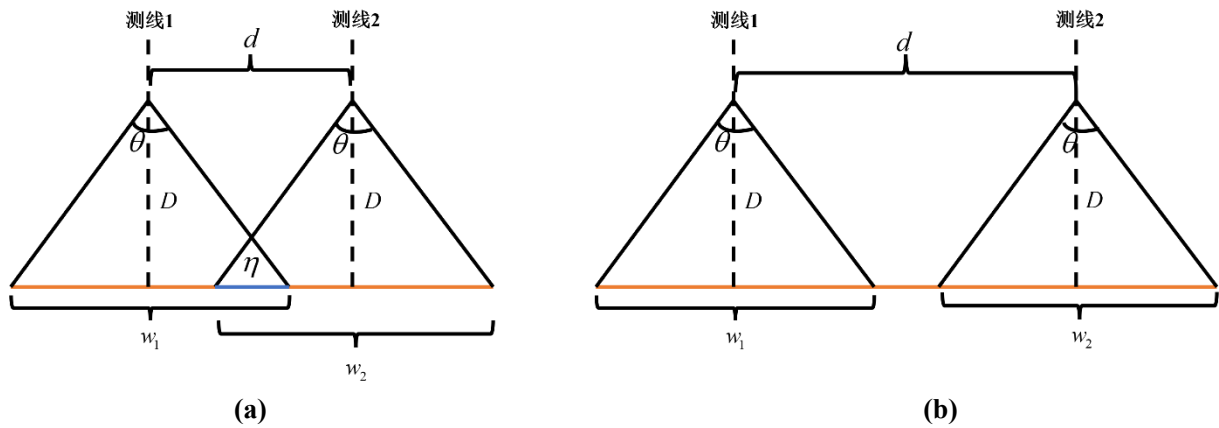


图 1 覆盖宽度、测线间距与重叠率之间的关系

如上图，当测量船换能器分别在测线 1 与测线 2 方向上进行多波束测海深时，测量得到的覆盖区域宽度的表达式为^[1]:

$$W = 2D \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (1)$$

上式中， D 为所测海深，在平坦海面情况下为定值， θ 为换能器开角。

在测线 1 与测线 2 方向上所测区域覆盖宽度分别为 W_1 与 W_2 。当两测线距离较近时，两覆盖区域可能会出现重叠，如上图(a)，当两测线距离较远时，两覆盖区域不会出现重叠而漏测一部分区域，如上图(b)。根据题意，在进行海底测深时需要通过合理设定测线间隔来保证一定的覆盖率，根据上图(a)，重叠率可以表示为两条带重叠部分(图中蓝线)与前一测线覆盖宽度的比值，即：

$$\eta_0 = \frac{\left(\frac{W_1}{2} + \frac{W_2}{2}\right) - d}{W_1} \quad (2)$$

在上式中，使用 η_0 表征多波束测量平坦海面深度时的条带重叠率。若 $0 < \frac{W_1}{2} + \frac{W_2}{2} < d$ ，即对应图 2(b)所示情形，此时，两条带没有重叠区域， $\eta < 0$ ；若 $\frac{W_1}{2} + \frac{W_2}{2} > d$ ，即对应图 2(a)所示情形，此时，两条带有重叠区域， $\eta_0 > 0$ 。因此，可以用 η 的正负表征是否有重叠区域：

$$\begin{cases} \eta_0 > 0, \text{有重叠区域} \\ \eta_0 < 0, \text{无重叠区域} \end{cases} \quad (3)$$

若换能器开角为定值，在测量平坦海底深度时，有 $W_1 = W_2$ ，因此将式(2)简化为题目所给公式：

$$\eta_0 = 1 - \frac{d}{W} \quad (4)$$

5.1.2 海底坡面条带覆盖分析

在 5.1.1 中，我们已经明确了多波束发射平面垂直于航行方向所处平面，并得到了平坦海面条带重叠率的计算公式。下面将平坦海面情况扩展到具有一定坡度的海面，由于在测线方向上船体所在海域的深度不变，因此可以将三维问题平面化，建立海底坡面多波束测深平面模型。

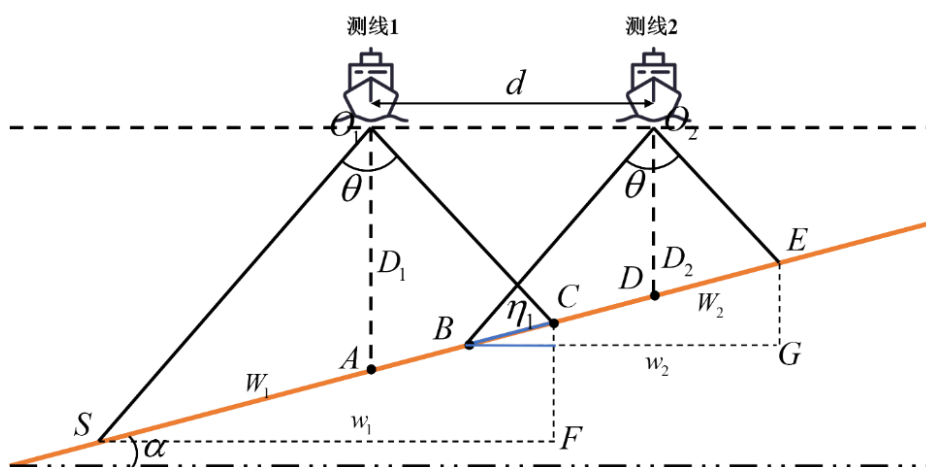


图 2 海底坡面条带覆盖示意图

下面对海底坡面多波束测深的重叠率进行分析：

由于海底具有一定坡面，则多波束测深实际的覆盖海面范围与平坦海面不同，实际覆盖海面宽度 W 变成了覆盖坡面的长度。由于测量波束是垂直于测线方向所在平面的，因此可观察到的覆盖宽度应为坡面覆盖长度 W 在水平面上的投影，设 w 为覆盖宽度，则其与坡面覆盖长度的关系式为：

$$w = W \cos \alpha \quad (5)$$

在下文中，凡是涉及海底坡面覆盖深度的求解，只需要求解出坡面覆盖长度，再根据关系(5)，即可将其转化为覆盖宽度。为方便计算，在分析过程中使用 W 代替 w 。

如图 2，测量船分别在测线 1 与测线 2 上测量海底坡面深度。令 $W_{11} = |AC|$, $W_{22} = |BD|$ ，若计算重叠率，首先要求出坡面覆盖长度的重叠长度，即 $|BC|$ ， BC 在水平面上的投影即为所重叠的覆盖宽度，再将该重叠覆盖宽度除以前一测线的覆盖宽度，即可得到重叠率，值得注意的是，由于测量波束是垂直于测线方向所在平面的，重叠率的计算也需要在水平面上考虑，即通过投影的方式求得。根据上述分析，如图 2 所示，测线 1 与测线 2 的重叠率 η_1 的计算公式为：

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{w_{11} + w_{22} - d}{w_1} \\ w_{11} = W_{11} \cos \alpha \\ w_{22} = W_{22} \cos \alpha \end{cases} \quad (6)$$

当 $\alpha = 0$ 且换能器开角固定时，公式(6)转化为题目所给的重叠率公式(4)。

然后计算坡面覆盖宽度 W 。对于 W_{11} ，在 $\triangle O_1AC$ 与 $\triangle O_2BD$ 内，使用正弦定理，有：

$$\frac{W_{11}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D_1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} \quad (7)$$

$$\frac{W_{22}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D_2}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (8)$$

对于 W_1 ，通过使用正弦定理，有：

$$W_1 = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} D_1 + W_{11} \quad (9)$$

两测线对应海深之间也存在一定关系：

$$D_2 = D_1 - d \tan \alpha \quad (10)$$

值得注意的是，第(10)式只对应随着测线方向的改变深度越来越小的情况。

综上，根据公式(7)(8)(9)(10)，即可解出公式(6)中各项，进而得到多波束海底坡面测深过程的重叠率 η_1 的值。

5.2 特定海底坡面多波束测深平面模型求解

5.2.1 求解过程分析

上文对海底坡面多波束测深过程中的各量进行了分析，下面针对一特定海底坡面，求解各特定点的海水深度、覆盖宽度与重叠率。

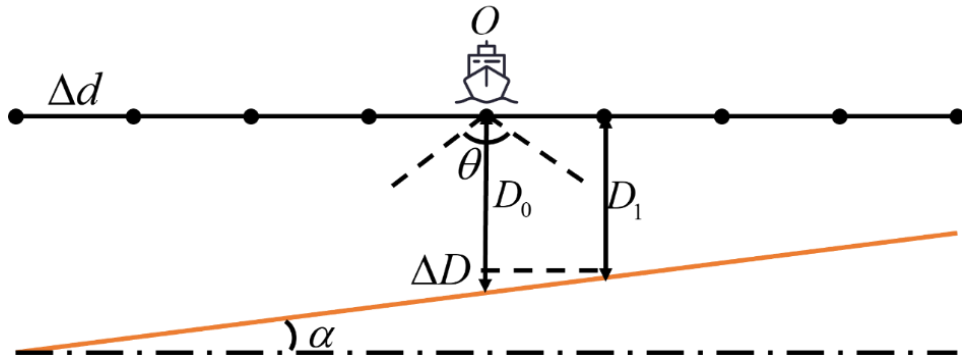


图3 待测海域示意图

在本问中，多波束换能器的开角为 $\theta = 120^\circ$ 固定不变，海底坡面坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ 固定不变，需要求解当测线间距为 200m 时，中心点两侧各 800m 海域的海水深度、覆盖率等

情况。如上图, $\Delta d = 200\text{m}$, 测线方向为垂直纸面向外, 已知中心点海水深度为 $D_0 = 70\text{m}$ 。

(1) 海水深度的求解

不妨设距中心点-200m 与+200m 距离处海水深度为 D_{-1} 与 D_1 , 即构造深度序列:
 $D = \{D_{-4}, D_{-3}, \dots, D_0, D_1, \dots, D_4\}$, 由于海底坡面确定, 根据公式(10), 可以得到 D_i 与 D_{i+1} 之间的深度改变量为定值, 即:

$$\Delta D = \Delta d \tan \alpha \quad (11)$$

因此, 已知一个区域的海深就可以求解出其他区域的海深, 即:

$$D_i = D_0 - i\Delta D, \quad i = -4, -3, \dots, 4 \quad (12)$$

(2) 覆盖宽度的求解

不妨设海深 D_i 处海域的坡面覆盖长度为 W_i , 则根据公式(7)(8)(9), 可以将 W_i 表示为:

$$W_i = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} D_i + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} D_i, \quad i = -4, -3, \dots, 4 \quad (13)$$

