PUB. IRMA, LILLE 2005
Vol. 60, N° XII

Principes d'invariance pour les champs aléatoires fortement dépendants.

I : Théorème de convergence de champs spectraux

Frédéric Lavancier
LS-CREST, INSEE, Paris
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, FRE CNRS 2222
Bât. M2. Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Résumé

Nous considérons dans cette première partie un champ à spectre borné. Nous montrons que si ses lignes de Donsker convergent, il existe une limite en loi pour son champ spectral convenablement dilaté. Les applications de ce résultat seront traitées dans une seconde partie. Nous y démontrerons notamment un théorème de Donsker pour des classes non standard de champs aléatoire fortement dépendants.

Abstract

We consider in this first part a random field having a bounded spectral density. If its Donsker lines converge, we show that its properly dilated spectral field admits a limit in law. Some applications will be presented in the second part of this work, where we will prove, among others, a Donsker theorem for some non-standard classes of long-range dependent random fields.

Mots clés : Filtrage linéaire, Limite non gaussienne, Longue mémoire non régulière, Tableaux triangulaires, Théorème de Donsker pour les champs.

1 Introduction

Un champ aléatoire stationnaire $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est communément dit à longue mémoire, ou fortement dépendant, lorsque sa fonction de covariance $r(n),\ n \in \mathbb{Z}^d$, n'est pas absolument sommable, c'est à dire si $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |r(n)| = \infty$. Une définition alternative proche mais pas équivalente consiste à supposer sa densité spectrale non bornée en l'origine.

Dobrushin and Major (1979) ont établi la convergence des sommes de Donsker pour des fonctionnelles de champs gaussiens fortement dépendants vérifiant certaines conditions de régularité. Plus précisément, ces auteurs supposent que le champ $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$, est gaussien et que sa fonction de covariance vérifie :

$$r(n) \underset{n\to\infty}{\sim} |n|^{-\alpha} L(|n|)\, b\left(\frac{n}{|n|}\right), \qquad 0 < \alpha < d \tag{1.1}$$

où L est une fonction à variation lente sur $\mathbb{R}^+$ et b est une fonction continue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, $|.|$ étant la norme euclidienne sur $\mathbb{Z}^d$. Les auteurs obtiennent alors la convergence des sommes de Donsker $\sum_{i_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{i_d=0}^{[nt_d]} H(X_{i_1,\ldots,i_d})$ convenablement renormalisées.

La condition (1.1) sur la fonction de covariance est reprise dans Doukhan et al. (2002) où les auteurs s'intéressent au processus empirique d'un champ linéaire à longue mémoire. Ils montrent, sous cette condition, que ce dernier, convenablement renormalisé, converge faiblement pour la topologie uniforme vers un processus dégénéré.

La condition (1.1) est donc l'hypothèse classique rencontrée dans les travaux sur les champs à longue mémoire. Elle est la généralisation immédiate de l'hypothèse quasi-exclusive d'un processus à longue mémoire régulière en dimension 1 : $r(n) = n^{-\alpha}L(n)$ où $0 < \alpha < 1$, $n \in \mathbb{Z}$ et L est une fonction à variation lente.

Cependant, il est très facile de construire un champ à longue mémoire dont la fonction de covariance ne vérifie pas la condition (1.1), condition qui suppose une isotropie de la forte dépendance. Sortir de ce cadre n'est pas artificiel, il suffit de penser à un champ admettant une seule direction à forte dépendance. Prenons par exemple, en dimension $d = 2$, un champ aléatoire X obtenu par filtrage d'un bruit blanc ξ centré de variance $\sigma^2 \neq 0$, i.e.

$$X_{n_1,n_2} = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \hat{a}(k_1,\ k_2)\xi_{n_1-k_1,n_2-k_2},$$

où $\hat{a}$ est la transformée de Fourier du filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^2)$. Il suffit de choisir un filtre de la forme $a(x,\ y) = |x - py|^{-\alpha}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < 1/2$, pour obtenir un champ dont la densité spectrale vaut $f(x,\ y) = \sigma^2 a^2(x,y)$. Le champ obtenu est à longue mémoire car sa densité spectrale est non bornée à l'origine. On montrera, dans la seconde partie de ce travail, que la fonction de covariance associée à cette densité ne satisfait pas la condition (1.1).

Le but de ce travail est d'établir des théorèmes limites pour les champs aléatoires, notamment la convergence des sommes de Donsker lorsque la condition (1.1) n'est pas satisfaite.

Pour cela nous démontrons dans cette première partie un théorème qui généralise au cas multidimensionnel les résultats obtenus pour $d = 1$ par Lang and Soulier (2000) et Van der Meer (1996). Soit ξ est un champ aléatoire d-dimensionnel à densité spectrale bornée dont les sommes de Donsker normalisées convergent en loi. Le champ spectral de ξ, dilaté sur $[-n\pi, n\pi]^d$, converge alors faiblement en un sens qui sera précisé au Théorème 1 ci dessous. Comme dans Lang and Soulier (2000) et Van der Meer (1996), ce résultat est directement utilisable pour prouver un certain nombre de théorèmes limites.

Ces applications font l'objet de la deuxième partie de ce travail.

2 Résultat principal

Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel centré de densité spectrale f_ξ bornée par un réel positif M. On suppose l'hypothèse suivante vérifiée :

H 1. *La suite S_n^ξ définie sur $\mathbb{R}^d$ par :*

$$S_n^\xi(t_1,\ldots,t_d)=n^{-d/2}\sum_{k_1=0}^{[nt_1]-1}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]-1}\xi_{k_1,\ldots,k_d}$$

converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers un processus B mesurable.

Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort $B(t_1,\ldots,t_d)$ est le champ brownien de fonction de covariance $\sigma(\mathbf{s},\mathbf{t})=(s_1\wedge t_1)\ldots(s_d\wedge t_d)$ (cf Wichura (1969)).

