windliang

leetCode_4_Median_of_Two_Sorted_Arrays

2018-07-18 | 2018-08-15 | LeetCode | 1496

题目描述（困难难度）

There are two sorted arrays **nums1** and **nums2** of size m and n respectively.

Find the median of the two sorted arrays. The overall run time complexity should be O(log (m+n)).

Example 1:

```
nums1 = [1, 3]
nums2 = [2]

The median is 2.0
```

Example 2:

```
nums1 = [1, 2]
nums2 = [3, 4]

The median is (2 + 3)/2 = 2.5
```

已知两个有序数组，找到两个数组合并后的中位数。

解法一

简单粗暴，先将两个数组合并，两个有序数组的合并也是归并排序中的一部分。然后根据奇数，还是偶数，返回中位数。

代码

```java
public double findMedianSortedArrays(int[] nums1, int[] nums2) {
    int[] nums;
    int m = nums1.length;
```

```
        int n = nums2.length;
        nums = new int[m + n];
        if (m == 0) {
            if (n % 2 == 0) {
                return (nums2[n / 2 - 1] + nums2[n / 2]) / 2.0;
            } else {

                return nums2[n / 2];
            }
        }
        if (n == 0) {
            if (m % 2 == 0) {
                return (nums1[m / 2 - 1] + nums1[m / 2]) / 2.0;
            } else {
                return nums1[m / 2];
            }
        }

        int count = 0;
        int i = 0, j = 0;
        while (count != (m + n)) {
            if (i == m) {
                while (j != n) {
                    nums[count++] = nums2[j++];
                }
                break;
            }
            if (j == n) {
                while (i != m) {
                    nums[count++] = nums1[i++];
                }
                break;
            }

            if (nums1[i] < nums2[j]) {
                nums[count++] = nums1[i++];
            } else {
                nums[count++] = nums2[j++];
            }
        }

        if (count % 2 == 0) {
            return (nums[count / 2 - 1] + nums[count / 2]) / 2.0;
        } else {
```

```
            return nums[count / 2];
        }
    }
```

时间复杂度：遍历全部数组，O（m + n）

空间复杂度：开辟了一个数组，保存合并后的两个数组，O（m + n）

解法二

其实，我们不需要将两个数组真的合并，我们只需要找到中位数在哪里就可以了。

开始的思路是写一个循环，然后里边判断是否到了中位数的位置，到了就返回结果，但这里对偶数和奇数的分类会很麻烦。当其中一个数组遍历完后，出了 for 循环对边界的判断也会分几种情况。总体来说，虽然复杂度不影响，但代码会看起来很乱。然后在 这里 找到了另一种思路。

首先是怎么将奇数和偶数的情况合并一下。

用 len 表示合并后数组的长度，如果是奇数，我们需要知道第 （len + 1）/ 2 个数就可以了，如果遍历的话需要遍历 int (len / 2) + 1 次。如果是偶数，我们需要知道第 len / 2 和 len / 2 + 1 个数，也是需要遍历 len / 2 + 1 次。所以遍历的话，奇数和偶数都是 len / 2 + 1 次。

返回中位数的话，奇数需要最后一次遍历的结果就可以了，偶数需要最后一次和上一次遍历的结果。所以我们用两个变量 left 和 right ，right 保存当前循环的结果，在每次循环前将 right 的值赋给 left 。这样在最后一次循环的时候，left 将得到 right 的值，也就是上一次循环的结果，接下来 right 更新为最后一次的结果。

循环中该怎么写，什么时候 A 数组后移，什么时候 B 数组后移。用 aStart 和 bStart 分别表示当前指向 A 数组和 B 数组的位置。如果 aStart 还没有到最后并且此时 A 位置的数字小于 B 位置的数组，那么就可以后移了。也就是aStart ＜ m && A[aStart] < B[bStart]。

但如果 B 数组此刻已经没有数字了，继续取数字B [bStart]，则会越界，所以判断下 bStart 是否大于数组长度了，这样 || 后边的就不会执行了，也就不会导致错误了，所以增加为 aStart ＜ m && (bStart >= n || A [aStart] < B [bStart]) 。