(3) 重叠率的求解

令 $\eta_{i,i+1}$ 表示为海深 D_i 处海域与海深 D_{i+1} 处海域覆盖条带的重叠率, 根据公式(6)(7)(8)(11)(12)(13), 列方程组求解 $\eta_{i,i+1}$:

$$\begin{cases} \Delta D = \Delta d \tan \alpha & ; D_i = D_0 - i\Delta D, \quad i = -4, -3, \dots, 4 \\ W_i = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} D_i + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} D_i, \quad i = -4, -3, \dots, 4 & ; w_i = W_i \cos \alpha \\ \eta_{i,i+1} = [\frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} D_i + \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} D_{i+1} - \Delta d] / w_i, \quad i = -4, -3, \dots, 3 \end{cases} \quad (14)$$

5.2.2 求解结果分析

根据上述分析, 将已知条件代入到公式(12)(13)(14)中, 即可求得各位置的指标值。

表 1 问题一结果表

测线距中心点 处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.95	85.71	80.47	75.24	70	64.76	59.53	54.29	49.05
覆盖宽度/m	315.71	297.53	279.35	261.17	243.07	224.81	206.63	188.45	170.27
与前一条测线 的重叠率/%	—	33.64	29.59	25.00	19.78	13.78	6.81	-1.39	-11.17

如上表, 由于海底具有坡度, 海水深度随测线距中心点距离的增加而减小, 所覆盖的宽度也逐渐减小。在较深处, 有较大重叠率, 在较浅处, 重叠率小于 0, 表示存在漏测。因此, 表 1 所示结果符合问题设定情况。更为精确的结果见附件 result1.xlsx。

由上表可以看出，在测线间隔为 200m 时，仅仅只有 0m 与+200m 海域覆盖区域的重叠率满足题目中 10%~20% 的测量便利性与数据完整性条件。为此，我们认为在+200m 与+400m 海域之间可以适当减小测站间隔 d ，使得其覆盖率增大；在-800m 与-200m 海域之间可以增大测站间隔 d ，使得其覆盖率减小。

六、问题二：多波束覆盖宽度三维分析

通过问题一的研究，我们已经可以计算出同一坡度下各个海深的测线覆盖宽度。问题二则是研究在一片海域内，当测线与坡面存在一定的夹角时，沿测线方向运动覆盖宽度的变化。

6.1 变化测线方向的多波束覆盖模型建立

6.1.1 海底坡面三维坐标系的建立

在问题二中，依旧研究海底坡面的测深情况。但相比于问题一测线方向与坡面法向夹角固定的情形，问题二则需要考虑测线方向的变化，即测线与坡面有一定的夹角。在忽略风浪作用的情形下，测线方向只能在海平面上发生变化，即在俯视角下，测线方向在同一水平面上可以沿各个方向变化，因此，需要从问题一的平面模型扩展到三维立体模型，为方便研究，需要建立海底坡面的三维坐标系。

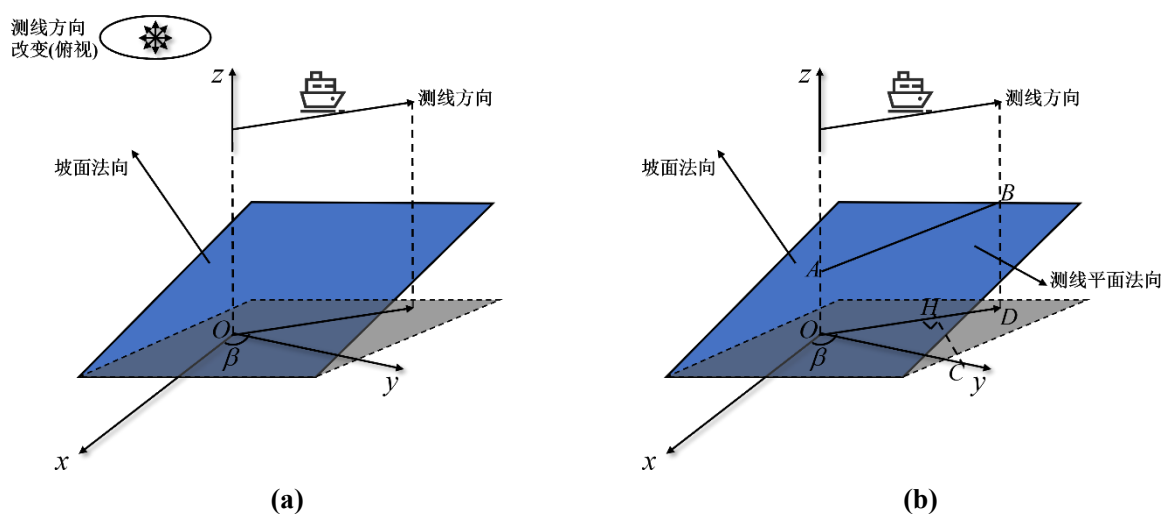


图 4 海底坡面三维坐标系示意

不妨以坡面法向到水平面的投影为 x 轴，以竖直方向为 z 轴建立三维立体坐标系(图 5(a))。其中，测线方向与 x 轴的夹角为 β 。该三维立体坐标系内，测线方向所在平面与坡面的交线即可以表示在船前与船后的海水深度变化。在侧视角内，可以确定测量船行进方向上的海水深度变化，即深度线。在正视角内，可以确定测量船不同测线方向上覆盖区域的方向，进而可以转化为问题一的模型，最终求解得到覆盖宽度。下面对深度、覆盖区域进行具体分析。

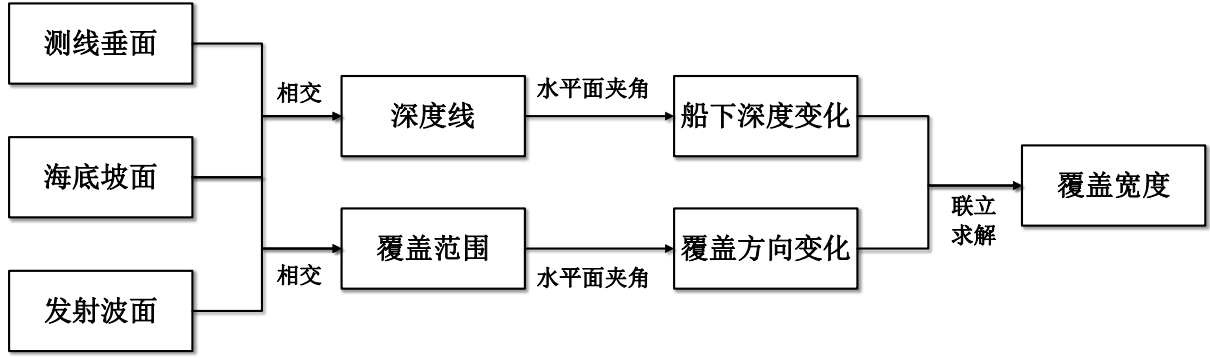


图5 测线方向改变情况下三维分析流程

6.1.2 测线方向海水深度分析

测线方向海水深度，即船体前后区域的海水深度。容易得到当 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 时，测线方向与问题一中测线方向相同，沿测线方向竖直方向作垂线，得到测线垂面，该测线垂面与海平面垂直，在测线方向上船体前后海水深度不变，但这只是一般情况。当 $\beta \neq 90^\circ$ 且 $\beta \neq 270^\circ$ 时，测线方向所在平面与海平面并不垂直，在测线方向上海水深度会发生改变。

如图5(b)，过 y 轴上一点 C 作 $CH \perp OD$ ，显然， CH 垂直于测线垂面， \overrightarrow{CH} 即为测线垂面的法向量。通过解三角形 OCH ，令 C 点坐标为 $(0,1,0)$ ，容易得到 H 点坐标为 $(-\cos(\beta - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\beta - \frac{\pi}{2}), \cos^2(\beta - \frac{\pi}{2}), 0)$ ，故测线垂面的法向量为：

$$\vec{n}_1 = (\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\beta - \frac{\pi}{2}), 1 - \cos^2(\beta - \frac{\pi}{2}), 0) \quad (15)$$

根据线面角的定义，容易得到海底坡面的法向量为：

$$\vec{n}_0 = (1 - \cos^2 \alpha, 0, \sin \alpha \cos \alpha) \quad (16)$$

结合上述分析，海底坡面与测线垂面的交线 AB 即为船体前后方的深度线，如图6，可以得到沿测线方向船体所在海面下方海水深度变化量的表达式为：

$$\Delta D = l \tan \gamma_1 \quad (17)$$

其中， l 为沿测线方向测量船前进路程， $D(\beta, l)$ 表示测量方向夹角为 β 时海水的深度随前进路程 l 的变化， γ_1 为测线所在平面与坡面的交线与海平面的夹角，即：

$$\gamma_1 = \left| \frac{\pi}{2} - \langle \vec{n}_1 \times \vec{n}_0, \vec{z} \rangle \right| \quad (18)$$

6.1.3 三维坐标系下覆盖区域分析

根据图1多波束覆盖原理示意图，发射波所在平面一定与测线方向垂直，也即波平面垂直于测线垂面。

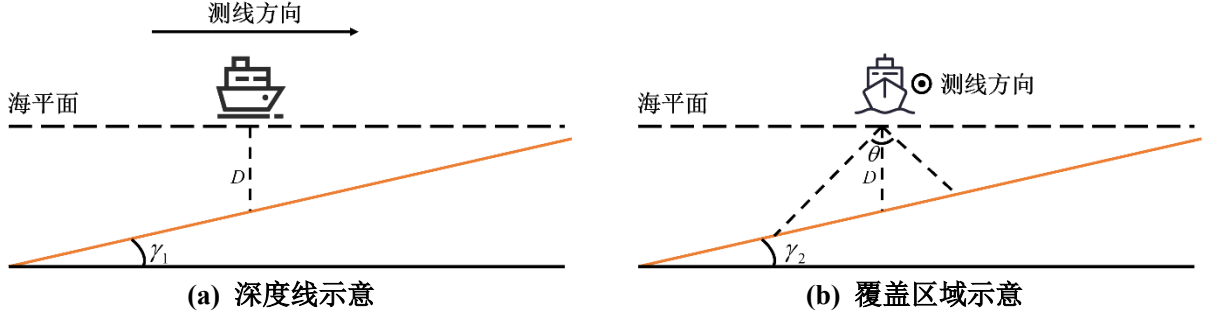


图 6 不同视角下深度线与覆盖区域示意图

可以将其理解为不同视角下观察测量船的运动，图 6(a)为侧向观察测量船，通过 6.1.2 的分析，可以求解出船体的所处海域的海洋深度 D 的变化，即表示深度线。图 6(b)为正向观察测量船，发射波平面垂直于测线方向，且其与坡面的交线向量可以表示分布条带的方向。