La variable aléatoire ξ_k admet la représentation spectrale suivante :

$$\xi_k=(2\pi)^{-d/2}\int_{[-\pi,\ \pi]^d}e^{i<k,\mathbf{x}>}dW(\mathbf{x}),$$

où la mesure de contrôle de W a pour densité $f=(2\pi)^d f_\xi$.

Soit W_n la mesure aléatoire à accroissements orthogonaux sur $[-n\pi;\ n\pi]^d$ définie par

$$W_n(A)=n^{d/2}W(n^{-1}A).$$

Sa mesure de contrôle $f_n(\mathbf{x})=f(n^{-1}\mathbf{x})$ est définie pour tout $\mathbf{x}$ dans $[-n\pi;\ n\pi]^d$ et est bornée par M.

Le théorème suivant établit la convergence de la suite de mesures aléatoires W_n :

Théorème 1. *Sous* **H 1**, *il existe une application linéaire F_o de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\forall\Psi\in L^2(\mathbb{R}^d)\quad E\left(F_o\left(\Psi(\mathbf{x})\right)\right)^2\leq M\int_{\mathbb{R}^d}\Psi^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}$

(ii) $F_o\left((2\pi)^{-d/2}\prod_{j=1}^d\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}\right)=B(t_1,\ldots,t_d)$

(iii) Si Ψ_n est une suite de fonctions qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers Ψ, alors $\int\Psi_n(\mathbf{x})dW_n(\mathbf{x})$ converge en loi vers $F_o\left(\Psi(\mathbf{x})\right)$.

Remarque 1. Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort, l'application F_o est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ et l'on peut la considérer comme une intégrale stochastique par rapport à une certaine mesure aléatoire W_o, i.e. $F_o(\Psi)=\int\Psi dW_o$. Dans ce cas, B est le champ brownien et la propriété (ii) correspond alors à sa représentation harmonisable faisant intervenir l'intégrale selon W_o :

$$B(t_1,\ldots,t_d)=(2\pi)^{-d/2}\int\prod_{j=1}^d\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}dW_o(x_1,\ldots,x_d).$$

Démonstration. La preuve s'inspire de celle de Lang and Soulier (2000).

Définissons le champ B_n sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$B_n(t_1,\ldots,t_d)=(2\pi)^{-d/2}\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\prod_{j=1}^d\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}dW_n(x_1,\ldots,x_d).\tag{2.1}$$

L'intégrale est bien définie car l'intégrand représente la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de $\mathbf{I}_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]}$, et est donc de carré integrable.

L'idée de la démonstration est de définir l'intégrale stochastique par rapport à B_n dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et de l'écrire en tant que fonctionnelle en B_n. Des arguments de convergence nous permettent alors de considérer cette même fonctionnelle en B. L'application linéaire F_o est enfin définie à partir de cette dernière.

Pour $t_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in \mathbb{R}$, on note $D(t_j, x_j) = \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}$ si $x_j \neq 0$ et $D(t_j, 0) = t_j$. On a

$$
\begin{aligned}
E(B_n(t_1, \ldots, t_d)^2) &= (2\pi)^{-d} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} |D(t_j, x_j)|^2 f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\leq M \prod_{j=1}^{d} (2\pi)^{-1} \int_{-n\pi}^{n\pi} |D(t_j, x_j)|^2 dx_j \\
&\leq M \prod_{j=1}^{d} (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |D(t_j, x_j)|^2 dx_j \\
&\leq M \prod_{j=1}^{d} |t_j| \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} du \leq M \prod_{j=1}^{d} |t_j|. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

On montre dans un premier temps la convergence de B_n vers B au sens des répartitions finies. D'après **H 1**, cette convergence se déduit aisément du lemme suivant :

Lemme 2. *Quels que soient* $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}^d$,

$$
E\left(B_n(t_1, \ldots, t_d) - S_n^{\xi}(t_1, \ldots, t_d)\right)^2 \to 0.
$$

Preuve du lemme 2. On définit pour tout $t_j \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_j \in [0,\ n\pi[$, $D_n(t_j, x_j) = \frac{e^{ix_j[t_jn]/n}-1}{n(e^{ix_j/n}-1)}$ si $x_j \neq 0$ et $D_n(t_j, 0) = t_j$. On peut alors écrire S_n^{ξ} de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
S_n^{\xi}(\mathbf{t}) &= (2\pi)^{-d/2} n^{-d/2} \sum_{\mathbf{k}=0}^{[n\mathbf{t}]-1} \int_{[-\pi,\ \pi]^d} e^{i<\mathbf{k};\ \mathbf{x}>} dW(\mathbf{x}) \\
&= (2\pi)^{-d/2} n^{-d} \sum_{\mathbf{k}=0}^{[n\mathbf{t}]-1} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} e^{i<\mathbf{k};\ \mathbf{x}/n>}\ dW_n(\mathbf{x}) \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} n^{-1} \left(\sum_{k_j=0}^{[nt_j]-1} e^{ik_jx_j/n} \right) dW_n(\mathbf{x}) \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} D_n(t_j,\ x_j)\ dW_n(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
&E\left(B_n(t_1, \ldots, t_d) - S_n^{\xi}(t_1, \ldots, t_d)\right)^2 \\
&\qquad = (2\pi)^{-d} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \left| \prod_{j=1}^{d} D(t_j, x_j) - \prod_{j=1}^{d} D_n(t_j, x_j) \right|^2 f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

On a par ailleurs, à t fixé, pour $|x| < n\pi$:

$$
\begin{aligned}
|D_n(t, x) - D(t, x)| &= \left| \frac{e^{ix[tn]/n} - 1}{n(e^{ix/n} - 1)} - \frac{e^{itx} - 1}{ix} \right| \\
&\leq \left| (e^{ix[tn]/n} - 1) \left(\frac{1}{n(e^{ix/n} - 1)} - \frac{1}{ix} \right) \right| + \left| \frac{e^{ix[tn]/n} - e^{itx}}{ix} \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{1}{n(e^{ix/n} - 1)} - \frac{1}{ix} \right| + \left| \frac{e^{ix[tn]/n} - e^{itx}}{ix} \right|.
\end{aligned}
$$