代码

```
public double findMedianSortedArrays(int[] A, int[] B) {
    int m = A.length;
```

```
    int n = B.length;
    int len = m + n;
    int left = -1, right = -1;
    int aStart = 0, bStart = 0;
    for (int i = 0; i <= len / 2; i++) {
        left = right;
        if (aStart < m && (bStart >= n || A[aStart] < B[bStart])) {
            right = A[aStart++];
        } else {
            right = B[bStart++];
        }
    }
    if ((len & 1) == 0)
        return (left + right) / 2.0;
    else
        return right;
}
```

时间复杂度：遍历 len/2 + 1 次，len = m + n ，所以时间复杂度依旧是 O（m + n）。

空间复杂度：我们申请了常数个变量，也就是 m，n，len，left，right，aStart，bStart 以及 i 。

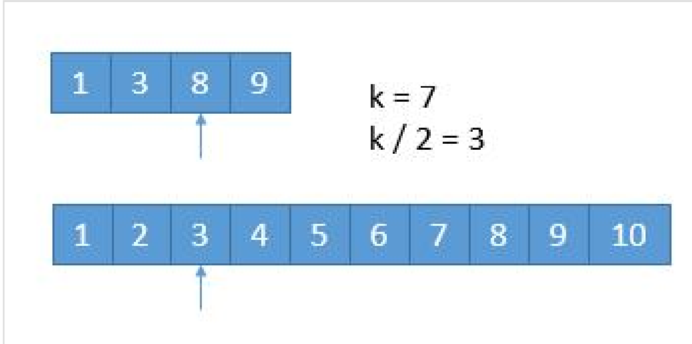
总共 8 个变量，所以空间复杂度是 O（1）。

解法三

上边的两种思路，时间复杂度都达不到题目的要求 O (log (m + n))。看到 log ，很明显，我们只有用到二分的方法才能达到。我们不妨用另一种思路，题目是求中位数，其实就是求第 k 小数的一种特殊情况，而求第 k 小数有一种算法。

解法二中，我们一次遍历就相当于去掉不可能是中位数的一个值，也就是一个一个排除。由于数列是有序的，其实我们完全可以一半儿一半儿的排除。假设我们要找第 k 小数，我们可以每次循环排除掉 k / 2 个数。看下边一个例子。

假设我们要找第 7 小的数字。

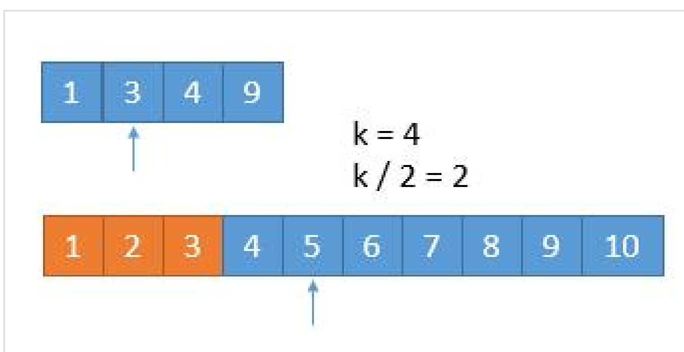


我们比较两个数组的第 k / 2 个数字，如果 k 是奇数，向下取整。也就是比较第 3 个数字，上边数组中的 8 和 下边数组中的 3 ，如果哪个小，就表明该数组的前 k / 2 个数字都不是第 k 小数字，所以可以排除。也就是 1，2，3 这三个数字不可能是第 7 小的数字，我们可以把它排除掉。将 1389 和 45678910 两个数组作为新的数组进行比较。