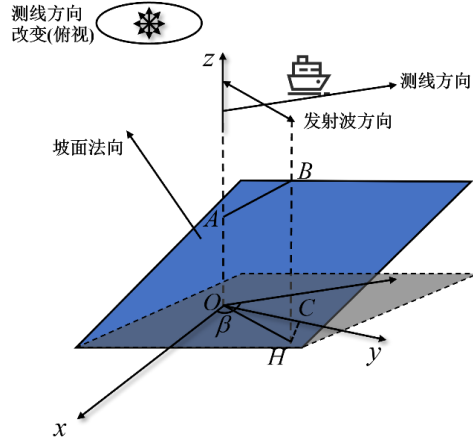


图 7 覆盖区域在三维坐标系内的解析

如上图 7，发射波平面与坡面相交于 AB ，则覆盖条带分布在 \overline{AB} 方向上。 \overline{AB} 与水平面的夹角即为图 6(b)所示夹角 γ_2 。由于两面交线向量可以通过两面法向量的向量积求解得到，因此，可以把 γ_2 用向量叉乘形式表示，即：

$$\gamma_2 = \left| \frac{\pi}{2} - \langle \vec{n}_2 \times \vec{n}_0, \vec{z} \rangle \right| \quad (19)$$

其中， \vec{n}_2 为发射波平面的法向量。如图 7， \overline{OH} 的方向为发射波方向(一侧)，在水平面内过 y 轴上一点 C 作 $CH \perp OH$ ，容易得到 \overline{CH} 为发射波平面的一个法向量。不妨取 $C(0,1,0)$ ，根据角度关系，解析得到 \overline{CH} ，也即 \vec{n}_2 ：

$$\vec{n}_2 = (-\sin(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta), 1 - \cos^2(\pi - \beta), 0) \quad (20)$$

根据公式(16)(19)(20)，可以确定 γ_2 的具体角度。这样，如图 6，通过确定测线垂面与坡面的夹角 γ_1 与发射波平面与坡面的夹角 γ_2 ，我们成功将图 5 所示三维模型转化到图 6 所示的平面模型中，在图 6(b)中，基于问题一海底坡面多波束测深模型，可以推导出覆盖宽度在变化测线方向情形下的计算方法。

随着测线方向的改变, 深度线夹角 γ_1 与覆盖区域夹角 γ_2 也随之改变。通过确定深度线夹角 $\gamma_1(\beta)$, 可以表示出在测线方向角度为 β 时测量船前进 l 海里过程中的所处海水深度的变化规律 $D(\beta, l)$ 。再通过覆盖区域夹角 $\gamma_2(\beta)$, 借助问题一模型, 即可求解得到覆盖区域宽度的变化。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_0 = (1 - \cos^2 \alpha, 0, \sin \alpha \cos \alpha) \\ \vec{n}_1 = (\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\beta - \frac{\pi}{2}), 1 - \cos^2(\beta - \frac{\pi}{2}), 0) \\ \vec{n}_2 = (-\sin(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta), 1 - \cos^2(\pi - \beta), 0) \\ \gamma_1 = \left| \frac{\pi}{2} - \langle \vec{n}_1 \times \vec{n}_0, \vec{z} \rangle \right| \\ \gamma_2 = \left| \frac{\pi}{2} - \langle \vec{n}_2 \times \vec{n}_0, \vec{z} \rangle \right| \\ \Delta D(\beta, l) = l \tan \gamma_1 \\ W_m = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \gamma_2)} D(\beta, l) + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \gamma_2)} D(\beta, l) \\ w_m = W_m \cos \gamma_2 \end{array} \right. \quad (21)$$

6.2 变化测线方向的多波束覆盖模型求解

6.2.1 求解过程分析

问题二需要我们求解 8 个 β 的取值下, 测量船沿测线方向运动 2.1 海里, 每间隔 0.3 海里测量一次海底情况。其中, $\beta = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ 。根据图 5 所建立的立体坐标系, 当 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\beta = \frac{3\pi}{2}$ 时, $\gamma_1 = 0$, 船体所处海域深度不在测线方向上变化。当 $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时, 在测线方向上海水深度逐渐减小, 当 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 时, 在测线方向上海水深度逐渐增大。所以, 在计算海水深度时, 需要分段求解。由于已知 $l=0$ 时对应海水深度为 $D_0 = 120m$, 则海水深度的分段表达式为:

$$D(\beta, l) = \begin{cases} D_0 - l \tan \gamma_1, & \beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \\ D_0 + l \tan \gamma_1, & \beta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \\ D_0, & \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \beta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (22)$$

在求解过程中, 需要将其离散化, 即:

$$D_i = \begin{cases} D_0 - i\Delta l \tan \gamma_1, & \beta = \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \\ D_0 + i\Delta l \tan \gamma_1, & \beta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi, \quad i = 0, 1, \dots, 7 \\ D_0, & \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \beta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (23)$$

通过公式(20)(23), 得到在 $(\frac{i}{4}\pi, i\Delta l)$ 情况下的坡面覆盖长度的离散化表达式为:

$$W_m(\frac{i}{4}\pi, i\Delta l) = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \gamma_2)} D_i + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \gamma_2)} D_i, i = 0, 1, \dots, 7 \quad (24)$$

通过公式(23)(24), 成功将公式(21)离散化, 方便求解特定测线方向角下随位置的变化海底测深的坡面覆盖长度的变化。再利用关系(5), 即可求解出覆盖宽度的变化。

6.2.2 求解结果分析

将题目给定条件(25)代入到公式(21)(23)(24)中, 即可求解得到各指标下的覆盖宽度。

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ D_0 = 120\text{m} \\ \Delta l = 0.3\text{NM} \end{cases} \quad (25)$$

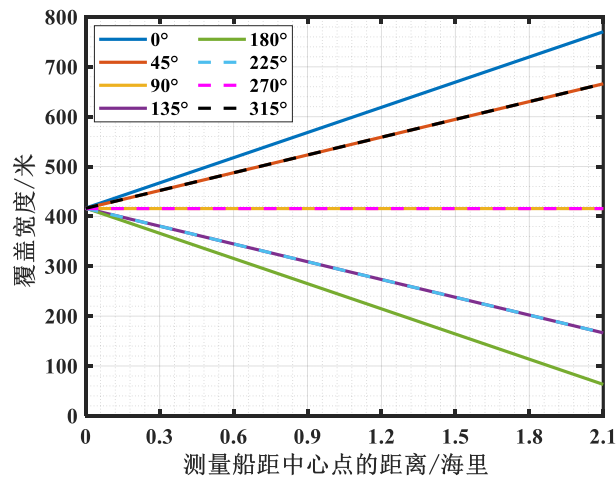


图 8 覆盖宽度与测线方向、船体位置关系图

以测量船距中心点的距离(也即沿测线移动距离)为横轴, 覆盖宽度为纵轴, 并考虑测线方向的改变, 绘制得到覆盖宽度随位移、测线方向的变化图像如图 8 所示。容易发现, 由于海底为固定坡面, 在各个测量方向上, 覆盖宽度成线性变化, 并且图像具有对称性。即 $\frac{\pi}{4}$ 与 $\frac{7\pi}{4}$ 覆盖宽度完全相同, $\frac{3\pi}{4}$ 与 $\frac{5\pi}{4}$ 覆盖宽度完全相同, 即关于 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 对称的两组覆盖宽度完全相同, 这与实际情况相符合, 侧面验证了结果的合理性。

所求结果的具体数值如下表：

表 2 问题二结果表

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向 夹角 $/\circ$	0	415.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09	768.48
	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84
	90	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	135	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	180	415.69	365.29	314.89	264.50	214.10	163.70	113.30	62.90
	225	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	270	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84

七、问题三：矩形坡面海域测线设计

通过前两问的分析，我们已经可以计算任一测线方向上的覆盖宽度。问题三则限定了一片南北长 2 海里、东西长 4 海里的矩形海域，海底依然具有一定坡度，且西深东浅。需要设计满足重叠率条件、可以完全覆盖该海域的多条测线，并尽可能使测线长度最短。为方便测量海底情况和计算重叠率，不妨假设测线均为直线，这样就有两种设计方案，一种是较为简易地直接设计相互平行的测线，一种是设计各不平行的斜测线。

首先考虑最为简洁的测线设计方式：正南正东向设计测线。

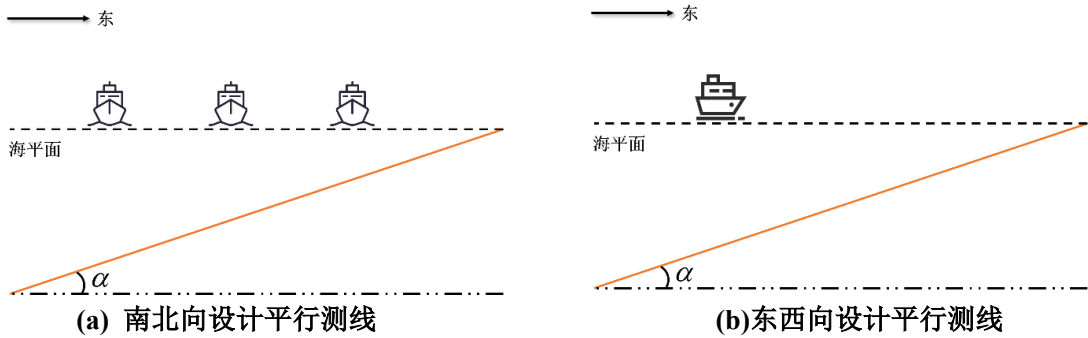


图 9 平行测线设计示意

7.1 南北方向平行测线设计

由图 8 可以知道，当南北向设计平行测线时，对应 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\beta = \frac{3\pi}{2}$ 。船体所处海域的深度与覆盖宽度并不随位置的改变而改变，即在任一测线方向上海水深度保持不变，如图 9(a)。每一测线对应的覆盖区域呈矩形条带状(图 10(a))。