Montrons la convergence uniforme en x. On a d'une part

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n(e^{i\frac{x}{n}}-1)}-\frac{1}{ix}\right|^2 &= \frac{|ix-n(e^{i\frac{x}{n}}-1)|^2}{4n^2x^2\sin^2(\frac{x}{2n})}\\ &= \frac{(x-n\sin(\frac{x}{n}))^2+n^2\sin^4(\frac{x}{2n})}{4n^2x^2\sin^2(\frac{x}{2n})}\\ &= \frac{\sin^2(\frac{x}{2n})}{x^2}+\frac{(\frac{x}{n}-\sin(\frac{x}{n}))^2}{4x^2\sin^2(\frac{x}{2n})},\end{aligned}$$

le premier terme est inférieur à $1/(4n^2)$ et le second terme est une fonction paire de $u = x/n$ qui appartient à $[-\pi,\pi]$; sur $[0,\pi]$ on a

$$\frac{(u-\sin(u))^2}{4n^2u^2\sin^2(\frac{u}{2})} \leq \frac{1}{n^2}\,\frac{1\wedge u^4}{4\sin^2(\frac{u}{2})} \leq C\frac{1}{n^2},$$

où C est une constante positive. Ainsi

$$\left|\frac{1}{n(e^{i\frac{x}{n}}-1)}-\frac{1}{ix}\right|^2 \leq C'\frac{1}{n^2}, \tag{2.3}$$

C' étant une constante positive. D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{ix\frac{[tn]}{n}}-e^{itx}}{ix}\right|^2 &= \frac{\left|e^{ix(\frac{[tn]}{n}-t)}-1\right|^2}{x^2}\\ &= \frac{4}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\left(\frac{[tn]}{n}-t\right)\right)\\ &\leq \left|\frac{[tn]}{n}-t\right|^2 = 0\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Finalement, pour t fixé et $|x| < n\pi$, on a, d'après (2.3) et (2.4), uniformément en x :

$$|D_n(t,x)-D(t,x)| \leq 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, f_n étant uniformément bornée par M,

$$\int_{-n\pi}^{n\pi}|D_n(t,x)-D(t,x)|^2 f_n(x)dx \leq 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_{-n\pi}^{n\pi} f_n(x)dx \leq 0\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.5}$$

Maintenant, dans le cas $d = 2$, on a

$$\begin{aligned}&\int_{[-n\pi,\ n\pi]^2}|D_n(t_1,x_1)D_n(t_2,x_2)-D(t_1,x_1)D(t_2,x_2)|^2 f_n(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &\leq 3M\int_{[-n\pi,\ n\pi]}|D_n(t_1,x_1)-D(t_1,x_1)|^2dx_1\int_{[-n\pi,\ n\pi]}|D_n(t_2,x_2)-D(t_2,x_2)|^2dx_2\\ &\quad+3M\int_{[-n\pi,\ n\pi]}|D_n(t_1,x_1)-D(t_1,x_1)|^2dx_1\int_{[-n\pi,\ n\pi]}|D(t_2,x_2)|^2dx_2\\ &\quad+3M\int_{[-n\pi,\ n\pi]}|D_n(t_2,x_2)-D(t_2,x_2)|^2dx_2\int_{[-n\pi,\ n\pi]}|D(t_1,x_1)|^2dx_1,\end{aligned}$$

D étant de carré intégrable, les trois termes convergent vers 0 d'apres (2.5).

On montre la convergence pour tout d par une récurrence immmédiate, ce qui achève la preuve du lemme 2. $\square$

Pour toute Φ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on note $\hat{\Phi}$ sa transformée de Fourier définie de telle sorte que la transformation $\Phi \mapsto \hat{\Phi}$ soit une isométrie. Considérons l'application linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega)$ qui à Φ associe $\int \hat{\Phi} dW_n$.

En applicant cette dernière à $\Phi = \mathbf{I}_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]}$ et en interprétant $B_n(t_1,\ldots,t_d)$ comme $B_n([0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d])$, on remarque que (2.1) permet d'écrire l'application linéaire que nous venons de définir comme une intégrale stochastique par rapport à B_n. Nous posons donc :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{t})dB_n(\mathbf{t}) = \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \hat{\Phi}(\mathbf{x})dW_n(\mathbf{x}). \tag{2.6}$$

Nous nous intéressons à la convergence en loi de cette intégrale.

On se restreint dans un premier temps au cas où Φ est différentiable à support compact pour réecrire $\hat{\Phi}$. Dans l'expression

$$\hat{\Phi}(x_1,\ldots,x_d) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t_1,\ldots,t_d)e^{it_1x_1}\ldots e^{it_dx_d}dt_1\ldots dt_d \qquad \forall\ \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d,$$

on effectue d intégrations par parties en dérivant Φ et en intégrant le reste en t_1, puis en t_2, etc. jusqu'à t_d (à chaque étape on change l'ordre d'intégration en utilisant Fubini). La première étape est la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\mathbf{x}) =&(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left[\Phi(\mathbf{t})\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}\right]_{t_1\in\mathbb{R}} dt_2\ldots dt_d\\ &-(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1}\left(\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}+(-1)^{d-(d-1)}\frac{e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}\right)d\mathbf{t},\end{aligned}$$

le premier terme est nul car Φ est à support compact et l'on a

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\mathbf{x}) &= -(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1}\left(\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}-\frac{e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}\right)d\mathbf{t}\\ &= -(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1}\frac{e^{it_1x_1}-1}{ix_1}e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

