PUB. IRMA, LILLE 2005
Vol. 61, N° V

Principes d'invariance pour les champs aléatoires fortement dépendants.

II : Application aux sommes partielles de champs à longue mémoire non régulière

Frédéric Lavancier
LS-CREST, INSEE, Paris
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, FRE CNRS 2222
Bât. M2. Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Résumé

Nous traitons dans cette seconde partie quelques applications du théorème de convergence de champs spectraux établi dans la première partie. Ces applications concernent la loi limite des sommes partielles pour des champs aléatoires linéaires, obtenus par filtrage d'un champ à spectre borné. Ces champs aléatoires peuvent être de différents types : faiblement dépendants, à longue mémoire régulière ou à longue mémoire non régulière.

Abstract

In this second part we present some applications of the spectral convergence theorem established in the first part of this work. We consider linear random fields constructed by filtering a white noise and we focus on the asymptotic law of their partial sums. Among these random fields, some are weakly dependent while others present standard as well as non standard long memory.

Mots clés : Filtrage linéaire, Limite non gaussienne, Longue mémoire non régulière, Tableaux triangulaires, Sommes partielles pour les champs aléatoires.

1 Introduction

Un champ aléatoire stationnaire $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est communément dit à longue mémoire, ou fortement dépendant, lorsque sa fonction de covariance $r(h),\ h \in \mathbb{Z}^d$, n'est pas absolument sommable, c'est à dire si $\sum_{h\in\mathbb{Z}^d} |r(h)| = \infty$. Une définition alternative proche mais pas équivalente consiste à supposer sa densité spectrale non bornée en certains points.

Dobrushin and Major (1979) ont établi la convergence des sommes partielles de fonctionnelles de champs gaussiens fortement dépendants vérifiant certaines conditions de régularité. Plus précisément, ces auteurs supposent que le champ $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$, est gaussien et qu'il est à longue mémoire régulière au sens de la définition suivante :

Définition 1. Un champ aléatoire stationaire du second ordre est dit à longue mémoire régulière si sa fonction de covariance vérifie :

$$r(h) \underset{h\to\infty}{\sim} |h|^{-\alpha} L(|h|)\, b\left(\frac{h}{|h|}\right), \qquad 0 < \alpha < d \tag{1.1}$$

où L est une fonction à variation lente sur $\mathbb{R}^+$ et b est une fonction continue sur la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, $|.|$ étant la norme euclidienne sur $\mathbb{Z}^d$.

Dobrushin and Major (1979) obtiennent dans ce cadre la convergence des sommes partielles convenablement renormalisées $n^{k\alpha/2-d}L(n)^{-k/2}\sum_{i_1=0}^{[nt_1]}\dots\sum_{i_d=0}^{[nt_d]} H(X_{i_1,\dots,i_d})$, où k est le degré de Hermite de H.

La condition (1.1) sur la fonction de covariance est reprise dans Doukhan et al. (2002) où les auteurs s'intéressent au processus empirique d'un champ linéaire à longue mémoire. Ils montrent sous l'hypothèse (1.1) que le processus empirique, convenablement renormalisé, converge faiblement pour la topologie uniforme vers un processus dégénéré.

La condition (1.1) est donc l'hypothèse classique rencontrée dans les travaux sur les champs à longue mémoire. Elle est la généralisation immédiate de l'hypothèse quasi-exclusive d'un processus à longue mémoire régulière en dimension 1 : $r(h) = h^{-\alpha}L(h)$ où $0 < \alpha < 1$, $h \in \mathbb{Z}$ et L est une fonction à variation lente.

