

# MÉMOIRE D'HABILITATION

présenté à :

l'UNIVERSITÉ DE NANTES

pour obtenir

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES  
DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

**Frédéric Lavancier**

**Contributions à l'étude statistique de la dépendance spatiale  
dans les champs à longue mémoire sur un réseau,  
les processus ponctuels et la géométrie aléatoire.**

Soutenue le 9 décembre 2011 devant le jury composé de :

Rapporteurs : Youri DAVYDOV, Professeur à l'Université de Lille 1  
Murad TAQQU, Professeur à l'Université de Boston, Etats Unis  
Rasmus WAAGEPETERSEN, Professeur à l'Université de Aalborg, Danemark

Examinateurs : Eric MOULINES, Professeur à Télécom-ParisTech, Paris  
Anne PHILIPPE, Professeur à l'Université de Nantes  
Marie-Claude VIANO, Professeur à l'Université de Lille 1



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à témoigner ma reconnaissance à ma directrice de thèse Marie-Claude Viano. Marie-Claude m'a orienté il y a quelques années vers l'étude des champs aléatoires fortement dépendants, que je poursuis toujours avec enthousiasme aujourd'hui. Je suis heureux de sa présence dans mon jury.

Je suis très honoré que Youri Davydov, Murad Taqqu et Rasmus Waagepetersen aient accepté de rapporter ce mémoire d'habilitation. Je les remercie particulièrement du temps consacré à sa lecture et à la rédaction des rapports.

Je remercie vivement Eric Moulines et Anne Philippe d'avoir accepté d'examiner mon travail de recherche. Je collabore avec Anne dans le cadre de nos projets de recherche mais aussi autour de l'enseignement de la statistique à Nantes. Son soutien constant a été précieux pour mener à bien ce projet d'habilitation et je lui en suis très reconnaissant.

Je souhaite souligner les très bonnes conditions de travail au sein du laboratoire de mathématiques Jean Leray de Nantes. J'y apprécie les moyens consacrés à la recherche, mais aussi l'ambiance chaleureuse qui y règne entre collègues, et ce quelque soit la spécialité de chacun.

Je remercie enfin mes co-auteurs : Pierre-Olivier Amblard, Jean-François Coeurjolly, David Dereudre, Rémy Drouilhet, Katerina Helisová, Remigijus Leipus, Jesper Møller, Anne Philippe, Ege Rubak et Donatas Surgailis. L'aspect le plus motivant de mon travail de recherche réside dans les échanges noués autour de nos projets communs. J'espère que ces collaborations se prolongeront le plus longtemps possible.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Introduction (in english)</b>	<b>5</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>9</b>
<b>I Autour de la longue mémoire</b>	<b>11</b>
<b>1 Modèles en lien avec la longue mémoire</b>	<b>13</b>
1.1 Autour du mouvement brownien fractionnaire . . . . .	13
1.1.1 Rappels sur le mouvement brownien fractionnaire . . . . .	13
1.1.2 Le mouvement brownien fractionnaire multivarié . . . . .	14
1.1.3 Les accroissements du mfBm : longue mémoire multivariée . . . . .	17
1.2 Différentes modélisations de champs à longue mémoire . . . . .	17
1.2.1 Les accroissements du drap brownien fractionnaire . . . . .	18
1.2.2 La longue mémoire obtenue par filtrage d'un bruit (les champs linéaires) . . . . .	19
1.2.3 L'agrégation de champs à courte mémoire . . . . .	20
1.2.4 Champs de Gibbs sur un réseau . . . . .	21
1.3 Simulations . . . . .	21
1.3.1 Simulation du brownien fractionnaire multivarié . . . . .	21
1.3.2 Simulation de champs à longue mémoire . . . . .	22
<b>2 Théorèmes limite en présence de longue mémoire</b>	<b>25</b>
2.1 Sommes partielles . . . . .	25
2.1.1 Sommes partielles d'un champ à longue mémoire . . . . .	25
2.1.2 Le Brownien fractionnaire multivarié comme limite de sommes partielles . . . . .	26
2.2 Processus empirique . . . . .	27
2.3 Formes quadratiques . . . . .	28
2.3.1 Résultats généraux . . . . .	28
2.3.2 Application à la fonction de covariance . . . . .	30
2.3.3 Perspectives . . . . .	31

<b>3 Tests statistiques en présence de longue mémoire</b>	<b>33</b>
3.1 Détecer la longue mémoire dans un champ aléatoire . . . . .	33
3.2 Comparaison des paramètres de longue mémoire . . . . .	35
3.2.1 Présentation et consistance d'un test unilatéral . . . . .	36
3.2.2 Calibration des paramètres . . . . .	37
3.3 Test de rupture sur le paramètre de longue mémoire . . . . .	38
<b>II Processus ponctuels et géométrie aléatoire</b>	<b>41</b>
<b>4 Quelques modèles de processus ponctuels et de géométrie aléatoire</b>	<b>43</b>
4.1 Modèles de Gibbs . . . . .	44
4.1.1 Définition . . . . .	44
4.1.2 Simulation, exemples . . . . .	45
4.2 Mosaïques gibbsiennes . . . . .	46
4.2.1 Triangulation de Delaunay gibbsienne . . . . .	46
4.2.2 Mosaïques de Voronoï gibbsienne . . . . .	47
4.3 Le modèle Quermass . . . . .	49
4.4 Les processus déterminantaux . . . . .	51
4.4.1 Définition . . . . .	52
4.4.2 Simulation . . . . .	53
4.4.3 Représentation spectrale approchée . . . . .	54
4.4.4 Perspectives . . . . .	55
<b>5 Inférence pour les processus ponctuels de Gibbs</b>	<b>57</b>
5.1 Pseudo-vraisemblance dans le cas non-héréditaire . . . . .	58
5.1.1 Equilibre de Campbell généralisé . . . . .	58
5.1.2 Contraste généralisé, estimation en deux étapes . . . . .	59
5.1.3 Exemple : estimation dans le modèle de Voronoï gibbsien . . . . .	60
5.2 Procédure de Takacs-Fiksel . . . . .	61
5.2.1 Méthode et motivations . . . . .	61
5.2.2 Résultats théoriques . . . . .	64
5.2.3 Application au modèle Quermass . . . . .	66
5.3 Analyse des résidus, tests d'adéquation . . . . .	68
5.4 Perspectives . . . . .	71

# Introduction

Ce mémoire de synthèse porte sur deux thématiques de recherche : la longue mémoire dans les champs aléatoires et les processus ponctuels en interaction. Ces deux domaines ont pour point commun l'étude de la dépendance dans des processus spatiaux. Le premier concerne la forte dépendance dans des processus portés par un réseau (comme des séries temporelles ou des images pixellisées), le second s'intéresse à la dépendance dans la position de points dans l'espace, éventuellement au travers de marques associées, ce qui concerne notamment des objets géométriques en interaction. Ma contribution porte plus spécifiquement sur l'étude de certaines classes de modèles, et sur l'obtention de résultats asymptotiques qui valident ou motivent certaines procédures statistiques.

Ce document est scindé en deux parties. La première concerne principalement la longue mémoire. Ce thème de recherche fut au coeur de mon travail de thèse de doctorat, dirigé par Marie-Claude Viano. Il s'est prolongé par la suite au travers de différents projets, en collaboration avec Pierre-Olivier Amblard, Jean-François Coeurjolly, Remigiusz Leipus, Anne Philippe et Donatas Surgailis. La seconde partie concerne les processus ponctuels et la géométrie aléatoire. Cette thématique a émergé plus récemment dans mon travail de recherche à la suite d'échanges avec David Dereudre, aboutissant aux publications [Lav12] et [Lav9]. Mon intérêt pour ce domaine s'est confirmé au travers d'autres projets, en collaboration avec Jean-François Coeurjolly, David Dereudre, Rémy Drouilhet, Katerina Helisová, Jesper Møller et Ege Rubak.

## Première partie : autour de la longue mémoire

Dans le premier chapitre de cette partie, je présente plusieurs modèles de champs aléatoires à longue mémoire, issus principalement de [Lav15]. La plupart sont similaires aux modélisations rencontrées en séries temporelles (filtrage d'un bruit blanc, agrégation de champs à courte mémoire) mais leur étude théorique est parfois plus délicate. Par ailleurs, on montre que la longue mémoire est étroitement liée à l'apparition de la transition de phase dans les systèmes gibbsiens sur un réseau. Ces différents points de vue montrent que l'émergence de la longue mémoire dans les champs aléatoires n'est pas rare et en motivent l'étude. Ils soulignent également la spécificité des champs par rapport aux séries temporelles : la longue mémoire peut émerger de façon isotrope mais aussi anisotrope (par exemple dans une seule direction). Ce chapitre sera également l'occasion de présenter le mouvement brownien fractionnaire multivarié, dont j'ai étudié les principales propriétés avec Anne Philippe et Donatas Surgailis dans [Lav11] et avec Pierre-Olivier Amblard, Jean-François Coeurjolly et Anne Philippe dans [Lav7].

Nous verrons que la série multivariée formée de ses accroissements peut exhiber de la longue mémoire (comme c'est le cas pour les accroissements du mouvement brownien fractionnaire univarié), mais que la dépendance croisée entre ses composantes est très contrainte.

Le second chapitre est plus théorique. Il concerne le comportement asymptotique de certaines statistiques en présence de longue mémoire. Il s'agit des sommes partielles, du processus empirique et de certaines formes quadratiques. Ces objets sont au cœur de nombreuses procédures statistiques et leur étude est fondamentale. Elle a été menée de façon intense dans le cas des séries temporelles. Dans le cas des champs aléatoires, la difficulté réside dans les différents types de longue mémoire possibles (isotrope, anisotrope), qui rendent inappropriées les techniques de preuve employées en dimension 1. Dans [Lav14], j'ai montré que les sommes partielles ne suivent généralement pas un théorème limite central, dans le sens où ni la normalisation ni la limite n'est standard, et ce quelque soit le type de longue mémoire rencontrée. De même, dans le cas de fonctionnelles de champs gaussiens à longue mémoire, le processus empirique est asymptotiquement dégénéré ([Lav16], [Lav15]). Ces résultats confirment les comportements rencontrés dans le cadre des séries temporelles. L'étude de certaines formes quadratiques de champs gaussiens, menée dans [Lav8], conduit au même type de conclusions. Cependant nous montrons que certaines situations inédites peuvent apparaître dans le cas de champs dont la longue mémoire n'est portée que par une seule direction. La preuve de ces résultats asymptotiques repose essentiellement sur une technique de convergence des mesures spectrales associées aux champs.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de plusieurs procédures de tests en présence de longue mémoire. Chacun d'entre eux exploite la spécificité du comportement des sommes partielles en présence de longue mémoire, au travers de la statistique  $V/S$ . Cette quantité correspond en effet au rapport entre la variance empirique des sommes partielles et l'estimation de leur variance asymptotique. Dans [Lav13], je généralise le test  $V/S$  (initialement proposé dans les séries temporelles) pour tester la présence de longue mémoire dans les champs, que cette dernière soit isotrope ou non. En collaboration avec Anne Philippe et Donatas Surgailis, nous avons ensuite proposé dans [Lav10] une procédure pour tester l'égalité des paramètres de longue mémoire dans deux séries temporelles, en comparant leur statistique  $V/S$ . Enfin dans [Lav3], nous testons la rupture du paramètre de longue mémoire dans une série temporelle en étudiant les fluctuations de la statistique  $V/S$ . Cette problématique est très liée à l'étude de la persistance dans les séries économiques, qui est un thème actuel important en économétrie.

### Seconde partie : processus ponctuels et géométrie aléatoire

Les processus ponctuels en interaction peuvent se modéliser de différentes manières. La plus naturelle est sans doute au travers d'un potentiel qui explicite l'interaction précise entre points voisins, conduisant à la classe des modèles de Gibbs. Le premier chapitre de cette seconde partie est consacré à la présentation de différents modèles de Gibbs, et notamment de leur application à la géométrie aléatoire. Il est en effet assez commun de modéliser certaines structures géométriques, comme des mosaïques ou des ensembles aléatoires, à partir d'un processus ponctuel de Poisson. Les propriétés d'indépendance

---

inhérentes aux processus de Poisson limitent la pertinence de ces modèles en pratique. Afin d'obtenir des structures géométriques plus réalistes, il paraît naturel d'introduire un potentiel d'interaction qui favorise, voire même force, certaines géométries (par exemple des cellules suffisamment régulières dans une mosaïque). Les mosaïques de Delaunay et de Voronoï gibbsiennes sont un exemple de tels modèles. Nous les avons étudiées avec David Dereudre dans [Lav9]. Le modèle Quermass, généralisation du modèle booléen au cadre gibbsien, sera également présenté. Nous conclurons enfin ce premier chapitre par les processus ponctuels déterminantaux. Cette classe de processus ponctuels répulsifs s'avère être une alternative intéressante aux modèles de Gibbs. Nous les étudions d'un point de vue statistique avec Jesper Møller et Ege Rubak dans [Lav2]. Nous montrons en particulier qu'ils sont facilement simulables (contrairement aux processus de Gibbs), et qu'il est assez simple d'en proposer des modèles paramétriques flexibles.

Le second chapitre s'intéresse aux problèmes d'inférence dans les processus ponctuels de Gibbs. Il s'agit de l'estimation des paramètres et de la validation de modèles. La méthode d'estimation la plus naturelle consiste à maximiser la vraisemblance du modèle paramétrique de Gibbs choisi. Cette technique requiert l'estimation par simulation d'une constante normalisatrice, ce qui est très coûteux en pratique, particulièrement en présence d'interactions géométriques. C'est pourquoi d'autres procédures d'estimation ont été développées. Nous nous intéressons à l'estimation par pseudo-vraisemblance et à l'estimation par contraste de Takacs-Fiksel, qui en est une généralisation. Dans un premier travail avec David Dereudre [Lav12], nous étendons la procédure par pseudo-vraisemblance au cas d'interactions non-héréditaires et en prouvons la consistance. L'héritérité, qui est une hypothèse standard en mécanique statistique, n'a en effet plus lieu en présence d'interactions géométriques fortes. Nous généralisons pour ce faire l'équation d'équilibre de Campbell (due à H.-O. Georgii, X. Nguyen et H. Zessin dans le cas héréditaire) au cas non-héréditaire. Une application à l'estimation des mosaïques de Delaunay et de Voronoï gibbsiennes est conduite dans [Lav9].

En collaboration avec Jean-François Coeurjolly, David Dereudre et Rémy Drouilhet [Lav6], nous avons étudié en détail la procédure de Takacs Fiksel. Elle généralise la procédure par pseudo-vraisemblance et a l'intérêt d'offrir une grande richesse d'applications. Nous en présentons quelques exemples dans la partie 5.2. Elle rend notamment possible l'estimation du modèle Quermass, alors qu'il est impossible d'observer les points à partir d'une réalisation de ce modèle. Cette application fait l'objet d'un travail en collaboration avec David Dereudre et Katerina Helisová [Lav1]. Dans [Lav6], nous prouvons la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur de Takacs Fiksel dans un contexte très général, et nous proposons des critères précis assurant l'identifiabilité de cette procédure.

Enfin, la validation du choix d'un modèle paramétrique de Gibbs sera présentée dans la partie 5.3. Nous abordons cet aspect au travers de l'étude des résidus dans un travail en commun avec Jean-François Coeurjolly [Lav4]. Nous prouvons la convergence presque sûre des résidus vers zéro et nous obtenons leur loi asymptotique. Ce résultat permet d'envisager plusieurs procédures de tests d'adéquation, ce qui est inédit dans ce contexte. Nous proposons en particulier une généralisation du test des quadrants (initialement consacré à la validation d'un processus de Poisson) aux mesures de Gibbs.



# Introduction

This dissertation deals with two topics : long memory in random fields and interacting point processes. These two domains are about dependence in spatial random processes. The first one concerns strong dependence in random fields on a network (like time series or images), while the second one deals with the dependence in the location of random points. These random points can be associated with some marks, so that dependence in geometric objects is concerned. To be more specific, my contribution is about the study of some classes of models, and the proof of asymptotic results related with some statistical procedures.

This document is divided into two parts. The first part mainly concerns long memory. This research topic was at the heart of my phd, supervised by Marie-Claude Viano and defended in 2005. I continued then to investigate this subject through some collaborations with Pierre-Olivier Amblard, Jean-François Coeurjolly, Remigijus Leipus, Anne Philippe and Donatas Surgailis. The second part concerns point processes and random geometry. I started to work in this domain more recently, after some collaboration with David Dereudre, yielding to the publications [Lav12] and [Lav9]. My interest in this topic was confirmed by other projects, in collaboration with Jean-François Coeurjolly, David Dereudre, Rémy Drouilhet, Katerina Helisová, Jesper Møller and Ege Rubak.

## First part : long memory

In the first chapter, I present several models of long memory random fields, mainly coming from [Lav15]. Most of these models are similar to their time series counterpart (white noise filtering, aggregation of autoregressive dynamics), but their theoretical study is sometimes more involved. On the other hand, we show that long memory is closely related to the occurrence of phase transition in a Gibbs system on a network. All these different points of view demonstrate that long memory in random fields is not a rare feature, which is a motivation for its investigation. They also stress the specificity of random fields in comparison with time series : long memory may be isotropic or anisotropic (like in one particular direction). This first chapter gives moreover the opportunity to present the multivariate fractional Brownian motion. I studied some of its main features with Anne Philippe and Donatas Surgailis in [Lav11] and with Pierre-Olivier Amblard, Jean-François Coeurjolly and Anne Philippe in [Lav7]. We will show that the multivariate series formed by its increments can exhibit long memory (as it is the case for the increments of the univariate fractional Brownian motion), but that the cross-dependence between the marginals is very constrained.

The second chapter is more theoretical. It deals with the asymptotic behavior of certain statistics in presence of long memory : the partial sums, the empirical process and some quadratic forms. These objects are the key ingredient of a lot of statistical procedures and their study is fundamental. They have been widely studied in the setting of time series. For random fields, the difficulty stands in the different possible types of long memory (isotropic or not), that make the classical techniques of proof used in dimension 1 unefficient. In [Lav14], I proved that the partial sums do not generally follow a central limit theorem, in the sense that the normalisation and the limit are not standard. Similarly, for subordinated Gaussian fields, the empirical process is degenerated ([Lav16], [Lav15]). These results confirm the features proved in the setting of time series. The study of some quadratic forms in [Lav8] leads to the same kind of conclusions. However, we prove that new limiting behaviors may appear when long memory occurs along one direction only. The proofs of these asymptotic results mainly rely on the convergence of spectral measures.

The third chapter presents several testing procedures in presence of long memory. Each of them takes profit of the particular behavior of partial sums in presence of long memory, through the  $V/S$  statistic. This statistic corresponds to the ratio between the empirical variance of the partial sums and an estimation of their asymptotic variance. In [Lav13], I propose a generalization of the  $V/S$  procedure (initially introduced for time series) to test the presence of long memory in a random fields. No parametric assumptions are made and the long memory can be isotropic or not. In [Lav10], in collaboration with Anne Philippe and Donatas Surgailis, we introduce a procedure to compare the long memory parameters of two time series, based on a comparison of their  $V/S$  statistic. Finally, in [Lav3], we test whether the long memory parameter of a time series is constant over time. This question is related to the study of dynamics of persistence, which is a major question in econometry.

### Second part : point processes and random geometry

Interacting point processes can be modelled in different ways. The most natural is probably to display a potential function which specifically explicits the interaction between neighbor points. This latter point of view leads to the class of Gibbs models. The first chapter of this second part is devoted to the presentation of some Gibbs models, in particular to their applications in random geometry. It is indeed common to model some geometrical structures, like tessellations or random sets, by using a Poisson point process. But the independence properties induced by Poisson processes can make these models irrelevant for applications. In order to construct some more realistic geometrical structures, it seems natural to introduce a potential function that favors or even forces some geometrical features (like for instance regular cells in a tessellation). Gibbs Delaunay (or Voronoï) tessellations are one example of such models. We have studied them in collaboration with David Dereudre in [Lav9]. The Quermass model, which is a generalization of the boolean model to a Gibbsian setting, will also be presented. Finally, this first chapter will be concluded by the class of determinantal point processes. This class of repulsive point processes turns out to be an interesting alternative to Gibbs models. We investigate their statistical aspects with Jesper Møller and Ege Rubak in [Lav2]. We

---

show in particular that they can be simulated easily (contrary to Gibbs processes), and that a large class of flexible parametric models of determinantal processes are available.

The second chapter deals with inference problems in Gibbs point processes, more specifically parametric estimation and model validation. The most natural procedure of estimation consists in maximizing the likelihood of the parametric Gibbs model that has been chosen. This technique requires to estimate, by simulation, an intractable normalizing constant, which turns out to be time consuming in practice, especially in the presence of strong geometrical interactions. This is the reason why alternative estimation procedures have been developed. We are interested in particular in the pseudo-likelihood approach and in the Takacs-Fiksel procedure. In a joint work with David Dereudre [Lav12], we expand the pseudo-likelihood procedure to non-hereditary interactions and we prove its consistency. As a matter of fact, heredity, which is a common assumption in statistical mechanics, does not hold in presence of strong geometrical interactions. In this study, we first generalize the Campbell equilibrium equation, initially proved by H.-O. Georgii, X. Nguyen and H. Zessin, to the non-hereditary case. An application to the estimation of Gibbs Delaunay Voronoï tessellations is displayed in [Lav9].

In collaboration with Jean-François Coeurjolly, David Dereudre and Rémy Drouilhet [Lav6], we have studied in detail the Takacs-Fiksel procedure. It generalizes the pseudo-likelihood approach and turns out to be very flexible for applications. We present some examples in section 5.2. This procedure allows in particular to estimate all parameters of the Quermass model, whereas observing the points pattern from a realization of this model is impossible. This application is the subject of a collaboration with David Dereudre and Katerina Helisová [Lav1]. In [Lav6], we prove consistency and asymptotic normality of the Takacs-Fiksel estimator in a very general setting, and some criteria for the identifiability of the procedure are given.

Finally, model validation is investigated in section 5.3. It is based on the asymptotic study of the residuals, investigated with Jean-François Coeurjolly in [Lav4]. We prove that under the true parametric model, the residuals converge almost surely to zero, and we obtain their asymptotic law. This result allows us to propose several goodness of fit procedures, which is new for Gibbs models. One of these tests constitutes an extension of the widely used quadrat counting test, which allows to test the null hypothesis of a homogeneous Poisson point process.



# Liste des publications

## *Articles soumis*

- [Lav1] D. Dereudre, K. Helisová and F. Lavancier. Estimation of the Quermass process. *preprint*, 2011.
- [Lav2] F. Lavancier, J. Møller and E. Rubak. Statistical aspects of determinantal point processes. *preprint*, 2011.
- [Lav3] F. Lavancier, R. Leipus, A. Philippe, and D. Surgailis. Detection of non constant long memory parameter. *preprint*, 2011.

## *Articles en révision*

- [Lav4] J.-F. Coeurjolly and F. Lavancier. Residuals and goodness-of-fit tests for stationary marked gibbs point processes. *en révision pour Journal of the Royal Statistical Society, Series B (arxiv :1002.0857)*, 2011.

## *Articles publiés ou acceptés*

- [Lav5] F. Lavancier. Aggregation of isotropic autoregressive fields. *Journal of Statistical Planning and Inference (to appear, arxiv :1106.2674)*, 2011.
- [Lav6] J.-F. Coeurjolly, D. Dereudre, R. Drouilhet, and F. Lavancier. Takacs Fiksel method for stationary marked Gibbs point processes. *Scandinavian Journal of Statistics (to appear, arxiv :1007.3351)*, 2011.
- [Lav7] P.-O. Amblard, J.-F. Coeurjolly, F. Lavancier, and A. Philippe. Basic properties of the multivariate fractional Brownian motion. *SMF - Séminaires et Congrès (to appear, arxiv :1007.0828)*, 2011.

- [Lav8] F. Lavancier and A. Philippe. Some convergence results on quadratic forms for random fields and application to empirical covariances. *Probability Theory and Related Fields*, 149 : 493–514, 2011.
- [Lav9] D. Dereudre and F. Lavancier. Practical simulation and estimation for Gibbs Delaunay-Voronoi tessellations with geometric hardcore interaction. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(1) : 498–519, 2011.
- [Lav10] F. Lavancier, A. Philippe, and D. Surgailis. A two-sample test for comparison of long memory parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, 101 : 2118–2136, 2010.
- [Lav11] F. Lavancier, A. Philippe, and D. Surgailis. Covariance function of vector self-similar process. *Statistics and Probability Letters*, 79(23) : 2415–2421, 2009.
- [Lav12] D. Dereudre and F. Lavancier. Campbell equilibrium equation and pseudo-likelihood estimation for non-hereditary Gibbs point processes. *Bernoulli*, 15(4) : 1368–1396, 2009.
- [Lav13] F. Lavancier. The V/S test of long-range dependence in random fields. *Electronic Journal of Statistics*, 2 : 1373–1390, 2008.
- [Lav14] F. Lavancier. Invariance principles for non-isotropic long memory random fields. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 10(3) : 255–282, 2007.
- [Lav15] F. Lavancier. Long memory random fields. in *Dependence in Probability and Statistics, Lecture Notes in Statistics, vol. 187. Bertail, P ; Doukhan, P ; Soulier, Ph (Eds.), Springer.*, 2006.
- [Lav16] F. Lavancier. Processus empirique de fonctionnelles de champs gaussiens à longue memoire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 342 : 345–348, 2006.
- [Lav17] F. Lavancier, F. Caini, and A. Gazeau Plan de sondage pour mesures mobiles de la pollution atmosphérique. *Pollution Atmosphérique*, 180 : 551-567, 2003

# Première partie

## Autour de la longue mémoire



# Chapitre 1

## Modèles en lien avec la longue mémoire

Il existe plusieurs définitions de la longue mémoire. Un point de vue général consiste à considérer qu'un processus stationnaire de variance finie est à longue mémoire lorsque sa fonction de covariance est non sommable. Nous revenons plus précisément sur cette définition dans la partie 1.2 dans le cadre général des champs aléatoires sur un réseau.

La longue mémoire apparaît notamment dans la série des accroissements du mouvement brownien fractionnaire. Nous en rappelons quelques propriétés dans la première partie avant d'en présenter une généralisation au cadre multivarié. Quelques résultats issus de [Lav11] et [Lav7] sont résumés. En particulier, nous montrons que les accroissements forment une série multivariée à longue mémoire, mais que de fortes contraintes dans la dépendance croisée entre les marginales apparaissent.

La seconde partie s'intéresse plus spécifiquement à des modèles de champs à longue mémoire sur un réseau. Ils peuvent être construits de différentes manières. Nous présentons quelques exemples tirés principalement de [Lav15] et [Lav5].

La dernière partie propose quelques simulations du mouvement brownien multivarié et de champs aléatoires à longue mémoire.

### 1.1 Autour du mouvement brownien fractionnaire

#### 1.1.1 Rappels sur le mouvement brownien fractionnaire

Nous rappelons brièvement la définition et les principales propriétés du mouvement brownien fractionnaire. Une description plus complète pourra être trouvée dans [105] et [99].

Le mouvement brownien fractionnaire  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est le processus gaussien centré, paramétré par  $H \in ]0, 1[$  et  $\sigma > 0$ , de fonction de covariance

$$\mathbb{E}X(s)X(t) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ |s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H} \right\}, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (1.1.1)$$

Le cas particulier  $H = 1/2$  correspond au mouvement brownien standard. Le paramètre  $H$  est appelé paramètre de Hurst ou paramètre d'auto-similarité. On peut en effet montrer que pour tout  $\lambda > 0$ , les processus  $X(\lambda t)$  et  $\lambda^H X(t)$  ont même loi, ce qui caractérise

l'aspect auto-similaire du processus. Le paramètre de Hurst gouverne la régularité des trajectoires de  $X$  : elles sont presque sûrement de dimension de Hausdorff  $2 - H$  et d'exposant de Hölder uniforme  $H$ . Il gouverne également la dépendance des accroissements du mouvement brownien fractionnaire. Ces derniers sont en effet stationnaires et la fonction de covariance de la série  $\Delta X(n) := X(n) - X(n - 1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , vaut

$$\mathbb{E}\Delta X(n)\Delta X(n+h) = \frac{\sigma^2}{2}(|h-1|^{2H} - 2|h|^{2H} + |h+1|^{2H}) \quad (1.1.2)$$

qui est équivalent à  $|h|^{2H-2}$ , à une constante multiplicative près, lorsque  $|h| \rightarrow \infty$  (et  $H \neq 1/2$ ). Ainsi lorsque  $H > 1/2$ , la série  $\Delta X$  est à longue mémoire dans le sens où sa fonction de covariance n'est pas sommable.