L'intégration par parties suivante nous donne :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1\partial t_2}\Bigg(\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2}-\frac{e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2}\\ &\qquad\qquad+\frac{e^{i(t_3x_3+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2}-\frac{e^{it_1x_1}e^{i(t_3x_3+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2}\Bigg)d\mathbf{t}\\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1\partial t_2}\frac{e^{it_1x_1}-1}{ix_1}\frac{e^{it_2x_2}-1}{ix_2}e^{i(t_3x_3+\cdots+t_dx_d)}d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

De même à l'étape p, on choisit une primitive en t_p avec 2^{p-1} termes constants par rapport à t_p. Ces termes constants sont tous les produits possibles entre $\frac{e^{it_{p+1}x_{p+1}+\cdots+it_dx_d}}{ix_p}$ d'une part et $1,\ e^{it_1x_1},\ldots,e^{it_{p-1}x_{p-1}}$ d'autre part, affectés du signe $(-1)^{d-q}$ si q est le nombre de t_i distincts présents dans le produit. Tous ces termes contiennent $e^{it_{p+1}x_{p+1}}$ et on peut passer à l'intégration par parties suivante concernant t_{p+1} qui factorisera $1/ix_{p+1}$. Finalement à la dernière étape, tous les termes intégrés représentent une somme de $(1+\sum_{p=1}^d 2^{p-1})$ termes, soit 2^d termes qui correspondent au développement de $\prod_{j=1}^d \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}$.

Ainsi dans le cas où Φ est différentiable à support compact, on a

$$\hat{\Phi}(x_1,\ldots,x_d) = (-1)^d(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1\ldots\partial t_d}\prod_{j=1}^d\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}dt_1\ldots dt_d.$$

En utilisant le théorème de Fubini stochastique, qui se démontre dans notre cas comme dans le lemme 3 de Lang and Soulier (2000), on peut réecrire l'intégrale (2.6) de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{t})dB_n(\mathbf{t}) = \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \hat{\Phi}(\mathbf{x})dW_n(\mathbf{x})$$
$$= \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \left((-1)^d (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j} d\mathbf{t} \right) dW_n(\mathbf{x})$$
$$= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} \left((2\pi)^{-d/2} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j} dW_n(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{t}$$
$$= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B_n(t_1,\ldots,t_d)dt_1\ldots dt_d$$

Nous utilisons à présent un lemme qui généralise le théorème de Grinblatt (1976). Sa démonstration est donnée en annexe.

Lemme 3. *Soit les processus $(Y_n(\mathbf{t}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y(\mathbf{t})$ définis pour $\mathbf{t}$ dans un compact K de $\mathbb{R}^d$. Supposons que la suite $(Y_n(\mathbf{t}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des répartitions finies vers $Y(\mathbf{t})$. Si $E|Y_n(\mathbf{t})|$ est uniformément borné par rapport à $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{t} \in K$, et si $E|Y_n(\mathbf{t})| \to E|Y(\mathbf{t})|$ pour tout $\mathbf{t} \in K$, alors pour toute fonctionnelle F continue sur $L^1(K)$, $F(Y_n)$ converge en loi vers $F(Y)$.*

Nous pouvons appliquer ce lemme pour $Y_n = B_n$ et K un compact de $\mathbb{R}^d$ car alors, d'après (2.2), $E(B_n^2(\mathbf{t}))$ est uniformément borné en n et $\mathbf{t}$, donc $E|B_n(t)|$ est uniformément bornée ; en outre, la suite B_n est uniformément intégrable. La convergence en loi de $B_n(\mathbf{t})$ vers $B(\mathbf{t})$ donnée par le lemme 2 jointe à l'uniforme intégrabilité de B_n nous donne la convergence de $E|B_n(\mathbf{t})|$ vers $E|B(\mathbf{t})|$. On applique le lemme 3 à la fonctionnelle

$$F : g \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} g(t_1,\ldots,t_d)dt_1\ldots dt_d,$$

pour Φ différentiable à support compact, qui est bien continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi, pour toute Φ différentiable à support compact, $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1\ldots\partial t_d} B_n(\mathbf{t})d\mathbf{t}$ converge en loi vers $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1\ldots\partial t_d} B(\mathbf{t})d\mathbf{t}$, et donc $\int \Phi dB_n$ converge en loi vers $(-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1\ldots\partial t_d} B(\mathbf{t})d\mathbf{t}$. Notons F_B l'application linéaire :

$$F_B \ : \ \Phi \longmapsto (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B(\mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

On peut la prolonger sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par application du théorème de Hahn-Banach. En effet, l'ensemble des applications différentiables à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'application linéaire $\Phi \to F_B(\Phi)$ est bornée. Montrons ce dernier point :

$$E\left(F_B(\Phi)\right)^2 = E\left(\int_{\mathbb{R}^d} (-1)^d \frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right)^2$$
$$\leq \underline{\lim}\ E\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(\mathbf{t})}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B_n(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right)^2$$

par application du lemme de Fatou stochastique, d'où

$$E\left(F_B(\Phi)\right)^2 \leq \underline{\lim}\ E\left(\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \hat{\Phi} dW_n\right)^2 \leq M||\hat{\Phi}||_2^2 = M||\Phi||_2^2. \tag{2.7}$$

On peut donc étendre l'application linéaire F_B définie ci-dessus sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et la majoration (2.7) reste vraie pour toute Φ de $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$E\left(F_B(\Phi)\right)^2 \leq M||\Phi||_2^2. \tag{2.8}$$

L'application F_B n'est pas une isométrie dans le cas général et on ne peut pas la considérer sans précaution comme une intégrale stochastique par rapport à B, limite de celle par rapport à B_n. Cette interprétation n'est a priori possible que dans le cas où le bruit initial ξ est un bruit blanc fort.

On définit à présent l'application F_o du théorème pour toute Ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, par :

$$F_o(\Psi) = F_B(\check{\Psi}),$$

où $\check{\Psi}$ est la transformée de Fourier inverse de Ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme F_B, F_o ne peut pas directement être considéré comme une intégrale stochastique.