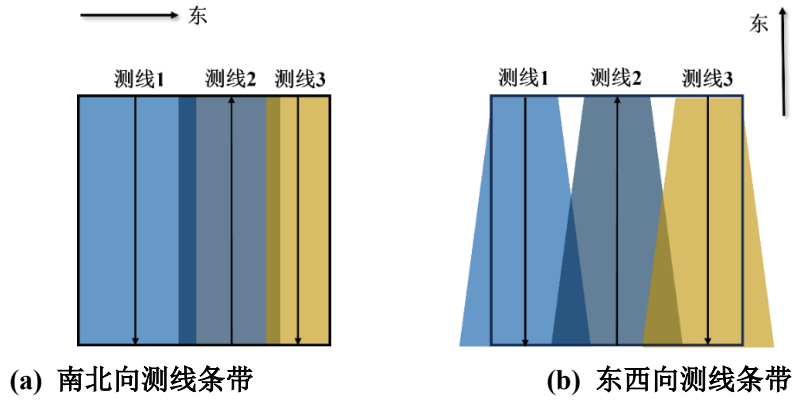


图 10 平行测线条带示意

根据公式(6)我们可以知道,随着自西向东海水深度的减小,在西边深水区只需要设计少量测线就可以满足重叠率 10%~20%的条件,而在东边浅水区若要满足重叠率条件,则需要设计较为密集的测线,如图 10(a),自西向东测线会越来越密,这就使得东侧密集测线主要影响测线总长度。

由于南北向测线的条带形状为矩形,则测线的总长度为测线总条数乘以矩形海域的南北宽度,即总长度为 $2n$ 海里。同样的利用问题一的模型就可以求解得到相邻两测线之间的重叠率。

为了使得测线尽可能分布稀疏,直接考虑相邻两侧线之间重叠 10%的情况。如图 10(a),确定第一条南北向测线,使得测线条带覆盖区域左边界与矩形海域西边界完全重合。再以重叠率为 10%确定下一条测线,以此类推,可以从西到东设计出可以覆盖矩形海域、重叠率固定为 10%的多条测线,最后计算测线总长度。

7.2 恒定重叠率动态规划求解

下面对南北向平行测线设计具体求解最佳方案。首先应该解决自西向东海水深度问题。题目已知矩形海域中点处的海水深度为 $D_{mid} = 110\text{m}$,东西宽 4 海里,则矩形海域左边界处海水深度为:

$$D_{left} = D_{mid} + 2 \times 1852 \tan \alpha \quad (26)$$

代入 $\alpha = 1.5^\circ$ 解得 $D_{left} = 206.94\text{m}$ 。

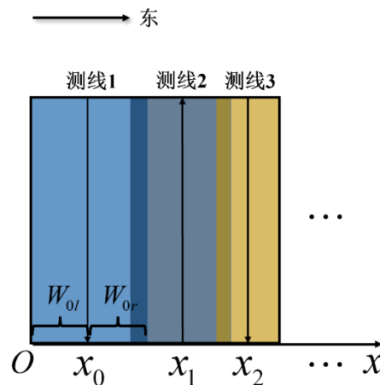


图 11 测线坐标求解示意

根据图 11，设定测线自西向东移动方向为正方向，令第一条测线对应坐标为 x_0 。第一条测线的左侧坡面覆盖长度 W_{0l} 应与 x_0 相同，根据公式(9)，有：

$$x_0 = W_{0l} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} (D_{left} - x_0 \sin \alpha) \quad (27)$$

解得第一条测线的坐标为：

$$x_0 = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) + \sin \frac{\theta}{2}} D_{left} \quad (28)$$

根据公式(9)，第一条测线的右侧坡面覆盖长度为：

$$W_{0r} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} (D_{left} - x_0 \sin \alpha) \quad (29)$$

由于我们设定两条测线的覆盖范围条带的重叠率为 10%，则有：

$$0.9(W_{0l} + W_{0r}) = x_1 - W_{1l} \quad (30)$$

x_1 即为第二条测线的位置坐标， W_{1l} 为第二条测线的左覆盖区域。 x_0 、 W_{0l} 、 W_{0r} 已知， W_{1l} 为关于 x_1 的函数，进而求解出 x_1 的表达式为：

$$x_1 = \frac{D_{left} \sin \frac{\theta}{2} + 0.9 \cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)(W_{0l} + W_{0r})}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha} \quad (31)$$

同理，对于第 i 条测线的坐标 x_{i-1} ，可以得到迭代公式，再根据初值条件(28)，通过迭代可以得到第 1 条到第 n 条测线的坐标：

$$\begin{cases} x_{i-1} - W_{(i-1)l} = 0.9 \sum_{i=2}^n [W_{(i-2)l} + W_{(i-2)r}] \\ x_0 = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) + \sin \frac{\theta}{2}} D_{left} \end{cases} \quad (32)$$

当满足条件(33)时，停止迭代。

$$x_{n-1} + W_{(n-1)r} > 4NM \quad (33)$$

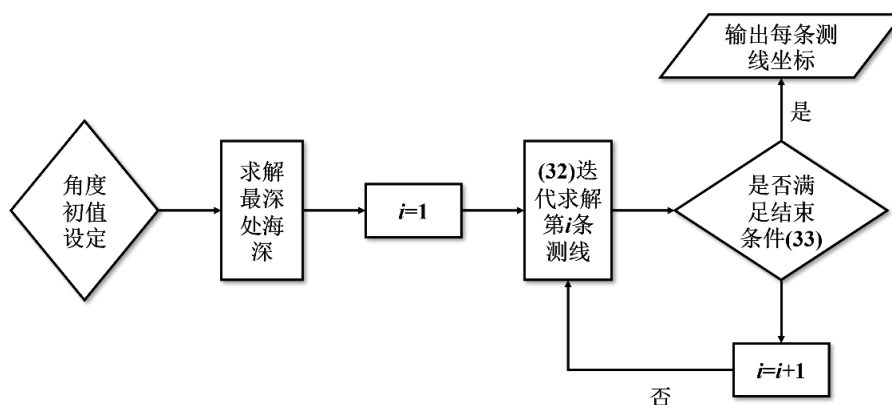


图 12 南北方向平行测线设计算法示意

图 12 为求解的具体算法流程示意，概括了上述求解过程。

详细的南北向平行测线设计情况见附件 result3.xlsx。由上表可以看出，在较深处一条测线的覆盖坡面长度可以达到上百米，但在较浅处则只有几十米，由深到浅、由西向东测线逐渐变密，同 7.1.1 中所分析的情况相吻合。

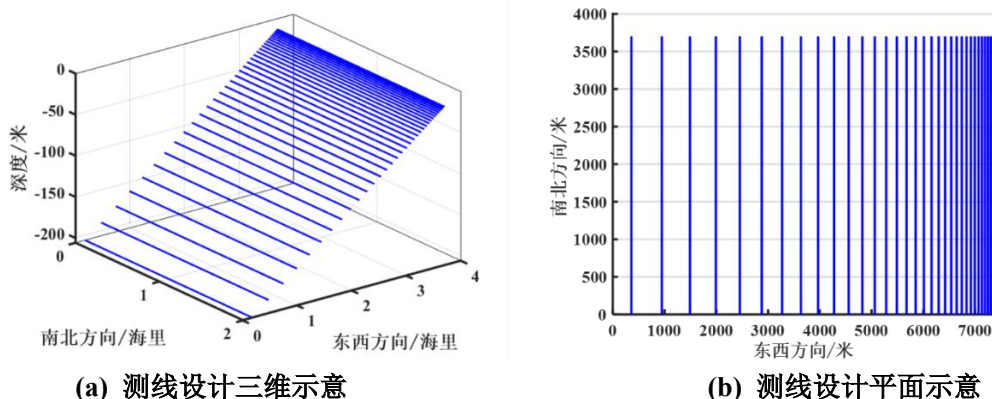


图 13 南北方向测线设计结果示意

根据上述流程，当两两测线的重叠率固定为 10%时，求解得到在南北方向上一共需要设计 34 条测线，测线总长度为 125936m。

上图(a)形象展示了三维平面上的测线分布，图(b)展示了平面分布，两图都体现了海水深度越浅、测线布设越密这一规律，表明求解结果符合实际情况。当覆盖率变化时，测线条数是否有可能少于 34 条呢？

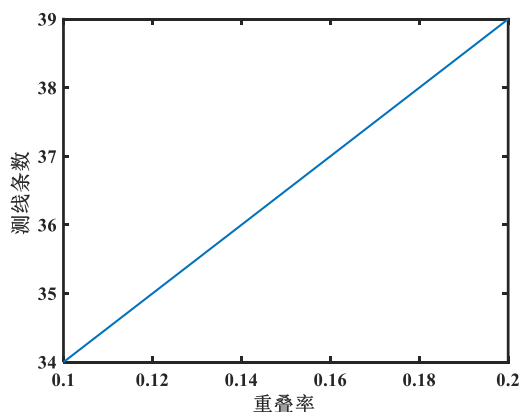


图 14 重叠率变化时测线条数的变化图

由上图可知，覆盖率与测线条数呈线性关系，覆盖率越大，测线条数越多，所以 10% 重叠率情况下测线总长度最小。此外，我们还粗略计算了等间隔布设测线，此时测线条数远远大于 34。

综上，以 10% 重叠率布设测线时为南北向布设测线情形的最优解。部分测线坐标如下表，详细见附件 result3.xlsx。

表 3 南北向平行测线设计部分结果表

第 i 条测线	1	2	3	33	34
测线距西边界距离/m	358.55	947.95	1491.31	7346.07	7389.75

7.3 东西方向平行测线设计

在问题二中，当 $\beta = 0$ 或 $\beta = \pi$ 时，覆盖宽度的变化率最大。在本问中，若在东西方向上设计平行测线，即对应了这种覆盖宽度变化率最大的情况。当船自西向东移动时，船体所在海域的深度越来越浅，覆盖宽度也越来越小，覆盖宽度形状如图 10(b)所示，沿测线方向覆盖区域为梯形形状。在较深处，可能会出现重叠率过大的情况，而在较浅处，可能会出现漏测的情况，显然，该梯形的形状与深度的变化密切相关。当深度变化不大时，梯形趋近于一个矩形，深处与浅处的重叠率的区别不大，在合理设计下可以既保证重叠率在 10% 与 20% 之间，也保证完全覆盖海域。