Nous nous intéressons ici au comportement asymptotique des sommes partielles d'un champ aléatoire linéaire lorsque ce dernier est à longue mémoire non régulière, c'est à dire lorsque sa fonction de covariance n'est pas sommable, sans pour autant vérifier (1.1). Ce type de champ peut se construire de façon très simple. Considérons par exemple, en dimension $d = 2$, un champ aléatoire X obtenu par filtrage d'un bruit blanc ξ centré de variance $\sigma^2 \neq 0$, i.e.

$$X_{n_1,n_2} = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \hat{a}(k_1,\ k_2)\xi_{n_1-k_1,n_2-k_2},$$

où $\hat{a}$ est la transformée de Fourier du filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^2)$. Dans ce cas, la densité spectrale de X vaut $f(x,y) = \sigma^2 a^2(x,y)$. Il suffit donc de choisir un filtre de la forme $a(x,\ y) = |x+\theta y|^\alpha$, où $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$ et $-1/2 < \alpha < 0$; le champ ainsi construit est alors à longue mémoire car sa densité spectrale est non bornée à l'origine et le lemme (1) du paragraphe 4 montre que la fonction de covariance associée à cette densité spectrale ne satisfait pas la condition (1.1).

Afin d'établir des théorèmes limite pour les champs aléatoires à longue mémoire non régulière, nous utilisons l'approche de Lang and Soulier (2000) en dimension 1 qui repose sur un théorème de convergence de mesures spectrales. Ce dernier a été généralisé au cadre multidimensionnel dans Lavancier (2003) ; nous en rappelons l'énoncé dans la partie 2. Nous y exposons également la démarche générale s'appuyant sur l'approche spectrale pour étudier les sommes partielles. Lang and Soulier (2000) ont ainsi obtenu en dimension 1 des théorèmes limite pour des sommes partielles de processus construits à partir de filtrages standards. Ils ont étudié plus précisement le cas des filtres continus à l'origine et bornés ailleurs, ce qui permet de construire des processus faiblement dépendants, et le cas des filtres homogènes qui permettent de constuire des processus à longue mémoire. Ces résultats en dimension 1 sont inclus dans le théorème 3 et 4 où certaines hypothèses sont allégées par rapport aux travaux de Lang and Soulier (2000) ; ainsi la convergence obtenue avec des filtres continus à l'origine et bornés ailleurs reste vrai si ces derniers sont uniquement continus à l'origine, cela permet d'étendre aux processus à longue mémoire saisonnière la limite en loi des sommes partielles.

La partie 3 s'intéresse à la limite des sommes partielles pour des champs issus de filtrages standards. Ces champs sont pour la plupart faiblement dépendants ; nous verrons cependant que certains champs à longue mémoire non régulière rentrent dans cette étude. Dans le cas des champs faiblement dépendants, le point de vue est différent des travaux déjà existants (citons par exemple l'article de Breuer and Major (1983) qui traite de fonctionnelles de processus gaussiens). Ces derniers font des hypothèses sur la structure de la fonction de covariance tandis que nous proposons ici une approche spectrale. Nous obtenons dans chaque cas la loi limite quelle que soit la dimension d.

La partie 4 traite des sommes partielles dans le cas de champs à longue mémoire non régulière. Notre démarche, consistant à s'appuyer sur le théorème 1, nous donne les lois limites en toute généralité en dimension $d = 2$. Elle ne permet cependant pas de conclure en toute dimension ; nous focaliserons alors notre étude sur des classes particulières de champs à longue mémoire non régulière pour lesquelles la loi limite est obtenue quel que soit d.

Nous proposons enfin en annexe quelques resultats concernant les approximations de l'unité. L'objectif est de cerner quelques propriétés du noyau de Fejer car il apparaît de façon recurrente dans nos démonstrations. Nous étudierons plus particulièrement l'effet du produit tensoriel et du produit de convolution de telles fonctions.

2 Convergence des sommes partielles par une approche spectrale

Nous rappelons le théorème de convergence de mesures spectrales démontré dans Lavancier (2003) à partir duquel nous pourrons étudier la convergence des sommes partielles de champs linéaires obtenus par filtrage.

Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel centré de densité spectrale f_ξ bornée par un réel positif M. On suppose l'hypothèse suivante vérifiée :

H 1. *La suite S_n^ξ définie sur $]0,\infty[^d$ par :*

$$S_n^\xi(t_1,\dots,t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]-1} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]-1} \xi_{k_1,\dots,k_d}$$

converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers un processus mesurable B.