Toutes ces propriétés ont rendu le mouvement brownien fractionnaire très attractif pour les applications. De plus elles le caractérisent : le mouvement brownien fractionnaire est le seul processus gaussien vérifiant toutes les propriétés énoncées ci-dessus.

### 1.1.2 Le mouvement brownien fractionnaire multivarié

Dans deux articles écrits en collaboration avec Pierre-Olivier Amblard, Jean-François Coeurjolly, Anne Philippe et Donatas Surgailis ([Lav11] et [Lav7]), nous nous sommes intéressés à la généralisation du mouvement brownien fractionnaire au cas vectoriel. La définition axiomatique est la suivante. On retrouve le cas précédent lorsque  $p = 1$ .

**Définition 1.1.** Un mouvement brownien fractionnaire multivarié ( $p$ -mfBm) de paramètre  $H \in (0, 1)^p$  est un processus  $p$ -multivarié partant de  $0 \in \mathbb{R}^p$  et ayant les trois propriétés suivantes :

- il est gaussien,
- il est auto-similaire de paramètre  $H \in ]0, 1[^p$ ,
- il est à accroissements stationnaires.

L'auto-similarité est à comprendre au sens de la définition suivante.

**Définition 1.2.** Un processus multivarié  $(X(t) = (X_1(t), \dots, X_p(t)))_{t \in \mathbb{R}}$  est auto-similaire s'il existe un vecteur  $H = (H_1, \dots, H_p) \in ]0, 1[^p$  tel que pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$(X_1(\lambda t), \dots, X_p(\lambda t))_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{\text{fidi}}{=} (\lambda^{H_1} X_1(t), \dots, \lambda^{H_p} X_p(t))_{t \in \mathbb{R}}, \quad (1.1.3)$$

où  $\stackrel{\text{fidi}}{=}$  désigne l'égalité des lois fini-dimensionnelles.

Un processus multivarié auto-similaire est un cas particulier d'opérateur auto-similaire (voir [67], [59], [76], [29]). Ce point de vue permet d'en déduire certaines propriétés, en particulier des représentations sous forme d'intégrales stochastiques (moyenne-mobile et spectrale), qui sont présentées dans [Lav7].

Partant de la définition 1.1, il est assez simple d'en déduire la fonction de covariance (1.1.1) lorsque  $p = 1$ . Le cas vectoriel  $p > 1$  est plus délicat à traiter. Il fait l'objet du résultat suivant. Il se montre en résolvant une équation fonctionnelle du type étudié dans [2] et [3].

**Proposition 1.1** ([Lav11]). *La fonction de covariance d'un  $p$ -mfBm admet nécessairement la représentation suivante. Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ ,  $i \neq j$ , en notant  $\sigma_i^2 := \text{var}(X_i(1))$ ,*

1. *Si  $H_i + H_j \neq 1$ , il existe  $(\rho_{i,j}, \eta_{i,j}) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$  avec  $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = \text{corr}(X_i(1), X_j(1))$ , et  $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$  tels que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_i(s)X_j(t) &= \frac{\sigma_i\sigma_j}{2} \left\{ (\rho_{i,j} + \eta_{i,j}\text{sign}(s))|s|^{H_i+H_j} + (\rho_{i,j} - \eta_{i,j}\text{sign}(t))|t|^{H_i+H_j} \right. \\ &\quad \left. - (\rho_{i,j} - \eta_{i,j}\text{sign}(t-s))|t-s|^{H_i+H_j} \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

2. *Si  $H_i + H_j = 1$ , il existe  $(\tilde{\rho}_{i,j}, \tilde{\eta}_{i,j}) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$  avec  $\tilde{\rho}_{i,j} = \tilde{\rho}_{j,i} = \text{corr}(X_i(1), X_j(1))$ , et  $\tilde{\eta}_{i,j} = -\tilde{\eta}_{j,i}$  tels que*

$$\mathbb{E}X_i(s)X_j(t) = \frac{\sigma_i\sigma_j}{2} \left\{ \tilde{\rho}_{i,j}(|s| + |t| - |s-t|) + \tilde{\eta}_{i,j}(t \log |t| - s \log |s| - (t-s) \log |t-s|) \right\}. \quad (1.1.5)$$

La fonction de covariance d'un  $p$ -mfBm dépend des paramètres  $\rho_{i,j}$  et  $\eta_{i,j}$  définis, selon la proposition précédente, lorsque  $H_i + H_j \neq 1$ , par

$$\rho_{i,j} = \text{corr}(X_i(1), X_j(1)), \quad \eta_{i,j} = \frac{\text{corr}(X_i(1), X_j(-1)) - \text{corr}(X_i(-1), X_j(1))}{2 - 2^{H_i+H_j}}.$$

Réiproquement, nous établissons dans [Lav7] une condition nécessaire et suffisante sur ces paramètres pour qu'une fonction de covariance définie par (1.1.4) ou (1.1.5) existe. Cette condition est déduite d'une identification de la densité spectrale des accroissements du  $p$ -mfBm obtenue de deux manières : d'une part comme transformée de Fourier de la fonction de covariance donnée ci-dessus, d'autre part à partir de la représentation spectrale du  $p$ -mfBm. Posons

$$\tau_{i,j} = \begin{cases} \rho_{i,j} \sin\left(\frac{\pi}{2}(H_i + H_j)\right) - i \eta_{i,j} \cos\left(\frac{\pi}{2}(H_i + H_j)\right) & \text{si } H_i + H_j \neq 1, \\ \tilde{\rho}_{i,j} - i \frac{\pi}{2} \tilde{\eta}_{i,j} & \text{si } H_i + H_j = 1. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

**Proposition 1.2.** *La matrice  $\Sigma := (\Sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$  dont les entrées  $\Sigma_{i,j}$  sont définies par (1.1.4) ou (1.1.5) est une matrice de covariance si et seulement si la matrice hermitienne  $(\Gamma(H_i + H_j + 1)\tau_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$  est semi-définie positive.*

Lorsque  $p = 2$ , l'ensemble des valeurs possibles pour  $\rho := \rho_{1,2}$  et  $\eta := \eta_{1,2}$  se réduit à l'intérieur d'une ellipse, fonction de  $H_1$  et  $H_2$ . Quelques exemples de ces ensembles sont représentés dans la figure 1.1 pour différentes valeurs de  $H_2$  lorsque  $H_1 = 0.1$ . Dans le cas  $H_1 + H_2 \neq 1$ , le paramètre  $\eta$  a été reparamétrisé en  $\eta' = \eta/(1 - H_1 - H_2)$  pour rendre la comparaison possible avec le cas  $H_1 + H_2 = 1$ .

On en déduit que la corrélation maximale entre les deux composantes d'un 2-mfBm s'obtient lorsque  $\eta = 0$ . Elle s'avère faible lorsque les paramètres de Hurst de chaque composante sont très différents, ce qui témoigne du caractère assez contraignant du  $p$ -mfBm.

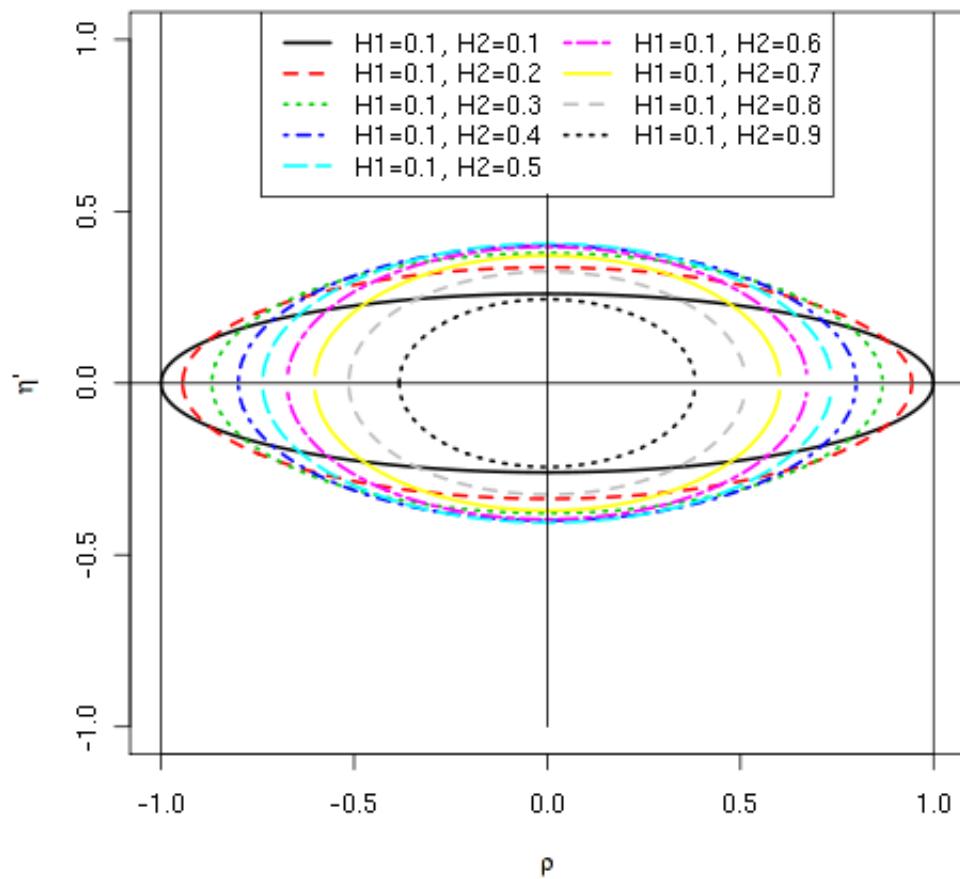


FIGURE 1.1 – Exemples de l'ensemble des valeurs possibles pour  $(\rho, \eta')$  lorsque  $p = 2$ .

### 1.1.3 Les accroissements du mfBm : longue mémoire multivariée

Il est naturel de s'intéresser à la structure de dépendance des accroissements du  $p$ -mfBm  $\Delta X := (X(n+1) - X(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ces derniers forment une série temporelle stationnaire multivariée. En notant  $\gamma_{i,j}(h) = \mathbb{E}\Delta X_i(t)\Delta X_j(t+h)$ , il est assez facile de déduire de la proposition 1.1 que lorsque  $|h| \rightarrow +\infty$ ,

$$\gamma_{i,j}(h) \sim \sigma_i \sigma_j |h|^{H_i + H_j - 2} \kappa_{i,j}(\text{sign}(h)), \quad (1.1.7)$$

où

$$\kappa_{i,j}(\text{sign}(h)) = \begin{cases} (\rho_{i,j} - \eta_{i,j}\text{sign}(h))(H_i + H_j)(H_i + H_j - 1) & \text{si } H_i + H_j \neq 1, \\ \tilde{\eta}_{i,j}\text{sign}(h) & \text{si } H_i + H_j = 1. \end{cases}$$

Il est également possible de calculer la densité spectrale de  $\Delta X$  (cf [21] et [Lav7]). On déduit de (1.1.7) que chaque composante du  $p$ -mfBm est à longue mémoire lorsque  $H_i > 1/2$ , conformément à (1.1.2). Mais on remarque surtout une dépendance très dirigée entre chaque composante marginale de  $\Delta X$  : deux composantes sont soit indépendantes, soit

- si  $H_i + H_j < 1$ , alors leur covariance croisée est sommable,
- si  $H_i + H_j \geq 1$ , alors leur covariance croisée est non-sommable même si l'une des deux composantes est à courte mémoire.

L'utilisation du mfBm pour construire des modèles de séries multivariées à longue mémoire montre ainsi ses limites. En guise de perspective, il serait intéressant de pouvoir proposer un modèle de séries multivariées gaussiennes plus souple, permettant à la fois des dynamiques marginales à longue mémoire et des interactions plus ou moins fortes entre composantes.

## 1.2 Différentes modélisations de champs à longue mémoire

Nous considérons dans cette partie des champs aléatoires portés par le réseau  $\mathbb{Z}^d$ . Lorsque  $d = 1$ , le cadre se réduit à celui des séries temporelles. Lorsque  $d = 2$ , ces objets permettent notamment de modéliser des images.

Nous dirons qu'un champ stationnaire et de variance finie est à longue mémoire si sa fonction de covariance est non-sommable. En particulier, un champ dont la densité spectrale est non bornée est nécessairement à longue mémoire. C'est ce point de vue qui sera souvent employé ci-dessous.

Nous dirons abusivement qu'un champ est à longue mémoire isotrope si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

- (i) sa densité spectrale  $f$  est continue partout sauf en l'origine où elle vérifie :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \|x\|^{\alpha-d} b\left(\frac{x}{\|x\|}\right) L\left(\frac{1}{\|x\|}\right), \quad 0 < \alpha < d. \quad (1.2.1)$$

(ii) sa fonction de covariance  $r$  vérifie

$$r(n) = \|n\|^{-\alpha} L(\|n\|) b \left( \frac{n}{\|n\|} \right) + e_n, \quad 0 < \alpha < d. \quad (1.2.2)$$

où, dans les expressions (1.2.1) et (1.2.2),  $L$  est une fonction à variation lente à l'infini,  $b$  est une fonction continue sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ ,  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est une suite sommable. Ces deux points de vue ne sont pas équivalents mais sont fortement liés, comme le confirme un résultat dû à Wainger [111] qui affirme que (i) est quasiment une conséquence de (ii). La terminologie "isotrope" est justifiée par le fait que le terme dictant le comportement à longue mémoire est radial dans les deux expressions.

La longue mémoire dans les champs peut être construite de différentes manières. Nous donnons quelques exemples ci-dessous.

### 1.2.1 Les accroissements du drap brownien fractionnaire

On l'a vu dans la partie 1.1.1, les accroissements du mouvement brownien fractionnaire ( $d = 1$ ) forment une série stationnaire à longue mémoire lorsque le paramètre de Hurst est supérieur à  $1/2$ . Ce point de vue se généralise aux accroissements rectangulaires du drap brownien fractionnaire lorsque  $d > 1$ .

Le drap brownien fractionnaire peut-être défini comme le champ gaussien sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $(B(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ , centré, nul sur les axes, paramétré par  $c_k > 0$  et  $H_k \in ]0, 1[$ ,  $k = 1, \dots, d$ , de fonction de covariance

$$\mathbb{E}B(s)B(t) = \prod_{k=1}^d c_k \left\{ |s_k|^{2H_k} + |t_k|^{2H_k} - |t_k - s_k|^{2H_k} \right\},$$

où  $s = (s_1, \dots, s_d)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_d)$  et  $H_k$  est le paramètre de Hurst dans la direction  $k$ .

Les accroissements rectangulaires (d'ordre 1) de  $B$  sont définis de la façon suivante :

$$\Delta B(n_1, \dots, n_d) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d \in \{0, 1\}} (-1)^{d+\sum_{i=1}^d \varepsilon_i} B(n_1 + \varepsilon_1, \dots, n_d + \varepsilon_d). \quad (1.2.3)$$

La structure tensorielle du drap brownien fractionnaire nous permet d'obtenir la fonction de covariance de  $\Delta B$  de façon similaire à (1.1.2)

$$\mathbb{E}\Delta B(n)\Delta B(n+h) = \prod_{k=1}^d c_k (|h_k - 1|^{2H_k} - 2|h_k|^{2H_k} + |h_k + 1|^{2H_k}), \quad (1.2.4)$$

où  $n = (n_1, \dots, n_d)$  et  $h = (h_1, \dots, h_d)$  sont dans  $\mathbb{Z}^d$ .

Ainsi les accroissements du drap brownien fractionnaire forment un champ gaussien stationnaire dont la dépendance est anisotrope. Ce champ est à longue mémoire dès que  $H_k > 1/2$  pour un  $k \in \{1, \dots, d\}$ .

### 1.2.2 La longue mémoire obtenue par filtrage d'un bruit (les champs linéaires)

Soit un bruit blanc  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  de variance  $\sigma^2$  et une suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  telle que  $\sum a_k^2 < \infty$ . On considère le champ linéaire suivant :

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k}. \quad (1.2.5)$$

Ce champ constitue un filtrage du bruit  $\varepsilon$ . En notant  $a(\lambda) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i \langle k, \lambda \rangle}$ , pour tout  $\lambda \in [-\pi, \pi]^d$ , on peut montrer que le champ  $X$  admet comme densité spectrale :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} |a(\lambda)|^2, \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi]^d. \quad (1.2.6)$$

Ainsi ce champ est à longue mémoire dès que la fonction  $\lambda \rightarrow |a(\lambda)|$  est non-bornée.

On peut définir de manière équivalente le champ  $X$  dans le domaine spectral de la façon suivante, pourvu que  $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ ,

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \langle n, \lambda \rangle} a(\lambda) dZ(\lambda), \quad (1.2.7)$$

où  $Z$  est la mesure spectrale de  $\varepsilon$  : pour tout  $n$ ,  $\varepsilon_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda)$ .

*Exemple 1.1.* Lorsque  $d = 1$ , en prenant  $a(\lambda) = |1 - e^{i\lambda}|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ ,  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  correspond à une série fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , notée  $F(\alpha)$ , autrement appelée série intégrée d'ordre  $\alpha$ , définie plus classiquement par l'équation

$$(1 - L)^\alpha X_n = \varepsilon_n,$$

où  $L$  représente l'opérateur retard.

*Exemple 1.2.* Lorsque  $d = 2$ , le filtre  $a(\lambda_1, \lambda_2) = |1 - e^{i\lambda_1}|^{-\alpha_1} |1 - e^{i\lambda_2}|^{-\alpha_2}$ ,  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1/2$ , conduit à un champ dont la structure de dépendance est très similaire aux accroissements du drap brownien fractionnaire présentés dans la partie 1.2.1.

Le filtre  $a(\lambda_1, \lambda_2) = |2 - \cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2)|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ , conduit à un champ à longue mémoire isotrope.

Le filtre  $a(\lambda_1, \lambda_2) = |1 - e^{i(\lambda_1 + k\lambda_2)}|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , conduit à un champ fortement anisotrope dont la longue mémoire est dirigée selon une seule direction. On peut en effet déduire dans ce cas que la fonction de covariance  $\sigma(h_1, h_2)$  est non-sommable le long de la droite  $h_2 = kh_1$  et nulle ailleurs (Lemme 8 de [Lav8]).

*Exemple 1.3.* En dimension supérieure, de simples champs autorégressifs peuvent exhiber de la longue mémoire. Pour  $d = 5$ , le filtre  $a(\lambda_1, \dots, \lambda_5) = |5 - (\cos(\lambda_1) + \dots + \cos(\lambda_5))|^{-1}$  appartient à  $L^2([-\pi, \pi]^5)$  et induit de la longue mémoire isotrope. Ce filtrage correspond à la représentation autoregressive

$$X_{n_1, \dots, n_5} - \frac{1}{5}(X_{n_1-1, n_2, \dots, n_5} + X_{n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5} + \dots + X_{n_1, \dots, n_4, n_5-1}) = \varepsilon_{n_1, \dots, n_5}.$$

### 1.2.3 L'agrégation de champs à courte mémoire

Lorsque  $d = 1$ , l'agrégation de séries temporelles autorégressives à paramètres aléatoires a été introduite par Robinson [95] et étudiée plus profondément par Granger [50] (voir aussi [89] et [116]). Ces auteurs ont montré que l'agrégation de processus autorégressifs pouvait produire un processus à longue mémoire. Ce point de vue est célèbre en économétrique car il justifie l'observation de phénomènes à longue mémoire dans des séries macro-économiques, alors que les dynamiques micro-économiques sont à courte mémoire.

La même idée peut être développée pour les champs. Soit une suite  $(Y^{(q)})_{q \geq 1}$  de copies indépendantes du champ autorégressif

$$P(L_1, \dots, L_d)Y_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d}, \quad (1.2.8)$$

où  $P$  est un polynôme à coefficients aléatoires,  $L_i$  correspond à l'opérateur retard appliqué au  $i$ -ème indice, et  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  est un bruit blanc centré de variance  $\sigma^2$ . La représentation (1.2.8) admet une solution stationnaire dans  $L^2$  si et seulement si

$$\mathbb{E} \int_{[-\pi, \pi]^d} |P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^{-2} d\lambda_1 \dots d\lambda_d < \infty. \quad (1.2.9)$$

Cette solution admet alors la densité spectrale

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \mathbb{E} |P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^{-2}. \quad (1.2.10)$$

Le champ agrégé  $X$  est défini par

$$X_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^N Y_n^{(q)}, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Ce champ existe bien d'après le théorème limite central, il est gaussien et admet la même densité spectrale (1.2.10) que les  $Y^{(q)}$ . Le champ agrégé est donc à longue mémoire dès que la loi des coefficients de  $P$  est telle que  $\mathbb{E} |P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^{-2}$  est non-borné.

La difficulté de cette construction est d'une part de proposer des lois possibles sur les coefficients du polynôme  $P$  garantissant (1.2.9), d'autre part d'obtenir le comportement précis de la densité spectrale (1.2.10) afin de pouvoir l'exploiter d'un point de vue statistique.

*Exemple 1.4.* Lorsque  $d = 1$ , le choix le plus simple  $P(L) = 1 - aL$  est étudié dans [95] et [50]. Le processus agrégé est à longue mémoire lorsque la loi de  $a$  admet une densité de probabilité sur  $[0, 1]$  de la forme  $\Phi(x)(1 - x)^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $\Phi$  est borné, continu en  $x = 1$  avec  $\Phi(1) \neq 0$ . Dans ce cas, la densité spectrale de  $X$  est équivalente en l'origine à  $c|\lambda|^{\alpha-1}$ ,  $c > 0$ . Ces résultats se déduisent de l'étude générale effectuée dans [89] pour  $d = 1$ .

Lorsque  $d = 2$ , une plus grande variété de dynamiques autorégressives à agréger peut être considérée.

*Exemple 1.5.* En choisissant  $P(L_1, L_2) = (1 - aL_1)(1 - bL_2)$ , où  $a$  (resp.  $b$ ) admet une densité sur  $[0, 1]$  de la forme  $\Phi_1(x)(1 - x)^\alpha$  (resp.  $\Phi_2(x)(1 - x)^\beta$ ) où  $0 < \alpha, \beta < 1$  et  $\Phi_1, \Phi_2$  sont bornés, continus en  $x = 1$  avec  $\Phi_1(1)\Phi_2(1) \neq 0$ , on obtient un champ agrégé de densité spectrale  $f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c|\lambda_1|^{\alpha_1-1}|\lambda_2|^{\alpha_2-1}$ ,  $c > 0$ , en l'origine. Ce résultat se déduit des propriétés établies pour  $d = 1$  dans [89].

*Exemple 1.6.* En choisissant  $P(L_1, L_2) = (1 - aL_1^k L_2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , où  $a$  est à densité de probabilité comme dans l'exemple 1.4, on déduit également de [89] que la densité spectrale de  $Z$  se comporte en  $c|\lambda_2 + k\lambda_1|^{\alpha-1}$  à l'origine.

*Exemple 1.7.* La construction de champs à longue mémoire isotrope par agrégation nécessite une étude plus approfondie. En considérant  $P(L_1, L_2) = 4 - a(L_1 + L_1^{-1} + L_2 + L_2^{-1})$ , où  $a$  suit la même loi que ci-dessus, on obtient un champ agrégé de densité spectrale  $f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{\alpha-1}$ ,  $c > 0$ , en l'origine. Ce résultat est établi dans [Lav5].

Une étude systématique de l'agrégation de champs autorégressifs aux plus proches voisins fait l'objet d'un projet de recherche en cours avec R. Leipus et D. Surgailis.

#### 1.2.4 Champs de Gibbs sur un réseau

Les champs de Gibbs sur  $\mathbb{Z}^d$  modélisent l'état d'un système de particules positionnées sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$ . L'état de chaque particule est caractérisé par un ensemble de valeurs. La modélisation du système s'effectue au niveau microscopique : elle explique l'état moyen de chaque particule ainsi que l'interaction entre particules voisines. Une présentation détaillée est donnée dans [42] et [52].

Il existe un lien étroit entre l'instabilité d'un système ainsi modélisé et la présence de longue mémoire. L'instabilité d'un champ de Gibbs est généralement caractérisée par la transition de phase. Donnons deux exemples, détaillés dans [Lav15].

Le modèle d'Ising modélise l'état magnétique d'un système. Il dépend de la température extérieure. A partir de la dimension  $d = 2$ , il existe une température critique en dessous de laquelle il y a transition de phase entre l'état ferromagnétique et l'état paramagnétique du système. On peut montrer qu'en cette température critique, le champ de Gibbs est à longue mémoire isotrope (cf [63] et [38]).

Dans les modèles à interactions quadratiques, étudiés dans [30] et [66], le champ résultant est gaussien. On peut montrer qu'il y a équivalence entre l'apparition de la transition de phase dans ces modèles et la présence de longue mémoire dans le champ gaussien associé. Selon le choix des interactions, la longue mémoire peut être isotrope ou anisotrope.

### 1.3 Simulations

#### 1.3.1 Simulation du brownien fractionnaire multivarié

La technique de simulation est décrite dans [Lav7]. La démarche consiste à simuler le processus multivarié stationnaire formé par les accroissements  $\Delta X$  du mfBm (cf 1.1.3)

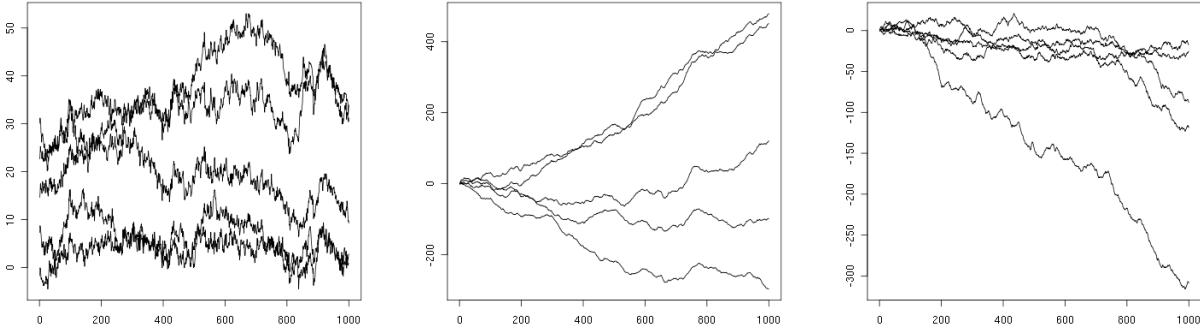


FIGURE 1.2 – Exemples de trajectoires de taille  $n = 1000$  d'un  $p$ -mfBm pour  $p = 5$  (les trajectoires de gauche ont été décentrées).

puis de l'intégrer. Les accroissements sont simulés en s'inspirant de la méthode de Wood and Chan [114] qui consiste à plonger la matrice de covariance de  $\Delta X$  dans une matrice circulaire par blocs.

Des simulations d'un  $p$ -mfBm pour  $p = 5$  sont présentées dans la figure 1.2. Les paramètres de Hurst sont répartis de façon uniforme dans  $[0.3, 0.4]$  pour le graphique de gauche, dans  $[0.8, 0.9]$  pour celui du centre et dans  $[0.4, 0.8]$  pour celui de droite. Pour tout  $i, j$ ,  $\rho_{i,j} = 0.6$  (à gauche et au milieu),  $\rho_{i,j} = 0.3$  (à droite) et  $\eta_{i,j} = 0.15 \times (1 - H_i - H_j)$  ce qui garantit l'existence du  $p$ -mfBm selon la proposition 1.2.