但是，在本问情形下，可以利用公式(26)计算得到东西方向深度分布。通过计算，矩形海域西边界最深处海水深度为 $D_{left} = 206.94\text{m}$ ，东边界最浅处海水深度为 $D_{right} = 13.06\text{m}$ 。在问题二模型中，令 $\gamma_2 = 15^\circ$ ， $\beta = 0$ ，将该模型应用到东西方向求解坡面覆盖长度上，可以解得在最深处， $W_{left} = 716.84\text{m}$ ；在最浅处， $W_{right} = 45.24\text{m}$ 。这就表明，在最深处只需设计大约 6 条测线，而在最浅处则需设计高达上百条测线，测线条数差别过大，一定会产生漏测与重叠率过高的情况。

综上，我们认为所有测线成东西走向是不合理的。

7.4 斜向平行测线设计

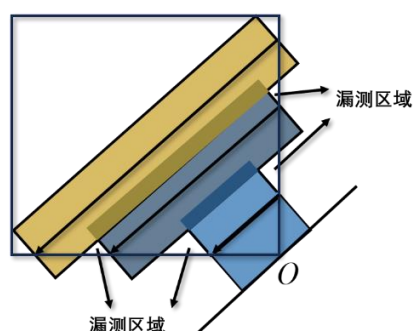


图 15 斜线平行设计示意图

在斜向测线平行且重叠率不超过 20%的情况下,海域会有漏测区域,如图 15,若要达到全覆盖,则必须要超出海域范围,由于海域外地形未知,超出海域外的测线无法计算其覆盖宽度,即不能超出海域计算。所以在斜向测线平行时,只在海域内布设测线无法达到全覆盖,舍去该方法。

且经查阅文献^[3],测区内的各主测线应为平行关系,且测线走向应与等深线的走向一致。综上,使用南北方向平行测线设计是最合理的,最优测线总长度为 125936m,详细测线设计情况见表 3。

八、问题四：实际海域多波速测深测线设计

通过前三问的分析,我们已经可以使用多波速测深的方法测量海底坡面的海洋深度、覆盖宽度、重叠率等指标,但是,实际海域的情况往往更为复杂,如何将模型应用到实际海域,是模型面临的巨大挑战。对于实际海域,海底是凹凸不平的,很难有一个固定的坡度。现已给出了某海域(南北长 5 海里、东西宽 5 海里)的历史单波束测深情况,我们需要以此历史数据为基础,对该海域重新进行更为精确的多波束测深,并尝试求解出测线的最优设计。

8.1 历史海域信息分析

附件给出了该海域若干年前的单波束测深情况,由于使用的是单波束测深,所以只测得了间隔 0.02 海里的海水深度情况,并不能够完全反映该海域的深度情况。虽然如此,由于单波束测深步长较小、所给数据点较为丰富,也可通过曲面拟合得到大致的深度分布情况作为参考。

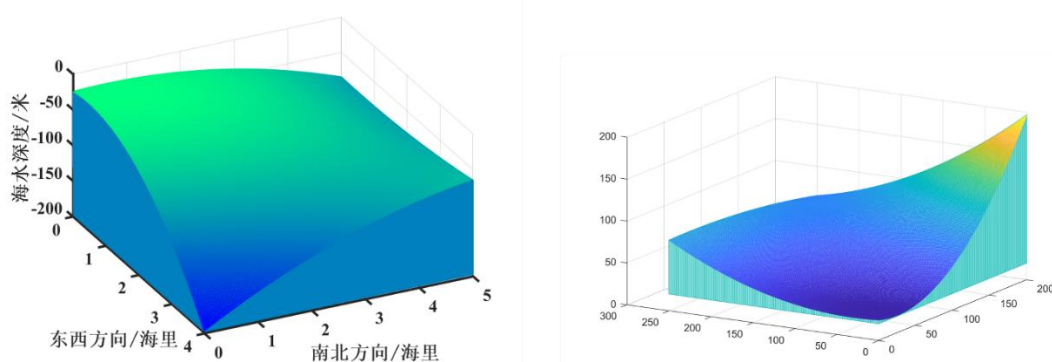


图 16 三维曲面拟合深度分布示意

由上图可以清晰看出,该海域在东南方向上海水深度较大,在西南方向与东北方向上海水深度较小,整体海域深度比较复杂。为方便进行测线设计,根据附件数据还可以绘制出这片海域的等深线。

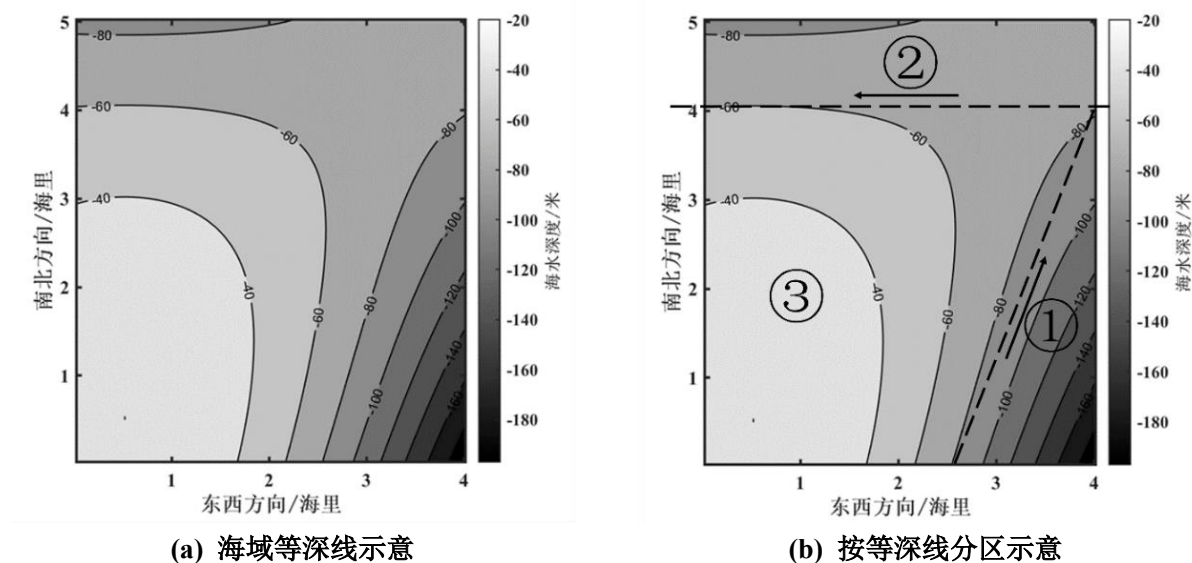


图 17 海域等深线示意

如图 17(a)，根据等深线，也可定性认为东南方向较深，西南与东北方向较浅。

8.2 等深面分区与各分区测线设计

8.2.1 等深线的分区

如果多条等深线近似相互平行且相邻两条等深线的距离近似相等，则可以认为这些等深线代表一个固定坡度的坡面。基于该等深线原理，可以将近似相互平行的且相邻等深线距离相差不大的多个等深线归为一组，在这些等深线对应海底可以近似为一个具有固定坡度的坡面。这样，根据图 15(a)等深线的分布图，可以将其该海域简单分为 3 个海底坡面的组合，即将等深线图粗略分成个区，图 15(b)的虚线即为区域之间的边界线。其中，区域①与区域②的等深线基本相互平行且两两相距较近，所以可以将这两个分区拟合成一个固定坡面。

8.2.2 基于固定坡面拟合设计区域①、②测线

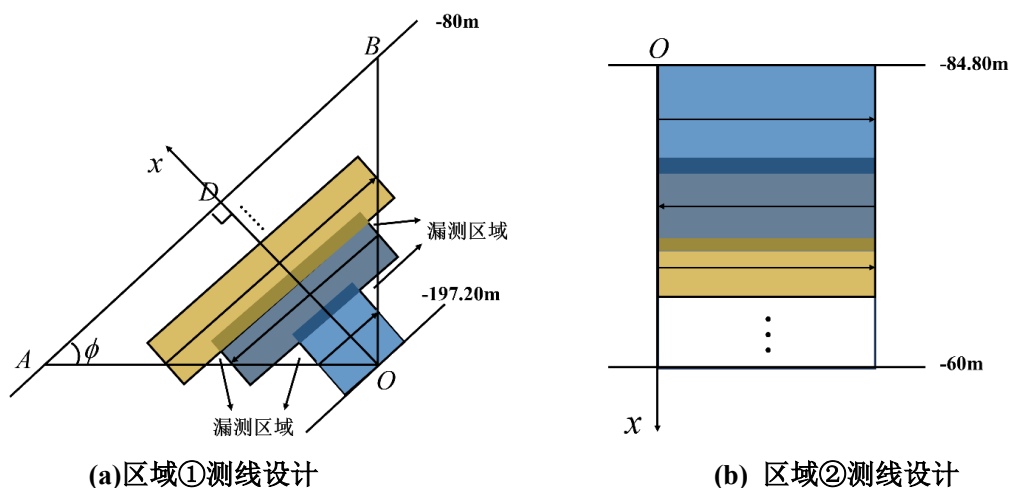


图 18 拟合坡面测线方向、条带覆盖、重叠与漏测示意图(以区域①为例)

如图 18，由于区域①可近似为一个三角形，所以将该三角形内的所有等高线拉直，即拟合出了一个上界为-80m，下界为-197.20m 的坡面。根据问题三，以测线方向沿等深面方向时、设定条带之间重叠率恒为 10%时，测线设计方案为近似最优解，且计算较为便利，因此，此处依然采用这种设计方式，测线方向垂直于 OD 。通过附件中的散点，可以求出线段 OB 与 OA 的长度，进而可以求得 OD 的长度，则该拟合坡面的坡度为：

$$\alpha_1 = \arctan \frac{\Delta d}{|OD|} \quad (34)$$

选定坐标 $B(7408,7259.84,80.16)$, $A(4704.08,0,80.73)$, $O(7408,0,197.20)$ ，根据(34)，求解得到该拟合坡面坡度为 $\alpha_1 = 0.0462\text{rad}$ 。类比图 11 所表示的求解思想，以 \overline{OD} 方向为 x 轴方向， x 方向上第 i 条测线对应坐标为 x_{i-1} ，使用迭代法求解坐标，则有：

$$\begin{cases} x_{i-1} - W_{(i-1)l} = 0.9 \sum_{i=2}^n [W_{(i-2)l} + W_{(i-2)r}] \\ x_0 = \sin \frac{\theta}{2} D_{left} / [\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) + \sin \frac{\theta}{2}] \\ W_{(i-2)r} = \sin \frac{\theta}{2} (D_{left} - x_0 \sin \alpha) / [\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)] \\ W_{(i-2)l} = \sin \frac{\theta}{2} (D_{left} - x_0 \sin \alpha) / [\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)] \end{cases} \quad (35)$$