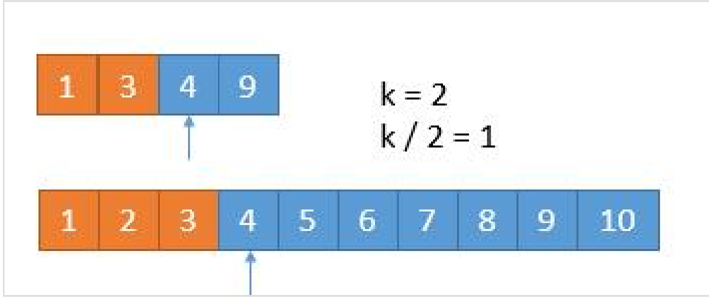
更一般的情况 A [1]，A [2]，A [3]，A [k / 2] ... ，B[1]，B [2]，B [3]，B[k / 2] ... ，如果 A [k / 2] < B [k / 2] ，那么 A [1]，A [2]，A [3]，A [k / 2] 都不可能是第 k 小的数字。

A 数组中比 A [k / 2] 小的数有 k / 2 – 1 个，B 数组中，B [k / 2] 比 A [k / 2] 小，假设 B [k / 2] 前边的数字都比 A [k / 2] 小，也只有 k / 2 – 1 个，所以比 A [k / 2] 小的数字最多有 k / 2 – 1 + k / 2 – 1 = k – 2 个，所以 A [k / 2] 最多是第 k – 1 小的数。而比 A [k / 2] 小的数更不可能是第 k 小的数了，所以可以把它们排除。

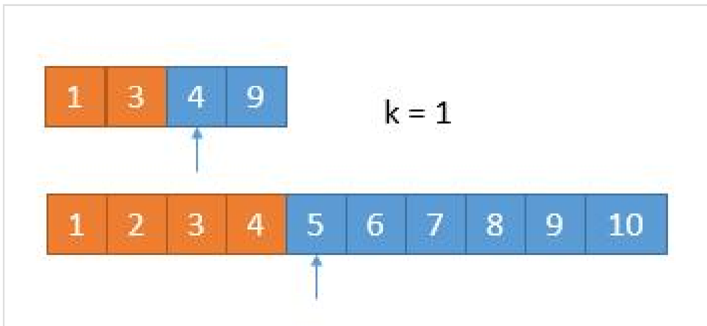
橙色的部分表示已经去掉的数字。



由于我们已经排除掉了 3 个数字，就是这 3 个数字一定在最前边，所以在两个新数组中，我们只需要找第 7 – 3 = 4 小的数字就可以了，也就是 k = 4 。此时两个数组，比较第 2 个数字，3 < 5，所以我们可以把小的那个数组中的 1 ，3 排除掉了。



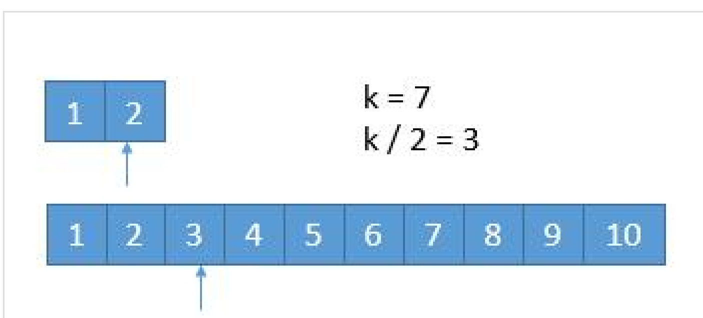
我们又排除掉 2 个数字，所以现在找第 4 - 2 = 2 小的数字就可以了。此时比较两个数组中的第 k / 2 = 1 个数，4 = 4 ，怎么办呢？由于两个数相等，所以我们无论去掉哪个数组中的都行，因为去掉 1 个总会保留 1 个的，所以没有影响。为了统一，我们就假设 4 > 4 吧，所以此时将下边的 4 去掉。



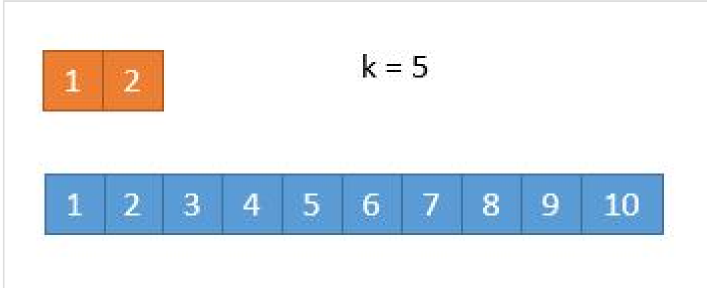
由于又去掉 1 个数字，此时我们要找第 1 小的数字，所以只需判断两个数组中第一个数字哪个小就可以了，也就是 4 。