### 1.3.2 Simulation de champs à longue mémoire

Différentes techniques de simulation peuvent être envisagées. En dimension  $d = 1$ , on pourra se référer à [11] pour une présentation et une comparaison des principales méthodes existantes.

En dimension supérieure, les champs peuvent être simulées en théorie par des techniques similaires. Par exemple, partant d'un champ i.i.d. on peut le filtrer comme en (1.2.5) et tronquer la représentation linéaire. Dans le cas des champs gaussiens, on peut utiliser la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance, ou de façon plus efficace plonger cette dernière dans une matrice circulaire. On peut également s'appuyer sur l'agrégation d'un grand nombre de champs à courte mémoire, comme dans la partie 1.2.3. La méthode spectrale est également envisageable (voir ci-dessous). Des techniques plus spécifiques au cadre des champs ont enfin été développées, comme la méthode des bandes tournantes, cf [69].

La technique basée sur une matrice circulaire et le filtrage tronqué semblent être les méthodes les plus populaires pour simuler des séries temporelles à longue mémoire ( $d = 1$ ). Mais lorsque  $d > 1$ , le coût algorithmique associé à ces méthodes devient très important. La méthode spectrale ne souffre pas de ce défaut tout en fournissant des résultats convaincants. C'est la méthode retenue dans [Lav13]. Son principe est le suivant (voir [69]). Pour simuler un champ gaussien en dimension  $d = 2$  de densité spectrale  $f$  :

1. Générer  $N$  réalisations indépendantes  $(Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}), \dots, (Z_1^{(N)}, Z_2^{(N)})$  sur  $[-\pi, \pi]^2$  selon la loi ayant pour densité la densité spectrale  $f$  (renormalisée pour être d'intégrale 1) ;
2. Générer  $N$  réalisations indépendantes  $U_1, \dots, U_N$  selon une loi uniforme sur  $[0, 1]$  ;
3. Calculer, pour tout  $(i, j)$ ,  $X_{i,j} = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k=1}^N \cos(Z_1^{(k)} i + Z_2^{(k)} j + 2\pi U_k)$ .

D'après le théorème limite central, pour  $N$  suffisamment grand,  $X$  est approximativement gaussien de densité spectrale  $f$ .

La figure 1.3 contient des exemples de champs aléatoires gaussiens simulés par la méthode spectrale. Les trois réalisations du haut sont de densité spectrale  $f(\lambda_1, \lambda_2) \sim (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-\alpha/2}$  en l'origine avec respectivement  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 1.5$ . Les réalisations du bas sont à longue mémoire anisotrope. Les deux premières sont de densité spectrale  $f(\lambda_1, \lambda_2) \sim |\lambda_1|^{-\alpha} |\lambda_2|^{-\alpha}$  avec respectivement  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 0.75$ ; celle en bas à droite est de densité spectrale  $f(\lambda_1, \lambda_2) \sim |\lambda_1 - \lambda_2|^{-0.5}$  en l'origine.

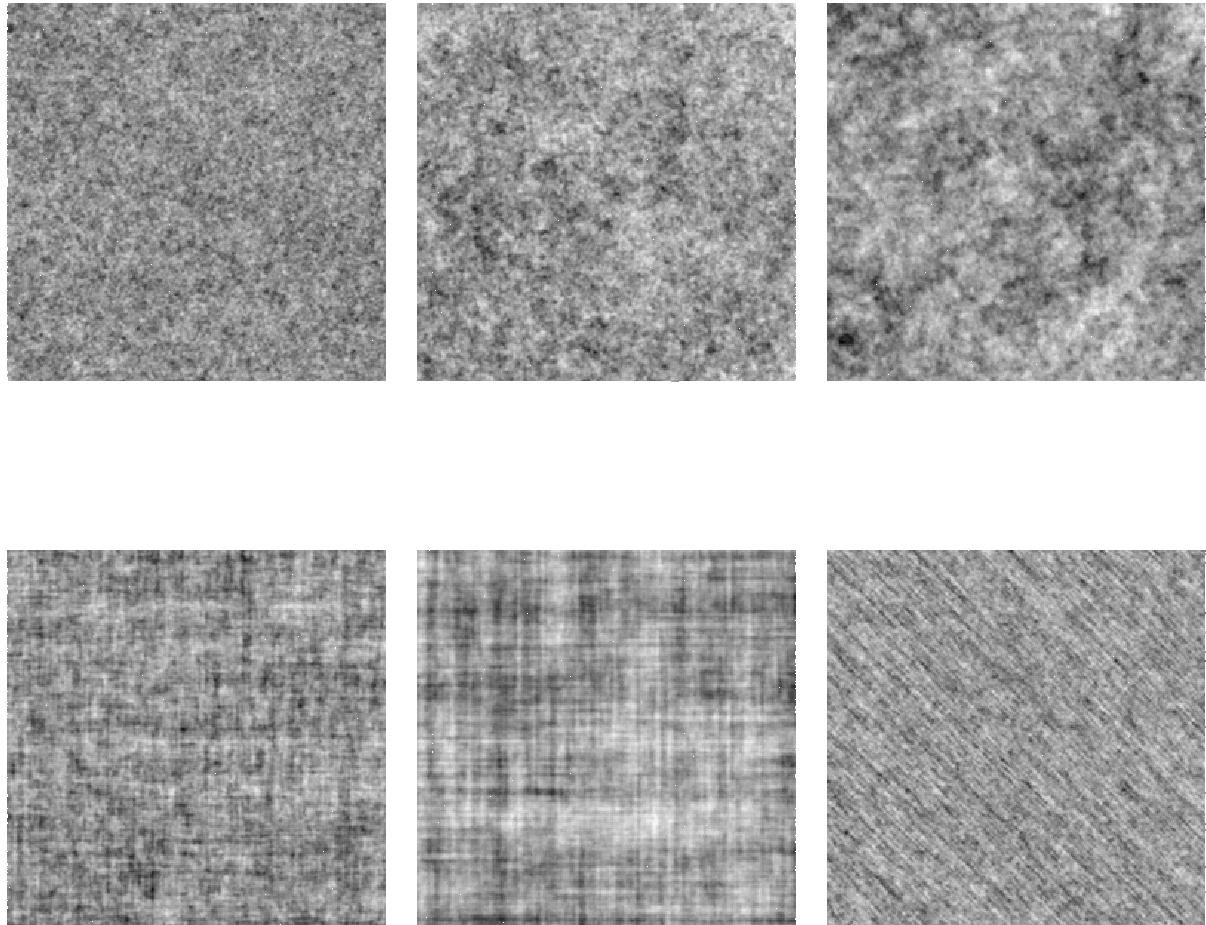


FIGURE 1.3 – Exemples de champs gaussiens à longue mémoire : isotrope (haut), anisotrope (bas)

# Chapitre 2

## Theorèmes limite en présence de longue mémoire

### 2.1 Sommes partielles

#### 2.1.1 Sommes partielles d'un champ à longue mémoire

Le comportement en loi des sommes partielles est au coeur de nombreuses applications statistiques. C'est notamment lui qui dirige la loi du processus empirique en présence de longue mémoire (voir la partie 2.2). C'est également sur le comportement des sommes partielles que reposent la plupart des procédures de tests statistiques pour détecter la longue mémoire (voir le chapitre suivant).

L'étude de la loi asymptotique des sommes partielles d'un champ à longue mémoire a débuté par les travaux de R. L. Dobrushin et P. Major publiés en 1979 [31], parallèlement à ceux de M. Taqqu [107]. Ces auteurs supposent que le champ est fonction de champs gaussiens et que sa longue mémoire est isotrope. Leurs résultats établissent que le théorème limite central n'a généralement plus lieu en présence de longue mémoire. La normalisation n'est plus dans ce cas  $n^{d/2}$  et le processus limite n'est plus nécessairement gaussien ni à accroissements indépendants. Ces travaux ont été généralisés au cas de champs à longue mémoire isotrope pouvant s'écrire comme une fonction de champs linéaires (non nécessairement gaussiens) par D. Surgailis en 1982 [101], dont le résultat a été affiné par F. Avram et M. Taqqu dans [6]. Dans [Lav14], une généralisation vers les champs à longue mémoire anisotrope est considérée. Nous en déduisons en particulier le résultat présenté dans le théorème suivant pour  $d = 2$ .

**Théorème 2.1** ([Lav14]). *Soit  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$  le champ linéaire défini par*

$$X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} a_j \varepsilon_{k-j},$$

*où le filtre associé  $a(\lambda) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} a_j e^{i \langle j, \lambda \rangle}$  est dans  $L^2([-\pi, \pi]^2)$ . Si  $a$  est équivalent en*

0 à une fonction homogène  $\tilde{a}$  de degré  $\alpha \in ]-1; 0[$ , i.e.  $\forall \lambda \tilde{a}(\lambda x) = |\lambda|^\alpha \tilde{a}(x)$ , alors

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \sum_{k_2=0}^{[nt_2]} X_{k_1, k_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{a}(x_1, x_2) \prod_{j=1}^2 \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_0(x_1, x_2), \quad (2.1.1)$$

où  $W_0$  est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien

Dans le théorème précédent, le degré d'homogénéité est négatif, ce qui implique que le champ  $X$  est à longue mémoire. Sa densité spectrale est en effet proportionnelle à  $|a(\lambda)|^2$  qui est non bornée. De plus sa longue mémoire peut-être isotrope ou anisotrope selon la forme de  $\tilde{a}$ . Ce théorème confirme le comportement atypique des sommes partielles en présence de longue mémoire, même si cette dernière n'a lieu que dans une seule direction du plan.

Le théorème 2.1 est généralisé dans [Lav14] au cas  $d$  quelconque et au cas où le processus  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  n'est plus i.i.d. mais suit un théorème limite central. La preuve de ce résultat repose sur un théorème de convergence des mesures spectrales établi dans [Lav14]. Elle est inspirée d'un résultat similaire prouvé en dimension  $d = 1$  dans [109] et [68].

Les résultats de convergence des sommes partielles d'un champ à longue mémoire présentés dans [31], [101] et [Lav14] ont été établis au sens des lois fini-dimensionnelles. Pour rendre cette convergence valide dans l'espace fonctionnel de Skorohod  $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ , il est nécessaire d'étudier l'équivalence des sommes partielles. Lorsque  $d = 1$ , un critère est proposé par M. Taqqu dans [106]. Ce problème est abordé pour  $d > 1$  dans [Lav15] et [Lav16] où un critère pratique d'équivalence est déduit d'un résultat général établi par P.J. Bickel et M. J. Wichura dans [15]. Ce critère s'applique aux sommes partielles en présence de longue mémoire isotrope ou anisotrope comme ci-dessus et permet d'étendre les convergences dans  $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ .

### 2.1.2 Le Brownien fractionnaire multivarié comme limite de sommes partielles

Dans le théorème 2.1, on remarque que dans le cas particulier  $\tilde{a}(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1|^{-\alpha_1} |\lambda_2|^{-\alpha_2}$ ,  $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1/2$ , la limite correspond au drap Brownien fractionnaire, qui apparaît sous forme de sa représentation harmonisable. Cela généralise un résultat bien connu en dimension  $d = 1$  qui présente le mouvement Brownien fractionnaire comme limite de certaines sommes partielles (voir par exemple l'étude de Y. Davydov dans [25]). De même, le mouvement Brownien fractionnaire multivarié, défini dans la partie 1.1.2, peut être vu comme limite en loi d'un vecteur de sommes partielles de processus superlinéaires. C'est ce que nous avons montré dans [Lav7] et qui est résumé ci-dessous.

Soit  $(\varepsilon_j(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $p$  suites i.i.d. indépendantes, de moyenne nulle et de variance unité. Soit les processus superlinéaires suivants :

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^p \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{i,j}(t-k) \varepsilon_j(k), \quad i = 1, \dots, p, \quad (2.1.2)$$

où  $\psi_{i,j}(k)$  sont des coefficients réels avec  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{i,j}^2(k) < \infty$ .

De plus, nous supposons que  $\psi_{i,j}(k) = \psi_{i,j}^+(k) + \psi_{i,j}^-(k)$  où  $\psi_{i,j}^+(k)$  satisfait l'une des conditions suivantes :

$$(i) \quad \psi_{i,j}^+(k) = (\alpha_{i,j}^+ + o(1)) k_+^{d_{i,j}^+-1} \text{ lorsque } |k| \rightarrow \infty, \text{ avec } 0 < d_{i,j}^+ < \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_{i,j}^+ \neq 0,$$

$$(ii) \quad \psi_{i,j}^+(k) = (\alpha_{i,j}^+ + o(1)) k_+^{d_{i,j}^+-1} \text{ lorsque } |k| \rightarrow \infty, \text{ avec } -\frac{1}{2} < d_{i,j}^+ < 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{i,j}^+(k) = 0 \text{ et } \alpha_{i,j}^+ \neq 0,$$

$$(iii) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_{i,j}^+(k)| < \infty \text{ et on pose } \alpha_{i,j}^+ := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{i,j}^+(k) \neq 0, d_{i,j}^+ := 0.$$

De même,  $\psi_{i,j}^-(k)$  est supposé suivre la condition (i), (ii) ou (iii) où  $k_+$ ,  $d_{i,j}^+$  et  $\alpha_{i,j}^+$  sont remplacés par  $k_-$ ,  $d_{i,j}^-$  et  $\alpha_{i,j}^-$ .

**Proposition 2.1.** *Soit  $d_i = \max(d_{i1}^+, d_{i1}^-, \dots, d_{ip}^+, d_{ip}^-)$ , pour  $i = 1, \dots, p$ . Soit le vecteur de sommes partielles, pour  $\tau \in \mathbb{R}$ ,*

$$S_n(\tau) = \left( n^{-d_1-(1/2)} \sum_{t=1}^{[n\tau]} X_1(t), \dots, n^{-d_p-(1/2)} \sum_{t=1}^{[n\tau]} X_p(t) \right).$$

*Alors les loi fini-dimensionnelles de  $(S_n(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}}$  convergent vers celles d'un p-mfBm.*

La démonstration de ce résultat utilise la technique des intégrales discrètes stochastiques développées par D. Surgailis [102]. Il est également possible, sous certaines conditions, de montrer un résultat d'équivalence de  $S_n(\cdot)$  qui permet d'étendre la convergence précédente à  $\mathcal{D}([0, 1])$ .

## 2.2 Processus empirique

Nous nous intéressons au comportement en loi du processus empirique d'un champ stationnaire  $X$  à longue mémoire, défini pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $(t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d$  par

$$\sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} (\mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}} - F(x))$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $X_1$  et  $j := (j_1, \dots, j_d)$ . Connaître la loi limite du processus empirique permet d'obtenir facilement le comportement asymptotique de nombreuses statistiques comme les statistiques de Von Mises et les U-statistiques.

Lorsque le champ  $X$  est fonction d'un champ gaussien, un principe de réduction uniforme est établi dans [Lav15] et [Lav16], inspiré d'un résultat similaire dû à H. Dehling et M. Taqqu [26]. Ce principe permet de majorer uniformément la différence entre le processus empirique et son premier terme dans le développement sur une base de Hermite. Dans de nombreux cas, ce premier terme n'est rien d'autre que les sommes partielles de  $X$  et la différence tend uniformément vers 0. Ainsi, dans ce cas, le comportement en

loi du processus empirique se déduit de celui des sommes partielles établi dans la partie précédente.

Nous donnons un exemple typique ci-dessous. Des résultats faisant intervenir d'autres types de longue mémoire sont présentés dans [Lav15].

**Théorème 2.2** ([Lav15]). *Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  une suite i.i.d. gaussienne. On considère le champ linéaire*

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k},$$

où les  $(a_k)$  sont, à une constante normalisatrice près garantissant  $\text{Var}(X_1) = 1$ , les coefficients de Fourier du filtre

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^d |\lambda_j|^{\alpha_j}, \quad (2.2.1)$$

où, pour tout  $j$ ,  $-1/2 < \alpha_j < 0$ .

Alors, en notant  $F$  la fonction de répartition de  $X_1$ ,

$$\frac{1}{n^{d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} (\mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}} - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)} J_1(x) B(t),$$

où

$$J_1(x) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_1 \leq x\}} X_1],$$

et où  $B(t)$  correspond au drap Brownien fractionnaire de paramètres  $H_k = 1/2 - \alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, d$  (voir la partie 1.2.1). La convergence a lieu dans  $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)$  muni de la topologie uniforme et de la tribu engendrée par les boules ouvertes.

Le résultat précédent est caractéristique du comportement dégénéré du processus empirique en présence de longue mémoire. A  $t$  fixé, la limite n'est pas un processus aléatoire classique indexé par  $x$  (comme l'est le pont Brownien que l'on rencontre en situation de courte mémoire) mais une variable aléatoire multipliée par une fonction déterministe  $J_1(x)$ .

## 2.3 Formes quadratiques

### 2.3.1 Résultats généraux

On considère la forme quadratique  $Q_n$  associée au champ stationnaire  $X$  et à une suite sommable  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}^d}$  définie par

$$Q_n = \frac{1}{n^d} \sum_{i \in A_n} \sum_{j \in A_n} g_{i-j} X_i X_j \quad (2.3.1)$$

où  $A_n = \{1, \dots, n\}^d$ . Ce type de formes quadratiques englobe certaines statistiques comme la fonction de covariance d'un champ centré, mais est aussi au cœur de l'étude de la loi asymptotique de l'estimateur de Whittle des paramètres de longue mémoire d'un champ.

L'étude de la loi limite de  $Q_n$  a fait l'objet de nombreux travaux lorsque  $d = 1$  ([39], [40], [5], [48], [108], [49], [46]). Elle dépend du type de champ considéré et de la suite  $(g_i)$ . En supposant que  $X$  est gaussien de densité spectrale  $f$  et en notant  $g$  la série de Fourier associée à  $(g_i)$ , deux situations typiques se distinguent que nous pouvons résumer ainsi (pour  $d = 1$ ) :

$$\text{Si } f(x) \sim |x|^{2\alpha} \text{ et } g(x) \sim |x|^{2\beta} \text{ quand } x \rightarrow 0 \quad (\alpha, \beta > -1/2),$$

alors

- si  $\alpha + \beta > -\frac{1}{4}$ , la loi limite de  $n^{-1/2}Q_n$  est gaussienne,
- si  $\alpha + \beta < -\frac{1}{4}$ , la loi limite de  $n^{2(\alpha+\beta)}Q_n$  n'est pas gaussienne (ni dégénérée).

Ainsi, si la longue mémoire de  $X$  n'est pas trop forte ou si une compensation intervient entre  $f$  et  $g$ , alors  $Q_n$  suit un théorème limite central. Dans le cas contraire, la convergence en loi de  $Q_n$  a lieu avec une normalisation non standard et la limite n'est plus gaussienne.

Dans le cas  $d > 1$ , une telle dichotomie n'est plus aussi simple à énoncer, à cause des multiples singularités possibles de  $f$  en l'origine (isotrope ou anisotrope par exemple). Ce problème est étudié dans [55], [32], [45] et [18]. Ces travaux établissent principalement un théorème limite central pour  $Q_n$  dans des situations spécifiques : si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2$ ; ou si  $X$  est à longue mémoire isotrope ou à longue mémoire de type produit (comme le sont les accroissements du drap Brownien fractionnaire) et  $g$  suit des conditions précises. Ces résultats ont été appliqués pour l'étude de l'estimateur de Whittle dans [55], [74] et [18].

La situation où  $Q_n$  ne suit plus un théorème limite central a été très peu explorée en dimension  $d > 1$ , mis à part un cas particulier traité dans [32]. Dans [Lav8], en collaboration avec Anne Philippe, nous nous intéressons à ce problème dans le cas où  $X$  est gaussien. Nous proposons une condition quasiment optimale sous laquelle la loi  $Q_n$  n'est plus asymptotiquement gaussienne.

**Théorème 2.3** ([Lav8]). *Soit  $X$  un champ linéaire gaussien centré défini au travers d'un filtre  $a$  suivant la représentation (1.2.5). Soit  $Q_n$  défini par (2.3.1) et  $g$  la série de Fourier associée à la suite  $(g_i)$ .*

*On suppose que pour tout  $x \in [-\pi, \pi]^d$ ,  $a(-x) = \overline{a(x)}$ ,  $g(-x) = \overline{g(x)}$  et que*

$$\begin{cases} a(x) = \tilde{a}(x)L_1(x), \\ g(x) = \tilde{g}(x)L_2(x), \end{cases}$$

*où  $\tilde{a}$  est homogène de degré  $\alpha$ ,  $\tilde{g}$  est homogène de degré  $2\beta$  et où  $L_1$  et  $L_2$  sont des fonctions bornées, continues en 0 avec  $L_i(0) \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ).*

Si la condition **(H)** suivante est vérifiée

$$\text{(H)} : \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \tilde{a}^2(x) \tilde{a}^2(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{g}(t)| \prod_{k=1}^d \frac{1}{(1+|x_k+t_k|)(1+|y_k-t_k|)} dt \right]^2 dx dy < \infty,$$

alors

$$\begin{aligned} n^{d+2\alpha+2\beta} (Q_n - E(Q_n)) &\xrightarrow{L^2} \\ L_1^2(0)L_2(0) \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \tilde{a}(x) \tilde{a}(y) \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}(t) H(x+t) H(y-t) dt dW_0(x) dW_0(y), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

où  $H(z) = \prod_{j=1}^d \frac{e^{iz_j}-1}{iz_j}$  et  $W_0$  est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

La condition **(H)** est quasiment nécessaire pour que la convergence (2.3.2) ait lieu car elle garantit l'existence de l'intégrale dans (2.3.2). Pour des fonctions  $a$  et  $g$  données, elle peut se vérifier assez facilement en utilisant les théorèmes "power counting" établis par N. Terrin et M. Taqqu dans [108]. On peut montrer qu'elle est vérifiée dans toutes les situations "hors théorème limite central" étudiées en dimension  $d = 1$ . Elle permet de plus d'intégrer des situations originales en dimension  $d > 1$ . Elle est par exemple vérifiée dans le cas suivant (voir [Lav8]) :

$$\begin{cases} |\tilde{a}(x)| \leq c \prod_{i=1}^d |x_i|^{\alpha/d} \\ |\tilde{g}(x)| \leq c' \prod_{i=1}^d |x_i|^{2\beta/d}, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

avec  $c > 0$ ,  $c' > 0$  et où  $\alpha > -d/2$ ,  $\beta > -d/2$ ,  $\alpha + \beta < -d/4$ . Cet exemple permet de considérer un champ  $X$  à longue mémoire isotrope et certaines situations de longue mémoire anisotrope.

La preuve du théorème 2.3 repose sur une technique différente des études effectuées au préalable. L'idée est de réécrire  $Q_n$  sous forme d'une double intégrale stochastique par rapport à  $W_0$  suivant la construction et la formule d'Ito établies dans [77]. Le résultat se déduit alors d'une simple convergence dans  $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ .

### 2.3.2 Application à la fonction de covariance

Le résultat précédent permet notamment d'établir la loi limite de la fonction de covariance d'un champ gaussien  $X$  de densité spectrale  $f$  :

$$\hat{r}(h) = \frac{1}{n^d} \sum_{i \in A_n} X_i X_{i+h}.$$

En dimension  $d = 1$ , le comportement asymptotique de  $\hat{r}(h)$  se décline selon que  $f \in L^2$  ou  $f \notin L^2$  (voir [57]). En dimension supérieure, le même type de dichotomie peut se déduire de la proposition suivante. Néanmoins, certains cas intermédiaires peuvent apparaître, comme cela sera illustré dans la proposition 2.3, lorsque le champ admet une seule direction de longue mémoire. Il est par ailleurs à noter que lorsque  $f \in L^2$ ,  $\hat{r}(h)$  admet le même comportement asymptotique que sa version recentrée où  $X_i$  est remplacé par  $X_i - \bar{X}_n$  (cf [Lav8]). Ce n'est plus le cas lorsque  $f \notin L^2$ .

**Proposition 2.2** ([Lav8]). *Soit  $X$  un champ linéaire gaussien vérifiant les hypothèses du théorème 2.3 avec*

$$|\tilde{a}(x)| \leq c \prod_{i=1}^d |x_i|^{\alpha/d} \quad (2.3.4)$$

où  $c > 0$ . Alors pour tout  $h \in \mathbb{Z}^d$ ,

- si  $\alpha > -d/4$ ,

$$n^{d/2}(\hat{r}(h) - r(h)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, 2(2\pi)^d \widehat{f}_{2h}^2\right), \quad (2.3.5)$$

où  $\widehat{f}_{2h}^2$  correspond au  $(2h)$ -ème coefficient de Fourier de  $f^2$ .

- si  $\alpha < -d/4$ ,

$$n^{d+2\alpha}(\hat{r}(h) - r(h)) \xrightarrow{\mathcal{L}} L_1^2(0) \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \tilde{a}(x)\tilde{a}(y)H(x+y)dW_0(x)dW_0(y). \quad (2.3.6)$$

La preuve du résultat précédent s'appuie sur un résultat de M. S. Ginovian [45] lorsque  $\alpha > -d/4$  et sur le théorème 2.3 lorsque lorsque  $\alpha < -d/4$ . La proposition précédente est cohérente avec la dichotomie observée en dimension  $d = 1$  selon que  $f \in L^2$  ou  $f \notin L^2$ . Cependant l'exemple suivant montre que pour  $d > 1$ ,  $\hat{r}(h)$  peut avoir une limite gaussienne même lorsque  $f \notin L^2$ .

**Proposition 2.3** ([Lav8]). *Soit  $X$  un champ gaussien stationnaire centré en dimension  $d = 2$  dont la densité spectrale s'écrit*

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(x_1 + px_2),$$

où  $p \in \mathbb{Z}$  et où  $\tilde{f}$ , définie sur  $[-\pi, \pi]$ , est une densité spectrale en dimension  $d = 1$ . On suppose de plus que pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $\tilde{f}(x) = L(x)|x|^{2\alpha}$  où  $-1/2 < \alpha < 0$  et où  $L$  est une fonction bornée, continue en 0 et non nulle en 0. Alors, lorsque  $\alpha < -1/4$  et  $h_2 \neq ph_1$ ,

$$n^{(4\alpha+3)/2}(\hat{r}(h_1, h_2) - r(h_1, h_2)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_{\alpha,p}^2\right), \quad (2.3.7)$$

où  $\sigma_{\alpha,p}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{4\alpha+3} \text{Var}(\hat{r}(h_1, h_2))$ .

Ce dernier résultat peut se montrer directement à l'aide d'un théorème limite central sur les tableaux triangulaires établi dans [97].

### 2.3.3 Perspectives

Le théorème 2.3 fournit des conditions quasiment minimales garantissant l'émergence du théorème limite "non-central" pour les formes quadratiques (2.3.1) d'un champ gaussien. Un résultat complémentaire, qui fournirait des conditions minimales pour un théorème limite central, n'est pas connu dans le cadre des champs. En dimension  $d = 1$ , des conditions suffisantes fines ont été montrées par Giraitis et Surgailis dans [48] et par

Ginovian et Sahakian dans [46]. Le même type de résultats peut certainement être étendu dans le cadre des champs. Par ailleurs, les travaux de Nualart, Ortiz-Latorre et Peccati (cf [88], [87]), fournissant des conditions minimales pour montrer un TLC pour des intégrales stochastiques, devraient pouvoir s'appliquer aux formes quadratiques (2.3.1). On peut espérer de cette approche inédite une amélioration des précédents résultats.

Des estimateurs des paramètres de longue mémoire d'un champ gaussien ont été étudiés dans [18], [4], [41], [112], [51], pour des modèles particuliers (à longue mémoire isotrope ou à longue mémoire de type produit tensoriel). Obtenir un TLC pour les formes quadratiques (2.3.1) sous des conditions minimales permettrait de valider l'estimateur de Whittle des paramètres de longue mémoire d'un champ gaussien pour une plus large classe de modèles.