La suite ξ_k admet la représentation spectrale suivante :

$$\xi_k = (2\pi)^{-d/2} \int_{[-\pi,\ \pi]^d} e^{i<k,\mathbf{x}>} dW(\mathbf{x}),$$

où la mesure de contrôle de W a pour densité $f = (2\pi)^d f_\xi$.

Soit W_n la mesure aléatoire à accroissements orthogonaux sur $[-n\pi;\ n\pi]^d$ définie par

$$W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A).$$

Sa mesure de contrôle $f_n(\mathbf{x}) = f(n^{-1}\mathbf{x})$ est définie pour tout $\mathbf{x}$ dans $[-n\pi; n\pi]^d$ et est bornée par M.

Théorème 1. *Sous* **H 1***, il existe une application linéaire I_o de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\forall \Phi \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad E\left(I_o\left(\Phi(\mathbf{x})\right)\right)^2 \leq M \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$
(ii) $I_o\left((2\pi)^{-d/2} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j}-1}{ix_j}\right) = B(t_1, \ldots, t_d)$
(iii) Si Φ_n *est une suite de fonctions qui converge dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *vers* Φ*, alors* $\int \Phi_n(\mathbf{x}) dW_n(\mathbf{x})$ *converge en loi vers* $I_o\left(\Phi(\mathbf{x})\right)$.

Remarque 1. Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort, l'application I_o est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et l'on peut la considérer comme une intégrale stochastique par rapport à une certaine mesure aléatoire W_o, i.e. $I_o(\Phi) = \int \Phi dW_o$. Dans ce cas, B est le champ brownien et la propriété (ii) correspond alors à sa représentation harmonisable faisant intervenir l'intégrale selon W_o :

$$B(t_1, \ldots, t_d) = (2\pi)^{-d/2} \int \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_o(x_1, \ldots, x_d).$$

Le théorème 1 nous permet d'étudier l'asymptotique des sommes partielles d'un champ aléatoire obtenu par filtrage du bruit ξ. Ces sommes s'écrivent en effet :

$$S_n(t_1, \ldots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]-1} X_{k_1, \ldots, k_d}, \tag{2.1}$$

où

$$X_{n_1, \ldots, n_d} = \sum \hat{a}(k_1, \ldots, k_d) \xi_{n_1 - k_1, \ldots, n_d - k_d}, \tag{2.2}$$

où $\hat{a}(k_1, \ldots, k_d)$ sont les coefficients de Fourier du filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ et vérifient donc

$$a(x) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{a}(k_1, \ldots, k_d) e^{-i<k,x>}.$$

Le filtre a est directement lié à la densité spectrale de X, notée f_X :

$$f_X(x) = (2\pi)^d f_\xi(x) a^2(x),$$

si f_ξ est la densité spectrale de ξ. En particulier, lorsque ξ est un bruit blanc de variance σ^2, on a $f_X(x) = \sigma^2 a^2(x)$.

On peut écrire S_n en utilisant la représentation spectrale de ξ :

$$S_n(t) = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) dW_n(x), \tag{2.3}$$

avec

$$D_n(x_j, t_j) = \frac{e^{ix_j [t_j n]/n} - 1}{n(e^{ix_j/n} - 1)} \mathbf{I}_{[0,\ n\pi]}(x_j). \tag{2.4}$$

Il suffit donc d'étudier, à t fixé, la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de $a(x/n) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j)$, éventuellement renormalisé, pour pouvoir utiliser le résultat de convergence du théorème 1 et obtenir la limite en loi de S_n. Nous noterons par la suite

$$D(x_j, t_j) = \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}, \tag{2.5}$$

la limite à t_j fixé, simple et dans L^2, de $x_j \mapsto D_n(x_j, t_j)$.

3 Sommes partielles de champs à densité spectrale régulière

3.1 Champs à courte mémoire

Nous donnons la limite en loi des sommes partielles dans le cas où le champ aléatoire résulte d'un filtrage par $a \in L^2([-\pi,\pi])$ supposé continu et non nul à l'origine et borné ailleurs. On retrouve la même limite que celle des sommes partielles du bruit dont il est issu par filtrage, en particulier le champ brownien lorsque le bruit est fort.