所以第 7 小的数字是 4 。

我们每次都是取 k / 2 的数进行比较，有时候可能会遇到数组长度小于 k / 2 的时候。



此时 k / 2 等于 3 ，而上边的数组长度是 2 ，我们此时将箭头指向它的末尾就可以了。这样的话，由于 2 < 3 ，所以就会导致上边的数组 1，2 都被排除。造成下边的情况。



由于 2 个元素被排除，所以此时 k = 5 ，又由于上边的数组已经空了，我们只需要返回下边的数组的第 5 个数字就可以了。

从上边可以看到，无论是找第奇数个还是第偶数个数字，对我们的算法并没有影响，而且在算法进行中，k 的值都有可能从奇数变为偶数，最终都会变为 1 或者由于一个数组空了，直接返回结果。

所以我们采用递归的思路，为了防止数组长度小于 k / 2 ，所以每次比较 min (k / 2，len (数组)) 对应的数字，把小的那个对应的数组的数字排除，将两个新数组进入递归，并且 k 要减去排除的数字的个数。递归出口就是当 k = 1 或者其中一个数字长度是 0 了。

代码

```
public double findMedianSortedArrays(int[] nums1, int[] nums2) {
    int n = nums1.length;
    int m = nums2.length;
    int left = (n + m + 1) / 2;
    int right = (n + m + 2) / 2;
    //将偶数和奇数的情况合并，如果是奇数，会求两次同样的 k 。
    return (getKth(nums1, 0, n - 1, nums2, 0, m - 1, left) + getKth(nums1, 0, n - 1, n
}

    private int getKth(int[] nums1, int start1, int end1, int[] nums2, int start2, int
        int len1 = end1 - start1 + 1;
        int len2 = end2 - start2 + 1;
        //让 len1 的长度小于 len2，这样就能保证如果有数组空了，一定是 len1
        if (len1 > len2) return getKth(nums2, start2, end2, nums1, start1, end1, k);
        if (len1 == 0) return nums2[start2 + k - 1];

        if (k == 1) return Math.min(nums1[start1], nums2[start2]);

        int i = start1 + Math.min(len1, k / 2) - 1;
        int j = start2 + Math.min(len2, k / 2) - 1;

        if (nums1[i] > nums2[j]) {
```

```
                return getKth(nums1, start1, end1, nums2, j + 1, end2, k - (j - start2 + 1
            }
            else {
                return getKth(nums1, i + 1, end1, nums2, start2, end2, k - (i - start1 + 1
            }
        }
```

时间复杂度：每进行一次循环，我们就减少 k / 2 个元素，所以时间复杂度是 O（log（k）），而 k = （m + n）/ 2，所以最终的复杂也就是 O（log（m + n））。