# Chapitre 3

## Tests statistiques en présence de longue mémoire

### 3.1 Déetecter la longue mémoire dans un champ aléatoire

De nombreuses procédures de tests ont été proposées pour détecter la présence de longue mémoire dans une série temporelle stationnaire ( $d = 1$ ). Des tests d'adéquation à des familles de modèles paramétriques ont été développés (cf. [12], [96], [35], [20]). Mais la plupart des procédures proposées sont non paramétriques et se basent sur une estimation des variations des sommes partielles du processus. Citons le test  $R/S$  ([73]), le KPSS test ([65], [71]), le test  $V/S$  ([47]). De ces procédures, il apparaît que le test  $V/S$  est le plus puissant. Il est basé sur une estimation de la variance des sommes partielles du processus. Notons enfin qu'une autre procédure a été récemment introduite dans [103], basée sur les incrémentations des sommes partielles : elle s'avère plus robuste aux perturbations non stationnaires que les autres tout en gardant une puissance comparable au test  $V/S$ .

Dans [Lav13], le test  $V/S$  est généralisé au cadre des champs. L'objectif est de pouvoir détecter la présence de longue mémoire sans avoir à émettre d'hypothèses sur la forme de cette dernière (isotrope, anisotrope). Ceci est possible d'après les résultats observés dans la partie 2.1.1. Nous avons vu qu'en règle générale les sommes partielles d'un champ à longue mémoire convergent en loi avec une normalisation non standard. Cette observation justifie les hypothèses de test suivantes :

**H0 : Hypothèse de courte mémoire.**  $X$  est un champ aléatoire stationnaire du second ordre de fonction de covariance  $r$  tel que **CM1**, **CM2** et **CM3** ci-dessous sont vérifiées.

**CM1**

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |r(j)| < \infty \quad \text{et} \quad \sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j) > 0.$$

**CM2**

$$\frac{1}{\sigma n^{d/2}} \sum_{k \in A_n(t)} (X_k - E(X_0)) \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B_{\frac{1}{2}}(t),$$

où  $B_{\frac{1}{2}}$  est le drap brownien standard et  $A_n(t) = \mathbb{Z}^d \cap \prod_{i=1}^d (1, \lfloor (n-1)t_i \rfloor + 1)$ .

**CM3**

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{2d}} |c_4(i,j,k)| < \infty,$$

où  $c_4(i,j,k)$  représente les cumulants d'ordre 4 de  $X$ , c'est à dire, en notant  $\tilde{X}_i = X_i - E(X_i)$ ,  $c_4(i,j,k) = E[\tilde{X}_0 \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k] - r(i)r(k-j) - r(j)r(k-i) - r(k)r(j-i)$ .

**H1 : Hypothèse de longue mémoire.**  $X$  est un champ aléatoire stationnaire du second ordre tel que **LM1** et **LM2** ci-dessous sont vérifiées.

**LM1**

$$\frac{1}{n^\gamma L(n)} \sum_{k \in A_n(t)} (X_k - E(X_0)) \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y(t), \quad (3.1.1)$$

avec  $\gamma > d/2$ , où  $L$  est une fonction à variations lentes à l'infini et  $Y$  est un champ aléatoire non dégénéré.

**LM2**

$$Var \left( \sum_{k \in A_n(1)} X_k \right) = O(n^{2\gamma} L^2(n)). \quad (3.1.2)$$

Les hypothèses **CM1** et **CM2** sont naturelles dans un cadre de courte mémoire. L'hypothèse **CM3** est introduite pour des raisons techniques mais elle peut en réalité être allégée comme nous l'avons montré dans le travail ultérieur [Lav10]. Les hypothèses **LM1** et **LM2** proposées dans l'alternative reflètent le comportement de la plupart des champs à longue mémoire (voir la partie 2.1.1).

La statistique  $V/S$  utilisée pour tester **H0** contre **H1** est définie de la façon suivante. Soit  $S_{n,j}$  les sommes partielles calculées sur le quadrant de taille  $j$  :

$$S_{n,j} = \sum_{i \in A_j} (X_i - \bar{X}_n), \quad (3.1.3)$$

où  $\bar{X}_n = n^{-d} \sum_{j \in A_n} X_j$  et  $A_j = \{1, \dots, j\}^d$ . La statistique  $V/S$  est une estimation de la variance des sommes partielles renormalisées telles qu'elles apparaissent dans **CM2**, que l'on peut écrire de façon informelle

$$M_n = \frac{1}{\hat{s}_n^2} n^{-d} \widehat{Var}(S_{n,j}, j \in A_n) := \frac{V_n}{\hat{s}_n^2}, \quad (3.1.4)$$

où  $\hat{s}_n^2$  est un estimateur de  $\sigma^2$  et  $\widehat{Var}$  désigne la variance empirique. On a plus précisément :

$$M_n = \frac{n^{-2d}}{\hat{s}_n^2} \left[ \sum_{j \in A_n} S_{n,j}^2 - n^{-d} \left( \sum_{j \in A_n} S_{n,j} \right)^2 \right], \quad (3.1.5)$$

où

$$\hat{s}_n^2 = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \hat{r}(j), \quad (3.1.6)$$

avec  $B_q = \{-q, \dots, q\}^d$ ,  $q \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\hat{r}$  est la fonction de covariance empirique de  $X$  et  $\omega_{q,j}$  sont les poids de Bartlett,  $\omega_{q,j} = \prod_{i=1}^d (1 - \frac{|j_i|}{q+1})$ .

La consistance du test est garantie par la proposition suivante. Le paramètre  $q$  intervenant dans la définition de  $\hat{s}_n^2$  est noté  $q_n$  pour souligner sa dépendance en  $n$ .

**Proposition 3.1.** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n = 0$ , alors,

(i) Sous **H0**,

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} M, \quad (3.1.7)$$

où  $M$  peut s'écrire explicitement en fonction du drap brownien  $B$ .

(ii) Sous **H1**,

$$M_n \xrightarrow{P} \infty. \quad (3.1.8)$$

L'implémentation pratique du test nécessite de connaître les quantiles de la loi limite de  $M_n$  sous **H0** : ils s'obtiennent assez facilement par simulation. Par ailleurs, il est nécessaire de choisir le paramètre  $q$  pour une taille d'échantillon  $n$  donnée. Le choix optimal de  $q$  (garantissant un niveau du test satisfaisant) est délicat. Il ne dépend pas que de  $n$  mais aussi de la structure de dépendance du champ sous **H0**. Ce problème sera abordé plus en détail dans la partie suivante où un choix adaptatif de  $q$  est proposé dans un contexte légèrement différent.

Dans [Lav13], des simulations effectuées sur des champs à courte mémoire de taille  $128 \times 128$  puis  $256 \times 256$  confirment le bon niveau du test. Quant à sa puissance, elle dépend de l'anisotropie de la longue mémoire. Le test est plus puissant en présence de longue mémoire de type produit, la puissance se dégrade en présence de longue mémoire isotrope et peut devenir médiocre lorsque le champ est à longue mémoire le long d'une seule direction diagonale. Ces effets semblent dus au choix des quadrants à partir desquelles les sommes partielles  $S_{n,j}$  sont calculées. Pour optimiser la puissance du test en pratique, il est donc recommandé d'évaluer au préalable le type d'anisotropie afin de modifier la définition de ces quadrants.

## 3.2 Comparaison des paramètres de longue mémoire

On suppose dans cette partie que l'on dispose de deux séries temporelles stationnaires  $X_1$  et  $X_2$  à longue mémoire ( $d = 1$  dans toute cette partie). On note  $d_1$  (resp.  $d_2$ ) le paramètre de longue mémoire de  $X_1$  (resp.  $X_2$ ), dont la définition précise provient de la

normalisation nécessaire à la convergence en loi des sommes partielles (voir ci-dessous). On désire tester **H0** :  $d_1 = d_2$ , en autorisant une corrélation entre les deux séries  $X_1$  et  $X_2$ . Ce problème fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec Anne Philippe et Donatas Surgailis [Lav10].

### 3.2.1 Présentation et consistance d'un test unilatéral

En accord avec la démarche appliquée dans la partie précédente pour détecter la longue mémoire, l'idée est ici de comparer les statistiques  $V/S$  associées aux deux séries. La statistique de test proposée est la suivante :

$$T_n = \frac{V_{n,1}/\hat{s}_{n,1}^2}{V_{n,2}/\hat{s}_{n,2}^2} + \frac{V_{n,2}/\hat{s}_{n,2}^2}{V_{n,1}/\hat{s}_{n,1}^2}, \quad (3.2.1)$$

où  $V_{n,1}$  et  $\hat{s}_{n,1}^2$  (resp.  $V_{n,2}$  et  $\hat{s}_{n,2}^2$ ) sont définies comme dans (3.1.4) associés à la série  $X_1$  (resp.  $X_2$ ).

En supposant que les sommes partielles de  $(X_1, X_2)$  convergent en loi vers un mouvement brownien fractionnaire bivarié comme dans la proposition 2.1, on en déduit facilement que

$$\left( (q/n)^{2d_1} V_{n,1}/\hat{s}_{n,1}^2, (q/n)^{2d_2} V_{n,2}/\hat{s}_{n,2}^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (U_1, U_2)$$

où  $U_1$  et  $U_2$  peuvent être exprimées explicitement en fonction d'un mouvement brownien fractionnaire bivarié. Ainsi, si  $d_1 = d_2$ ,

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U_1/U_2 + U_2/U_1.$$

La démarche précédente souffre néanmoins d'un défaut. Si  $X_1$  et  $X_2$  sont corrélés, alors leurs sommes partielles le sont aussi,  $U_1$  n'est pas indépendant de  $U_2$ , et la loi limite de  $T_n$  dépend de cette corrélation qu'il faudrait estimer en pratique. Pour éviter cette étape, nous proposons dans [Lav10] de considérer la statistique  $\tilde{T}_n$  qui correspond à  $T_n$  où  $X_1$  est remplacée par  $\tilde{X}_1$  défini par :

$$\tilde{X}_1(t) = X_1(t) - \frac{\hat{s}_{n,12}}{\hat{s}_{n,2}^2} X_2(t), \quad t = 1, \dots, n. \quad (3.2.2)$$

Dans la formule précédente,  $\hat{s}_{n,12} := \sum_{j=-q}^q (1 - \frac{|j|}{q+1}) \hat{r}_{12}(j)$ , où  $\hat{r}_{12}(j)$  est la fonction de covariance croisée entre  $X_1$  et  $X_2$ . Cette quantité estime la covariance asymptotique entre les sommes partielles normalisées de  $X_1$  et  $X_2$ .

L'intérêt de cette modification est de rendre les sommes partielles de  $\tilde{X}_1$  et  $X_2$  non corrélées, de telle sorte que la loi limite de  $T_n$  ne dépende plus d'un paramètre de corrélation inconnu.

Sous certaines conditions garantissant d'une part la consistance de  $\hat{s}_{n,1}^2$ ,  $\hat{s}_{n,2}^2$  et  $\hat{s}_{n,12}$ , d'autre part la convergence en loi jointe des sommes partielles de  $X_1$  et  $X_2$ , nous prouvons dans [Lav10] la consistance du test unilatéral :

- Si  $d_1 = d_2$ , lorsque  $n, q_n, n/q_n \rightarrow \infty$ ,

$$\tilde{T}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U_1/U_2 + U_2/U_1,$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont indépendantes, de même loi pouvant s'exprimer explicitement en fonction d'un mouvement brownien fractionnaire de paramètre  $d_1$ .

- Si  $d_1 > d_2$ , lorsque  $n, q_n, n/q_n \rightarrow \infty$ ,

$$\tilde{T}_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Nous montrons également que les conditions requises sont remplies par des séries  $X_1$  et  $X_2$  superlinéaires (au sens de la partie 2.1.2).

### 3.2.2 Calibration des paramètres

La région critique du test dépend du paramètre  $d_1 = d_2$  intervenant dans la loi limite sous **H0**. On l'estime par  $(\hat{d}_1 + \hat{d}_2)/2$  où  $\hat{d}_i$  est un estimateur consistant de  $d_i$ ,  $i = 1, 2$ . Outre cette étape, la difficulté majeure en pratique est le choix optimal du paramètre  $q$  pour garantir un bon niveau de test à  $n$  fixé. Ce choix dépend de  $n$  mais aussi fortement du paramètre de longue mémoire et de la partie courte mémoire des processus  $X_1$  et  $X_2$ .

Nous proposons dans [Lav10] un choix adaptatif qui repose sur la minimisation sous **H0** de l'erreur quadratique

$$\mathbb{E}\left(\frac{\hat{s}_{n,1}^2/\sigma_1^2}{\hat{s}_{n,2}^2/\sigma_2^2} - 1\right)^2,$$

où  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  sont les limites en probabilité de  $\hat{s}_{n,1}^2$ ,  $\hat{s}_{n,2}^2$  renormalisés de façon similaire sous **H0**. Cette quantité peut être approchée par un développement faisant intervenir  $q$ , obtenu à partir d'approximations établies dans [1]. La minimisation en  $q$  conduit alors au choix :

$$\hat{q} = 0.3|\hat{I}|^{1/2} \begin{cases} n^{1/(3+4\hat{d})}, & \text{si } \hat{d} < 1/4, \\ n^{1/2-\hat{d}}, & \text{si } \hat{d} > 1/4, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

où  $\hat{d} = (\hat{d}_1 + \hat{d}_2)/2$  est un estimateur de la longue mémoire (commune)  $d$ ,

$$\hat{I} = \int_0^\pi \left( \frac{\hat{g}_1(x)}{\hat{g}_1(0)} - \frac{\hat{g}_2(x)}{\hat{g}_2(0)} \right) \frac{dx}{x^{2\hat{d}} \sin^2(x/2)}, \quad (3.2.4)$$

avec  $\hat{g}_i$  un estimateur de la partie courte mémoire de la densité spectrale  $f_i$  de  $X_i$ ,  $i = 1, 2$  :  $g_i(x) = f_i(x)/|x|^{-2d_i}$ . Ce dernier estimateur peut être choisi comme la densité spectrale du meilleur processus autorégressif approchant  $(1 - L)^{\hat{d}_i} X_i$  au sens du critère BIC, suivant la démarche en deux étapes déjà employée dans [93].

Des simulations ont été effectuées dans [Lav10] lorsque  $X_1$  et  $X_2$  suivent des représentations FARIMA diverses et sont plus ou moins corrélées. Le niveau du test est respecté dans tous les cas, ce qui confirme l'importance du choix adaptatif de  $q$  dont les valeurs varient beaucoup selon les situations.

### 3.3 Test de rupture sur le paramètre de longue mémoire

L'objectif est ici de repérer un changement dans la valeur du paramètre de longue mémoire d'une série temporelle. Cette étude a été menée en collaboration avec A. Philippe, R. Leipus et D. Surgailis dans [Lav3]. Cette question est très liée à l'étude de la persistance dans les séries économiques, qui est un sujet majeur abordé en économétrie. La difficulté par rapport au problème de la partie précédente est que la comparaison du paramètre de longue mémoire se fait au sein d'une même série, ce qui complique l'étude théorique. Cette partie traite exclusivement de séries temporelles et la notation  $d$  fait ici référence au paramètre de longue mémoire et non à la dimension.

Afin de préciser les hypothèses et la statistique du test, nous introduisons les sommes partielles "forward" et "backward" de la série  $X$  :

$$S_k(X) = S_k := \sum_{j=1}^k X_j, \quad S_{n-k}^*(X) = S_{n-k}^* := \sum_{j=k+1}^n X_j.$$

On en déduit en particulier  $S_{n-k}^* = S_n - S_k$  et  $S_k = S_n^* - S_{n-k}^*$ .

Etant donné l'intervalle  $\mathcal{T} = [\theta_0, \theta_1] \subset (0, 1)$ , nous considérons la statistique de test suivante :

$$I_n(X) := \int_{\mathcal{T}} \frac{V_{n-[n\tau]}^*(X)}{V_{[n\tau]}(X)} d\tau, \quad (3.3.1)$$

où la statistique "forward"  $V_k$  est calculée à partir de  $X_1, \dots, X_k$  conformément à (3.1.4), tandis que son équivalent "backward"  $V_{n-k}^*$  est calculée à partir des  $(n - k)$  dernières valeurs par

$$\begin{aligned} V_{n-k}^*(X) &= \frac{1}{(n-k)^2} \left[ \sum_{j=k+1}^n \left( S_{n-j+1}^* - \frac{n-j+1}{n-k} S_{n-k}^* \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n-k} \left( \sum_{j=k+1}^n \left( S_{n-j+1}^* - \frac{n-j+1}{n-k} S_{n-k}^* \right) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse nulle (longue mémoire constante) est précisément la suivante.

**H0** : Il existe une normalisation  $A_n \rightarrow \infty$  telle que

$$A_n^{-1} S_{[n\tau]} \xrightarrow{\mathcal{D}[0,1]} Z(\tau), \quad (3.3.2)$$

où  $\{Z(\tau), \tau \in [0, 1]\}$  est un processus non-dégénéré, presque sûrement continu.

Cette hypothèse nulle est très générale. Elle ne se limite pas aux processus stationnaires et contient en particulier les processus linéaires intégrés d'ordre  $d > -.5$  (cf [Lav3]). Le processus limite  $Z$  correspond dans ce cas au brownien fractionnaire (pour  $-.5 < d < .5$ ) ou au brownien fractionnaire intégré (pour  $d > .5$ ).

Sous l'hypothèse alternative ci-dessous, les sommes partielles de  $X$  convergent en loi avec une normalisation plus faible en fin de série qu'en début de série. Ce phénomène est caractéristique d'une augmentation de la longue mémoire au cours du temps. Cette hypothèse est notamment vérifiée lors d'un changement de comportement  $I(d_1)$  à  $I(d_2)$  pour  $-.5 < d_1 < d_2$ , tel que peuvent l'exhiber les processus intégrés d'ordre fractionnaire variant dans le temps considérés dans [90].

**H1** : Il existe une normalisation  $A_n \rightarrow \infty$  telle que

$$(A_n^{-1}S_{[n\tau_1]}, A_n^{-1}S_{[n\tau_2]}^*) \xrightarrow{\mathcal{D}[0,\theta_1] \times \mathcal{D}[0,1-\theta_0]} (Z_1(\tau_1), Z_2(\tau_2)), \quad (3.3.3)$$

où  $Z_1(\tau) \equiv 0$ ,  $\tau \in [\theta_0, \theta_1]$  et  $\{Z_2(\tau), \tau \in [1 - \theta_1, 1 - \theta_0]\}$  est un processus non-dégénéré et presque sûrement continu.

Il est assez simple de montrer que sous **H0**,

$$I_n(X) \xrightarrow{\mathcal{L}} I := \int_{\tau \in \mathcal{T}} \frac{Q_{1-\tau}(Z^*)}{Q_\tau(Z)} d\tau,$$

où  $Z^*(u) := Z(1) - Z(1-u)$ ,  $u \in [0, 1]$ , et  $Q_\tau$  est la version continue de  $V_k(X)$  :

$$Q_\tau(Z) := \frac{1}{\tau^2} \left[ \int_0^\tau (Z(u) - \frac{u}{\tau} Z(\tau))^2 du - \frac{1}{\tau} \left( \int_0^\tau (Z(u) - \frac{u}{\tau} Z(\tau)) du \right)^2 \right].$$

Cette convergence permet de proposer la région critique suivante, pour une erreur de première espèce  $\alpha \in (0, 1)$  fixée,

$$RC = \{I_n(X) > q_I(1 - \alpha)\}$$

où  $q_I(1 - \alpha)$  désigne le quantile d'ordre  $(1 - \alpha)$  de  $I$ .

La consistance du test se déduit immédiatement de **H0** et **H1**, par application du théorème de continuité : on obtient sous l'alternative  $I_n(X) \rightarrow \infty$  en probabilité.

*Remarque 3.1.* D'autres fonctions continues du ratio  $\tau \mapsto \frac{V_{n-[n\tau]}^*(X)}{V_{[n\tau]}(X)}$  pourraient être envisagées comme statistiques de test au lieu de  $I_n$ . Dans [Lav3], nous avons comparé les performances de  $I_n$  avec  $W_n$  et  $R_n$  définis par

$$W_n(X) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \frac{V_{n-[n\tau]}^*(X)}{V_{[n\tau]}(X)}, \quad R_n(X) := \frac{\inf_{\tau \in \mathcal{T}} V_{n-[n\tau]}^*(X)}{\inf_{\tau \in \mathcal{T}} V_{[n\tau]}(X)}.$$

Les résultats de nos simulations montrent que la procédure basée sur  $I_n$  semble être la plus puissante. Il est enfin à noter que pour tester une décroissance du paramètre de longue mémoire, il suffit d'utiliser la statistique suivante

$$I'_n(X) := \int_{\mathcal{T}} \frac{V_{[n\tau]}(X)}{V_{n-[n\tau]}^*(X)} d\tau.$$



# Deuxième partie

## Processus ponctuels et géométrie aléatoire



# Chapitre 4

## Quelques modèles de processus ponctuels et de géométrie aléatoire

Un processus ponctuel sur  $\mathbb{R}^d$  modélise une répartition aléatoire de points dans l'espace. Dans le cas où ces points sont affectés d'une marque (une couleur, une valeur numérique, une forme géométrique, etc), on parle de processus ponctuel marqué. La définition mathématique précise sera donnée dans la partie 4.1. Une présentation complète pourra être trouvée dans les monographies [100], [24], [84], [60].

Le processus de Poisson homogène est le processus ponctuel le plus connu. Il modélise une répartition uniforme "complètement aléatoire" de points dans l'espace, au sens où le nombre de points dans deux sous-ensembles disjoints quelconques est indépendant et de même loi (une loi de Poisson de paramètre fixé). Le processus de Poisson inhomogène permet une intensité de points différente selon les régions de l'espace, mais conserve la propriété d'indépendance précédente.

De part ses propriétés d'indépendance, le processus de Poisson n'est pas réaliste pour la plupart des applications. D'autres modèles ont été introduits pour tenir compte de l'éventuelle attraction ou répulsion des points entre eux. Les processus de Cox en représentent une grande famille : ce sont des processus de Poisson dont l'intensité est elle-même une fonction aléatoire. Ces processus conduisent à la réalisation d'amas de points, et peuvent être donc vus comme une classe de processus attractifs. Les processus de Gibbs forment une autre famille de modèles de processus ponctuels. Ils permettent de spécifier l'interaction précise entre points voisins. Cette dernière peut être attractive ou répulsive.

Nous nous focaliserons plus particulièrement sur les processus de Gibbs, éventuellement marqués, que nous présentons dans la partie 4.1. L'application à des modèles de géométrie aléatoire sera présentée dans les parties 4.2 et 4.3. L'interaction dans ce cas repose sur des caractéristiques géométriques liées aux points et privilégie donc des géométries particulières. Nous présenterons enfin les processus ponctuels déterminantaux, qui génèrent de la répulsion entre les points. Nous verrons qu'ils forment une classe de modèles flexibles, facilement manipulables, qui peut être une alternative aux processus gibbsiens (répulsifs) parfois coûteux à simuler et à identifier en pratique.

## 4.1 Modèles de Gibbs

### 4.1.1 Définition

Nous notons  $\mathbb{S} := \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  l'espace d'état sur lequel seront définis les processus ponctuels marqués. L'espace  $\mathbb{M}$  sera typiquement celui associé aux marques, il est muni d'une tribu  $\mathcal{M}$  et d'une mesure de probabilité  $\lambda^m$ . L'espace  $\mathbb{R}^d$  est associé à la position des points. L'ensemble  $\mathbb{S}$  est mesuré par  $\mu := \lambda \otimes \lambda^m$ , où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue. Nous noterons  $x^m := (x, m)$  un élément de  $\mathbb{S}$ .

Une configuration de points marqués  $\varphi$  est un sous-ensemble localement fini de  $\mathbb{S}$ , plus précisément  $\varphi_\Lambda := \varphi \cap (\Lambda \times \mathbb{M})$  a un nombre fini d'éléments, noté  $|\varphi_\Lambda|$ , pour tout borélien borné  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ .

L'ensemble des configurations de points dans  $\mathbb{S}$  est noté  $\Omega$ , muni de la tribu  $\mathcal{F}$  générée par les variables de comptage  $\varphi \rightarrow |\varphi_{\Lambda \times \mathcal{A}}|$  pour tout borélien borné  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  et tout  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ .

Un processus ponctuel, de loi  $P$ , est défini comme une variable aléatoire  $\Phi$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Le processus de Poisson sur  $\mathbb{S}$ , de mesure d'intensité  $\nu \otimes \lambda^m$ , est noté  $\pi^\nu$ , tandis que  $\pi_\Lambda^\nu$  désigne sa restriction à un sous ensemble  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ . Le processus de Poisson standard est obtenu lorsque  $\nu = \lambda$ , il sera noté  $\pi := \pi^\lambda$ .

Les processus de Gibbs sont des modifications du processus de Poisson à l'aide d'un potentiel d'interaction  $V_\Lambda$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ , défini comme une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . D'un point de vue physique, ce potentiel quantifie l'énergie d'une configuration  $\varphi_\Lambda$  dans  $\Lambda$ , sa configuration à l'extérieur de  $\Lambda$  ayant été fixée. Anticipant les problèmes d'inférence qui seront traités dans le chapitre suivant, nous considérons une famille paramétrique de potentiels  $V_\Lambda(., \theta)$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}^p$ . La définition de la mesure de Gibbs associée, telle qu'on peut la trouver dans [92], requiert de supposer que la famille de potentiels  $(V_\Lambda(.; \theta))_{\Lambda \subset \mathbb{R}^d}$  est compatible, i.e. pour tout  $\Lambda \subset \Lambda'$ , il existe une fonction mesurable  $\psi_{\Lambda, \Lambda'}$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  telle que

$$\forall \varphi \in \Omega \quad V_{\Lambda'}(\varphi; \theta) = V_\Lambda(\varphi; \theta) + \psi_{\Lambda, \Lambda'}(\varphi_{\Lambda^c}; \theta). \quad (4.1.1)$$

**Définition 4.1.** Une mesure de probabilité  $P_\theta$  sur  $\Omega$  est une mesure de Gibbs associée à la famille de potentiels  $(V_\Lambda(.; \theta))_{\Lambda \subset \mathbb{R}^d}$  et à la mesure  $\nu \otimes \lambda^m$  sur  $\mathbb{S}$ , si pour tout  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ , pour  $P_\theta$ -presque toute configuration extérieure  $\varphi_{\Lambda^c}$ , la loi de  $P_\theta$  sachant  $\varphi_{\Lambda^c}$  admet la densité conditionnelle par rapport à  $\pi_\Lambda^\nu$  suivante :

$$f_\Lambda(\varphi_\Lambda | \varphi_{\Lambda^c}; \theta) = \frac{1}{Z_\Lambda(\varphi_{\Lambda^c}; \theta)} e^{-V_\Lambda(\varphi; \theta)},$$

où  $Z_\Lambda(\varphi_{\Lambda^c}; \theta)$  est une constante de normalisation appelée fonction de partition.

L'existence d'une mesure sur  $\Omega$  vérifiant ces spécifications conditionnelles est un problème difficile et dépend du type de potentiels considéré. Des conditions générales d'existence ont été établies dans [98], [92], [13], [28]. Tous les modèles considérés dans ce rapport existent pour toute valeur du paramètre  $\theta$ . Par ailleurs, l'existence de la mesure de Gibbs n'assure pas son unicité. Lorsque plusieurs mesures satisfont la définition

précédente, on parle de transition de phase. Etant donné un modèle paramétrique de potentiels, il est fréquent d'observer l'apparition de transition de phase pour un certain ensemble de valeurs du paramètre  $\theta$ . Nous verrons dans le chapitre suivant que l'étude statistique des modèles sera quand même possible dans cette situation.

Remarquons enfin que lorsque  $V_\Lambda(\varphi; \theta) = +\infty$ , la configuration  $\varphi$  a une probabilité nulle d'apparaître sous  $P_\theta$ .