Théorème 2. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire à densité spectrale bornée vérifiant l'hypothèse* **H 1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ défini par (2.2), obtenu par filtrage de ξ à travers a.*

On suppose que le filtre a appartient à $L^2[-\pi,\pi]^d$, est borné sur ce domaine et que $a(0)\neq 0$. Considérons, pour $t \in]0,\infty[^d$, la somme $S_n(t)$ définie par (2.1). On a la convergence en loi suivante :

$$S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} a(0)(2\pi)^{d/2}B(t),$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ intervenant dans l'hypothèse **H 1**.

Démonstration. On utilise le théorème 1. D'après l'approche explicitée dans le paragraphe 2 et en gardant les mêmes notations, il suffit de prouver la convergence suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx=0. \tag{3.1}$$

Découpons l'intégrale (3.1) :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx$$
$$=\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx+\int_{\cup_{j=1}^d\{|x_j|>n\pi\}}\left|a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx.$$

La dernière intégrale tend vers 0 à t fixé car la fonction $x_j\mapsto D(x_j,t_j)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $|D(x_j,t_j)|^2<2x_j^{-2}$, elle est donc integrable sur $\mathbb{R}$ pour tout j. Pour la première intégrale :

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx$$
$$\leq 2\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)-a(0)\right|^2\prod_{j=1}^d|D_n(x_j,t_j)|^2\,dx+2\int_{[-n\pi,n\pi]^d}a^2(0)\left|\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx.$$

La démonstration du lemme 2 de Lavancier (2003) nous permet de déduire la convergence vers 0 de la dernière intégrale. Enfin, pour la première intégrale, on effectue le changement de variable $x/n\to x$.

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)-a(0)\right|^2\prod_{j=1}^d|D_n(x_j,t_j)|^2\,dx=\int_{[-\pi,\pi]^d}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^d\tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx,$$

où

$$\tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)=2\pi\frac{[nt_j]}{n}F_{[nt_j]}(x_j), \tag{3.2}$$

formule dans laquelle $F_{[nt_j]}$ représente le noyau de Fejer :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2))} && \text{si } x \neq 0 \\ &= \frac{n}{2\pi} && \text{si } x = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La partie 5 donne quelques propriétés concernant le noyau de Fejer. Comme ce dernier est une approximation de l'unité au sens fort, il est aisé de voir que, pour $t_j > 0$ fixé, $\tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)$ se comporte comme une approximation de l'unité au sens fort d'après la définition 2 de l'annexe, à ceci près que son intégrale est équivalente à $2\pi t_j$ et non 1. D'après la proposition 1 de l'annexe, le produit tensoriel d'approximations de l'unité est une approximation de l'unité au sens faible. La fonction $x \mapsto |a(x) - a(0)|^2$ étant continue à l'origine et bornée sur $[-\pi, \pi]^d$, on peut appliquer le théorème 7 et d'après (5.3)

$$\lim_{n\to 0} \int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx = 0.$$

□

3.2 Champs dont la densité spectrale est un produit tensoriel

Nous nous intéressons aux champs aléatoires resultant d'un filtrage par un produit tensoriel de filtres sur $[-\pi, \pi]$. Ces champs ont donc une densité spectrale ainsi qu'une fonction de covariance de type produit tensoriel.

Lorsque $d = 1$, on retrouve le cas étudié par Lang and Soulier (2000) ; nous élargissons un peu le cadre par rapport à leurs travaux car, là où ils exigeaient qu'un filtre continu à l'origine soit borné ailleurs, seule la continuité à l'origine est requise. Cet allègement des hypothèses permet de faire rentrer dans la même étude les processus faiblement dépendants et les processus à densité spectrale non bornée en des points autres que l'origine, ce qui correspond à un comportement de longue mémoire saisonnière.

Dans le cas multidimensionnel, le filtre produit est supposé être composé de filtres homogènes dans certaines directions et de filtres continus à l'origine dans les autres directions. La normalisation et la loi limite dépendent ainsi du nombre de filtres homogènes qui composent ce produit tensoriel.