On a en particulier, en prenant $\check{\Psi} = \mathbf{I}_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]}$:

$$B(t_1, \ldots, t_d) = (2\pi)^{-d/2} F_o \left(\prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} \right)$$

et

$$E\left(F_o(\Psi)\right)^2 = E\left(F_B(\check{\Phi})\right)^2 \leq M||\check{\Psi}||_2^2 = M||\Psi||_2^2.$$

On s'intéresse maintenant au résultat de convergence du théorème. On s'appuie sur le théorème 4.2 de Billingsley (1968) qui dit que lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées (toutes les variables aléatoires qui interviennent étant à valeurs dans le même espace séparable métrisé par ρ) :

(i) pour tout k, $X_{k,n}$ converge en loi vers X_k
(ii) X_k converge en loi vers X
(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} P\{\rho(X_{k,n},\ Y_n) \geq \varepsilon\} = 0$,

alors Y_n converge en loi vers X.

Soit une fonction Ψ quelconque de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on considère une suite de fonctions Ψ_k tel que $\hat{\Psi}_k$ soit différentiable à support compact, convergeant dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers Ψ. On a alors :

(i) $\int \Psi_k dW_n$ converge en loi vers $F_o(\Psi_k)$, d'après le lemme de Grinblatt
(ii) $E\left(F_o(\Psi_k) - F_o(\Psi)\right)^2 \leq M||\Psi_k - \Psi||_2^2 \longrightarrow 0$ quand $k \to \infty$
(iii) $E(\int \Psi_k dW_n - \int \Psi dW_n)^2 \leq M||\Psi_k - \Psi||_2^2$, donc

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E(\int \Psi_k dW_n - \int \Psi dW_n)^2 = 0.$$

En prenant $X_{k,n} = \int \Psi_k dW_n$, $X_k = F_o(\Psi_k)$, $X = F_o(\Psi)$ et $Y_n = \int \Psi dW_n$, toutes à valeurs réelles, on remarque que les trois conditions de Billingsley sont respectivement impliquées par les trois points précédents, et on obtient donc que pour toute fonction Ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\int \Psi dW_n$ converge en loi vers $F_o(\Psi)$.

Si l'on considère enfin une suite de fonctions Ψ_n qui converge vers Ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on obtient directement que $\int \Psi_n dW_n$ converge en loi vers $F_o(\Psi)$. □

3 Annexe : démonstration du lemme 3

On s'appuie largement sur la démonstration du théorème de Grinblatt (1976).

Démonstration. On suppose, sans nuire à la généralité, que le compact K de l'énoncé est $[0,1]^d$.

Notons μ_n la mesure induite par $Y_n(t)$ sur $L^1([0,1]^d)$ et μ celle induite par $Y(t)$. Nous devons montrer la convergence faible de μ_n vers μ. Il suffit de montrer que la suite $\{\mu_n\}$ est faiblement compacte, la convergence des lois fini-dimensionnelles nous donnant alors le résultat. Pour cela on utilise le théorème de Prohorov donné par exemple dans Billingsley (1968) :

Théorème 4 (Prohorov). *Soit X un espace mesuré et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que $sup_n \mu_n(X \setminus K) < \varepsilon$, alors la suite $\{\mu_n\}$ est faiblement compacte.*

Nous utilisons par ailleurs la caractérisation suivante de Fréchet et Kolmogorov d'un compact dans $L^p([0,1]^d)$, que l'on peut trouver dans Brezis (1983).

Lemme 5 (Fréchet et Kolmogorov). *Un ensemble $K \in L^p([0,1]^d)$ est compact si et seulement si :*

1-$sup_{x\in K}||x||_p < \infty$

2-$lim_{|t|\to 0} \int_{[0,1]^d} |x(t+s)-x(s)|^p ds = 0$ uniformément en $x \in K$. (On considère la somme $t+s$ "modulo 1" pour rester dans $[0,1]^d$).

Notons $(\Omega,\ P)$ l'espace probabilisé sous-jacent et μ_o la mesure produit $\lambda_d \times P$ où λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note $Y(t,\omega)$ le processus Y où $\omega \in \Omega$ et $t \in [0,1]^d$. Nous commençons la démonstration en montrant le lemme suivant :

Lemme 6. *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de cubes $(B_i)_{i\in I_\varepsilon}$ mutuellement disjoints, de volume V_i, vérifiant $\cup_{i\in I_\varepsilon} B_i \subset [0,1]^d$ et $\sum_{i\in I_\varepsilon} V_i > 1-\varepsilon^2$, tels que, pour tout i dans I_ε,*

$$\lambda_d(T^i_\varepsilon) > (1-\varepsilon^2)V_i,$$

où $T^i_\varepsilon = \left\{t \in B_i \ :\ E|Y(b_i)-Y(t)| < \varepsilon^2\right\}$ et $b_i \in B_i$.

Preuve du lemme 6. D'après la mesurabilité de $Y(t,\omega)$, on peut l'approcher par des fonctions en escaliers, c'est à dire que pour $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles mutuellement disjoints $\hat\Omega_1,\dots,\hat\Omega_k$, et des cubes mutuellement disjoints $B_1,\dots,B_k$, et une fonction $\hat Y(t,\omega)$ tels que :

1-$\Omega = \cup_{i=1}^k \hat\Omega_i$ et $[0,1]^d = \cup_{i=1}^k B_i$

2-La fonction $\hat Y(t,\omega)$ est constante sur les ensembles $\hat\Omega_i \times B_j$

3-$\int |Y(t,\omega)-\hat Y(t,\omega)| d\mu_o(t,\omega) < \frac{\varepsilon^6}{2}$.