迭代的结束条件为：

$$x_{n-1} + W_{(n-1)l} > |OD| \quad (36)$$

不同于问题三的矩形区域，由于区域①为三角形海域，按照上述求法会出现漏测区域，正如图 18 所示。根据三角形海域的三角关系，可以求得漏测区域面积的表达式为：

$$S_{\text{空}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [0.9W_{(i-1)l} - 0.1W_{(i-1)r}]^2 (\tan \phi + \frac{1}{\tan \phi}) \quad (37)$$

其中， $\tan \phi = \frac{|OB|}{|OA|}$ 。即在区域①中，重叠率固定为 10%，存在一定的漏测率。通过

上述分析，即可求解出区域①的最佳测线设计。求解得到区域①测线总长度为 32098m。

同理，如图 18(b)，将区域②拟合为北深南浅的固定坡面，选取的上下界深度为-84.80m(南北坐标为 0 时东西方向最大深度)与-60m。区域②最优解为测线方向为正东正西、覆盖率恒定为 10%的情况，由于区域②为矩形海域，则可以直接利用问题三的模式进行求解，在求解过程中不会出现漏测区域。求解得到区域②测线总长度为 66672m。

8.2.3 基于微元法设计区域③测线

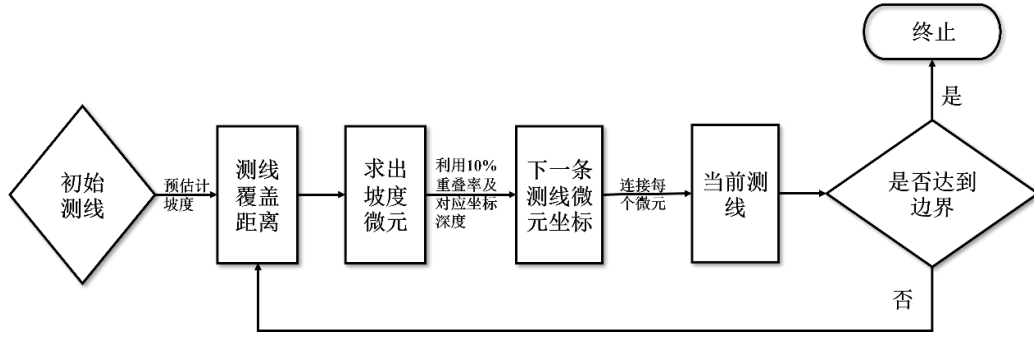


图 19 微元法设计区域③测线流程图

由图 15(b)可知，区域③的等深线具有一定折角，因此，不可以使用固定坡度拟合的方法简化处理该区域。由于该区域的等深线是弯折的，我们已知沿等深线设计测线为最优解，若要使得区域③等深线设计为最优，则测线方向同样需要跟等深线一样转弯。

因为区域③的右边界对应区域②的左边界，即深度为-80m。在-80m~-60m 深度内，深度线接近平行且相距较近，则可以在该范围上进行固定坡面拟合，即对区域③进行局部的固定坡面拟合。在附件中取点计算，可以估计大致坡度为 0.054rad，后续计算中该估计值不会引起模型的误差。以-80m 与-60m 之间的某等深线 $-D_0$ 为起始位置，固定覆盖率为 10%，自东向西设计测线。

以等深线 $-D_0$ 在附件中筛选对应深度，得到等深线附近散点的集合 $\{P_n^{(0)}\}$ ，其中散点 P_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i) ，由于散点间距极小，为方便后续计算，令每个散点上测线方向均为正南正北向。在坡面固定为 $\alpha_2^{(0)} = 0.054\text{rad}$ 时，根据公式(13)，可以求得 P_i 处的覆盖宽度为：

$$W_i^{(0)} = W_{il}^{(0)} + W_{ir}^{(0)} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha_2^{(1)})} z_i^{(0)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha_2^{(2)})} z_i^{(0)} \quad (38)$$

根据该覆盖宽度，可以反解出 $P_i^{(0)}$ 的第一条测线的精确坡度为 $\alpha_2^{(1)}$ ，再以该精确坡度确定下一南北向测线的横坐标，借助横坐标通过查找附件即可确定下一组散点集 $\{P_m^{(i)}\}$ ，以此迭代，直到第 $n-1$ 条测线对应散点 $P_i^{(n)}$ 的横坐标 $x_i^{(n)} < 0$ 。即可以简单理解为，估计角度 $\alpha_2^{(j)} \Rightarrow W_i^{(j)} \Rightarrow$ 精确角度 $\alpha_2^{(j+1)}$ ，并将其作为新一次迭代的估计角度。则有第一次迭代：

$$\begin{cases} \Delta x_{i-1} = \frac{z_i^{(0)} \sin \frac{\theta}{2} + 0.9 \cos(\frac{\theta}{2} + \alpha_2^{(0)})(W_{il}^{(0)} + W_{ir}^{(0)})}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha_2^{(0)}) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha_2^{(0)}} - W_{ir}^{(0)} \\ x_i^{(1)} = x_i^{(0)} - \Delta x_0 \\ x_i^{(1)} \rightarrow z_i^{(1)} \end{cases} \quad (39)$$

结合公式(38)(39), 可以根据前一测线的估计坡度与大量散点坐标, 确定下一测线的估计坡度与散点坐标, 据此迭代直至结束。

初始位置的选择在该迭代过程中至关重要, 我们使用遗传算法^[2], 求解以下规划模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum L \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \Delta x_j = \frac{z_i^{(j)} \sin \frac{\theta}{2} + 0.9 \cos(\frac{\theta}{2} + \alpha_2^{(j)})(W_{il}^{(j)} + W_{ir}^{(j)})}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha_2^{(j)}) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha_2^{(j)}} - W_{ir}^{(j)} \\ x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)} - \Delta x_j \\ x_i^{(j+1)} \Leftrightarrow z_i^{(j+1)} \\ \alpha_2^{(0)} = 0.054 \text{rad} \\ z_i^{(0)} = D_0 \\ L = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^m \sqrt{(x_{i-1}^{(j)} - x_i^{(j)})^2 + (y_{i-1}^{(j)} - y_i^{(j)})^2} \\ x_i^{(j)} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (40)$$

遗传算法求解出最小测线下的最优 D_0 为-75m, 在该初始测线矩形覆盖区域的右边界恰好与-80m 深度线重合, 即并没有浪费覆盖空间。

8.3 实际海域测线设计求解

(1) 各区域设计示意

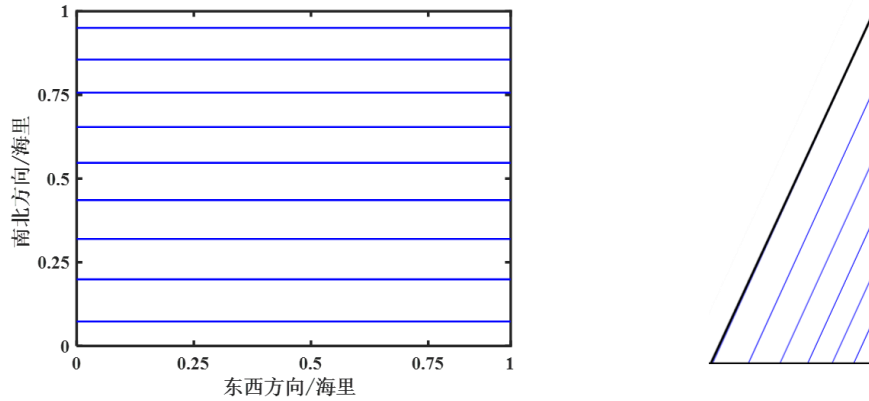


图 20 区域①与区域②测线设计示意

区域②将一共设计 9 条测线, 具体分布如图 20。可以看出由南至北测线分布越来越密, 推测出深度的分布为南深北浅, 这与等深线分布相吻合。

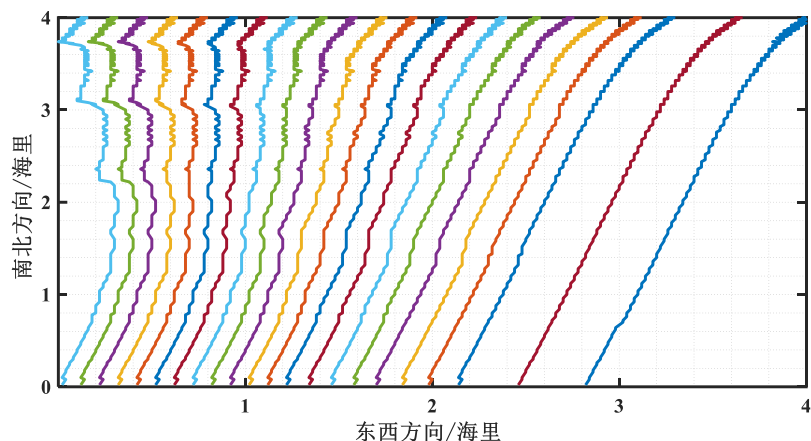


图 21 区域③测线设计示意

上图为区域③具体测线的走向，图中可以很清楚地看出测线的疏密情况。由图中容易看出，海水深度在东南方向较深，在西南方向较浅，这符合等深线的走向。同时，测线的走向是弯弯绕绕的，一定情况上反映海底坡面的不规则变化。

可以看出，在所得测线布设下，利用动态规划和基于遗传算法的微元法即可得出最短总长度为 308800m。因为②区为矩形且深度分布较为均匀，所以②区为满覆盖情况，而③区是微元法求解误差很小，因此只需要计算①区的侧漏面积，即可得到漏测百分比为 0.2119%。

由于②区在区域下边缘处布设的测线覆盖宽度较多地超出原有区域与③区域重叠较大，而②区测线为正东西走向，长度为 4NM。另外①③区临界处覆盖率小于 20%，因此重叠率超过 20%部分的总长度即为②区测线长度为 4NM。