Théorème 3. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire à densité spectrale bornée vérifiant l'hypothèse* **H 1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ défini par (2.2), obtenu par filtrage de ξ à travers a.*

On suppose le filtre a sur $[-\pi, \pi]^d$ défini par

$$a(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{j=1}^{d} a_j(x_j), \tag{3.4}$$

avec les a_j des filtres sur $[-\pi, \pi]$ vérifiant :

- *ou bien a_j est continu en 0 avec $a_j(0) \neq 0$*
- *ou bien a_j est homogène de degré α_j , c'est à dire si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $a_j(\lambda x_j) = |\lambda|^{\alpha_j} a(x_j)$, et tel que*

$$\int_{\mathbb{R}} a_j^2(x_j)|D(x_j, t_j)|^2 dx_j < \infty, \tag{3.5}$$

où D est défini par (2.5), et a_j est prolongé de $[-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{R}$ de façon naturelle par homogénéité.

Considérons, pour $t \in\ ]0, \infty[^d$, les sommes partielles $S_n(t)$ définie par (2.1). En notant $\mathcal{J}$ l'ensemble de indices j pour lesquels a_j est homogène de degré α_j et $\mathcal{I}$ les autres indices, on a la convergence en loi suivante :

$$n^{(\sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j)} S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \left(\prod_{j\in\mathcal{I}} a_j(0) \right) I_o \left(\prod_{j\in\mathcal{J}} a_j(x_j) \prod_{j=1}^{d} D(x_j, t_j) \right),$$

où I_o est l'application linéaire définie dans le théorème 1.

Remarque 2. Si ξ est un bruit blanc fort, on peut écrire I_o sous forme d'intégrale stochastique (cf la remarque 1). Dans ce cas et lorsque tous les a_j sont homogènes de la forme $a_j(x_j) = |x_j|^{-\alpha_j}$ avec $0 < \alpha_j < 1/2$, on retrouve comme limite le drap brownien fractionnaire, plus précisement sa représentation harmonisable, et :

$$n^{(\sum_{j=1}^d \alpha_j)} S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j |x_j|^{\alpha_j}} dW_o(x),$$

où W_o est défini dans la remarque 1.

Remarque 3. La forme (3.4) du filtre permet des comportements de longue mémoire non régulière pour le champ résultant. Prenons par exemple en dimension 2 un filtre de la forme :

$$a(x, y) = |x^2 - x_o^2|^{-\alpha} |y^2 - y_o^2|^{-\beta}, \tag{3.6}$$

où $x_o y_o \neq 0$ et $0 < \alpha, \beta < 1/2$. La densité spectrale du champ issu du filtrage d'un bruit blanc par a est proportionnelle à a^2, il s'agit donc ici d'un produit tensoriel ; on trouve dans Oppenheim et al. (2000) la forme de la fonction de covariance associée aux densités spectrales qui composent ce produit tensoriel et l'on en déduit :

$$r(h, l) = L_1(h) L_2(l) \cos(hx_o) \cos(ly_o) h^{2\alpha-1} l^{2\beta-1},$$

où L_1 et L_2 sont des fonctions à variation lente à l'infini. Cette structure de covariance ne rentre pas dans le cadre classique (1.1) à cause de son comportement ondulatoire.

Démonstration du théorème 3. Pour appliquer le théorème 1, il suffit d'étudier la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la fonction :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^d a_j\left(\frac{x_j}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j),$$

où D_n est défini par (2.4). Compte tenu de l'homogénéité de certains a_j, il convient, pour trouver une limite non dégénérée, de renormaliser cette expression par $n^{\sum_{j\in\mathcal{J}} \alpha_j}$; cela explique la normalisation du théorème 3. Ceci aura pour effet de considérer les fonctions homogènes a_j sur $\mathbb{R}$ et non plus sur $[-\pi, \pi]$. Le prolongement est immédiat grâce à l'homogénéité ; seule une condition d'intégrabilité est nécessaire pour nos calculs, c'est la condition (3.5) du théorème. Nous devons finalement montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j\in\mathcal{J}} a_j(x_j)^2 \left| \prod_{j\in\overline{\mathcal{J}}} a_j\left(\frac{x_j}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - \prod_{j\in\overline{\mathcal{J}}} a_j(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx = 0.$$

