Cvičení 1

Logika

Příklad 1 Napište negace následujících tvrzení.

1. $(A \wedge B) \implies (B \vee C)$
2. $(A \implies (B \vee C)) \wedge (B \implies C)$
3. $(A \wedge B) \iff (A \vee C)$

Příklad 2 Každé z následujících tvrzení vyjádřete ekvivalentní výrokovou formulí, s využitím kvantifikátorů, logických spojek a symbolu $a|b$, který znamená, že a je dělitel b.

1. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
2. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
3. Pokud každé sudé přirozené číslo patří do množiny M, pak žádné sudé přirozené číslo nepatří do množiny N.
4. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.

Příklad 3 Napište negace následujících tvrzení.

1. Číslo n má aspoň jednoho dělitele, který není dělitelem žádného čísla menšího než n.
2. Pokud je v každém kroužku aspoň jeden student, který chodí na přednášku z analýzy, pak v žádném kroužku není víc než pět studentů navštěvujících přednášku z algebry.
3. Každá množina pěti čísel obsahuje aspoň tři lichá čísla nebo aspoň tři sudá čísla.
4. Každý student, který získal alespoň dvacet bodů v zápočtovém testu, má nárok na udělení zápočtu.

Příklad 4 Zapište všechny logické spojky pouze pomocí implikace a negace

Důkazy

Příklad 1 K následujícím implikacím zformulujte obměnu.

1. Pokud existuje liché prvočíslo, pak pro žádné $x \in \mathbb{N}$ neexistuje $y \in \mathbb{N}$ takové, že $y > x$.
2. Pokud x je dělitelné 6 a y je dělitelné 7, pak $x \cdot y$ je sudé.
3. $(\forall x \in \mathbb{N} y \in \mathbb{N} : y = x + 1) \implies (y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} : y = x + 1)$.
4. Pokud jsou všechny ovce bílé, jsou všechny kočky černé.

Příklad 2 Dokažte obměnou:

1. Jestliže $n^2 + 2$ není dělitelné třemi, pak n je dělitelné třemi
2. Pokud je xy liché, pak x i y jsou liché
3. Pokud a a b jsou reálné a ab je iracionální, pak alespoň jedno z a, b je iracionální

Příklad 3 Dokažte sporem:

1. Neexistuje největší přirozené číslo
2. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální (Nápověda: Dokažte, že pokud $p^2 = 2q^2$, pak p i q jsou sudá.)
3. Existuje nekonečně mnoho prvočísel. (Nápověda: Pokud $a_1, \ldots, a_k > 1$, pak $a1 \cdot \cdots \cdot a_k + 1$ není dělitelné žádným z a_i.