### 4.1.2 Simulation, exemples

On distingue deux types d'algorithmes de simulations : les algorithmes MCMC de type "naissance-mort", et la simulation parfaite. La première est très générale et très simple à programmer, mais la loi du processus obtenu n'est qu'approximative puisqu'elle correspond à la loi limite stationnaire d'une chaîne de Markov. La seconde est exacte mais s'avère plus délicate à mettre en oeuvre et n'est pas disponible pour tous les modèles. Nous référerons à [84] pour une présentation des deux approches.

*Exemple 4.1* (Un processus de Strauss marqué). On suppose que les points disposent de deux marques possibles, modélisées par un cercle ( $c$ ) ou un triangle ( $t$ ) :  $\mathbb{M} = \{c, t\}$ . On se place dans le cas homogène où  $\nu = \lambda$  et on considère l'interaction de Strauss suivante, où la somme se fait pour tout couple dont au moins un élément est dans  $\Lambda$ ,

$$\begin{aligned} V_\Lambda(\varphi; \theta) = & \theta_{11}|\varphi_\Lambda^c| + \theta_{12}|\varphi_\Lambda^t| \\ & + \theta_{21} \sum_{(x^c, y^c)} \mathbf{1}_{||y^c - x^c|| < 0.05} + \theta_{22} \sum_{(x^t, y^t)} \mathbf{1}_{||y^t - x^t|| < 0.05} + \theta_{23} \sum_{(x^t, y^c)} \mathbf{1}_{||y^c - x^t|| < 0.05} \end{aligned}$$

Les paramètres  $\theta_{11}$  et  $\theta_{12}$  contrôlent l'intensité des points de chaque type ( cercle ou triangle), tandis que les autres paramètres, positifs, quantifient la répulsion entre points voisins (à distance inférieure à 0.05), en fonction de leur marque.

Deux réalisations sur  $[0, 1]^2$  sont présentées dans la figure 4.1. La répulsion entre points de marques différentes est plus prononcée à droite qu'à gauche.

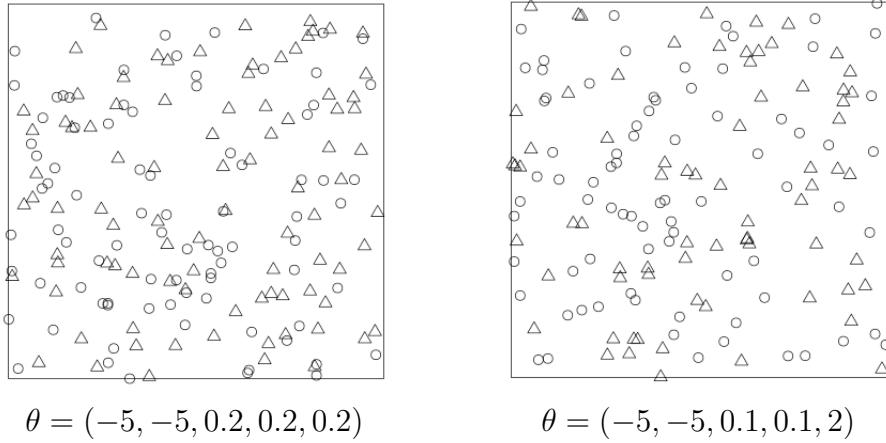


FIGURE 4.1 – Simulations du processus de Strauss marqué (exemple 4.1).

## 4.2 Mosaïques gibbsiennes

On considère dans cette partie des points non marqués et nous nous plaçons par simplicité dans le plan ( $d = 2$ ). Dans [Lav9], en collaboration avec David Dereudre, nous étudions des mosaïques de Delaunay et de Voronoï soumises à un potentiel d'interaction qui favorise, pénalise voire interdit certaines propriétés géométriques de la mosaïque. L'étude de telles mosaïques est motivée par des applications en microstructure des matériaux et en biologie (cf [56], [91], [70], [34], [33]). Ces modèles apparaissent d'un point de vue plus théorique dans [100], [94] et [7]. Leur existence dans un cadre très général est prouvée dans [13] et [28]. Quelques modèles considérés dans [Lav9] sont présentés ci-dessous. Leur simulation requiert un algorithme MCMC de type naissance-mort-déplacement. La convergence de cet algorithme est moins évidente que dans les cas standards car certaines configurations sont interdites. Néanmoins, nous montrons dans [Lav9] que l'algorithme converge en général, pourvu que la configuration initiale soit autorisée. L'estimation des paramètres de ces modèles est considérée dans le chapitre suivant.

### 4.2.1 Triangulation de Delaunay gibbsienne

Etant donnée une configuration de points  $\varphi$ , on peut construire la triangulation de Delaunay associée, notée  $\mathcal{D}el(\varphi)$ . Il s'agit d'un pavage du plan par des triangles, de telle sorte que le cercle circonscrit à chacun d'entre eux ne contient qu'un seul point de  $\varphi$ .

Dans [Lav9], nous nous intéressons à des mosaïques de Delaunay soumises à un potentiel d'interaction gibbsien. Plus précisément, en notant  $\mathcal{D}el_\Lambda(\varphi)$  la restriction de  $\mathcal{D}el(\varphi)$  à  $\Lambda$  et en considérant la relation de voisinage  $T \sim_{\mathcal{D}el} T'$  lorsque les triangles  $T$  et  $T'$  ont une arête commune, nous considérons des potentiels du type :

$$V_\Lambda(\varphi; \theta) = \sum_{T \in \mathcal{D}el_\Lambda(\varphi)} V_1(T; \theta) + \sum_{\substack{\{T, T'\} \subset \mathcal{D}el(\varphi) \\ T \sim_{\mathcal{D}el} T' \\ T \text{ ou } T' \text{ dans } \mathcal{D}el_\Lambda(\varphi)}} V_2(T, T'; \theta) \quad (4.2.1)$$

où  $V_1(\cdot; \theta)$  est une fonction de l'espace des triangles dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et  $V_2(\cdot, \cdot; \theta)$  est une fonction symétrique à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Ainsi le potentiel agit sur chaque triangle : selon la définition de  $V_1$ , certaines propriétés géométriques seront privilégiées. D'autre part il tient compte de l'interaction entre deux triangles voisins au travers de  $V_2$  qui, typiquement, sera basé sur une comparaison de certaines de leurs caractéristiques géométriques.

*Exemple 4.2* (Une triangulation non-stationnaire cristallisée). Nous supposons ici que  $\nu$  est à densité  $g$  et que le potentiel d'interaction se définit comme suit, avec  $\alpha \in [0, \pi/3[$ ,

$$V_1(T; \alpha) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha(T) \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_2 = 0,$$

où  $\alpha(T)$  est l'angle minimal du triangle  $T$ .

Dans ce modèle, tous les angles sont forcés à être supérieur à  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha$  est proche

de  $\pi/3$ , la triangulation est très proche d'un modèle de cristallisation. Il n'y a pas d'interaction entre triangles voisins. De plus, l'intensité des triangles peut varier selon la densité de  $\nu$ . Une réalisation de ce modèle est présentée dans la figure 4.2.

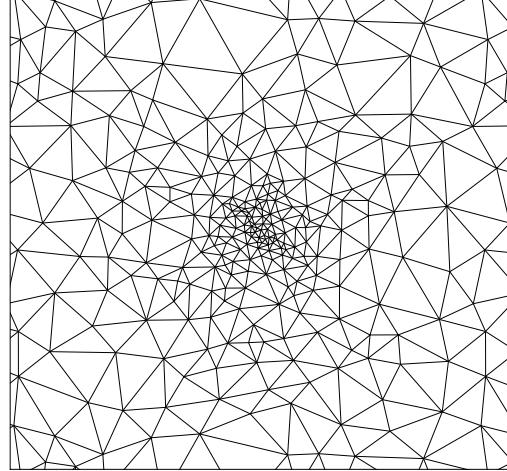


FIGURE 4.2 – Simulation de l'exemple 4.2 sur  $[0, 1]^2$  avec  $\alpha = \pi/6$  et  $g(x, y) = 100[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2]^{-0.75}$ .

*Exemple 4.3* (Une triangulation avec contrainte périmétrique). Nous considérons une intensité homogène  $\nu = z\lambda$ ,  $z > 0$ , et l'interaction suivante, pour  $\alpha > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$V_1(T; \alpha, \theta) = \begin{cases} +\infty & \text{si } R(T) \geq \alpha \\ \theta \mathcal{P}(T) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad V_2 = 0,$$

où  $R(T)$  est le rayon du cercle circonscrit à  $T$  et  $\mathcal{P}(T)$  est le périmètre de  $T$ .

Ce modèle interdit aux triangles d'être trop grands, et pénalise (resp. favorise) les triangles ayant un grand périmètre lorsque  $\theta > 0$  (resp.  $\theta < 0$ ). Deux réalisations correspondant à  $\theta < 0$  et  $\theta > 0$  sont présentées dans la figure 4.3.

### 4.2.2 Mosaïques de Voronoï gibbsienne

Etant donnée une configuration de points  $\varphi$ , on lui associe le pavage du plan de Voronoï  $\mathcal{Vor}(\varphi)$  de la façon suivante : un point du plan appartient à la cellule de Voronoï générée par  $x \in \varphi$ , si  $x$  est son plus proche voisin dans  $\varphi$ . Les mosaïques de Voronoï sont donc formées de polygones convexes et constituent le dual des mosaïques de Delaunay. Les sommets d'une mosaïque de Voronoï correspondent en effet aux centres des cercles circonscrits aux triangles de la mosaïque de Delaunay.

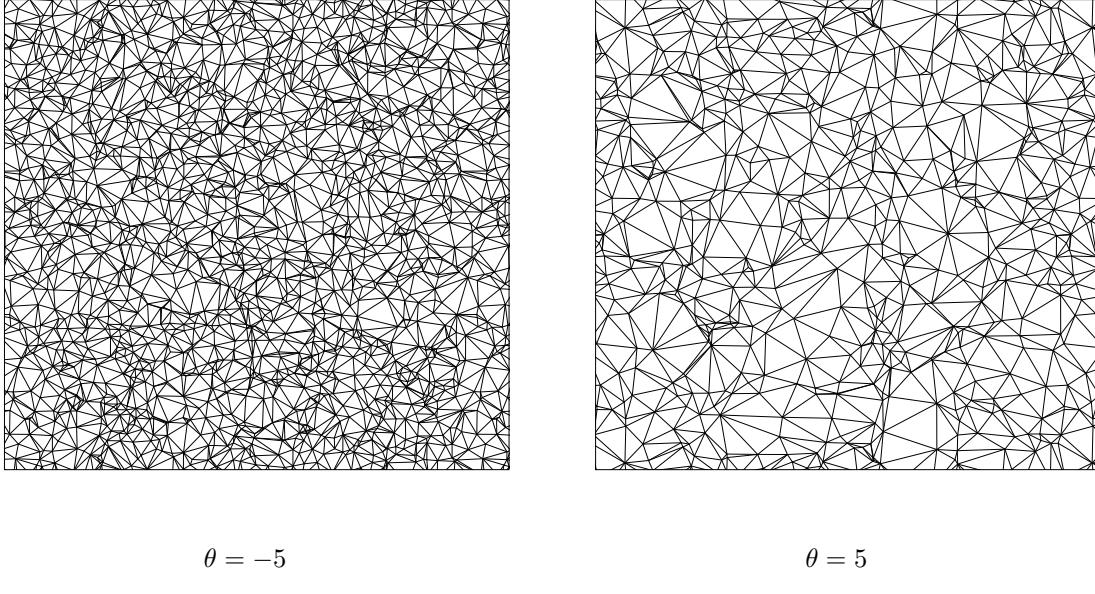


FIGURE 4.3 – Simulation de l'exemple 4.3 sur  $[0, 1]^2$  avec  $\alpha = 0.08$ ,  $z = 1000$  et  $\theta = -5$ ,  $\theta = 5$ .

De manière similaire à ci-dessus, un potentiel d'interaction portant sur la géométrie de la mosaïque de Voronoï associée à  $\varphi$  est proposé dans [Lav9]. Notons  $\mathcal{V}or_\Lambda(\varphi)$  la restriction de  $\mathcal{V}or(\varphi)$  à  $\Lambda$ . La relation de voisinage  $C \sim_{\mathcal{V}or} C'$  signifie que deux cellules  $C$  et  $C'$  de  $\mathcal{V}or(\varphi)$  ont une arête commune.

$$V_\Lambda(\varphi; \theta) = \sum_{C \in \mathcal{V}or_\Lambda(\varphi)} V_1(C; \theta) + \sum_{\substack{\{C, C'\} \subset \mathcal{V}or(\varphi) \\ C \sim_{\mathcal{V}or} C' \\ C \text{ ou } C' \text{ dans } \mathcal{V}or_\Lambda(\varphi)}} V_2(C, C'; \theta) \quad (4.2.2)$$

où  $V_1(\cdot; \theta)$  est une fonction de l'espace des cellules  $C$  à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et  $V_2(\cdot, \cdot; \theta)$  est une fonction symétrique à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

*Exemple 4.4* (Modèle de surface de contact minimale). On considère une intensité homogène et l'interaction suivante, pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$V_1 = 0 \quad \text{et} \quad V_2(C, C'; \theta) = \theta l(C, C'),$$

où  $l(C, C')$  est la longueur de l'arête commune entre  $C$  et  $C'$ .

Lorsque  $\theta > 0$ , ce modèle pénalise les surfaces de contact trop importantes. Il est notamment bien adapté à la modélisation de mousses lorsque  $\theta$  est élevé comme le montrent les simulations de la figure 4.4.

*Exemple 4.5* (Cellules contraintes avec interaction volumique entre cellules voisines). L'intensité est homogène  $\nu = z\lambda$ ,  $z > 0$  et l'interaction s'écrit

$$V_1(C; \alpha, B) = \begin{cases} +\infty & \text{si } h_{\max}(C) \geq \alpha \\ +\infty & \text{si } h_{\max}^2(C) \geq B \mathcal{V}ol(C) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

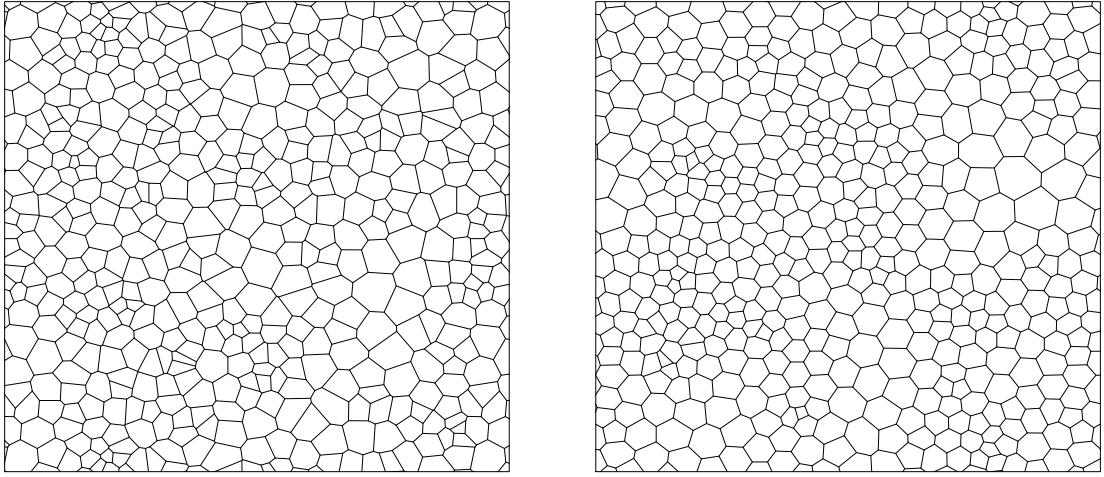


FIGURE 4.4 – Simulations de l'exemple 4.4 conditionné à  $n = 400$  où  $n$  est le nombre de cellules, avec  $\theta = 200$  (à gauche) et  $\theta = 1000$  (à droite).

et

$$V_2(C, C'; \theta) = \theta \left( \frac{\max(\text{Vol}(C), \text{Vol}(C'))}{\min(\text{Vol}(C), \text{Vol}(C'))} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $h_{\max}(C)$  désigne la plus grande distance entre le noyau  $x$  et les arêtes de  $C$ .

Ce potentiel d'interaction interdit les cellules trop grandes (via le paramètre  $\alpha$ ) ou trop effilées (via le paramètre  $B$ ) et pénalise (resp. favorise) les cellules voisines de volumes différents si  $\theta > 0$  (resp.  $\theta < 0$ ). L'effet de ces paramètres est mis en valeur dans la figure 4.5.

### 4.3 Le modèle Quermass

Le modèle Quermass a été introduit dans [64]. Il a pour objectif de modéliser des ensembles aléatoires tels que des micro-émulsions (cf [72], [81]). Il est composé d'union de boules aléatoires, généralisant le modèle booléen. Le potentiel d'interaction porte sur la géométrie de l'ensemble aléatoire ainsi construit : son aire, son périmètre, sa caractéristique d'Euler-Poincaré (nombre de composantes connexes moins nombre de trous). Dans l'expression ci-dessous, le modèle booléen correspond à  $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ , c'est à dire au modèle Quermass sans interaction. Le cas particulier  $\theta_2 = \theta_4 = 0$  est connu sous le nom d'area process ([10]) ou modèle de Widom Rowlinson lorsque  $\theta_3 > 0$  ([113]).

Plus précisément, le modèle Quermass est un processus ponctuel marqué, chaque point  $x$  de  $\varphi$  étant affecté d'une marque  $R > 0$  correspondant au rayon de la boule  $\mathcal{B}(x, R)$  centrée en  $x$ . On suppose que l'intensité est homogène (sans perte de généralité  $\nu = \lambda$ ) et  $\lambda^m$  est la loi des rayons. Le potentiel d'interaction s'écrit, pour une

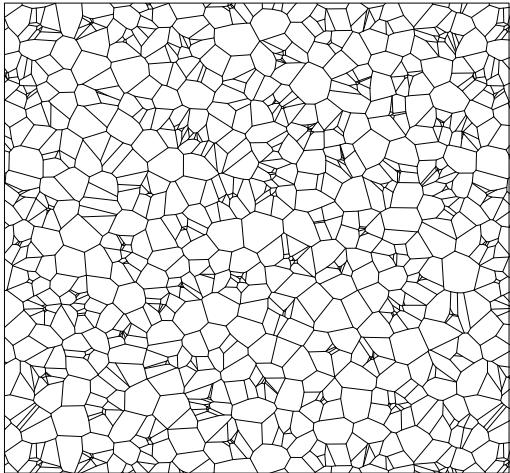
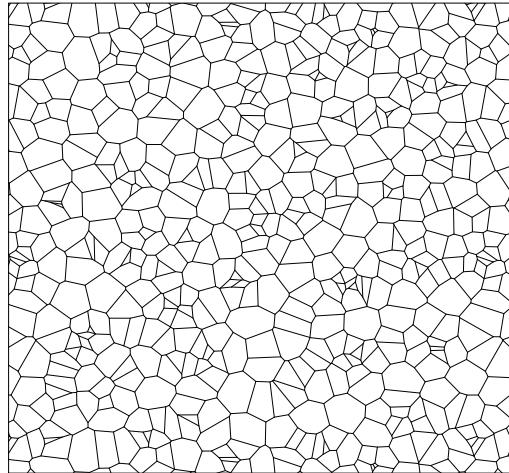
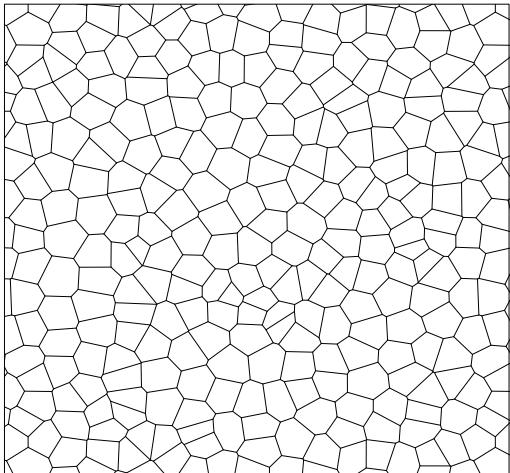
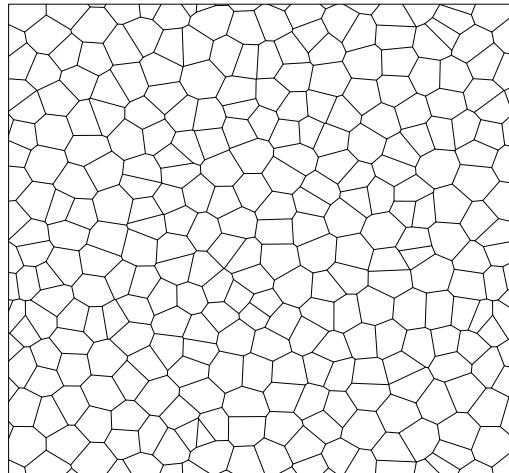
 $B = +\infty, \theta = -0.5$  $B = 1, \theta = -0.5$  $B = +\infty, \theta = 0.5$  $B = 1, \theta = 0.5$ 

FIGURE 4.5 – Simulations de l'exemple 4.5 sur  $[0, 1]^2$  avec  $\alpha = 0.05$ ,  $z = 100$ ,  $B = +\infty$  (à gauche),  $B = 1$  (à droite),  $\theta = -0.5$  (en haut),  $\theta = 0.5$  (en bas).

configuration finie de points  $\varphi$  (i.e. à support borné), en notant  $\theta := (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \in \mathbb{R}^4$ ,

$$V(\varphi; \theta) = \theta_1 |\varphi| + \theta_2 \mathcal{P}(\Gamma) + \theta_3 \mathcal{A}(\Gamma) + \theta_4 \mathcal{E}(\Gamma) \quad \text{où} \quad \Gamma = \bigcup_{(x, R) \in \varphi} \mathcal{B}(x, R) \quad (4.3.1)$$

et  $\mathcal{P}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{A}(\Gamma)$  et  $\mathcal{E}(\Gamma)$  représentent respectivement le périmètre, l'aire et la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\Gamma$ .

Dans le cas où les rayons sont uniformément bornés (i.e. il existe  $R_0 > 0$  tel que  $\lambda^m([0, R_0]) = 1$ ), le potentiel d'interaction conditionnel intervenant dans la définition 4.1 s'écrit :

$$V_\Lambda(\varphi; \theta) = V(\varphi_{\Lambda \oplus B(0, 2R_0)}; \theta) - V(\varphi_{\Lambda \oplus B(0, 2R_0) \setminus \Lambda}; \theta),$$

où  $V$  est défini par (4.3.1). La définition s'étend aux rayons non bornés en se restreignant aux configurations dites tempérées, cf [27].

La simulation du modèle Quermass peut s'effectuer grâce à un algorithme MCMC de type naissance-mort, en tirant partie de la structure sous-jacente en mosaïque de Laguerre pour faciliter le calcul des caractéristiques géométriques (cf [82]). Des exemples sont présentés dans la figure 4.6. On remarque que les réalisations ne permettent pas d'identifier toutes les boules composant  $\Gamma$ , en particulier les points de  $\varphi$  ne sont pas identifiables. Cela rend l'inférence statistique du modèle Quermass délicate. Ce problème sera traité dans le chapitre suivant, partie 5.2.3.

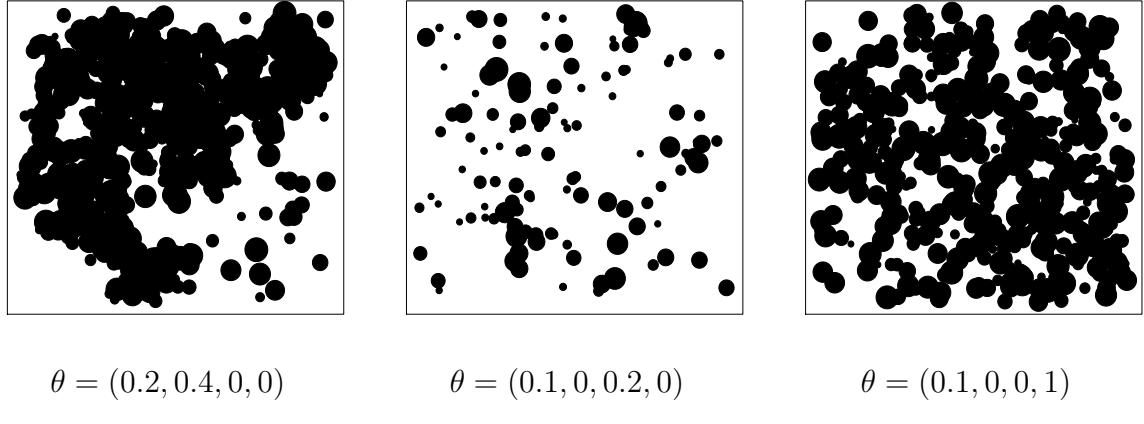


FIGURE 4.6 – Simulations du processus Quermass sur  $[0, 50]^2$ , lorsque  $\lambda^m = \mathcal{U}([.5, 2])$  et pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$ .

## 4.4 Les processus déterminantaux

Les processus déterminantaux ne sont pas définis au travers d'un potentiel comme dans la définition 4.1, même s'ils peuvent être vus dans certains cas comme des processus gibbsiens (voir [43]). Leur définition repose sur la forme des intensités jointes d'ordre  $n$ . Ils forment une classe de processus ponctuels répulsifs plus facilement maniables que les

processus répulsifs de Gibbs introduits au travers d'un potentiel. Ils sont apparus notamment en physique et en théorie des matrices aléatoires avant d'être considérés d'un point de vue général par O. Macchi dans [75]. Leur étude théorique s'est principalement développée ces dix dernières années. Une synthèse détaillée pourra être trouvée dans [58]. En collaboration avec Jesper Møller et Ege Rubak, nous avons initié une étude statistique de ces modèles dans [Lav2]. L'objectif est de proposer des modèles paramétriques de processus déterminantaux, suffisamment flexibles pour pouvoir modéliser différents degrés de répulsion entre les points, tout en étant facilement simulables et estimables.

#### 4.4.1 Définition

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction d'intensité jointe d'ordre  $n$  du processus ponctuel  $\Phi$  est la fonction  $\rho^{(n)} : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow [0, \infty)$  vérifiant pour, toute fonction borélienne  $h : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$\mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi}^{\neq} h(x_1, \dots, x_n) = \int \cdots \int \rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) h(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (4.4.1)$$

où  $\neq$  sur le signe somme signifie que les éléments  $x_1, \dots, x_n$  sont deux à deux distincts et  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance par rapport à la loi de  $\Phi$ .

**Définition 4.2.** Le processus  $\Phi$  est dit déterminantal de noyau  $C : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  si

$$\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \det[C](x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{nd}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4.2)$$

où  $[C](x_1, \dots, x_n)$  désigne la matrice d'élément général  $C(x_i, x_j)$  et  $\det(A)$  est le déterminant de la matrice  $A$ .

Un processus déterminantal a notamment une mesure d'intensité de densité  $\rho(x) = C(x, x)$  et une fonction de corrélation par paires (si  $C$  est hermitien) :

$$g(x, y) := \frac{\rho^{(2)}(x, y)}{\rho(x)\rho(y)} = 1 - \frac{|C(x, y)|^2}{C(x, x)C(y, y)}.$$

Puisque pour tout  $x, y$ ,  $g(x, y) \leq 1$  (ou d'après (4.4.2)), on remarque qu'un processus déterminantal est nécessairement répulsif.