En dimension 1, cette convergence se limite à deux cas selon la nature du filtre. Si le filtre a est continu à l'origine alors

$$\forall t > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) D_n(x, t) - a(0) D(x, t) \right|^2 dx = 0. \tag{3.7}$$

Si le filtre a est homogène de degré α vérifiant de plus $\int_{\mathbb{R}} a^2(x) |D(x, t)|^2 dx < \infty$, où D est défini dans (2.5), alors

$$\forall t > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} a^2(x) \left| D_n(x, t) - D(x, t) \right|^2 dx = 0. \tag{3.8}$$

Les démonstrations des convergences (3.7) et (3.8) sont incluses comme cas particulier dans les démonstrations des convergences (4.1) et (4.2) du théorème 4 de la partie 4.

En dimension d quelconque, on procède par récurrence. On restreint donc la démonstration au cas $d = 2$, le résultat se généralisant à d quelconque de la même manière. Tois cas sont possibles : soit les deux filtres sont homogènes, soit ils sont tous deux continus à l'origine, soit ils sont chacun d'un type différent, l'un homogène, l'autre continu en 0. Pour chaque cas nous nous ramenons à la dimension 1 en utilisant la décomposition suivante :

$$AB - CD = (A - C)(B - D) + (A - C)D + (B - D)C. \tag{3.9}$$

Supposons que les deux filtres sont homogènes, nous devons montrer la convergence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} a_1^2(x_1)a_2^2(x_2) \left|D_n(x_1,t_1)D_n(x_2,t_2) - D(x_1,t_1)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_1dx_2 = 0.$$

En décomposant comme dans (3.9),

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} a_1^2(x_1)a_2^2(x_2) \left|D_n(x_1,t_1)D_n(x_2,t_2) - D(x_1,t_1)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_1dx_2 \\
&\le 3\int_{\mathbb{R}} a_1^2(x_1)|D_n(x_1,t_1) - D(x_1,t_1)|^2dx_1 \int_{\mathbb{R}} a_2^2(x_2)|D_n(x_2,t_2) - D(x_2,t_2)|^2dx_2 \\
&+ 3\int_{\mathbb{R}} a_1^2(x_1)|D_n(x_1,t_1) - D(x_1,t_1)|^2dx_1 \int_{\mathbb{R}} a_2^2(x_2)|D(x_2,t_2)|^2dx_2 \\
&+ 3\int_{\mathbb{R}} a_2^2(x_2)|D_n(x_2,t_2) - D(x_2,t_2)|^2dx_2 \int_{\mathbb{R}} a_1^2(x_1)|D(x_1,t_1)|^2dx_1.
\end{aligned}$$

La convergence de chaque terme est assurée par (3.8) et car $\int_{\mathbb{R}} a_i^2(x_i)|D(x_i,t_i)|^2dx_i < \infty$ pour $i = 1, 2$.

Si les deux filtres sont continus en 0, on procède de la même manière :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left|a_1\left(\frac{x_1}{n}\right)a_2(\frac{x_2}{n})D_n(x_1,t_1)D_n(x_2,t_2) - a_1(0)a_2(0)D(x_1,t_1)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_1dx_2 \\
&\le 3\int_{\mathbb{R}} \left|a_1\left(\frac{x_1}{n}\right)D_n(x_1,t_1) - a_1(0)D(x_1,t_1)\right|^2 dx_1 \int_{\mathbb{R}} \left|a_2\left(\frac{x_2}{n}\right)D_n(x_2,t_2) - a_2(0)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_2 \\
&+ 3\int_{\mathbb{R}} \left|a_1\left(\frac{x_1}{n}\right)D_n(x_1,t_1) - a_1(0)D(x_1,t_1)\right|^2 dx_1 \int_{\mathbb{R}} a_2^2(0)|D(x_2,t_2)|^2dx_2 \\
&+ 3\int_{\mathbb{R}} \left|a_2\left(\frac{x_2}{n}\right)D_n(x_2,t_2) - a_2(0)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_2 \int_{\mathbb{R}} a_1^2(0)|D(x_1,t_1)|^2dx_1.
\end{aligned}$$

Tous les termes convergent vers 0 d'après (3.7) et car $\int_{\mathbb{R}} |D(x,t)|^2dx < \infty$.