Notons $\hat Y_j = \hat Y(t)$ lorsque $t \in B_j$. On choisit $(b_1,\dots,b_k)$ des éléments respectifs de $B_1,\dots,B_k$ tels que :

$$\sum_{j=1}^k V_j E|Y(b_j)-\hat Y_j| < \frac{\varepsilon^6}{2}. \tag{3.1}$$

Montrons dans un premier temps que ce choix est possible. Supposons que quels que soient $(x_1,\dots,x_k) \in B_1\times\cdots\times B_k$, $\sum_{j=1}^k V_j E|Y(x_j)-\hat Y_j| \geq \frac{\varepsilon^6}{2}$. On aurait alors

$$\int_{B_1\times\cdots\times B_k} \sum_{j=1}^k V_j E|Y(x_j)-\hat Y_j| dx_1\dots dx_k \geq \int_{B_1\times\cdots\times B_k} \frac{\varepsilon^6}{2} dx_1\dots dx_k,$$

et donc

$$\prod_{i=1}^k V_i \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(x_j)-\hat Y_j| dx_j \geq \frac{\varepsilon^6}{2}\prod_{i=1}^k V_i.$$

On aboutirait à $\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(x)-\hat Y_j|dx \geq \frac{\varepsilon^6}{2}$ ce qui contredirait le point 3-. On peut donc choisir $(b_1,\dots,b_k)$ dans $B_1\times\cdots\times B_k$ qui vérifient (3.1).

Soit maintenant

$$I_\varepsilon = \left\{ i \ :\ \frac{\int_{B_i} E|Y(b_i)-Y(t)|dt}{V_i} < \varepsilon^4 \right\}.$$

On a d'une part

$$\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j)-Y(t)|dt \leq \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j)-\hat Y_j|dt + \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|\hat Y_j - Y(t)|dt < \varepsilon^6$$

d'après le choix de $b_1, \ldots, b_k$ et le point 3- ; d'autre part

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} E|Y(b_j) - Y(t)|dt \geq \sum_{i \in \overline{I}_\varepsilon} \int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)|dt \geq \varepsilon^4 \sum_{i \in \overline{I}_\varepsilon} V_i,$$

d'après la définition de $\overline{I}_\varepsilon$, le complémentaire de I_ε dans l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$. Si $\sum_{i \in \overline{I}_\varepsilon} V_i \ \geq \varepsilon^2$, on aboutit à une contradiction. Donc

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} V_i > 1 - \varepsilon^2.$$

On considère à présent, pour $i \in I_\varepsilon$, l'ensemble T_ε^i du lemme. En appliquant l'inégalité de Markov et le fait que $i \in I_\varepsilon$, on obtient

$$\frac{\lambda_d(T_\varepsilon^i)}{V_i} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 V_i} \int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)|dt > 1 - \varepsilon^2.$$

Ceci achève la preuve du lemme (6). □

Nous savons que, pour tout $t \in [0,1]^d$, $\lim_{n\to\infty} E|Y_n(t)| = E|Y(t)|$. En conservant les notations du lemme précédent, on a donc pour tout $t \in [0,1]^d$

$$\Phi_n^i(t) := E|Y_n(b_i) - Y_n(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi^i(t) := E|Y(b_i) - Y(t)|. \tag{3.2}$$

Nous allons maintenant contrôler uniformément cette dernière convergence sur T_ε^i . Pour $\varepsilon > 0$ et $i \in I$, on suppose que $t \in T_\varepsilon^i$. La convergence ponctuelle (3.2) implique la convergence en mesure, nous pouvons donc écrire :

$$\forall \eta > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \lambda_d \left\{ |\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \right\} > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Soit $t \in T_\varepsilon^i$, $\ \Phi^i(t) < \varepsilon^2$, donc

$$|\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \Rightarrow \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2.$$

En posant $S_{\varepsilon,n}^i = \{\Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2\}$, on a donc

$$\forall \eta > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \lambda_d(S_{\varepsilon,n}^i) \geq \lambda_d \left\{ |\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \right\} > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Soit maintenant

$$S_{\varepsilon,N}^i = \bigcap_{n \geq N} S_{\varepsilon,n}^i.$$

Quel que soit $\eta > 0$, il existe un $N > 0$ tel que

$$S_{\varepsilon,N}^i = \left\{ t \in T_\varepsilon^i \ : \ \forall n > N, \ \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2 \right\} \text{ et } \lambda_d(S_{\varepsilon,N}^i) > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, choisissons à présent $\eta = \varepsilon^2 V_i$, nous obtenons que quel que soit $i \in I_\varepsilon$, il existe un $N > 0$ et un ensemble $S_\varepsilon^i \subset T_\varepsilon^i$ tel que

1- $\forall t \in S_\varepsilon^i$, $\forall n > N \ \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2$

2- $\lambda_d(S_\varepsilon^i) > (1 - 2\varepsilon^2)V_i$.

Nous voulons appliquer le Théorème de Prohorov. Il nous faut donc contrôler $sup_n \mu_n(K)$ où K est un compact de $L^1([0,1]^d)$. Ce compact sera directement construit à partir des ensembles suivants :

$$K_{\varepsilon,\delta} = \left\{ x(t) \in L^1([0,1]^d) : \sup_{|\tau|<\delta} \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)|dt < 4\varepsilon \right\}.$$

On a

$$\mu_n(K_{\varepsilon,\delta}) = P\left(\sup_{|\tau|<\delta}\int_{[0,1]^d}|Y_n(t+\tau,\omega)-Y_n(t,\omega)|dt < 4\varepsilon\right).$$

Nous allons donc à présent contrôler cette probabilité en construisant un évènement Ω_n approprié.