综上，经过计算得到测线总长度、漏测区域占总待测海域面积的百分比、重叠率超过 20%部分的总长度见下表：

表 4 问题四结果表

测线总长度/m	308800
漏测百分比	0.2119%
重叠率超过 20%部分的总长度/m	7408

由表 4 可知，308800 米为在上述布设下尽可能满足全覆盖且重叠率尽量低于百分之 20%时的最短路径。漏测百分比仅占总面积的 0.2119%，说明在上述测线布设下近似满足全覆盖要求。由于重叠率超过 20%部分的总长度不为 0，存在部分区域数据冗余，模型存在改进空间。

九、模型的检验

在本题中，我们假设测量船在海面测深的运行作为一种绝对的稳定过程，并不受到任何波浪的影响，同时忽略船只的吃水深度以此求得后续结果。但是在实际情况下，测量船受到海面波浪的影响会导致吃水深度发生变化，从而直接影响多波束测深对海底的覆盖宽度。因此，我们需要对海深进行敏感性分析。

取测量船随波浪的起伏率 σ 为 0~0.01，其表示在测量船航行过程中受到波浪影响后距离海底坡面的海深与平稳航行时的偏差，研究其对问题三海底覆盖宽度的影响。

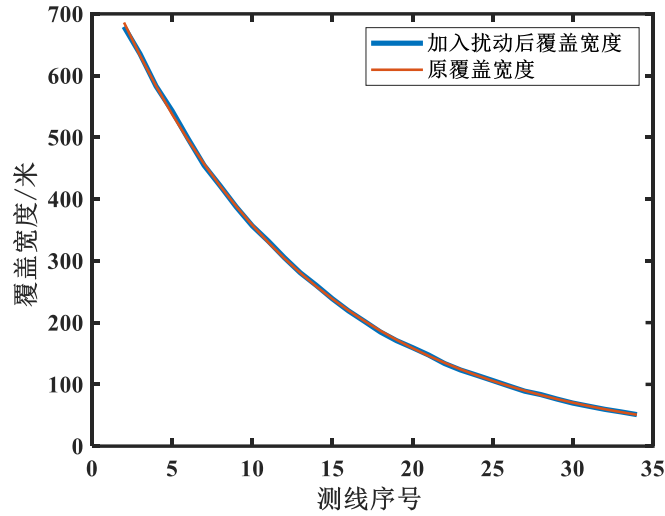


图 22 测量船在风浪扰动与理想情况下各测线覆盖宽度对比图

由图 22 可见，加入扰动后的覆盖宽度与理想情况下的原覆盖宽度在存在风浪扰动的情况下无明显偏差。说明模型较为稳定，本文并引入了平均均方根误差($RMSE$)指标，对偏差情况进行量化衡量。 $RMSE$ 公式为：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_{\text{扰动}i} - w_{\text{理想}i})^2} \quad (41)$$

通过计算可以得出， $RMSE$ 的值为 1.52，由结果可知，平均均方根误差数值较小，表明干扰后的覆盖宽度与理想情况下的覆盖宽度偏差值极小，亦可以说明模型具有较好的稳定性。

十、模型评价与改进

9.1 模型的优点

- (1) 考虑现实的扰动，引入干扰因子，形成动态模型，模型具有较高的稳定性，对实际应用具有普适性。
- (2) 在考虑实际海域的多波束测深时，对整个过程逐步分析，利用有限微元法求解，结果准确，过程清晰，便于计算。
- (3) 问题四采用了遗传算法进行计算，有效地降低了计算的复杂度，且结果准确。

9.2 模型的缺点与改进

9.2.1 模型的缺点

- (1) 在问题三的研究过程中未将曲型测线布设时的情况与所研究情况进行比较，只能得出局部最优解而非全局最优解。

(2) 在问题四的计算过程中, 部分分块采用化零为整的方式, 使得模拟坡面与真实坡面存在偏差, 对测线布设有一定影响。

9.2.2 模型的改进

(1) 问题四中可将单波束数据拟合的探测平面进行细小的网格化处理, 利用 TSP 模型进行测线最短路径研究, 可得出真实数据平面下最优测线布设与最短测线长度。

(2) 研究曲型测线时的测线布设在斜坡上的覆盖情况, 提高模型的普适性。

参考文献

- [1] 中华人民共和国国家技术监督局. GB 12327 - 19981. 海道测量规范[S]1 北京:中国标准出版社, 1991
- [2] 张涛,张驰,张佳宇.基于改进遗传算法的多波束水下地形匹配方法[J].中国惯性技术学报,2022,30(04):485-491+500.DOI:10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2022.04.009.
- [3] 旭,叶小心,洪德玫.多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究[J].中国水运.航道科技,2017(01):52-55.DOI:10.19412/j.cnki.42-1395/u.2017.01.011.
- [4] 玉春. 测深侧扫声纳关键技术研究[D].中国舰船研究院,2014.
- [5] 孙革. 多波束测深系统声速校正方法研究及其应用[D].中国海洋大学,2007.

附录

附录 1 支撑材料

材料名称	材料说明
result1.xlsx	问题一求解结果
result2.xlsx	问题二求解结果
result3.xlsx	问题三求解结果
p1_1.m	问题一程序
p2.m	问题二程序
p3.m	问题三程序
p4_1.m	问题四求区域①代码
p4_2qian.m	问题四微分求区域③浅水区代码
p4_2shen.m	问题四微分求区域③深水区代码
p4_2shang.m	问题四求区域②代码
gaa.m	问题四遗传算法主函数
fical4.m	问题四遗传算法目标函数
createfigure.m	问题二绘图函数
test.m	灵敏度分析
newce3.mat	问题四深水区测线数据
W.mat	问题三测线覆盖宽度，用于灵敏度分析
附件.xlsx	题目附件

附录 2 问题一代码

```

clc
clear
close all
theta=120/180*pi;%换能器开角
alpha=1.5/180*pi;%坡度角
D=70;%初始点海深
d=200;%测线距离
%正弦定理
w1=D/sin(pi/2-theta/2-alpha)*sin(theta/2);
w2=D/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha)-theta)*sin(theta/2);
W=w1+w2;%覆盖宽度
% yit=1-d/W;
dh=d*tan(alpha);%相邻测线的海深差
%% 计算覆盖宽度及覆盖率
yit_h=[];%重叠率（大于 0）
W_h(1)=W;%覆盖宽度（大于 0）
w1_h(1)=w1;
w2_h(1)=w2;
for i=1:4
    D_h(i)=D-dh*i;

```

```

w1_h(i+1)=D_h(i)/sin(pi/2-theta/2-alpha)*sin(theta/2);
w2_h(i+1)=D_h(i)/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha)-theta)*sin(theta/2);
W_h(i+1)=(w1_h(i+1)+w2_h(i+1))*cos(alpha);
yit_h=[yit_h;(w2_h(i)*cos(alpha)+w1_h(i+1)*cos(alpha)-d)/W_h(i)*100];
end
yit_h2=[];%重叠率 (小于 0)
W_h2(1)=W;%覆盖宽度 (小于 0)
w1_h2(1)=w1;
w2_h2(1)=w2;
for i=1:4
    D_h2(i)=D+dh*i;
    w1_h2(i+1)=D_h2(i)/sin(pi/2-theta/2-alpha)*sin(theta/2);
    w2_h2(i+1)=D_h2(i)/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha)-theta)*sin(theta/2);
    W_h2(i+1)=(w1_h2(i+1)+w2_h2(i+1))*cos(alpha);
    yit_h2=[yit_h2;(w2_h2(i+1)*cos(alpha)+w1_h2(i)*cos(alpha)-
d)/W_h2(i+1)*100];
end

```

附录 3 问题二代码

```

clc
clear
close all
theta=120/180*pi;%换能器开角
alpha=1.5/180*pi;%坡度角
D=120;%初始点海深
d=0.3*1852;%船距离
for j=0:45:315
    if j==90||j==270
        n1=[1,0,0];
    else
        n1=[sin(j/180*pi-pi/2)*cos(j/180*pi-pi/2),1-(cos(j/180*pi-pi/2))^2,0];%
测线平面法向量
    end
    n11=[-(cos(pi-j/180*pi))^2,sin(pi-j/180*pi)*cos(pi-j/180*pi),0];%覆盖平面法
向量
    n2=[-(cos(alpha))^2+1,0,sin(alpha)*cos(alpha)];%坡度法向量
    N=-cross(n1,n2);%夹角方向向量
    N1=-cross(n11,n2);
    alpha_h=asin(abs(N(3))/(N(1)^2+N(2)^2+N(3)^2)^0.5);%测线夹角
    alpha_h2=asin(abs(N1(3))/(N1(1)^2+N1(2)^2+N1(3)^2)^0.5);%覆盖平面夹角
    a=alpha_h*180/pi
    %正弦定理
    w1=D/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    w2=D/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    W=w1+w2;%覆盖宽度
    dh=d*tan(alpha_h);%相邻测线的海深差
    %% 计算覆盖宽度及覆盖率
    W_h(j/45+1,1)=W;%覆盖宽度 (大于 0)
    w1_h(j/45+1,1)=w1;
    w2_h(j/45+1,1)=w2;
    for i=1:7
        if j>90&&j<270
            D_h=D-tan(alpha_h)*d*i;
        else

```

```

        D_h=D+tan(alpha_h)*d*i;
    end
    w1_h(j/45+1,i+1)=D_h/sin(pi/2-theta/2-
alpha_h2)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    w2_h(j/45+1,i+1)=D_h/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-
theta)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    W_h(j/45+1,i+1)=w1_h(j/45+1,i+1)+w2_h(j/45+1,i+1);

    end
end
x=1:8;
createfigure(x, W_h')

```

附录 4 问题三代码

```

clc
clear
close all
theta=120/180*pi;%换能器开角
alpha=1.5/180*pi;%坡度角
D=206.94;%初始点海深
j=90;
if j==90||j==270
    n1=[1,0,0];
else
    n1=[sin(j/180*pi-pi/2)*cos(j/180*pi-pi/2),1-(cos(j/180*pi-pi/2))^2,0];%测线
平面法向量
end
n11=[-(cos(pi-j/180*pi))^2,sin(pi-j/180*pi)*cos(pi-j/180*pi),0];%覆盖平面法向量
n2=[-(cos(alpha))^2+1,0,sin(alpha)*cos(alpha)];%坡度法向量
N=-cross(n1,n2);%夹角方向向量
N1=-cross(n11,n2);
alpha_h=asin(abs(N(3))/(N(1)^2+N(2)^2+N(3)^2)^0.5);%测线夹角
alpha_h2=asin(abs(N1(3))/(N1(1)^2+N1(2)^2+N1(3)^2)^0.5);%覆盖平面夹角
% 初始边界
X0=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)*sin(alpha));
i=1;
X(1)=X0;
w2=0;%启动代码
while 4*1852-X>w2
    i=i+1;
    D_h2=D-sin(alpha_h2)*(X0);
    w1(i)=D_h2/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2);
    w2(i)=D_h2/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2);
    W(i)=w1(i)+w2(i);
    %更新边界
X(i)=(D*sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)+0.9*sum(W))/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)*sin(alpha));
    X0=X(i);

end
s=size(X,2)*1852*2;