空间复杂度：虽然我们用到了递归，但是可以看到这个递归属于尾递归，所以编译器不需要不停地堆栈，所以空间复杂度为 O（1）。

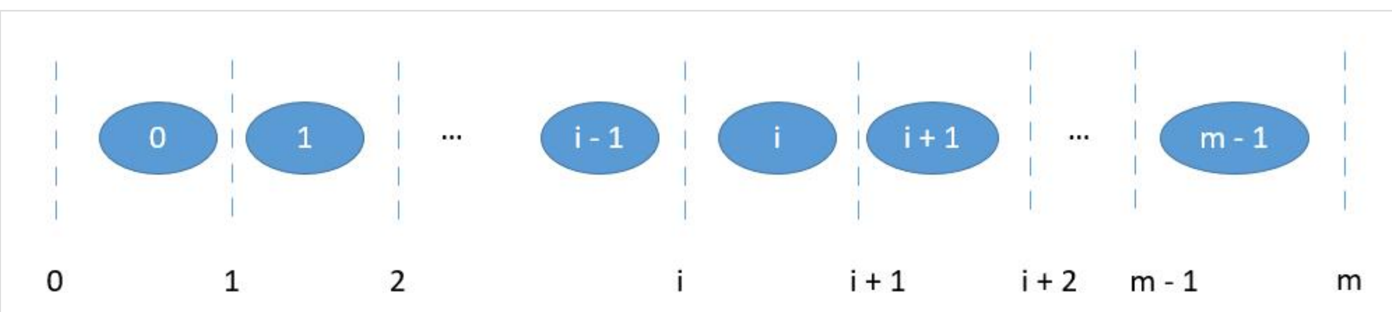
解法四

我们首先理一下中位数的定义是什么

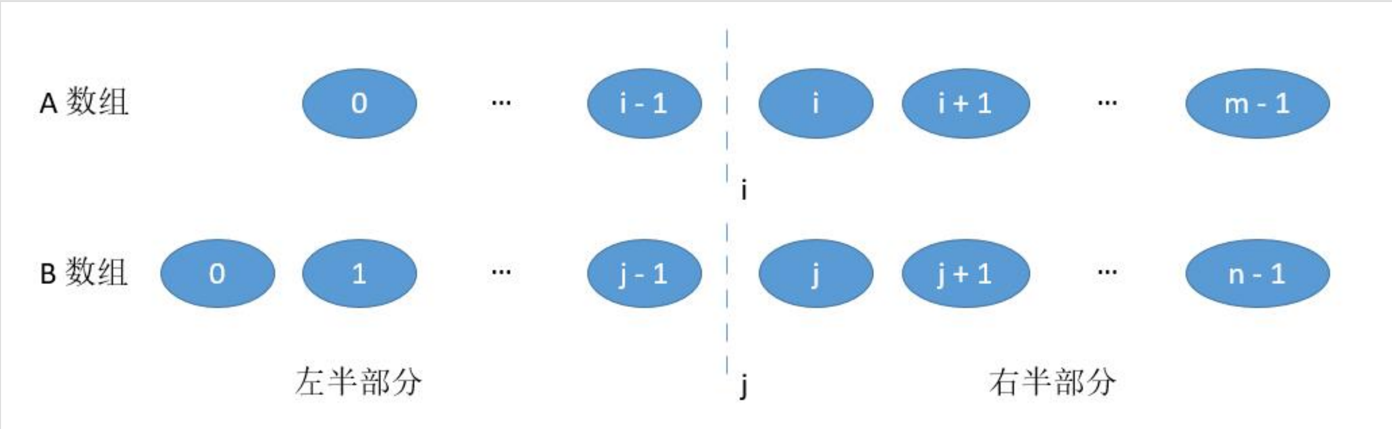
> 中位数（又称中值，英语：Median），统计学中的专有名词，代表一个样本、种群或概率分布中的一个数值，其可将数值集合划分为相等的上下两部分。

所以我们只需要将数组进行切。

一个长度为 m 的数组，有 0 到 m 总共 m + 1 个位置可以切。



我们把数组 A 和数组 B 分别在 i 和 j 进行切割。



将 i 的左边和 j 的左边组合成「左半部分」，将 i 的右边和 j 的右边组合成「右半部分」。

- 当 A 数组和 B 数组的总长度是偶数时，如果我们能够保证
    - 左半部分的长度等于右半部分

      i + j = m – i + n – j , 也就是 j = (m + n) / 2 – i

    - 左半部分最大的值小于等于右半部分最小的值 max (A [i – 1] , B [j – 1]）） <= min (A [i] , B [j]））

      那么，中位数就可以表示如下

      （左半部分最大值 + 右半部分最大值 ）/ 2 。

      (max (A [i – 1] , B [j – 1]）+ min (A [i] , B [j]））/ 2

- 当 A 数组和 B 数组的总长度是奇数时，如果我们能够保证
    - 左半部分的长度比右半部分大 1

      i + j = m – i + n – j + 1也就是 j = (m + n + 1) / 2 – i

    - 左半部分最大的值小于等于右半部分最小的值 max (A [i – 1] , B [j – 1]）） <= min (A [i] , B [j]））

      那么，中位数就是

      左半部分最大值，也就是左半部比右半部分多出的那一个数。

max (A [i – 1] , B [j – 1])