Rappelons que $E|Y_n(t)|$ est par hypothèse uniformément borné en n et en t. En notant A cette borne uniforme et $\overline{S^i_\varepsilon}$ le complémentaire de S^i_ε dans B_i, on a, pour $n > N$:

$$\begin{aligned}
E\int_{B_i}|Y_n(b_i)-Y_n(t)|dt &= \int_{S^i_\varepsilon}\Phi^i_n(t)dt + \int_{\overline{S^i_\varepsilon}}\Phi^i_n(t)dt \\
&< 2\varepsilon^2\lambda_d(S^i_\varepsilon) + 2A\lambda_d(\overline{S^i_\varepsilon}) \\
&< 2\varepsilon^2 V_i + 4A\varepsilon^2 V_i \\
&< 4\varepsilon^2 V_i(1+A)
\end{aligned}$$

et donc

$$E\sum_{i\in I_\varepsilon}\int_{B_i}|Y_n(b_i)-Y_n(t)|dt < 4\varepsilon^2(1+A).$$

Pour $n > N$ on considère à présent l'ensemble :

$$\Omega^{(1)}_n = \{\omega : \sum_{i\in I_\varepsilon}\int_{B_i}|Y_n(b_i,\omega)-Y_n(t,\omega)|dt < \varepsilon\}$$

D'après l'inégalité de Markov, on a $P(\Omega^{(1)}_n) > 1 - \frac{4\varepsilon^2(1+A)}{\varepsilon} = 1 - 4\varepsilon(1+A)$.

Soit maintenant $\delta > 0$. Pour chaque $i \in I_\varepsilon$, on considère le cube $B^{(-2\delta)}_i$ de même centre que B_i et de rayon $R_i - 2\delta$ si R_i est le rayon de B_i. On note son volume $V^{(-2\delta)}_i$. Soit l'ensemble $Q = [0,1]^d - \cup_{i\in I_\varepsilon} B^{(-2\delta)}_i$. On a

$$\lambda_d(Q) = 1 - \sum_{i\in I_\varepsilon}\lambda(B^{(-2\delta)}_i) = 1 - \sum_{i\in I_\varepsilon}^{k} V^{(-2\delta)}_i.$$

On sait que $\sum_{i\in I_\varepsilon} V_i > 1-\varepsilon^2$, on choisit alors δ assez petit pour que $\lambda_d(Q) < 2\varepsilon^2$. On a alors $E\int_Q |Y_n(t)|dt < 2\varepsilon^2 A$.

On considère l'ensemble $\Omega^{(2)}_n = \{\omega : \int_Q |Y_n(t,\omega)|dt < \varepsilon\}$. On a alors, d'après l'inégalité de Markov, $P(\Omega^{(2)}_n) > 1 - 2\varepsilon A$.

Soit maintenant $\Omega_n = \Omega^{(1)}_n \cap \Omega^{(2)}_n$,

$$P(\Omega_n) > 1 - 4\varepsilon(1+A) - 2\varepsilon A.$$

Considérons $Q' = [0,1]^d - \cup_{i\in I_\varepsilon} B^{(-\delta)}_i$, où $B^{(-\delta)}_i$ sont les cubes de rayon $R_i - \delta$. On a $Q' \subset Q$.

Si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$, alors

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^d}|Y_n(t+\tau,\omega)-Y_n(t,\omega)|dt \\
&= \sum_{i\in I_\varepsilon}\int_{B^{(-\delta)}_i}|Y_n(t+\tau,\omega)-Y_n(b_i,\omega)+Y_n(b_i,\omega)-Y_n(t,\omega)|dt \\
&\quad + \int_{Q'}|Y_n(t+\tau,\omega)-Y_n(t,\omega)|dt \\
&\le \sum_{i\in I_\varepsilon}\int_{B^{(-\delta)}_i}|Y_n(t+\tau,\omega)-Y_n(b_i,\omega)|dt + \sum_{i\in I_\varepsilon}\int_{B^{(-\delta)}_i}|Y_n(t,\omega)-Y_n(b_i,\omega)|dt \\
&\quad + \int_{Q'}|Y_n(t+\tau,\omega)|dt + \int_{Q'}|Y_n(t,\omega)|dt.
\end{aligned}$$

Dans les intégrales du premier et du troisième terme de l'expression ci-dessus, on applique le changement de variable $u = t + \tau$. Notons c_i le centre de B_i. Si $t \in B_i^{(-\delta)}$, $|t - c_i| \leq R_i - \delta$; sachant que $|\tau| < \delta$, on a alors $|u - c_i| \leq R_i$ et donc $u \in B_i$. Si $t \in Q'$, on a $\forall i \in I_\varepsilon,\ |t - c_i| > R_i - \delta$, donc $|u - c_i| > |t - c_i| - |\tau| > R_i - 2\delta$ et $u \in Q$. En utilisant dans les termes restants le fait que $B_i^{(-\delta)} \subset B_i$ et que $Q' \subset Q$, on obtient, si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} &|Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt \\ &\leq \sum_{i \in I} 2 \int_{B_i} |Y_n(b_i,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt + 2\int_Q |Y_n(t,\omega)|dt \\ &\leq 4\varepsilon.\end{aligned}$$

On peut revenir maintenant à l'ensemble

$$K_{\varepsilon,\delta} = \left\{ x(t) \in L^1([0,1]^d) : \sup_{|\tau|<\delta} \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)|dt < 4\varepsilon \right\}.$$

Si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$,

$$\int_{[0,1]^d} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt < 4\varepsilon,$$

donc pour $n \geq N$,

$$\mu_n(K_{\varepsilon,\delta}) \geq P(\Omega_n) > 1 - (4 + 2A)\varepsilon. \tag{3.3}$$

Pour $n < N$, on peut appliquer la même idée que dans le lemme 6, mais à n fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_{1,n}, \ldots, B_{k,n}$ mutuellement disjoints tels que $\cup_{i=1}^k B_{i,n} = [0,1]^d$ et