La définition 4.2 impose un certain nombre de conditions sur le noyau  $C$ . Inversement, on peut montrer une condition nécessaire d'existence assez simple. Pour tout compact  $S$  de  $\mathbb{R}^d$ , on définit l'opérateur intégral  $T_S : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$  associé à  $C$  par

$$T_S(h)(x) = \int_S C(x, y)h(y) dy, \quad x \in S.$$

**Théorème 4.1** ([58]). *Supposons que  $C$  est une fonction de covariance continue. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus déterminantal associé à  $C$  existe est que pour tout compact  $S \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\sup_k \lambda_k^S \leq 1$ , où  $(\lambda_k^S)_k$  est la suite des valeurs propres de l'opérateur  $T_S$ .*

Lorsque le processus déterminantal existe, son unicité est garantie (cf Lemme 4.2.6 dans [58]). On obtient un processus stationnaire en prenant  $C(x, y) = C_0(x - y)$  une fonction de covariance stationnaire. Dans ce cas, la condition d'existence ci-dessus se clarifie.

**Proposition 4.1** ([Lav2]). *Supposons que  $C_0$  est une fonction de covariance continue et intégrable, et notons  $f$  la densité spectrale associée. Alors le processus déterminantal associé à  $C_0$  existe si et seulement si  $f \leq 1$ .*

Etant donnée une fonction de covariance continue et intégrable, il est donc facile de construire un processus déterminantal stationnaire en renormalisant cette dernière par un majorant de la densité spectrale associée.

#### 4.4.2 Simulation

Soit  $C$  une fonction de covariance continue. D'après le théorème de Mercer, sur tout compact  $S$ ,

$$C(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Psi_k(x) \overline{\Psi_k(y)}, \quad (x, y) \in S \times S, \quad (4.4.3)$$

où  $(\lambda_k)_k$  est la suite des valeurs propres de l'opérateur  $T_S$  défini plus haut et  $(\Psi_k)_k$  est une suite de fonctions orthonormées dans  $L^2(S)$  qui en constitue une base. On suppose  $\sup_k \lambda_k \leq 1$  pour garantir l'existence du processus déterminantal associé, conformément au théorème 4.1.

D'après le théorème 4.5.3 dans [58], le processus déterminantal associé à  $C$  a la même loi que le processus déterminantal de noyau

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Psi_k(x) \overline{\Psi_k(y)}. \quad (4.4.4)$$

où  $B_k$  sont de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $\lambda_k$ .

Ainsi la simulation d'un processus déterminantal de noyau  $C$  sur  $S$  se fait en deux étapes

1. Simuler les variables aléatoires  $B_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,
2. Simuler le processus déterminantal de noyau  $K$  donné par (4.4.4) sachant les  $B_k$ .

On montre dans [Lav2] que la seconde étape peut se faire selon l'algorithme suivant. Il s'agit d'une version simplifiée (au cas où l'espace d'état est  $\mathbb{R}^d$ ) et optimisée de l'algorithme général présenté dans [58].

Comme  $\sum \lambda_k = \int_S C(x, x) dx < \infty$ , le nombre de variables  $B_k$  non-nulles simulés dans l'étape 1 est nécessairement fini. Notons  $n$  ce nombre. Quitte à renommer les indices, on a, conditionnellement aux  $B_k$ ,  $K(x, y) = \mathbf{v}(y)^* \mathbf{v}(x)$ , avec  $\mathbf{v}(x) := (\Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x))^T$ , où  $^T$  désigne la transposée et  $*$  la conjuguée transposée d'un vecteur. On considère la

norme euclidienne  $\|\mathbf{v}(x)\|^2 = \mathbf{v}(x)^*\mathbf{v}(x) = K(x, x)$ .

Algorithme de simulation du processus déterminantal de noyau  $K(x, y) = \mathbf{v}(y)^*\mathbf{v}(x)$ :

- Simuler  $X_n$  selon la distribution de densité  $p_n(x) = \|\mathbf{v}(x)\|^2/n$ ,  $x \in S$
- Poser  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}(X_n)/\|\mathbf{v}(X_n)\|$
- Pour  $i$  allant de  $(n - 1)$  à 1 :
  - simuler  $X_i$  selon la distribution de densité

$$p_i(x) = \frac{1}{i} \left[ \|\mathbf{v}(x)\|^2 - \sum_{j=1}^{n-i} |\mathbf{e}_j^* \mathbf{v}(x)|^2 \right], \quad x \in S \quad (4.4.5)$$

- poser  $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}(X_i) - \sum_{j=1}^{n-i} (\mathbf{e}_j^* \mathbf{v}(X_i)) \mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{e}_{n-i+1} = \mathbf{w}_i/\|\mathbf{w}_i\|$
- Retourner  $\{X_1, \dots, X_n\}$

#### 4.4.3 Représentation spectrale approchée

Dans une démarche statistique, il est naturel de choisir un modèle paramétrique pour  $C$ , ce qui détermine l'intensité et la fonction de corrélation par paires du processus. Cela revient à choisir un modèle de covariance, à une renormalisation près, cf théorème 4.1. Mais l'algorithme de simulation précédent nécessite de connaître les valeurs propres  $\lambda_k$  intervenant dans la décomposition (4.4.3) de  $C$ . Il est assez difficile d'obtenir cette décomposition dans le cas général, même de manière numérique. Nous nous sommes donc attachés dans [Lav2] à proposer un développement approché pratique.

Dans le cas stationnaire où  $C(x, y) = C_0(y - x)$ , il est toujours possible de développer  $C_0$  sur  $2S$  à l'aide d'une base de Fourier. En supposant pour simplifier que  $2S = [-1/2, 1/2]^d$ , les coefficients de cette décomposition valent

$$\lambda_k = \int_{[-1/2, 1/2]^d} C_0(u) e^{-2\pi i k \cdot u} du.$$

Or en supposant  $C_0$  intégrable, sa densité spectrale  $f$  au point  $k$  vérifie

$$f(k) = \int_{\mathbb{R}^d} C_0(u) e^{-2\pi i k \cdot u} du.$$

Ainsi, si  $C_0$  admet une portée suffisamment faible, on a  $\lambda_k \approx f(k)$ .

Cette approximation peut-être rendue rigoureuse pour une large classe de modèles paramétriques pour  $C_0$  (cf [Lav2]). Elle est acceptable pourvu que le nombre de points attendu sur  $S$  ne soit pas trop petit. On peut comprendre la qualité de cette approximation de la façon suivante : puisque le processus est répulsif, étant donné un nombre minimal de points sur  $S$ ,  $C_0$  ne peut avoir une trop forte portée (la fonction de covariance vaut en effet  $-|C_0(x - y)|^2$ ).

Il est à noter qu'un processus déterminantal non-homogène peut être facilement construit à partir d'un processus déterminantal stationnaire. En effet soit  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  et  $\Phi$  un processus déterminantal stationnaire de noyau  $C_0$ , alors le processus ponctuel obtenu en supprimant les points  $x \in \Phi$  avec probabilité  $p(x)$  est déterminantal de noyau  $C(x, y) = \sqrt{p(x)}C_0(y - x)\sqrt{p(y)}$ .

*Exemple 4.6.* Considérons une fonction de covariance de type Whittle-Matern en dimension  $d = 2$

$$C_0(x) = \rho \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \|x/\alpha\|^\nu K_\nu(\|x/\alpha\|), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \rho > 0, \quad \nu > 0, \quad \alpha > 0, \quad (4.4.6)$$

où  $K_\nu$  est la fonction modifiée de Bessel du second type. Lorsque  $\nu = 0.5$ ,  $C_0$  correspond à la fonction de covariance de type exponentiel. La densité spectrale associée vaut (cf [115])

$$f(x) = \rho \nu \frac{4\pi\alpha^2}{(1 + \|2\pi\alpha x\|^2)^{\nu+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

de telle sorte que la condition  $f \leq 1$  est vérifiée lorsque

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{4\nu\pi\alpha^2}.$$

Trois réalisations du processus déterminantal associé à  $C_0$  pour  $\rho = 100$ ,  $\alpha = 0.01$  et respectivement  $\nu = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\nu = 7$  (du moins répulsif au plus répulsif) sont représentées dans la figure 4.7. La simulation utilise l'approximation expliquée ci-dessus et l'algorithme de la partie précédente.

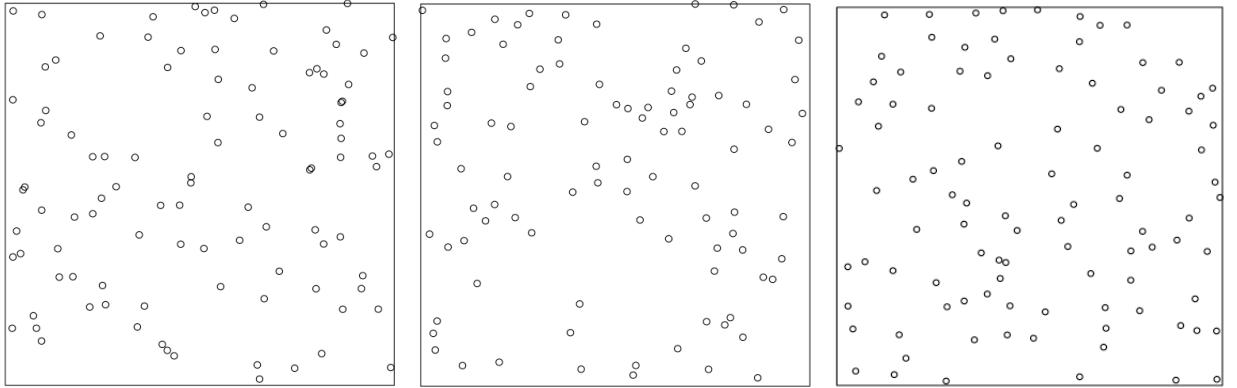


FIGURE 4.7 – Simulations du processus déterminantal de l'exemple 4.6 avec  $\rho = 100$ ,  $\alpha = 0.01$  et de gauche à droite  $\nu = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\nu = 7$ .

#### 4.4.4 Perspectives

Les processus déterminantaux semblent être un modèle très prometteur en statistique spatiale. Ils permettent de modéliser simplement les processus ponctuels répulsifs à partir

de leur fonction de corrélation par paires. Leur étude statistique ne fait que démarrer et de nombreuses questions restent en suspens.

L'inférence dans les processus déterminantaux est abordée dans [Lav2] : les paramètres du noyau  $C$  sont estimés par une méthode de contraste identifiant la fonction de corrélation par paires, ou par maximum de vraisemblance (la densité d'un processus déterminantal sur un compact peut en effet s'exprimer en fonction de  $C$ ). Néanmoins d'autres méthodes sont envisageables, comme l'estimation par vraisemblance composite (voir [110]), ou encore des approches bayésiennes.

Les propriétés asymptotiques des procédures d'estimation précédentes restent à établir. La validation du modèle déterminantal (analyse de résidus, tests d'adéquation,etc.) constitue également une piste intéressante à explorer. Pour ces questions, le lien avec la caractérisation gibbsienne établie dans [43] pourrait être exploitée finement.

# Chapitre 5

## Inférence pour les processus ponctuels de Gibbs

On considère une réalisation  $\varphi_\Lambda$  d'un processus de Gibbs sur un ensemble  $\Lambda$ . On s'intéresse dans ce chapitre à l'estimation des paramètres intervenant dans sa définition 4.1 ainsi qu'à la validation du modèle paramétrique choisi. On se place dans la situation où  $P_\theta$  est stationnaire pour tout  $\theta \in \Theta$ . Cela suppose en outre que la famille de potentiels  $(V_\Lambda(\cdot; \theta))_{\Lambda \subset \mathbb{R}^d}$  est invariante par translation et que la mesure d'intensité sous-jacente est homogène. On peut dans ce cas supposer sans perte de généralité que  $\nu = \lambda$ .

La méthode d'estimation la plus naturelle consiste à maximiser en  $\theta$  la vraisemblance (conditionnelle)  $Z_\Lambda(\varphi_{\Lambda^c}; \theta)^{-1} e^{-V_\Lambda(\varphi; \theta)}$ , où la configuration extérieure  $\varphi_{\Lambda^c}$  peut-être choisie de différentes manières (cf [84]). L'inconvénient de cette méthode est qu'elle requiert la connaissance de la fonction de partition  $Z$  qui est généralement incalculable. La maximisation fait donc nécessairement appel à une simulation de cette fonction de partition sur une grille de valeurs de  $\theta$ , ce qui s'avère très coûteux en temps de calcul voire même impossible pour certains modèles.

D'autres techniques d'estimation ont donc été développées pour rendre l'estimation plus abordable, ou pour fournir des valeurs initiales pertinentes à la maximisation de la vraisemblance. Il s'agit en particulier de la pseudo-vraisemblance, initialement introduite par J. Besag [14] et développée dans [62], [61], [78], [79], [17], [22]. La procédure de Takacs-Fiksel issue de [36], [104], [37] en est une généralisation. La validité de ces deux techniques repose sur l'équation d'équilibre de Campbell prouvée dans [44] et [85] :

**Lemme 5.1** (Georgii-Nguyen-Zessin). *Supposons que  $P_\theta$  existe et est héréditaire pour tout  $\theta \in \Theta$ . Pour toute fonction mesurable  $h(\cdot, \cdot; \theta) : \mathbb{S} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les quantités suivantes existent et sont finies, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,*

$$\mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} h(x^m, \Phi; \theta) e^{-V(x^m | \Phi; \theta^*)} \mu(dx^m) \right) = \mathbb{E} \left( \sum_{x^m \in \Phi} h(x^m, \Phi \setminus x^m; \theta) \right), \quad (5.0.1)$$

où  $V(x^m | \varphi; \theta) := V_\Lambda(\varphi \cup x^m; \theta) - V_\Lambda(\varphi; \theta)$ , (pour tout  $\Lambda \ni x$ ) est l'énergie locale de  $x^m$  dans  $\varphi$  et où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance par rapport à  $P_{\theta^*}$  pour  $\theta^* \in \Theta$  fixé.

L'hypothèse d'hérédité présente dans le lemme précédent est expliquée dans la partie 5.1. Elle est restrictive pour certains modèles gibbsiens soumis à de fortes contraintes, comme ceux présentés dans la partie 4.2. Dans [Lav12], en collaboration avec David Dereudre, nous avons généralisé l'équation d'équilibre ci-dessus au cas non-héréditaire et ainsi proposé une procédure consistante d'estimation par pseudo-vraisemblance. Ces résultats sont résumés dans la partie 5.1 et quelques applications à l'estimation de mosaïques gibbsiennes sont présentées.

La procédure de Takacs-Fiksel est étudiée en détail dans un travail en commun avec Jean-François Coeurjolly, Remy Drouilhet et David Dereudre [Lav6]. Les principaux résultats sont résumés dans la partie 5.2. Nous avons montré, dans un cadre très général, la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur. La richesse de ses applications est illustrée dans la partie 5.2.1. Cette procédure permet notamment de proposer un estimateur explicite pour les paramètres du modèle de Strauss et elle permet l'estimation de tous les paramètres du modèle Quermass (cf partie 4.3), malgré le problème de non-identifiabilité des boules.

Une dernière partie est consacrée à la validation d'un modèle de Gibbs au travers des résidus. La notion de résidus d'un processus de Gibbs a été introduite par A. Baddeley, R. Turner, J. Møller et M. Hazelton dans [9] et approfondie dans [8]. En collaboration avec Jean-François Coeurjolly [Lav4], nous avons montré la consistance et obtenu la loi limite des résidus dans un cadre très large. Ceci permet de construire des tests d'adéquation, inédits dans le cadre des modèles de Gibbs. Cette contribution est résumée dans la partie 5.3.

## 5.1 Pseudo-vraisemblance dans le cas non-héréditaire

### 5.1.1 Equilibre de Campbell généralisé

La mesure de Gibbs  $P_\theta$  est dite héréditaire si elle est définie selon la définition 4.1 à partir de potentiels héréditaires. Une famille de potentiels est héréditaire si pour tout  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ , pour toute configuration  $\varphi \in \Omega$ , et tout  $x^m \in \Lambda \times \mathbb{M}$ ,

$$V_\Lambda(\varphi; \theta) = +\infty \Rightarrow V_\Lambda(\varphi \cup x^m; \theta) = +\infty, \quad (5.1.1)$$

ou de façon équivalente, pour tout  $x^m \in \varphi_\Lambda$ ,  $f_\Lambda(\varphi_\Lambda | \varphi_{\Lambda^c}; \theta) > 0 \Rightarrow f_\Lambda(\varphi_\Lambda \setminus x^m | \varphi_{\Lambda^c}; \theta) > 0$ .

Ainsi, sous la mesure héréditaire  $P_\theta$ , de toute configuration autorisée de points, on peut extraire n'importe quel point et conserver une configuration autorisée.

Cette hypothèse, très classique en mécanique statistique, n'est pas naturelle pour les modèles de Gibbs avec interactions géométriques. Considérons par exemple les mosaïques de Voronoï gibbsiennes dont les cellules sont forcées à n'être ni trop grandes ni trop effilées (cf l'exemple 4.5 dans 4.2). Ce type de modèle n'est pas héréditaire. Les cellules obtenues enlevant un point à une configuration autorisée peuvent en effet apparaître trop grandes ou trop allongées.

En l'absence d'hérédité, la formule d'équilibre (5.0.1) devient fausse. En particulier, l'énergie locale  $V(x^m | \varphi; \theta)$  n'est plus définie pour tout  $x^m$ . Dans [Lav12], nous avons

montré une version généralisée de (5.0.1), valable dans le cas non-héréditaire. Pour cela, nous introduisons la notion de points extractibles.

**Définition 5.1.** Un point  $x^m \in \varphi$  est dit extractible ("removable" en anglais) s'il existe un ensemble borné  $\Lambda$  contenant  $x$  tel que  $V_\Lambda(\varphi \setminus x^m; \theta) < +\infty$ . L'ensemble des points extractibles de  $\varphi$  est noté  $\mathcal{R}_\theta(\varphi)$ .

L'énergie locale d'un point extractible peut alors être considérée selon la définition classique. La généralisation de la formule de Georgii-Nguyen-Zessin est la suivante.

**Théorème 5.1** ([Lav12]). *Supposons que  $P_\theta$  existe pour tout  $\theta \in \Theta$ . Pour toute fonction mesurable  $h(\cdot, \cdot; \theta) : \mathbb{S} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les quantités suivantes existent et sont finies, pour tout  $\theta \in \Theta$  et  $\theta^* \in \Theta$*

$$\mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}} h(x^m, \Phi; \theta) e^{-V(x^m | \Phi; \theta^*)} \mu(dx^m) \right) = \mathbb{E} \left( \sum_{x^m \in \mathcal{R}_{\theta^*}(\Phi)} h(x^m, \Phi \setminus x^m; \theta) \right), \quad (5.1.2)$$

où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance par rapport à  $P_{\theta^*}$ .

La seule différence avec (5.0.1) est que la somme est restreinte aux points extractibles. Dans le cas héréditaire, tous les points de  $\varphi$  sont extractibles et on retrouve (5.0.1).

### 5.1.2 Contraste généralisé, estimation en deux étapes

La fonction de contraste de la log-pseudo-vraisemblance s'écrit dans le cas non-héréditaire

$$LPL_\Lambda(\varphi; \theta) = - \int_{\Lambda \times \mathbb{M}} e^{-V(x^m | \varphi; \theta)} \mu(dx^m) - \sum_{x^m \in \mathcal{R}_\theta^*(\varphi_\Lambda)} V(x^m | \varphi \setminus x^m; \theta). \quad (5.1.3)$$

D'après la définition 5.1, on remarque que l'ensemble  $\mathcal{R}_\theta(\varphi)$  ne dépend que du support de la mesure de Gibbs  $P_\theta$ , c'est à dire l'ensemble des configurations  $\varphi$  telles que  $V_\Lambda(\varphi; \theta) < +\infty$ , pour tout ensemble borélien borné  $\Lambda$ .

Si le support de  $P_\theta$  ne dépend pas du paramètre  $\theta$ , alors  $\mathcal{R}_{\theta^*}(\varphi)$  ne dépend pas de  $\theta^*$  et la log-pseudo-vraisemblance peut être calculée pour tout  $\theta$ .

Si le support de  $P_\theta$  dépend de  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_p)$ , nous notons  $\theta_{hc} := (\theta_1, \dots, \theta_q)$ ,  $q \leq p$ , l'ensemble des paramètres qui définissent ce support. On les nomme abusivement paramètres "hardcore", en référence au paramètre hardcore du modèle de Gibbs des sphères dures. Les autres paramètres  $\theta_{sm} := (\theta_{q+1}, \dots, \theta_p)$  modélisent l'interaction classique entre les points (interaction "smooth"). Dans ce cas,  $\mathcal{R}_{\theta^*}(\varphi) = \mathcal{R}_{\theta_{hc}^*}(\varphi)$  n'est pas connu. On propose dans [Lav12] une estimation en deux étapes :

1. On estime les paramètres hardcore  $\theta_{hc}$  par leur contre-partie empirique  $\hat{\theta}_{hc}$  (par exemple pour estimer le paramètre contrôlant la taille maximale des cellules dans une mosaïque de Voronoï, on relève la taille empirique maximale, etc.)

2. On estime  $\theta_{sm}$  par pseudo-vraisemblance en maximisant (5.1.3), où  $\mathcal{R}_{\theta^*}(\varphi)$  est remplacé par  $\mathcal{R}_{\hat{\theta}_{hc}}(\varphi)$ .

Pour prouver la consistante de cette procédure, on suppose que la famille d'ensembles  $\mathcal{R}_{\theta_{hc}}$  est monotone et continue en  $\theta_{hc}$  (dans un sens précisé dans [Lav12]). Une série d'hypothèses classiques dans le cadre de l'estimation par pseudo-vraisemblance est par ailleurs effectuée (cf [17]), la plus contraignante étant relative à la locale stabilité de la famille de potentiels (il existe une constante  $K \geq 0$  telle que pour tout  $\Lambda$ , pour tout  $x^m \in \Lambda$ ,  $V(x^m|\varphi; \theta) \geq -K$ ). Les autres hypothèses sont peu restrictives, elles concernent l'identifiabilité du paramètre  $\theta^*$  et des conditions d'intégrabilité et de continuité (en  $\theta$ ) de la famille de potentiels. Il est à noter que ces hypothèses sont vérifiées pour la plupart des modèles exponentiels (i.e. le potentiel est linéaire en les paramètres), incluant le processus de Strauss marqué, le "area-process", le processus de Geyer, etc. (cf [17], [Lav6]).

**Théorème 5.2** ([Lav12]). *Sous les hypothèses précédentes,  $(\hat{\theta}_{hc}, \hat{\theta}_{sm}) \rightarrow (\theta_{hc}^*, \theta_{sm}^*)$  pour  $P_{\theta^*}$ -presque toute configuration, lorsque le domaine d'observation  $\Lambda$  tend vers  $\mathbb{R}^d$ .*

Les ingrédients de la preuve sont l'équation d'équilibre (5.1.2), le théorème ergodique (cf [86]), et un argument classique pour la consistante d'un estimateur par contraste (cf théorème 3.4.3 de [52]).

La loi asymptotique de l'estimateur  $(\hat{\theta}_{hc}, \hat{\theta}_{sm})$  reste un problème ouvert et devrait dépendre fortement de la vitesse de convergence de  $\hat{\theta}_{hc}$ , même concernant la loi marginale de  $\hat{\theta}_{sm}$ , ce qui est difficile à évaluer. En revanche, lorsque  $\theta_{hc}$  est connu, la normalité asymptotique de  $\hat{\theta}_{sm}$  se déduit de façon similaire au cas héréditaire. Elle est montrée sous des hypothèses de régularité et en supposant que le potentiel est à portée finie dans [17] et [22].

### 5.1.3 Exemple : estimation dans le modèle de Voronoï gibbsien

Nous appliquons la procédure précédente au modèle présenté dans l'exemple 4.5, qui est non héréditaire. Il s'agit d'un modèle de Voronoï gibbsien qui interdit les cellules trop grandes ou trop effilées et repose sur une interaction volumique entre cellules voisines. Les paramètres hardcore sont  $\theta_{hc} := (\alpha, B)$  et les paramètres d'intensité et d'interaction sont  $\theta_{sm} := (z, \theta)$ .

Etant donnée une réalisation  $\varphi$  sur  $\Lambda$ , les paramètres hardcore sont estimés naturellement par :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \max\{h_{\max}(C), C \in \mathcal{Vor}_\Lambda(\varphi)\}, \\ \hat{B} &= \max\{h_{\max}^2(C)/\text{Vol}(C), C \in \mathcal{Vor}_\Lambda(\varphi)\}.\end{aligned}$$

Les paramètres  $z$  et  $\theta$  sont estimés en maximisant la log-pseudo-vraisemblance qui vaut dans ce cas :

$$LPL_\Lambda(\varphi; \theta) = - \int_\Lambda z e^{-V_2(x|\varphi; \theta)} dx - \sum_{x \in \mathcal{R}_{\hat{\theta}_{hc}}(\varphi_\Lambda)} (V_2(x|\varphi \setminus x; \theta) - \ln(z)),$$

où  $V_2(x|\varphi; \theta) := V_2(\varphi_\Lambda \cup x; \theta) - V_2(\varphi_\Lambda; \theta)$ .

Lorsque  $\alpha = 0.05$ ,  $B = 0.625$  et  $z = 100$ , nous voyons dans la figure 5.1 l'ensemble  $\mathcal{R}_{\hat{\theta}_{hc}}$  sur deux réalisations, lorsque respectivement  $\theta = -0.5$  et  $\theta = 0.5$ . La rigidité de ce modèle est clairement mis en avant : peu de points sont extractibles, surtout lorsque  $\theta > 0$ .

Le comportement des estimateurs sur 200 répliques est illustré dans les figures 5.2 et 5.3.

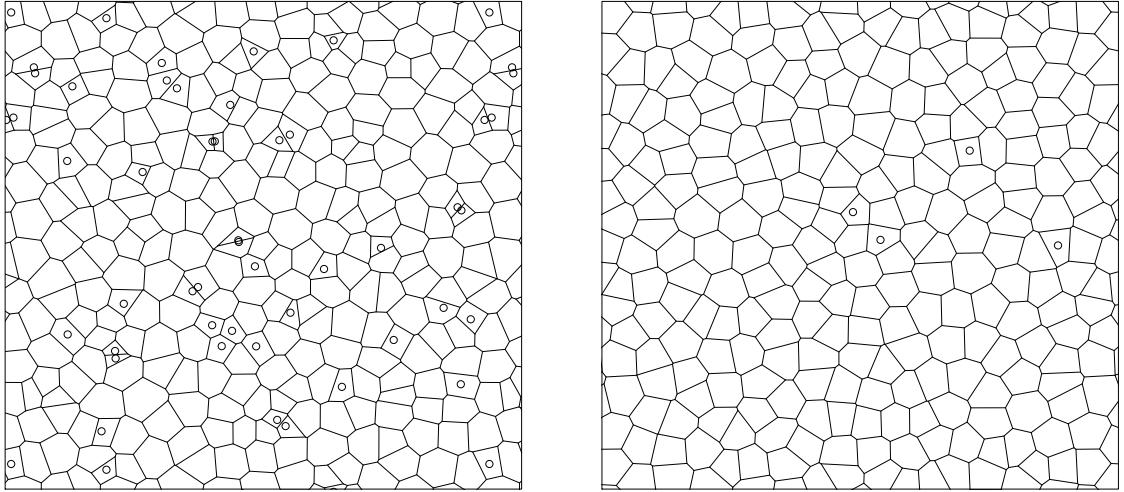


FIGURE 5.1 – Points extractibles (petits cercles) sur 2 réalisations du modèle de l'exemple 4.5, lorsque  $\alpha = 0.05$ ,  $B = 0.625$ ,  $z = 100$  et  $\theta = -0.5$  (à gauche),  $\theta = 0.5$  (à droite).

## 5.2 Procédure de Takacs-Fiksel

Nous supposons dans cette partie que les interactions sont héréditaires au sens où la propriété (5.1.1) est satisfaite. Il est néanmoins possible de généraliser l'étude au cas non-héréditaire en s'appuyant sur le théorème 5.1, voir la partie 6 dans [Lav6].