上边的第一个条件我们其实可以合并为 j = (m + n + 1) / 2 – i，因为如果 m + n 是偶数，由于我们取的是 int 值，所以加 1 也不会影响结果。当然，由于 0 <= i <= m ，为了保证 0 <= j <= n ，我们必须保证 m <= n 。

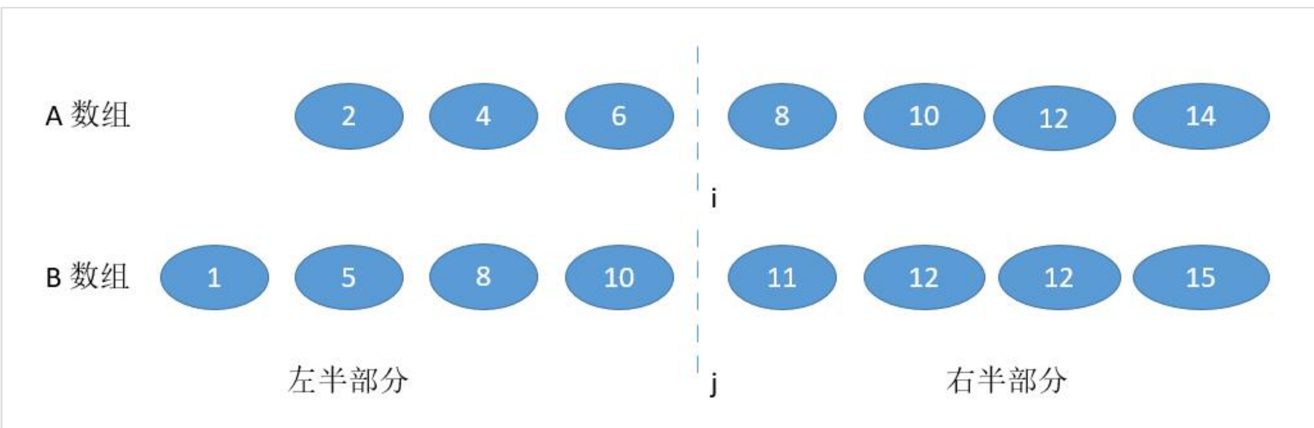
$$m \leq n \ , i < m, j = (m + n + 1)/2 - i \geq (m + m + 1)/2 - i > (m + m + 1)/2 - m = 0$$

$$m \leq n, i > 0, j = (m + n + 1)/2 - i \leq (n + n + 1)/2 - i < (n + n + 1)/2 = n$$