Enfin, si un filtre est homogène, a_1 par exemple, et l'autre continu en 0 :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} a_1^2(x_1)\left|a_2\left(\frac{x_2}{n}\right)D_n(x_1,t_1)D_n(x_2,t_2) - a_2(0)D(x_1,t_1)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_1dx_2 \\
&\le 3\int_{\mathbb{R}} a_1^2(x_1)|D_n(x_1,t_1) - D(x_1,t_1)|^2dx_1 \int_{\mathbb{R}} \left|a_2\left(\frac{x_2}{n}\right)D_n(x_2,t_2) - a_2(0)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_2 \\
&+ 3\int_{\mathbb{R}} a_1^2(x_1)|D_n(x_1,t_1) - D(x_1,t_1)|^2dx_1 \int_{\mathbb{R}} a_2^2(0)|D(x_2,t_2)|^2dx_2 \\
&+ 3\int_{\mathbb{R}} \left|a_2\left(\frac{x_2}{n}\right)D_n(x_2,t_2) - a_2(0)D(x_2,t_2)\right|^2 dx_2 \int_{\mathbb{R}} a_1^2(x_1)|D(x_1,t_1)|^2dx_1.
\end{aligned}$$

Tous les termes convergent bien vers 0 grâce à (3.7) et (3.8). □

4 Sommes partielles de champs à longue mémoire non régulière

Nous proposons dans cette partie des résultats de convergence lorsque le filtre est continu en 0, non nul en ce point, mais pas nécessairement continu ou borné ailleurs. Nous nous intéressons également au cas des filtres homogènes. Ces constructions permettent d'obtenir des champs aléatoires dont la structure de dépendance peut être très variée : courte mémoire, longue mémoire régulière mais aussi non régulière.

Nous verrons que l'utilisation du théorème 1 sur la convergence de mesures spectrales ne permet pas d'obtenir les limites des sommes partielles en toute dimension mais uniquement dans le cas $d = 2$. En dimension supérieure, il conviendra de se borner à des classes de champs particuliers pour obtenir des théorèmes limite, ce sera l'objet du second point de cette partie.

4.1 Théorèmes limite en dimension 2

Le théorème suivant donne le comportement asymptotique des sommes partielles d'un champ aléatoire en dimension 2 dont la densité spectrale est continue à l'origine ou homogène.

Théorème 4. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire à densité spectrale bornée vérifiant l'hypothèse* **H 1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ défini par (2.2), obtenu par filtrage de ξ à travers a. Considérons, pour $t \in]0,\infty[^d$, la somme $S_n(t)$ définie par (2.1).*

(i) Si le filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^d)$ est continu en l'origine avec $a(0) \neq 0$, alors, pour $d \leq 2$,

$$S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} a(0)(2\pi)^{d/2}B(t), \tag{4.1}$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ intervenant dans l'hypothèse **H 1**.

(ii) Si le filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^d)$ est homogène de degré α, avec $-d < \alpha < 0$, et qu'il vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} a^2(x)\prod_{i=1}^d |D(x_i,t_j)|^2 dx < \infty$, alors pour $d \leq 2$,

$$n^\alpha S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} I_o\left(a(x)\prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right), \tag{4.2}$$

où I_o est l'application linéaire définie dans le théorème 1.

Ce théorème concerne une large classe de champs. Les hypothèses du (i) permettent de la faible dépendance (il suffit de considérer un filtre continu sur $[-\pi,\pi]^2$) mais aussi de la longue mémoire non régulière (l'exemple (3.6) de la remarque 3 rentre dans ce cadre). Le (ii), quant à lui, concerne des champs à longue mémoire régulière ou non. On obtient par exemple de la longue mémoire régulière lorsque le filtre homogène est de type produit tensoriel (c'est un cas particulier de la partie 3.2 lorsque $d = 2$). Elle est non régulière lorsque le filtre s'écrit par exemple $a(x,y) = |x+\theta y|^\alpha$, où $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$; la densité spectrale du champ résultant d'un tel filtrage est en effet proportionnelle à a^2 et le lemme suivant prouve qu'on est alors hors du cadre classique de type (1.1).