```

附录 5 问题四遗传算法目标函数及主函数

```

clc
clear
close all
a = readmatrix('附件.xlsx');
a = a(2:end, 3:end);
LB = [60];
UB = [75];

% 创建遗传算法的选项结构
options = gaoptimset('PopulationType', 'doubleVector', ...
                    'PopulationSize', 100, ...
                    'PlotFcns', @gaplotbestf, ...
                    'Generations', 30, ...
                    'StallGenLimit', inf);

record = [];

% 运行遗传算法优化
[x, fval] = ga(@fical4, 1, [], [], [], [], LB, UB, [], options);

record = [record; fval];

function fitness = fical4(bestD)
a = evalin('base', 'a');
theta=120/180*pi;%换能器开角
D=bestD;%初始点海深
alpha=0.054;
j=90;
if j==90||j==270
    n1=[1,0,0];
else
    n1=[sin(j/180*pi-pi/2)*cos(j/180*pi-pi/2),1-(cos(j/180*pi-pi/2))^2,0];%测线
    平面法向量
end
n11=[-(cos(pi-j/180*pi))^2,sin(pi-j/180*pi)*cos(pi-j/180*pi),0];%覆盖平面法向量
n2=[-(cos(alpha))^2+1,0,sin(alpha)*cos(alpha)];%坡度法向量
N=-cross(n1,n2);%夹角方向向量
N1=-cross(n11,n2);
alpha_h=asin(abs(N(3))/(N(1)^2+N(2)^2+N(3)^2)^0.5);%测线夹角
alpha_h2=asin(abs(N1(3))/(N1(1)^2+N1(2)^2+N1(3)^2)^0.5);%覆盖平面夹角
% 初始边界
X0=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)*sin(alpha));
b=a(1:200,:);
% 找到与 D_h 相差 0.3 的值的坐标
targetDifference = 0.3;
[row, col] = find(abs(b - bestD) <= targetDifference);
% 将坐标按照行的顺序排序
coordinates = [row, col];
sortedCoordinates = sortrows(coordinates);
row=sortedCoordinates(:,1);col=sortedCoordinates(:,2);

```

```

w11=65/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
w22=65/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
W=w11+w22;
leng=fix(W/1852/0.02);%坡度长度
%%
c=[];
for i=1:size(row,1)
    if col(i,end)<=leng
        c(i,:)=a(row(i),1:col(i,end));
    else
        c(i,:)=a(row(i),(col(i,end)-leng):col(i,end));
    end
    theta_c(i)=atan((max(c(i,:))-min(c(i,:)))/(leng*0.02*1852));
    theta_c(i)=atan((max(c(i,:))-min(c(i,:)))/(leng*0.02*1852));
    % 初始边界

X1(i)=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i)
))*sin(theta_c(i));
X(i,1)=X1(i);
j=1;
w2=0;%启动代码
while leng*0.02*1852-X(i,j)>w2
    j=j+1;
    D_h2(i)=D-sin(alpha_h2)*(X1(i));
    w1(i,j)=D_h2(i)/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2);
    w2(i,j)=D_h2(i)/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2);
    W1(i,j)=w1(i,j)+w2(i,j);
    %更新边界

X(i,j)=(D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))+0.9*sum(W1(i,:)))/(1+sin(theta/2)/c
os(theta/2+theta_c(i))*sin(theta_c(i)));
    X1=X(i,j);
end
zuob=fix(X/1852/0.02);
end
newce_col=col-zuob;
n1=1;
newce(:,n1)=newce_col(:,1);

while min(newce_col)>0
    w11=b(row(i),newce_col(i,end))/sin(pi/2-theta/2-
alpha_h2)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    w22=b(row(i),newce_col(i,end))/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-
theta)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    W=w11+w22;
    leng=fix(W/1852/0.02);%坡度长度

    for i=1:size(row,1)
        c=[];
        if newce_col(i,end)<=leng
            c(i,:)=a(row(i),1:newce_col(i,end));
        else
            c(i,:)=a(row(i),(newce_col(i,end)-leng):newce_col(i,end));
        end
        theta_c(i)=atan((max(c(i,:))-min(c(i,:)))/(leng*0.02*1852));
        % 初始边界

```

```

X1(i)=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i)
))*sin(theta_c(i));
    X(i,1)=X1(i);
    j=1;
    w2=0;%启动代码
    while leng*0.02*1852-X(i,j)>w2
        j=j+1;
        D_h2(i)=a(row(i),newce_col(i,end));
        w1(i,j)=D_h2(i)/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2);
        w2(i,j)=D_h2(i)/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2);
        W1(i,j)=w1(i,j)+w2(i,j);
        %更新边界
    end
X(i,j)=(D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))+0.9*sum(W1(i,:)))/(1+sin(theta/2)/c
os(theta/2+theta_c(i))*sin(theta_c(i)));
    X1=X(i,j);
    end
    zuob=fix(X/1852/0.02);
end
newce_col=newce_col-zuob;
if size(newce_col,2)>1
    newce(:,n1)=newce_col(:,end);
    n1=n1+1;
else
    newce(:,n1)=newce_col(:,1);
    n1=n1+1;
end
end

%% shen
% 初始边界
X0=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)*sin(al
pha));
b=a(1:200,:);
% 找到与 D_h 相差 1.5 的值的坐标
targetDifference = 0.3;
[row, col] = find(abs(b - bestD) <= targetDifference);
% 将坐标按照行的顺序排序
coordinates = [row, col];
sortedCoordinates = sortrows(coordinates);
row=sortedCoordinates(:,1);col=sortedCoordinates(:,2);
w11=65/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
w22=65/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
W=w11+w22;
leng=fix(W/1852/0.02);%坡度长度
%%
c=[];
for i=1:size(row,1)
    if col(i,end)+leng > 201
        % 使用零填充扩展
        c(i,:) = [a(row(i), col(i,end):end), zeros(1, leng - (201 - col(i,end)))];
    else
        c(i,:) = a(row(i), col(i,end):(col(i,end)+leng));
    end

    theta_c(i)=atan((max(c(i,:))-min(c(i,:)))/(leng*0.02*1852));
    % 初始边界

```



```

X1(i)=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i)
))*sin(theta_c(i));
X(i,1)=X1(i);
j=1;
w2=0;%启动代码
while leng*0.02*1852-X(i,j)>w2
    j=j+1;
    D_h2(i)=D-sin(alpha_h2)*(X1(i));
    w1(i,j)=D_h2(i)/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2);
    w2(i,j)=D_h2(i)/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2);
    W1(i,j)=w1(i,j)+w2(i,j);
    %更新边界

X(i,j)=(D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))+0.9*sum(W1(i,:)))/(1+sin(theta/2)/c
os(theta/2+theta_c(i))*sin(theta_c(i)));
X1=X(i,j);
end
zuob=fix(X/1852/0.02);
end
newce_col=col+zuob;
n=1;
newce_shen(:,n)=newce_col(:,1);

while max(newce_col)-201<0
    w11=b(row(i),newce_col(i,end))/sin(pi/2-theta/2-
alpha_h2)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    w22=b(row(i),newce_col(i,end))/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-
theta)*sin(theta/2)*cos(alpha_h2);
    W=w11+w22;
    leng=fix(W/1852/0.02);%坡度长度

    for i=1:size(row,1)
        c=[];
        if newce_col(i,end)+leng>201
            c(i,:)=a(row(i),newce_col(i,end):end);
        else
            c(i,:)=a(row(i),newce_col(i,end):(newce_col(i,end)+leng));
        end
        theta_c(i)=atan((max(c(i,:))-min(c(i,:)))/(leng*0.02*1852));
        % 初始边界

X1(i)=D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))/(1+sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i)
))*sin(theta_c(i));
X(i,1)=X1(i);
j=1;
w2=0;%启动代码
while leng*0.02*1852-X(i,j)>w2
    j=j+1;
    D_h2(i)=a(row(i),newce_col(i,end));
    w1(i,j)=D_h2(i)/sin(pi/2-theta/2-alpha_h2)*sin(theta/2);
    w2(i,j)=D_h2(i)/sin(pi-(pi/2-theta/2-alpha_h2)-theta)*sin(theta/2);
    W1(i,j)=w1(i,j)+w2(i,j);
    %更新边界

X(i,j)=(D*sin(theta/2)/cos(theta/2+theta_c(i))+0.9*sum(W1(i,:)))/(1+sin(theta/2)/c
os(theta/2+theta_c(i))*sin(theta_c(i)));
X1=X(i,j);

```

```

        end
        zuob=fix(X/1852/0.02);
    end
    newce_col=newce_col+zuob;
    if size(newce_col,2)>1
        newce_shen(:,n)=newce_col(:,end);
        n=n+1;
    else
        newce_shen(:,n)=newce_col(:,1);
        n=n+1;
    end
end
% 计算相邻散点之间的欧式距离
distances = zeros(1, length(col) - 1);
for i = 1:length(col) - 1
    dx = col(i + 1) - col(i);
    dy = row(i + 1) - row(i);
    distances(i) = sqrt(dx^2 + dy^2);
end
% 计算曲线的总长度（将距离相加）
curve_length = sum(distances)*0.02*1852;
distances2 = zeros(1, length(col) - 1);
for j=1:n1-1
    for i = 1:length(col) - 1
        dx = newce(i + 1,j) -newce(i,j);
        dy = row(i + 1) - row(i);
        distances2(i,j) = sqrt(dx^2 + dy^2);
    end
end
curve_length2 = sum(sum(distances2)*0.02*1852);
distances3 = zeros(1, length(col) - 1);
for j=1:n-1
    for i = 1:length(col) - 1
        dx = newce_shen(i + 1,j) -newce_shen(i,j);
        dy = row(i + 1) - row(i);
        distances3(i,j) = sqrt(dx^2 + dy^2);
    end
end
curve_length3 = sum(sum(distances3)*0.02*1852);
L=curve_length3+curve_length2+curve_length;
fitness=L;

```