最后一步由于是 int 间的运算，所以 1 / 2 = 0。

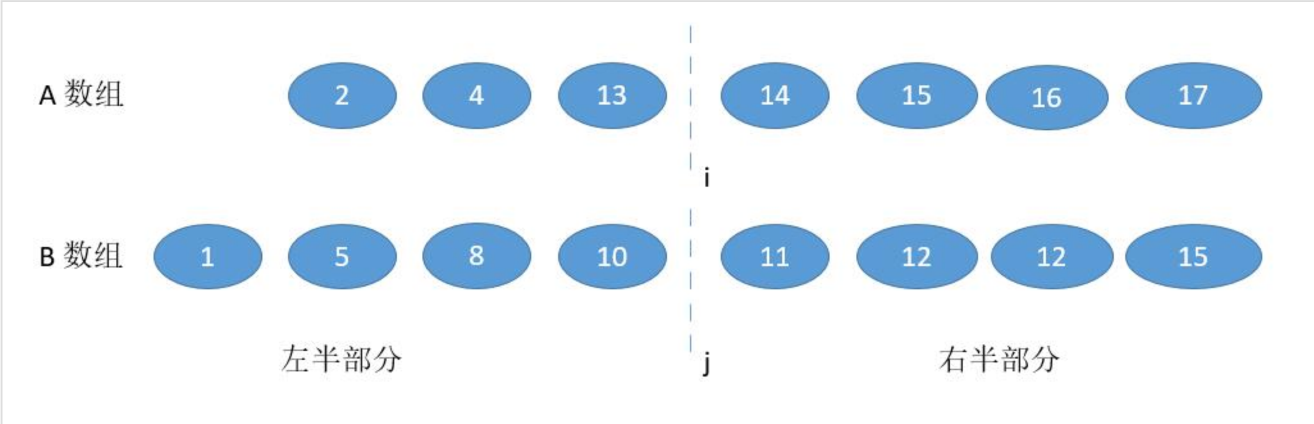
而对于第二个条件，奇数和偶数的情况是一样的，我们进一步分析。为了保证 max (A [i – 1] , B [j – 1]) ） <= min (A [i] , B [j]) ），因为 A 数组和 B 数组是有序的，所以 A [i – 1] <= A [i]，B [i – 1] <= B [i] 这是天然的，所以我们只需要保证 B [j – 1] < = A [i] 和 A [i – 1] <= B [j] 所以我们分两种情况讨论：

- B [j – 1] > A [i]，并且为了不越界，要保证 j != 0，i != m



此时很明显，我们需要增加 i ，为了数量的平衡还要减少 j ，幸运的是 j = (m + n + 1) / 2 – i，i 增大，j 自然会减少。

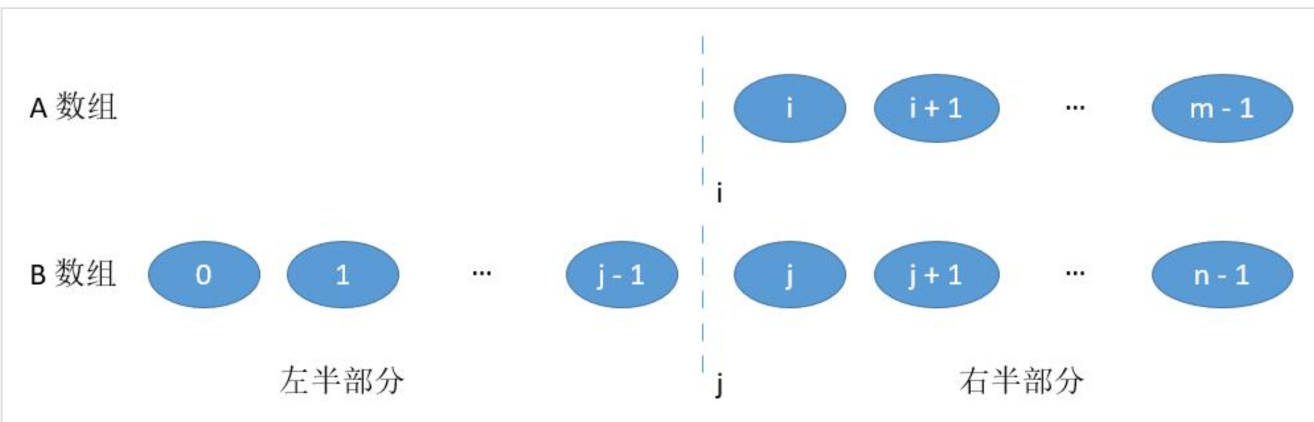
- A [i – 1] > B [j] ，并且为了不越界，要保证 i != 0，j != n