### 5.2.1 Méthode et motivations

La procédure de Takacs-Fiksel repose sur une version empirique de l'équation d'équilibre (5.0.1). Etant donnée une fonction  $h(\cdot, \cdot; \theta) : \mathbb{S} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit pour toute configuration  $\varphi \in \Omega$ , tout  $\theta \in \Omega$  et  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$

$$C_\Lambda(\varphi; h, \theta) := \int_{\Lambda \times \mathbb{M}} h(x^m, \varphi; \theta) e^{-V(x^m | \varphi; \theta)} \mu(dx^m) - \sum_{x^m \in \varphi_\Lambda} h(x^m, \varphi \setminus x^m; \theta). \quad (5.2.1)$$

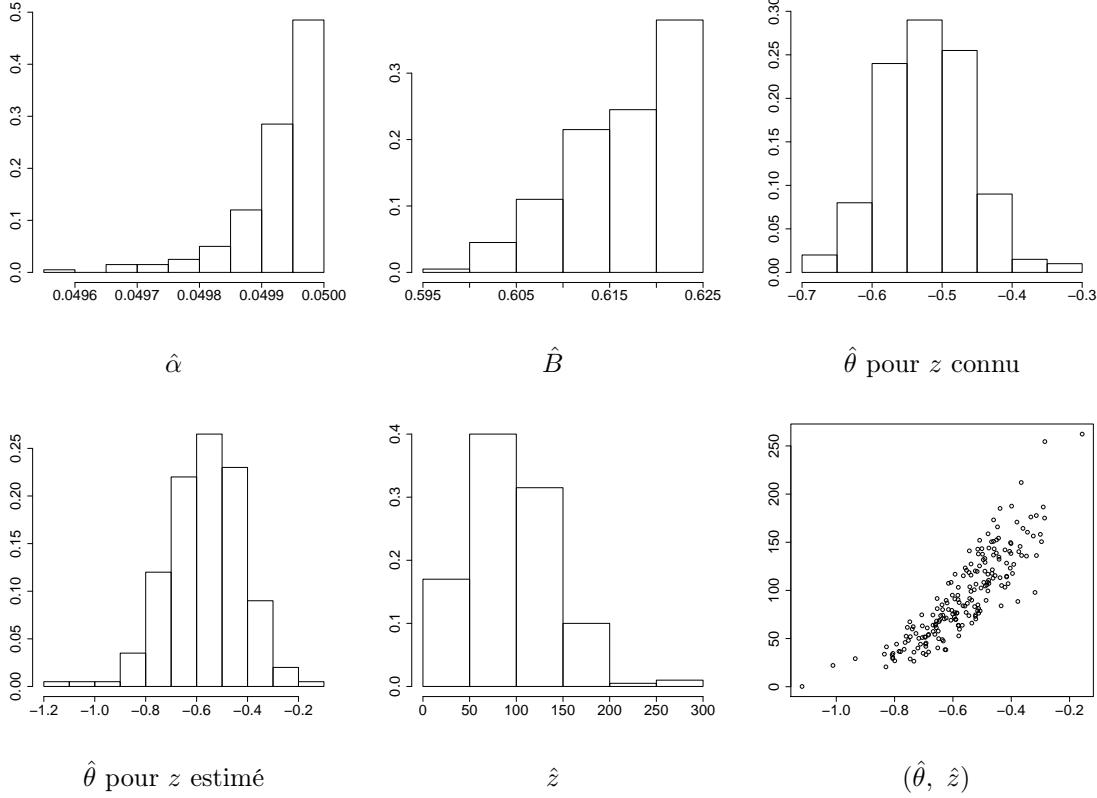


FIGURE 5.2 – Distributions des estimations du modèle de l'exemple 4.5, lorsque  $\alpha = 0.05$ ,  $B = 0.625$ ,  $z = 100$  et  $\theta = -0.5$ , à partir de 200 répliques.

De façon heuristique, lorsque  $\Lambda$  tend vers  $\mathbb{R}^d$ , d'après le théorème ergodique et en utilisant (5.0.1),  $|\Lambda|^{-1}C_\Lambda(\varphi; h, \theta^*) \rightarrow 0$  pour  $P_{\theta^*}$ -presque toute configuration. L'estimateur de Takacs-Fiksel repose sur cette observation. Etant données  $K$  fonctions  $h_k(\cdot, \cdot; \theta) : \mathbb{S} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (pour  $k = 1, \dots, K$ ), il est défini par

$$\hat{\theta}_{TF}(\varphi) := \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1}^K C_\Lambda(\varphi; h_k, \theta)^2. \quad (5.2.2)$$

Pour assurer l'identifiabilité de l'estimation, il est à peu près clair qu'il faut choisir au moins autant de fonctions tests  $h_k$  que la dimension du paramètre à estimer  $\theta$ . Une contribution importante du travail commun [Lav6] a été de montrer qu'il faut en général strictement plus de fonctions tests que la dimension de  $\theta$  (cf la partie 5.2.2).

L'intérêt principal de cette méthode est qu'elle conduit à une famille d'estimateurs, selon les fonctions tests  $h_k$  choisies dans (5.2.2). Cette flexibilité permet de construire des estimateurs performants adaptés au modèle. Donnons quelques exemples extraits de [Lav6]. Le premier montre que l'estimateur par pseudo-vraisemblance est un estimateur de Takacs-Fiksel.

*Exemple 5.1.* Si  $\theta$  est un paramètre de dimension  $p$ , le choix  $h_k(x^m, \varphi; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_k} V(x^m | \varphi; \theta)$ ,  $k = 1, \dots, p$  conduit à l'estimateur par pseudo-vraisemblance. En effet  $\hat{\theta}_{TF}$  défini par

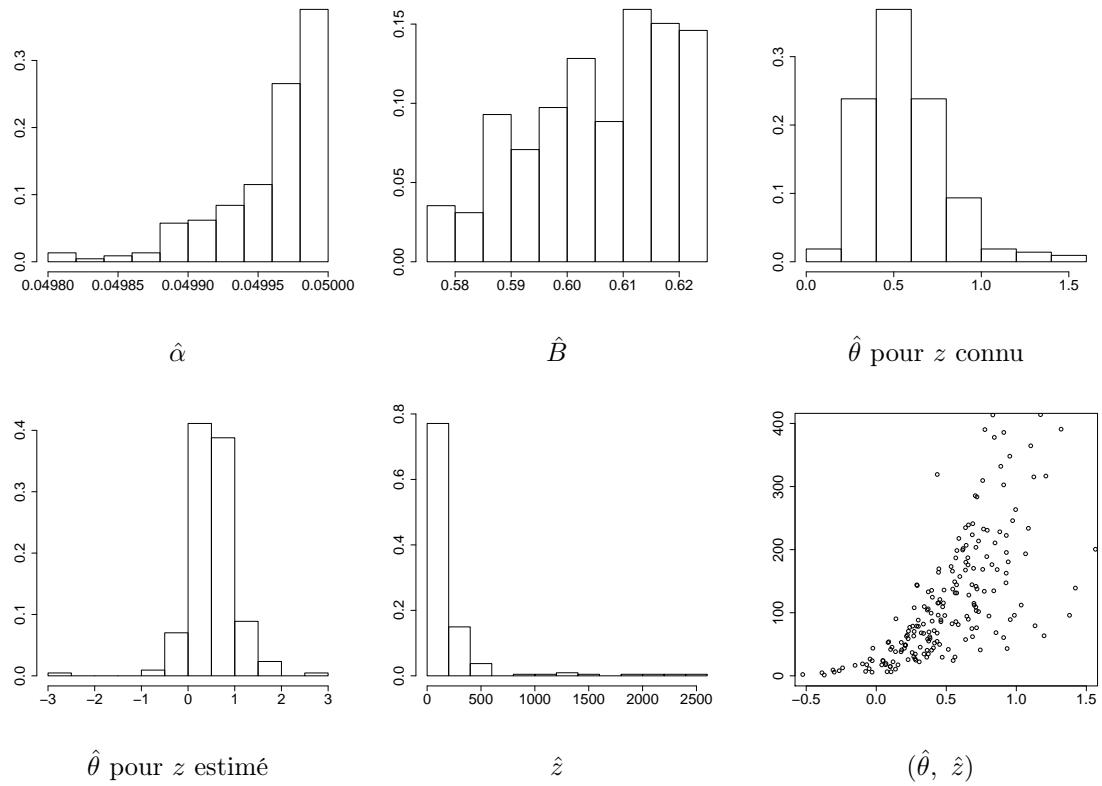


FIGURE 5.3 – Distribution des estimations du modèle de l'exemple 4.5, lorsque  $\alpha = 0.05$ ,  $B = 0.625$ ,  $z = 100$  et  $\theta = 0.5$ , à partir de 200 répliques.

(5.2.2) est alors la solution du système  $C_\Lambda(\varphi; h_k, \theta) = 0$ ,  $k = 1, \dots, p$ , ce qui signifie que  $\hat{\theta}_{TF}$  est un pôle de la fonction  $LPL_\Lambda(\varphi, .)$  définie par (5.1.3).

*Exemple 5.2.* Si l'on choisit des fonctions tests du type  $h(x^m, \varphi; \theta) = \tilde{h}(x^m, \varphi)e^{V(x^m|\varphi;\theta)}$ , alors le calcul des fonctions  $C_\Lambda(\varphi; h_k, \theta)$  devient très rapide car l'intégrale intervenant dans leur définition ne dépend plus de  $\theta$  et ne doit être calculée qu'une seule fois.

*Exemple 5.3.* Considérons le modèle de Strauss non marqué. Il fait intervenir deux paramètres : l'intensité  $\theta_1$  et le paramètre d'interaction  $\theta_2$ . Le choix des fonctions tests  $h_k(x, \varphi; \theta) = e^{(k-1)\theta_2}$  si  $|\varphi_{\mathcal{B}(x,R)}| = k - 1$ ,  $h_k(x, \varphi; \theta) = 0$  sinon, pour  $k = 1, 2$  conduit aux estimateurs explicites

$$\hat{\theta}_1(\varphi) = \ln \left( \frac{V_{0,\Lambda}(\varphi)}{N_{0,\Lambda}(\varphi)} \right), \quad \hat{\theta}_2(\varphi) = \ln \left( \frac{V_{1,\Lambda}(\varphi)}{N_{1,\Lambda}(\varphi)} \right) - \ln \left( \frac{V_{0,\Lambda}(\varphi)}{N_{0,\Lambda}(\varphi)} \right). \quad (5.2.3)$$

où  $N_{k,\Lambda}(\varphi)$  désigne le nombre de points  $x \in \varphi_\Lambda$  tels que  $|\mathcal{B}(x, R) \cap (\varphi \setminus x)| = k$  et  $V_{k,\Lambda}(\varphi)$  correspond au volume de l'ensemble  $\{y \in \Lambda, |\mathcal{B}(y, R) \cap \varphi| = k\}$ .

## 5.2.2 Résultats théoriques

### Identifiabilité

Une question fondamentale concerne l'identifiabilité de la procédure d'estimation, autrement dit l'unicité (asymptotique) de la solution (5.2.2). Plaçons-nous pour simplifier dans le cas exponentiel, i.e. le potentiel est linéaire en  $\theta$  :  $V(x^m|\varphi; \theta) := \theta_1 V_1(x^m|\varphi) + \dots + \theta_p V_p(x^m|\varphi) = \theta^T \mathbf{V}(x^m|\varphi)$  où  $\mathbf{V} := (V_1, \dots, V_p)$ . Il est assez aisément, en utilisant l'équation d'équilibre (5.0.1), la stationnarité de  $P_{\theta^*}$  et le théorème ergodique, de montrer que l'identifiabilité revient dans ce cas à exiger que

$$\sum_{k=1}^K \mathbb{E} \left( h_k(0^M, \Phi; \theta) \left( e^{-\theta^T V(0^M|\Phi)} - e^{-\theta^* T V(0^M|\Phi)} \right) \right)^2 = 0 \implies \theta = \theta^*, \quad (5.2.4)$$

où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance par rapport à  $P_{\theta^*}$ .

Il est généralement admis que pour assurer (5.2.4), il faut au moins  $K = p$  fonctions tests différentes si  $p$  représente la dimension de  $\theta$ . Or choisir  $K = p$  peut s'avérer insuffisant. Par exemple dans le cas courant où  $p = 2$  avec  $V_1 = 1$ , si l'on choisit  $h_1 = 1$  et  $h_2 = e^{\theta_1^* + \theta_2^* V_2(x^m|\varphi)}$ , deux solutions sont possibles dans (5.2.4) :  $(\theta_1^*, \theta_2^*)$  et  $(\tilde{\theta}_1, 0)$  où  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1^* - \ln(\mathbb{E}(e^{-\theta_2^* V_2(0^M|\Phi)}))$ .

Dans [Lav6], nous donnons un critère d'identifiabilité dans le cas exponentiel lorsque  $K = p$ . Il repose sur la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_\theta : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{v} &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathbb{E}(h_1(0^M, \Phi; \theta) \mid \mathbf{V}(0^M|\Phi) = \mathbf{v}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(h_p(0^M, \Phi; \theta) \mid \mathbf{V}(0^M|\Phi) = \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Nous montrons que si cette fonction préserve le signe du déterminant (et sous une hypothèse de non-dégénérescence), alors l'identifiabilité (5.2.4) est assurée. Nous montrons de plus que cette condition est quasiment nécessaire dans le cas  $p = 2$ .

Il est à noter que cette condition est très contraignante et impose à  $\Psi_\theta$  d'être quasiment linéaire en  $\mathbf{v}$ . Elle est satisfaite dans le cas où la méthode de Takacs-Fiksel correspond à la pseudo-vraisemblance : dans ce cas  $h_k = V_k$  et donc  $\Psi_\theta$  est la fonction identité. Pour d'autres choix de fonctions test  $h_k$ , l'identifiabilité est loin d'être garantie lorsque  $K = p$ .

Si l'on choisit  $K \geq p+1$  fonctions tests différentes, la situation devient plus favorable et l'identifiabilité (5.2.4) est en général vérifiée (un critère suffisant est proposé dans [Lav6]).

### Comportement asymptotique

Des premiers résultats asymptotiques ont été obtenus par J.M. Billiot [16], concernant la consistance dans un modèle d'interactions par paires, et par L. Heinrich dans [54] pour la normalité asymptotique sous certaines conditions de mélange.

Dans [Lav6], pour obtenir la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur de Takacs-Fiksel, on se place dans un cadre stationnaire et on suppose, outre l'identifiabilité traitée ci-dessus, des conditions d'intégrabilité et de continuité de l'énergie locale  $V(0^m|\varphi; \theta)$  et des fonctions tests  $h_k$ . Pour la normalité asymptotique, on suppose de plus que le potentiel est à portée finie, i.e. il existe  $D \geq 0$  tel que pour tout  $(m, \varphi) \in \mathbb{M} \times \Omega$  et tout  $\theta \in \Theta$ ,  $V(0^m|\varphi; \theta) = V(0^m|\varphi_{\mathcal{B}(0,D)}; \theta)$ , ce qui est satisfait pour la plupart des modèles de Gibbs classiques. On ne fait aucune hypothèse de mélange, contrairement à [54].

**Théorème 5.3** ([Lav6]). *En supposant que  $P_\theta$  existe et est stationnaire pour tout  $\theta \in \Theta$ , alors  $\hat{\theta}_{TF}$  converge vers  $\theta^*$  pour  $P_{\theta^*}$ -presque toute configuration  $\varphi$ , lorsque  $|\Lambda| \rightarrow \mathbb{R}^d$ . De plus, si  $P_{\theta^*}$  est ergodique,  $|\Lambda|^{1/2}(\hat{\theta}_{TF} - \theta^*)$  converge en loi vers une gaussienne, dont on connaît explicitement la variance.*

La variance asymptotique a une forme compliquée et la question de son optimisation par rapport au choix des fonctions tests  $h_k$  reste ouverte.

La consistance est une conséquence assez directe du théorème ergodique et de l'équation d'équilibre (5.0.1).

La preuve de la normalité asymptotique suit un schéma classique adapté aux estimateurs par minimum de contraste, cf [52]. Elle requiert essentiellement un théorème limite central pour le gradient de la fonction de contraste  $\sum_{k=1}^K C_\Lambda(\varphi; h_k, \theta)^2$ , lorsque  $|\Lambda| \rightarrow \mathbb{R}^d$ , ce qui revient à montrer un théorème limite central pour le gradient  $C_\Lambda^{(1)}(\varphi; h_k, \theta)$ .

A priori, il n'est pas évident qu'un théorème limite central s'applique quelque soit  $\theta^*$ . En effet, pour certaines valeurs de  $\theta^*$ , il peut y avoir transition de phase, et dans ce cas la mesure de Gibbs  $P_{\theta^*}$  n'a plus de bonnes propriétés de mélange. La force du théorème est qu'il s'applique quelque soit  $\theta^*$ , pourvu que la mesure existe, est stationnaire et ergodique. Cette généralisation est fondamentale car les hypothèses de mélange supposées

dans [54] réduisent de façon drastique les valeurs possibles pour le paramètre  $\theta^*$ , ce qui n'est pas naturel d'un point de vue statistique.

Le résultat permettant d'obtenir le théorème limite central est le suivant. Il a été proposé pour le modèle d'Ising dans [53], puis étendu au cadre des processus ponctuels dans [61] et [23]. Nous l'avons généralisé dans [Lav4] à des tableaux triangulaires et dans un cadre multivarié et non-stationnaire. La preuve repose sur la méthode de Stein et en utilisant la décomposition introduite dans [19].

**Théorème 5.4** ([Lav4]). *Soit  $X_{n,i}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{Z}^d$ , un tableau triangulaire de champs aléatoires dans un espace mesurable  $S$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\mathcal{K}_n \subset \mathbb{Z}^d$  et pour  $k \in \mathcal{K}_n$ , supposons que*

$$\mathbf{Z}_{n,k} = f_{n,k}(X_{n,k+i}, i \in \mathcal{I}_0), \quad (5.2.6)$$

où  $\mathcal{I}_0 = \{i \in \mathbb{Z}^d, |i| \leq 1\}$  et  $f_{n,k} : S^{\mathcal{I}_0} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Soit  $\mathbf{S}_n = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathbf{Z}_{n,k}$ . Si

- (i)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \mathcal{K}_n} \mathbb{E}|\mathbf{Z}_{n,k}|^3 < \infty$ ,
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathcal{K}_n, \mathbb{E}(\mathbf{Z}_{n,k} | X_{n,j}, j \neq k) = 0$ ,
- (iii)  $|\mathcal{K}_n| \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,
- (iv) Il existe une matrice symétrique  $\Sigma \geq 0$  telle que

$$\mathbb{E} \left\| |\mathcal{K}_n|^{-1} \sum_{(j,k) \in \mathcal{K}_n^2, |j-k| \leq 1} \mathbf{Z}_{n,k} \mathbf{Z}_{n,j}^T - \Sigma \right\| \rightarrow 0,$$

alors  $|\mathcal{K}_n|^{-1/2} \mathbf{S}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Concrètement, l'ensemble  $\Lambda$  est décomposé en sous-cubes  $\Delta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  de sorte que  $C_\Lambda^{(1)}(\varphi; h_k, \theta)$  s'écrit comme une somme  $\mathbf{S}_n$  où  $X_k = \Phi_{\Delta_k}$ . La propriété de centrage conditionnel (ii) du théorème précédent est la condition clé. Elle est toujours vérifiée pour le contraste de Takacs-Fiksel. L'hypothèse de convergence de la covariance empirique (iv) devient alors l'hypothèse centrale : on la vérifie dans [Lav6] lorsque le potentiel est à portée finie.

### 5.2.3 Application au modèle Quermass

Le modèle Quermass a été présenté dans la partie 4.3. Il modélise des ensembles aléatoires par une union de boules en interaction, l'interaction dépendant du périmètre, de l'aire et de la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'ensemble ainsi formé. Certaines simulations sont présentées dans la figure 4.6. Dans un travail joint avec David Dereudre et Katerina Helisovà [Lav1], nous nous intéressons à l'estimation des paramètres intervenant dans la définition du potentiel.

L'estimation dans le modèle Quermass est un problème délicat car, étant donnée une réalisation  $\varphi$  du modèle, on n'observe pas les points  $x^R := (x, R) \in \varphi$  mais uniquement

l'ensemble  $\Gamma = \bigcup_{(x,R) \in \varphi} \mathcal{B}(x, R)$ . Le maximum de vraisemblance ainsi que l'estimation par pseudo-vraisemblance ne sont donc pas utilisables dans ce contexte pour estimer tous les paramètres. Une estimation partielle par maximum de vraisemblance est néanmoins conduite dans [83].

Le contraste de Takacs-Fiksel défini au travers de (5.2.1) peut s'affranchir de la connaissance des points  $x^R$  si d'une part  $h(x^R, \varphi; \theta)$  et d'autre part la somme dans (5.2.1) sont calculables. C'est le cas pour le choix des fonctions tests suivantes, pour tout  $\alpha \geq 0$  :

$$p_\alpha(x^R, \varphi; \theta) := \mathcal{P}(\mathcal{C}(x, R + \alpha) \cap \Gamma^c), \quad (5.2.7)$$

où  $\mathcal{C}(x, R)$  est la sphère  $\{y, \|y - x\| = R\}$  et  $\mathcal{P}$  désigne le périmètre. Pour toute configuration  $\varphi$ , la somme dans (5.2.1) devient simplement le périmètre de l'ensemble  $\Gamma$  gonflé de  $\alpha$  (noté  $\Gamma^{+\alpha}$ ) :

$$\sum_{x^R \in \varphi} p_\alpha(x^R, \varphi \setminus x^R; \theta) = \mathcal{P}(\Gamma^{+\alpha}).$$

Un autre choix de fonction test est le suivant :

$$p_{iso}(x^R, \varphi; \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P}(\mathcal{C}(x, R) \cap \Gamma^c) = 2\pi R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Dans ce cas  $\sum_{x^R \in \varphi} p_{iso}(x^R, \varphi \setminus x^R; \theta)$  correspond au nombre de boules isolées dans  $\Gamma$ . Ce choix est moins satisfaisant en pratique car il suppose de définir ce qu'est une boule isolée sur des données réelles.

Supposons pour simplifier que le modèle ne contient que deux paramètres non nuls : l'intensité  $\theta_1$  et un autre paramètre géométrique  $\theta_2$  qui sera relatif soit au périmètre, soit à l'aire, soit à la caractéristique d'Euler-Poincaré (respectivement  $\theta_2, \theta_3$  ou  $\theta_4$  dans (4.3.1)). Dans ce cas, en supposant que l'identifiabilité ait lieu, le choix  $K \geq 2$  dans (5.2.2) suffit à mettre en oeuvre l'estimation des deux paramètres. Plusieurs estimateurs sont envisageables, par exemple :

- $(\hat{\theta}_{1,\alpha}, \hat{\theta}_{2,\alpha})$  :  $K = 2$  dans (5.2.2) avec  $(h_1, h_2) := (p_0, p_\alpha)$ ,  $\alpha > 0$  fixé.
- $(\hat{\theta}_{1,all}, \hat{\theta}_{2,all})$  :  $K \geq 2$  et  $(h_1, \dots, h_K) = (p_0, p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_{K-1}})$  pour différents  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, K - 1$ .
- $(\hat{\theta}_{1,sum}, \hat{\theta}_{2,sum})$  :  $K = 2$  avec  $(h_1, h_2) = (p_0, \sum_i p_{\alpha_i})$  pour plusieurs  $\alpha_i > 0$ .
- $(\hat{\theta}_{1,iso}, \hat{\theta}_{2,iso})$  :  $K = 2$  avec  $(h_1, h_2) = (p_0, p_{iso})$ .

Le troisième estimateur exploite la somme des périmètres de plusieurs gonflements de  $\Gamma$ , en ce sens il apporte une information relative à l'aire du complémentaire de  $\Gamma$ .

Le choix d'un estimateur particulier est délicat. Dans [Lav1], nous observons que des valeurs de  $\alpha$  relativement faibles, c'est à dire de légers gonflements, semblent être préférables. Trois modèles sont estimés dans la figure 5.4, il s'agit respectivement de gauche à droite des mêmes modèles que ceux représentés dans la figure 4.6. Les résultats issus

des estimateurs globaux  $(\hat{\theta}_{1,all}, \hat{\theta}_{2,all})$  et  $(\hat{\theta}_{1,sum}, \hat{\theta}_{2,sum})$  sont représentés sous forme d'un nuage de points dans la première ligne de la figure 5.4, tandis que la second ligne se concentre sur la distribution du second paramètre. L'estimateur  $(\hat{\theta}_{1,iso}, \hat{\theta}_{2,iso})$  est également reporté. Tous les estimateurs se comportent de façon comparable et sont capables de bien capter l'intensité sous-jacente  $\theta_1$  des points malgré leur non-observation.

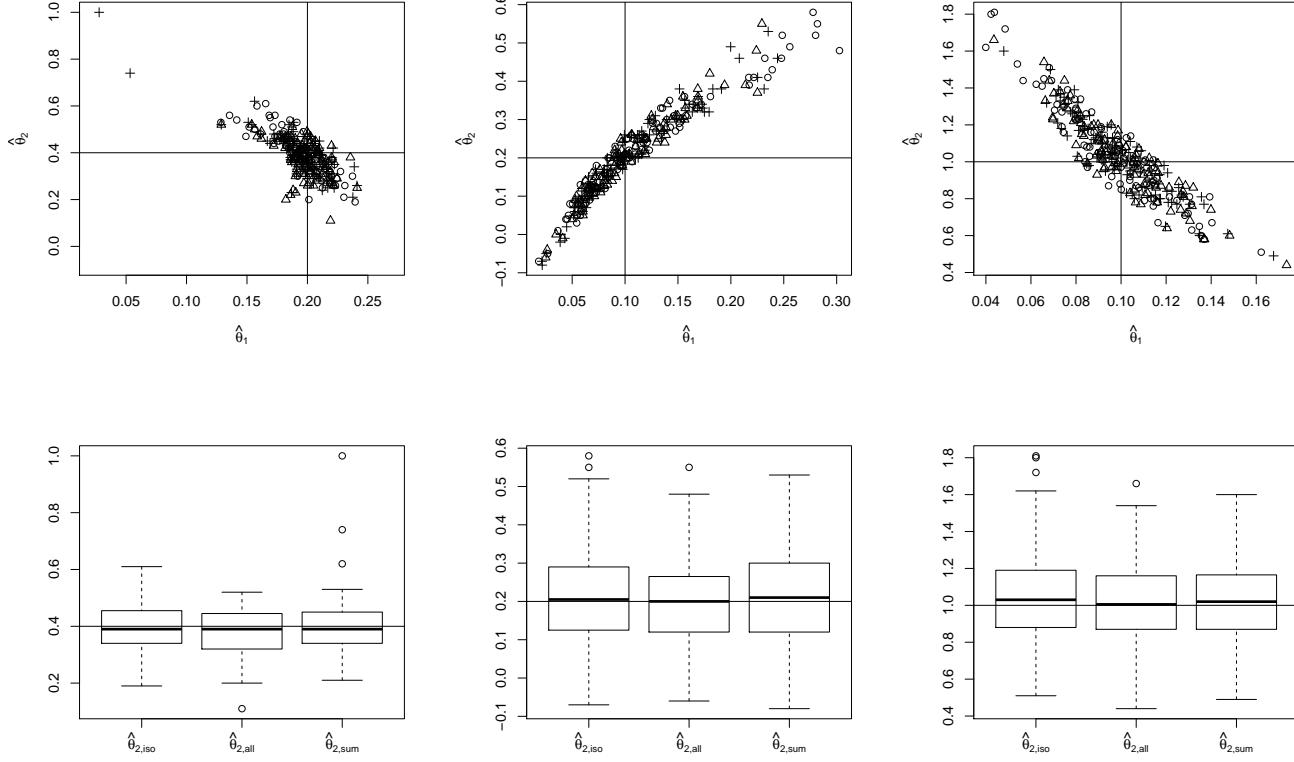


FIGURE 5.4 – Estimation sur 100 répliques des modèles de la figure 4.6. En haut : nuage de points de  $(\hat{\theta}_{1,all}, \hat{\theta}_{2,all})$  (triangles),  $(\hat{\theta}_{1,sum}, \hat{\theta}_{2,sum})$  (croix) et  $(\hat{\theta}_{1,iso}, \hat{\theta}_{2,iso})$  (cercles) ; en bas : distribution du second paramètre estimé.