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}} E|Y_n(t) - \hat{Y}_n(t)|dt < \varepsilon^2, \tag{3.4}$$

où $\hat{Y}_n(t,\omega) = \hat{Y}_n(x,\omega)$ pour tout $(x,t) \in B_{i,n}^2$. On considère alors $Q_n = [0,1]^d - \cup_{i=1}^k B_{i,n}^{(-\delta_n)}$, avec des notations identiques à celles du lemme 6. On peut choisir δ_n tel que $\lambda_d(Q_n) < \varepsilon^2$ et on a alors :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} &E|Y_n(t+\tau) - Y_n(t)|dt = \\ &\sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t+\tau) - Y_n(t)|dt + \int_Q E|Y_n(t+\tau) - Y_n(t)|dt.\end{aligned}$$

Le second terme est majoré par $2\varepsilon^2 A$; on décompose le premier de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t+\tau) - Y_n(t)|dt \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t+\tau) - \hat{Y}_n(t+\tau)|dt + \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|\hat{Y}_n(t+\tau) - \hat{Y}_n(t)|dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|\hat{Y}_n(t) - Y_n(t)|dt.\end{aligned}$$

Si $|\tau| < \delta_n$, le premier et le dernier terme sont majorés par ε^2 d'après (3.4) et le terme du milieu est nul. Ainsi, $\forall n < N$, d'après l'inégalité de Markov, $\mu_n(K_{\varepsilon,\delta_n}) > 1 - c\varepsilon$, où c est une constante non nulle.

Il suffit à présent de choisir pour chaque $\varepsilon > 0$, $\delta_o = max\{(\delta_n)_{n<N},\ \delta\}$ et la propriété (3.3) est vraie pour tout n, i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta \quad \sup_n \mu_n(K_{\varepsilon,\delta}) > 1 - c\varepsilon, \tag{3.5}$$

où c est une constante positive non nulle.

Soit maintenant $\varepsilon_o > 0$ et $K_{\varepsilon_o} = \cap_{k\geq 1} K_{\frac{\varepsilon_o}{k^2},\delta}$ où δ est choisi tel que la minoration dans (3.5) soit vraie. On a, en posant $\overline{K}$ le complémentaire de K dans $L^1([0,1]^d)$,

$$\begin{aligned}\mu_n\left(\overline{K}_{\varepsilon_o}\right) &= \mu_n\left(\bigcup_{k\geq 1} \overline{K}_{\frac{\varepsilon_o}{k^2},\delta}\right) \\ &\leq \sum_{k\geq 1} \mu_n\left(\overline{K}_{\frac{\varepsilon_o}{k^2},\delta}\right) \\ &\leq \sum_{k\geq 1} c\frac{\varepsilon_o}{k^2} = c'\varepsilon_o,\end{aligned}$$

où c' est une constante positive non nulle.

Posons enfin, pour $\varepsilon_o > 0$ fixé,

$$K'_{\varepsilon_o} = K_{\varepsilon_o} \cap \left\{ ||x||_1 < \frac{A}{\varepsilon_o} \right\}.$$

Nous noterons par la suite $B = \{||x||_1 < \frac{A}{\varepsilon_o}\}$. L'ensemble K'_{ε_o} remplit de façon évidente la première condition, i.e. la majoration uniforme en norme L^1, du lemme 5 de Fréchet Kolmogorov concernant la caractérisation d'un compact de $L^1([0,1]^d)$. Pour la seconde condition : soit $\eta > 0$, il existe $k_1 \geq 1$ tel que $\eta > 4\frac{\varepsilon_o}{k_1^2}$, on a alors

$$\forall x \in K'_{\varepsilon_o} \subset K_{\frac{\varepsilon_o}{k_1^2},\delta_1}, \quad |\tau| \leq \delta_1 \Rightarrow \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)|dt < 4\frac{\varepsilon_o}{k_1^2} < \eta.$$

Les deux conditions du lemme 5 sont satisfaites et donc K'_{ε_o} est un ensemble compact de $L^1([0,1]^d)$. Quel que soit $n > 0$,

$$\mu_n(K'_{\varepsilon_o}) = \mu_n(K_{\varepsilon_o}) - \mu_n(K_{\varepsilon_o} \cap \overline{B}),$$

or

$$\mu_n(K_{\varepsilon_o} \cap \overline{B}) \leq \mu_n(\overline{B}) = P\left(\int_{[0,1]^d} |Y_n(t)|dt \geq \frac{A}{\varepsilon_o}\right) \leq \frac{E\int_{[0,1]^d} |Y_n(t)|dt}{A}\varepsilon_o \leq \varepsilon_o,$$

donc, quel que soit $n > 0$, $\mu_n(K'_{\varepsilon_o}) \geq 1 - (c'+1)\varepsilon_o$.

Quel que soit $\varepsilon_o > 0$, il existe donc un ensemble compact $K = K'_{\varepsilon_o/(c'-1)}$ inclus dans $L^1([0,1]^d)$ tel que $sup_n\mu_n(L^1([0,1])\backslash K) < \varepsilon_o$. L'application du théorème de Prohorov permet de terminer la démonstration du lemme 3. □

Références

Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures.* John Wiley and Sons.

Brezis, H. (1983). *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Masson, Paris.

Dobrushin, R. L. and Major, P. (1979). Non central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields. *Z. Warsch. verw. Geb.*, 50 :27–52.

Doukhan, P., Lang, G., and Surgailis, D. (2002). Asymptotics of weighted empirical processes of linear fields with long-rang dependence. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 6 :879–896.

Grinblatt, L. (1976). A limit theorem for measurable random processes and its applications. *Proc. of the American Math. Society*, 61(2) :371–376.

Lang, G. and Soulier, P. (2000). Convergence de mesures spectrales aléatoires et applications à des principes d'invariance. *Stat. Inf. for Stoch. Proc.*, 3 :41–51.

Van der Meer, T. (1996). Invariance principle for strongly dependent sequences. *Prépub. Lab. Prob. et Stat.Paris VI*, 373.

Wichura, M. (1969). Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters. *Ann. Math. Stat.*, 40(2) :681–687.