此时和上边的情况相反，我们要减少 i ，增大 j 。

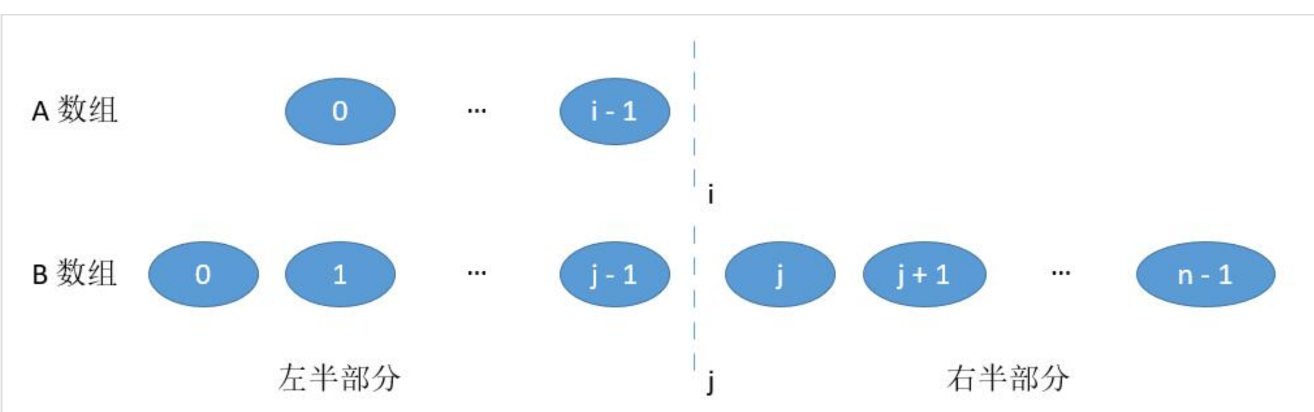
上边两种情况，我们把边界都排除了，需要单独讨论。

- 当 i = 0 , 或者 j = 0 ， 也就是切在了最前边。



此时左半部分当 j = 0 时，最大的值就是 A [i – 1]；当 i = 0 时 最大的值就是 B [j – 1] 。右半部分最小值和之前一样。

- 当 i = m 或者 j = n ， 也就是切在了最后边。



此时左半部分最大值和之前一样。右半部分当 j = n 时，最小值就是 A [i]；当 i = m 时，最小值就是B [j]。

所有的思路都理清了，最后一个问题，增加 i 的方式。当然用二分了。初始化 i 为中间的值，然后减半找中间的，减半找中间的，减半找中间的直到答案。

```java
class Solution {
    public double findMedianSortedArrays(int[] A, int[] B) {
        int m = A.length;
        int n = B.length;
        if (m > n) {
            return findMedianSortedArrays(B,A); // 保证 m <= n
        }
        int iMin = 0, iMax = m;
        while (iMin <= iMax) {
            int i = (iMin + iMax) / 2;
            int j = (m + n + 1) / 2 - i;
            if (j != 0 && i != m && B[j-1] > A[i]){ // i 需要增大
                iMin = i + 1;
            }
            else if (i != 0 && j != n && A[i-1] > B[j]) { // i 需要减小
                iMax = i - 1;
            }
            else { // 达到要求，并且将边界条件列出来单独考虑
                int maxLeft = 0;
                if (i == 0) { maxLeft = B[j-1]; }
                else if (j == 0) { maxLeft = A[i-1]; }
                else { maxLeft = Math.max(A[i-1], B[j-1]); }
                if ( (m + n) % 2 == 1 ) { return maxLeft; } // 奇数的话不需要考虑右半部分

                int minRight = 0;
                if (i == m) { minRight = B[j]; }
                else if (j == n) { minRight = A[i]; }
                else { minRight = Math.min(B[j], A[i]); }

                return (maxLeft + minRight) / 2.0; //如果是偶数的话返回结果
            }
        }
        return 0.0;
    }
}
```

时间复杂度：我们对较短的数组进行了二分查找，所以时间复杂度是 O（log（min（m，n）））。

空间复杂度：只有一些固定的变量，和数组长度无关，所以空间复杂度是 O (1) 。

总结

解法二中体会到了对情况的转换，有时候即使有了思路，代码也不一定写的优雅，需要多锻炼才可以。解法三和解法四充分发挥了二分查找的优势，将时间复杂度降为 log 级别。

添加好友一起进步~

LeetCode

‹ leetCode_3_Longest_Substring_Without_Repeating_Characters leetCode_5_Longest_Palindromic_Substring ›