### 5.3 Analyse des résidus, tests d'adéquation

Dans une démarche paramétrique, il est fondamental de pouvoir évaluer la qualité du modèle estimé. Cette analyse se fait classiquement à l'aide des résidus de la modélisation. La définition générale des résidus d'un modèle de Gibbs a été proposée dans [9]. Ils sont définis sur un ensemble  $\Lambda$ , pour toute fonction test  $h$  et pour un estimateur  $\hat{\theta}$  par

$$R_\Lambda(\varphi; h, \hat{\theta}) := \int_{\Lambda \times \mathbb{M}} h(x^m, \varphi; \hat{\theta}) e^{-V(x^m | \varphi; \hat{\theta})} \mu(dx^m) - \sum_{x^m \in \varphi_\Lambda} h(x^m, \varphi \setminus x^m; \hat{\theta}). \quad (5.3.1)$$

Ces résidus sont similaires au contraste de Takacs-Fiksel (5.2.1) calculé en la meilleure valeur possible du paramètre. Si le modèle est bien spécifié, d'après l'équation (5.0.1) et selon le théorème ergodique, ces résidus doivent être négligeables pourvu que  $\Lambda$  soit suffisamment grand. Différentes fonctions tests  $h$  ont été retenues dans la littérature

- $h(x^m, \varphi; \hat{\theta}) = 1$  : les résidus bruts,
- $h(x^m, \varphi; \hat{\theta}) = e^{V(x^m | \varphi; \hat{\theta})}$  : les résidus inverses,
- $h(x^m, \varphi; \hat{\theta}) = e^{V(x^m | \varphi; \hat{\theta})/2}$  : les résidus de Pearson,
- $h_r(x^m, \varphi; \hat{\theta}) = \mathbf{1}_{[0,r]}(d(x^m, \varphi))e^{V(x^m | \varphi; \hat{\theta})}$ , où  $d(x^m, \varphi) = \inf_{y^m \in \varphi} \|y - x\|$ .

Les trois premiers exemples sont introduits et étudiés dans [9] et [8]. Le dernier choix est considéré dans [Lav4], il conduit à des résidus de la forme

$$R_\Lambda(\varphi; h_r, \hat{\theta}) = \hat{F}_{Param}(r) - \hat{F}_{NonParam}(r) \quad (5.3.2)$$

où  $F(r) := P(\Phi \cap \mathcal{B}(0, r) \neq \emptyset)$  est la fonction de vide, et  $\hat{F}_{Param}(r)$ ,  $\hat{F}_{NonParam}(r)$  sont respectivement une estimation paramétrique et non-paramétrique de  $F(r)$ . Ce choix semble intéressant car la fonction de vide caractérise quasiment la loi d'un processus ponctuel.

En collaboration avec Jean-François Coeurjolly, nous étudions dans [Lav4] le comportement asymptotique des résidus lorsque  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Nous prouvons la convergence presque-sûre de  $|\Lambda|^{-1} R_\Lambda(\varphi; h, \hat{\theta})$  vers 0 et nous établissons un théorème limite central. Ces résultats sont notamment prouvés à l'aide du théorème 5.4 (essentiellement sous des hypothèses de régularités et de portée finie de la fonction test  $h$  et du potentiel  $V$ ), et en supposant de plus que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est consistant et suit un théorème limite central.

Ces hypothèses sont en particulier vérifiées lorsque l'on considère un modèle exponentiel (i.e. le potentiel est linéaire en les paramètres) à portée finie, l'estimateur par pseudo-vraisemblance, et les fonctions tests ci-dessus.

Le comportement en loi des résidus est généralement à la base de la construction de tests d'adéquation. Nous proposons dans [Lav4] deux approches pour valider un modèle de Gibbs ajusté sur  $\Lambda$ .

- *Première approche.* On considère  $s$  résidus calculés sur  $\Lambda$ , associés à différentes fonctions tests  $h_1, \dots, h_s$  (voir à gauche de la figure 5.5).
- *Deuxième approche.* On scinde  $\Lambda$  en  $\mathcal{J}$  sous-domaines distincts et on calcule  $R_{\Lambda_j}(\varphi; h, \hat{\theta})$  pour  $j = 1, \dots, \mathcal{J}$  et pour  $h$  fixé (voir à droite de la figure 5.5).

La première approche fournit une évaluation très complète de la qualité d'ajustement du modèle (en considérant par exemple un vecteur de résidus de la forme (5.3.2) pour

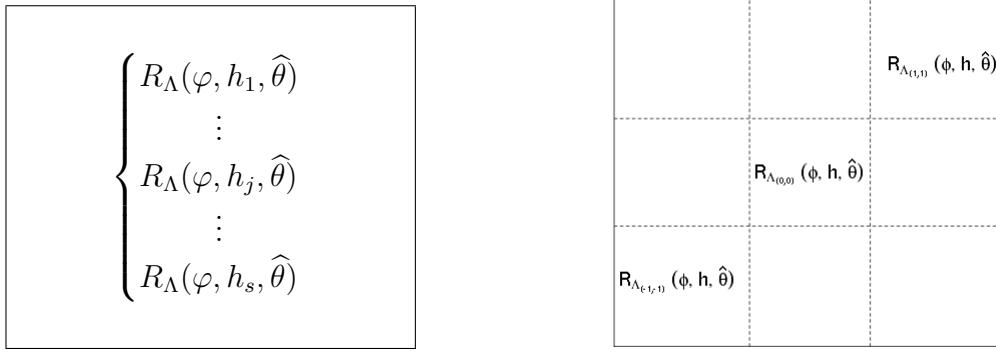


FIGURE 5.5 – Deux approches de validation par les résidus.

différentes valeurs du rayon  $r$ ). Sous l'hypothèse que le modèle est bien spécifié, nous montrons dans [Lav4] que le vecteur des résidus suit asymptotiquement une loi normale multivariée et nous proposons un estimateur de la matrice de covariance. La norme du vecteur des résidus (renormalisé par la covariance empirique) suit alors asymptotiquement une loi du chi-deux, ce qui fournit une statistique de test d'adéquation. Les défauts de cette approche sont que d'une part la matrice de covariance dépend des propriétés de l'estimateur  $\hat{\theta}$  choisi dans (5.3.1), d'autre part que cette dernière peut être difficile à estimer, enfin que les conditions pour qu'elle soit inversible sont délicates à vérifier.

La seconde approche est conforme à l'esprit du test des quadrants pour tester l'adéquation à un processus de Poisson homogène. On montre que la loi jointe des résidus calculés sur chaque sous-domaine est gaussienne, de variance explicite. On peut donc considérer la norme du vecteur des résidus ainsi formé, la renormaliser par la covariance empirique, et ainsi obtenir un test d'adéquation du chi-deux. Cette procédure, détaillée dans [Lav4], souffre des mêmes défauts que la précédente. Il est néanmoins possible de modifier la statistique en considérant le vecteur des résidus centré. Cela conduit à un test du chi-deux plus convaincant comme nous le résumons dans la proposition suivante.

**Proposition 5.1** ([Lav4]). *Soit  $\mathbf{R}_J(\varphi; h, \hat{\theta})$  le vecteur des résidus calculés sur les  $J$  sous-domaines  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_J$  (supposés de même taille) et  $\bar{\mathbf{R}}_{J,n}(\varphi; h, \hat{\theta})$  la moyenne empirique de ce vecteur. Alors, lorsque  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ , sous des hypothèses de régularités de  $V$  et  $h$ , et en les supposant de portée finie,*

$$|\Lambda_1|^{-1}\hat{\sigma}^{-1}\|\mathbf{R}_J(\varphi; h, \hat{\theta}) - \bar{\mathbf{R}}_J(\varphi; h, \hat{\theta})\|^2 \xrightarrow{d} \chi_{J-1}^2, \quad (5.3.3)$$

où  $\hat{\sigma}$  est un estimateur de  $\sigma > 0$ , quantité qui ne dépend que de  $h$  et du potentiel  $V$ .

Le résultat précédent fournit un test d'adéquation des quadrants pour les modèles de Gibbs. On peut montrer qu'il est équivalent au test des quadrants classiques dans le cas d'un processus de Poisson homogène. La statistique de test dans (5.3.3) ne requiert pas l'estimation d'une matrice de covariance, mais uniquement de la constante  $\sigma$ . Nous

montrons dans [Lav4] que  $\sigma > 0$  (qui s'avère en général vrai) est facile à vérifier pour un modèle et une fonction test  $h$  donnés. Nous proposons également un estimateur non-paramétrique  $\hat{\sigma}$ .

## 5.4 Perspectives

L'inférence dans les processus ponctuels de Gibbs reste peu étudiée d'un point de vue théorique et beaucoup reste à faire. Une première question concerne les propriétés asymptotiques de l'estimateur par maximum de vraisemblance. De façon surprenante, il n'a toujours pas été prouvé que cette technique, pourtant si populaire, est consistante. Suivant des idées esquissées dans une note non publiée de S. Mase ([80]), nous avons bon espoir de résoudre ce problème dans un cadre assez général. La question du comportement en loi du maximum de vraisemblance et de son efficacité est évidemment naturelle mais plus ambitieuse.

Les résultats théoriques présentés dans ce chapitre permettent de construire des intervalles de confiance, pourvu que les variances asymptotiques soient estimées. Des estimateurs de ces variances sont disponibles, mais ils ne sont pas satisfaisants et doivent être améliorés. Une alternative à ces estimations consiste à utiliser des méthodes de rééchantillonnage de type Bootstrap, dont la justification théorique mérriterait d'être apportée.

Cette dernière question est en lien avec le test d'adéquation présenté dans la proposition 5.1. Sa mise en oeuvre pratique requiert l'estimation de la constante  $\sigma$  et ses performances dépendent fortement de la qualité de cette estimation. L'évaluation numérique du test, notamment de sa puissance, fait l'objet d'un travail en cours.

Enfin, il semble essentiel de proposer et d'étudier des méthodes d'inférence dans les processus ponctuels non-stationnaires, ainsi que dans les processus spatio-temporels, qui sont de plus en plus utilisés en pratique.



# Bibliographie

- [1] K. Abadir, W. Distaso, and L. Giraitis. Two estimators of the long-run variance : beyond short memory. *Journal of Econometrics*, 150 :56–70, 2009.
- [2] J. Aczél. *Lectures on functional equations and their applications*. Academic Press, New York., 1966.
- [3] J. Aczél and M. Hosszú. Further uniqueness theorems for functional equations. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, 16 :51–55, 1965.
- [4] V. V. Anh and K. E. Lunney. Parameter estimation of random fields with long-range dependence. *Mathl. Comput. Modelling*, 21(9) :67–77, 1995.
- [5] F. Avram. On bilinear forms in Gaussian random variables and toeplitz matrices. *Probability Theory and Related Fields*, 79(1) :37–45, 1988.
- [6] F. Avram and M. Taqqu. Noncentral limit theorems and Appell polynomials. *Ann. Probab.*, 15 :767–775, 1987.
- [7] A. Baddeley and J. Møller. Nearest-neighbour markov point processes and random sets. *International Statistical Review*, 2 :89–121, 1989.
- [8] A. Baddeley, J. Møller, and A.G. Pakes. Properties of residuals for spatial point processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 60(3) :627–649, 2008.
- [9] A. Baddeley, R. Turner, J. Møller, and M. Hazelton. Residual analysis for spatial point processes. *Journal of the Royal Statistical Society (series B)*, 67 :1–35, 2005.
- [10] A. J. Baddeley and M. N. M. Van Lieshout. Area-interaction point processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 47(4) :601–619, 1995.
- [11] J.-M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, and M.S. Taqqu. Generators of long-range dependent processes : A survey. In P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, editors, *Long-range Dependence : Theory and Applications*. Birkhäuser, 2002.
- [12] J. Beran. A goodness of fit test for time series with long-range dependence. *J. Roy. Statist. Soc. Series B*, 54(3) :749–760, 1992.

- [13] E. Bertin, J.-M. Billiot, and R. Drouilhet. Existence of “nearest-neighbour” spatial Gibbs models. *Adv. Appli. Prob.*, 31 :895–909, 1999.
- [14] J. Besag. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice system. *Journal of the Royal Statistical Society (series B)*, 26 :192–236, 1974.
- [15] P. J. Bickel and M. J. Wichura. Convergence criteria for multiparameters stochastic processes and some applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42(5) :1656–1670, 1971.
- [16] J.-M. Billiot. Asymptotic properties of Takacs-Fiksel estimation method for Gibbs point processes. *Statistics*, 30(1) :69–89, 1997.
- [17] J.-M. Billiot, J.-F. Coeurjolly, and R. Drouilhet. Maximum pseudolikelihood estimator for exponential family models of marked Gibbs point processes. *Electronic Journal of Statistics*, 2 :234–264, 2008.
- [18] Y. Boissy, B. B. Bhattacharyya, X. Li, and G. D. Richardson. Parameter estimates for fractional autoregressive spatial processes. *Annals of Statistics*, 33(6) :2553–2567, 2005.
- [19] E. Bolthausen. On the central limit theorem for stationary mixing random fields. *The Annals of Probability*, 10(4) :1047–1050, 1982.
- [20] W. W. Chen and R. S. Deo. A generalized portmanteau goodness-of-fit test for time series models. *Econometric Theory*, 20 :382–416, 2004.
- [21] J.-F. Coeurjolly, P.O. Amblard, and S. Achard. Normalized causal and well-balanced multivariate fractional brownian motion. *submitted*, 2010.
- [22] J.-F. Coeurjolly and R. Drouilhet. Asymptotic properties of the maximum pseudolikelihood estimator for stationary Gibbs point processes including the lennard-jones model. *Electronic Journal of Statistics*, 4 :677–706, 2010.
- [23] F. Comets and M. Janzura. A central limit theorem for conditionally centred random fields with an application to Markov fields. *Journal of Applied Probability*, 35(3) :608–621, 1998.
- [24] D. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the Theory of Point Processes*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [25] Y. Davydov. The invariance principle for stationary processes. *Theory Probability and Its Applications*, 15 :487–498, 1970.
- [26] H. Dehling and M. S. Taqqu. The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to u-statistics. *Ann. Stat.*, 4 :1767–1783, 1989.

- [27] D. Dereudre. The existence of quermass-interaction processes for nonlocally stable interaction and nonbounded convex grains. *Adv. Appl. Prob.*, 41(3) :664–681, 2009.
- [28] D. Dereudre, R. Drouilhet, and H.O. Georgii. Existence of Gibbsian point processes with geometry-dependent interactions. *Probability Theory and Related Fields*, 2011.
- [29] G. Didier and V. Pipiras. Integral representations of operator fractional brownian motion. *Bernoulli*, 17(1) :1–33, 2011.
- [30] R. L. Dobrushin. Gaussian random fields - gibbsian point of view. In R. L. Dobrushin and Ya. G. Sinai, editors, *Multicomponent random systems*, volume 6 of *Adv. in Prob. and Related Topics*. New York : Dekker, 1980.
- [31] R. L. Dobrushin and P. Major. Non central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields. *Z. Warsch. verw. Geb.*, 50 :27–52, 1979.
- [32] P. Doukhan, J.R. León, and P. Soulier. Central and non central limit theorem for quadratic forms of strongly dependent stationary Gaussian fields. *Revista Brasileira de Probabilidade y Estatística*, 10 :205–223, 1996.
- [33] M. Emily and O. François. A statistical approach to estimating the strength of cell-cell interactions under the differential adhesion hypothesis. *Theoretical Biology and Medical Modelling*, 4(37) :1–13, 2007.
- [34] R. Farhadifar, J.-C. Röper, B. Aigouy, S. Eaton, and F. Jülicher. The influence of cell mechanics, cell-cell interactions, and proliferation on epithelial packing. *Current Biology*, 17(24) :2095–2104, 2007.
- [35] G. Fay and A. Philippe. Goodness-of-fit test for long range dependent processes. *ESAIM*, 6 :239–258, 2002.
- [36] T. Fiksel. Estimation of parameterized pair potentials of marked and non-marked Gibbsian point processes. *Elektron. Inform. Kybernet.*, 20 :270–278, 1984.
- [37] T. Fiksel. Estimation of interaction potentials of Gibbsian point processes. *Math. Operationsf. Statist. Ser. Statist.*, 19 :77–86, 1988.
- [38] M. E. Fisher. Correlation functions and the critical region of simple fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 5(7) :944–962, 1964.
- [39] R. Fox and M.S. Taqqu. Noncentral limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Annals of Probability*, 13 :428–446, 1985.
- [40] R. Fox and M.S. Taqqu. Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Probability Theory and Related Fields*, 74 :213–240, 1987.

- [41] M. P. Frias, F. J. Alonso, J. M. Angulo, and M. D. Ruiz-Medina. Semiparametric estimation of spatial long-range dependence. *J. of Statistical Planning and Inference*, 138 :1479–1495, 2008.
- [42] H. O. Georgii. *Gibbs measure and phase transitions*. De Gruyter, 1988.
- [43] H.-O. Georgii and H. J. Yoo. Conditional intensity and Gibbsianness of determinantal point processes. *J. Stat. Phys.*, 118 :617–666, 2005.
- [44] H.O. Georgii. Canonical and grand canonical Gibbs states for continuum systems. *Communications in Mathematical Physics*, 48(1) :31–51, 1976.
- [45] M. S. Ginovian. Nonparametric estimation of the spectrum of homogeneous gaussian fields. *J. Contemp. Math. Anal.*, 34(2) :1–15, 1999.
- [46] M. S. Ginovian and A. A. Sahakian. On the central limit theorem for toeplitz quadratic forms of stationary sequences. *Theory Probability and its Applications*, 49(4) :612–628, 2005.
- [47] L. Giraitis, P. Kokoszka, R. Leipus, and G. Teyssi  re. Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels. *Journal of Econometrics*, 112 :265–294, 2003.
- [48] L. Giraitis and D. Surgailis. A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of Whittle's estimate. *Probab. Theory Related Fields*, 86 :87–104, 1990.
- [49] L. Giraitis, M. S. Taqqu, and N. Terrin. Limit theorems for bivariate appell polynomials. part ii : Non-central limit theorems. *Probability Theory and Related Fields*, 110 :333–367, 1998.
- [50] C. W. Granger. Long memory relationships and the aggregation of dynamic models. *Journal of Econometrics*, 14 :227–238, 1980.
- [51] H. Guo, C. Y. Lim, and M. Meerschaert. Local whittle estimator for anisotropic random fields. *J. Multivariate Anal.*, 100(5) :993–1028, 2009.
- [52] X. Guyon. *Random Fields on a Network*. Springer-Verlag, 1995.
- [53] X. Guyon and H.R. K  nsch. *Asymptotic comparison of estimators in the Ising model*. Lecture notes in Statistics 74. Springer, Berlin, 1992.
- [54] L. Heinrich. Mixing properties of Gibbsian point processes and asymptotic normality of Takacs-Fiksel estimates. *preprint*, 1992.
- [55] C. C. Heyde and R. Gay. Smoothed periodogram asymptotics and estimation for processes and fields with possible long-range dependence. *Stochastic Processes and their Applications*, 45 :169–182, 1993.

- [56] H. Honda. Description of cellular patterns by dirichlet domain : the two-dimensional case. *Journal of Theoretical Biology*, 72 :523–543, 1978.
- [57] J. R. M. Hosking. Asymptotic distributions of the sample mean, autocovariances, and autocorrelations of long-memory time series. *J. of Econometrics*, 73 :261–284, 1996.
- [58] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, and B. Virág. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*. American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [59] W. Hudson and J. Mason. Operator-self-similar processes in a finite-dimensional space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 273 :281–297, 1982.
- [60] J. Illian, A. Penttinen H., and Stoyan. *Statistical analysis and modelling of spatial point patterns*. Wiley-Interscience, 2008.
- [61] J.L. Jensen and H.R. Künsch. On asymptotic normality of pseudo likelihood estimates of pairwise interaction processes. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 46 :475–486, 1994.
- [62] J.L. Jensen and J. Møller. Pseudolikelihood for exponential family models of spatial point processes. *Ann. Appl. Probab.*, 1 :445–461, 1991.
- [63] B. Kaufman and L. Onsager. Crystal statistics III : Short-range order in a binary ising lattice. *Physical Review*, 76 :1244–1252, 1949.
- [64] W. S. Kendall, M. N. M. Van Lieshout, and A. J. Baddeley. Quermass-interaction processes conditions for stability. *Adv. Appl. Prob.*, 31 :315–342, 1999.
- [65] D. Kwiatoski, P. C. B. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root : how sure are we that economic time series have a unit root ? *J. of Econometrics*, 54 :159–178, 1992.
- [66] H. Künsch. *Reellwertige Zufallsfelder auf einem Gitter : Interpolationsprobleme, Variationsprinzip und statistische Analyse*. PhD thesis, ETH Zürich, 1980.
- [67] R.G. Laha and V.K. Rohatgi. Operator self-similar stochastic processes in  $R^d$ . *Stochastic Proces. Appl.*, 12 :73–84, 1981.
- [68] G Lang and P Soulier. Convergence de mesures spectrales aléatoires et applications à des principes d'invariance. *Stat. Inf. for Stoch. Proc.*, 3 :41–51, 2000.
- [69] C. Lantuéjoul. *Geostatistical simulation*. Springer, 2002.
- [70] C. Lautensack and T. Sych. 3d image analysis of open foams using random tessellations. *Image Anal Stereol*, 25 :87–93, 2006.

- [71] H. S. Lee and P. Schmidt. On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternative. *J. of Econometrics*, 73 :285–302, 1996.
- [72] C. N. Likos, K.R. Mecke, and H. Wagner. Statistical morphology of random interface microemulsions. *J. Chem. Phys.*, pages 9350–9361, 1995.
- [73] A. Lo. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*, 59 :1279–1313, 1991.
- [74] C. Ludena and M. Lavielle. The whittle estimator for strongly dependent stationary gaussian fields. *Scand. J. Stat.*, 26 :433–450, 1999.
- [75] O. Macchi. The coincidence approach to stochastic point processes. *Advances in Applied Probability*, 7 :83–122, 1975.
- [76] M. Maejima and J. Mason. Operator-self-similar stable processes. *Stochastic Proces. Appl.*, 54 :139–163, 1994.
- [77] P Major. *Multiple Wiener-Itô Integrals*. Number 849 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1981.
- [78] S. Mase. Consistency of maximum pseudo-likelihood estimator of continuous state space gibbsian process. *Adv. Appl. Probab.*, 5 :603–612, 1995.
- [79] S. Mase. Marked gibbs processes and asymptotic normality of maximum pseudo-likelihood estimators. *Math. Nachr.*, 209 :151–169, 2000.
- [80] S. Mase. Asymptotic properties of MLE’s of gibbs models on  $\mathbb{R}^d$ . *Manuscript*, 2002.
- [81] K.R. Mecke. A morphological model for complex fluids. *J. Phys. Condens. Matter*, 8 :9663–9667, 1996.
- [82] J. Møller and K. Helisová. Power diagrams and interaction processes for union of discs. *Adv. Appl. Prob.*, 40(2) :321–347, 2008.
- [83] J. Møller and K. Helisová. Likelihood inference for unions of interacting discs. *Scandinavian Journal of Statistics*, 37(3) :365–381, 2010.
- [84] J. Møller and R. Waagepetersen. *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
- [85] X. Nguyen and H. Zessin. Integral and differential characterizations Gibbs processes. *Mathematische Nachrichten*, 88(1) :105–115, 1979.
- [86] X.X. Nguyen and H. Zessin. Ergodic theorems for spatial processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 48 :133–158, 1979.

- [87] D. Nualart and S. Ortiz-Latorre. Central limit theorems for multiple stochastic integrals and malliavin calculus. *Stochastic Processes and their Applications*, 118(4) :614–628, 2008.
- [88] D. Nualart and G. Peccati. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Annals of Probability*, 33(1) :177–193, 2005.
- [89] G. Oppenheim and M.-C. Viano. Aggregation of random parameter Ornstein-Uhlenbeck or AR processes : some convergence results. *J. Time ser. Anal.*, 25(3) :335–350, 2004.
- [90] A. Philippe, D. Surgailis, and M.-C. Viano. Time-varying fractionally integrated processes with nonstationary long memory. *Theory Probab. Appl.*, 52 :651–673, 2008.
- [91] A. Poupon. Voronoi and voronoi-related tessellations in studies of protein structure and interaction. *Curr. Opin. Struct. Biol.*, 2 :233–241, 2004.
- [92] C.J. Preston. *Random fields*. Springer Verlag, 1976.
- [93] B.K. Ray and N. Crato. Model selection and forecasting for long-range dependent processes. *International Journal of Forecasting*, 15 :107–125, 1996.
- [94] B.D. Ripley. Modelling spatial patterns (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 39 :172–212, 1977.
- [95] P.M. Robinson. Statistical inference for a random coefficient autoregressive model. *Scand. J. Stat.*, 5 :163–168, 1978.
- [96] P.M. Robinson. Efficient tests of nonstationary hypotheses. *Journal of American Statistical Association*, 89 :1420–1437, 1994.
- [97] J. Romano and M. Wolf. A more general central limit theorem for m-dependent random variables with unbounded m. *Statistics and Probability Letters*, 47 :115–124, 2000.
- [98] D. Ruelle. *Statistical Mechanics*. Benjamin, New York-Amsterdam, 1969.
- [99] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall, New York, London, 1994.
- [100] D. Stoyan, W.S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley and Sons, Chichester, 1995.
- [101] D. Surgailis. Zones of attraction of self-similar multiple integrals. *Lithuanian Math. J.*, 22 :327–340, 1982.

- [102] D. Surgailis. Non clts : U-statistics, multinomial formula and approximations of multiple Itô-Wiener integrals. In P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, editors, *Theory and Applications of Long-Range Dependence*, pages 129–142. Birkhäuser, Boston, 2003.
- [103] D. Surgailis, G. Teyssi  re, and M. Vai  ciulis. The increment ratio statistic. *Journal of Multivariate Analysis*, 99 :510–541, 2008.
- [104] R. Takacs. Estimator for the pair-potential of a Gibbsian point process. *Math. Operationsf. Statist. Ser. Statist.*, 17 :429–433, 1986.
- [105] M. S. Taqqu. Fractional Brownian motion and long-range dependence. In P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, editors, *Long-range Dependence : Theory and Applications*. Birkhäuser, 2001. Appears in this volume.
- [106] M.S. Taqqu. Weak convergence to fractional brownian motion and to the rosenblatt process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 31 :287–302, 1975.
- [107] M.S. Taqqu. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 50 :53–83, 1979.
- [108] N. Terrin and M. Taqqu. A noncentral limit theorem for quadratic forms of Gaussian stationary sequences. *J. Theor. Probab.*, 3 :449–475, 1990.
- [109] T Van der Meer. Invariance principle for strongly dependent sequences. *Pr  pub. Lab. Prob. et Stat.Paris VI*, 373, 1996.
- [110] C. Varin, N. Reid, and D. Firth. An overview of composite likelihood methods. *Statistica Sinica*, 21 :5–42, 2011.
- [111] S. Wainger. *Special trigonometric series in k-dimensions*. Number 59. AMS, 1965.
- [112] L. Wang. Memory parameter estimation for long range dependent random fields. *Stat. and Proba. Letters*, 79 :2297–2306, 2009.
- [113] B. Widom and J.S. Rowlinson. New model for the study of liquid-vapor phase transitions. *J. Chem. Phys.*, 52 :1670–1684, 1970.
- [114] A. T. A. Wood and G. Chan. Simulation of stationary Gaussian processes in  $[0, 1]^d$ . *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 3 :409–432, 1994.
- [115] A. M. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [116] P. Zaffaroni. Contemporaneous aggregation of linear dynamic models in large economies. *J. of Econometrics*, 120 :75–102, 2004.