Lemme 1. *Soit un champ aléatoire $(X_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ dont la densité spectrale, définie sur $[-\pi,\pi]^2$ vaut $f(x,y) = |x+\theta y|^{2\alpha}$, où $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$. Alors sa fonction de covariance ne vérifie pas (1.1).*

Démonstration du lemme 1. On a

$$r(h,\ l) = \int_{[-\pi,\pi]^2} |x+\theta y|^{2\alpha} e^{i(hx+ly)} dxdy.$$

On se restreint au calcul de $r(h,\theta h)$, pour les h tels que $\theta h \in \mathbb{Z}$, suffisant pour conclure.

$$r(h,\ \theta h) = \int_{[-\pi,\pi]^2} |x+\theta y|^{2\alpha} e^{ih(x+\theta y)} dxdy.$$

On effectue le changement de variable $u = x+\theta y$ et $v = \theta y - x$. Nous supposons, sans nuire à la généralité, que $\theta \geq 1$; on obtient alors le découpage suivant du nouveau domaine d'intégration :

$$\begin{cases} -(\theta-1)\pi < u < (\theta-1)\pi \\ -2\pi + u < v < 2\pi + u \end{cases}$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} -(\theta+1)\pi < u < -(\theta-1)\pi \\ -2\theta\pi - u < v < 2\pi + u \end{array} \right.$$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} (\theta-1)\pi < u < (\theta+1)\pi \\ -2\pi + u < v < 2\theta\pi - u. \end{array} \right.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& r(h,\ \theta h) \\
&= \int_{-(\theta-1)\pi}^{(\theta-1)\pi} |u|^{2\alpha} e^{ihu} du + \int_{-(\theta+1)\pi}^{-(\theta-1)\pi} (2u + 2(\theta+1)\pi)|u|^{2\alpha} e^{ihu} du + \int_{-(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} (2(\theta+1)\pi - 2u)|u|^{2\alpha} e^{ihu} du \\
&= 2\int_0^{(\theta-1)\pi} u^{2\alpha}\cos(hu)du + 4(\theta+1)\pi \int_{(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} |u|^{2\alpha}\cos(hu)du - 4\int_{(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} u|u|^{2\alpha}\cos(hu)du \\
&= \frac{1}{h^{2\alpha+1}} \left(2\int_0^{(\theta-1)\pi h} u^{2\alpha}\cos(u)du + 4(\theta+1)\pi \int_{(\theta-1)\pi h}^{(\theta+1)\pi h} |u|^{2\alpha}\cos(u)du - \frac{4}{h}\int_{(\theta-1)\pi h}^{(\theta+1)\pi h} u|u|^{2\alpha}\cos(u)du \right).
\end{aligned}$$

La première intégrale admet une limite finie non nulle et les deux derniers termes convergent vers 0. Ainsi

$$r(h, \theta h) \sim ch^{-2\alpha-1},$$

lorsque $h \to \infty$, où c est une constante positive non nulle.

Si le champ X admettait une fonction de covariance du type (1.1), alors, d'après le calcul de $r(h, \theta h)$, elle devrait vérifier :

$$r(h,\ l) \underset{(h,\ l)\to\infty}{\sim} |(h,\ l)|^{-2\alpha-1} L(|(h,\ l)|)\ b\left(\frac{(h,\ l)}{|(h,\ l)|}\right).$$

On pourrait appliquer le théorème sur la convergence des ses sommes partielles S_n présentée dans Dobrushin and Major (1979) qui impose dans ce cas une normalisation égale à $n^{\alpha-1/2}L(n)^{-1/2}$. Or le théorème 4 montre que les sommes partielles de X convergent en loi avec une normalisation égale à n^α. La fonction de covariance de X n'est donc pas de la forme (1.1), c'est un champ aléatoire à longue mémoire non régulière. □

Remarque 4. Notre outil de démonstration, pour obtenir les résultats du théorème 4, est le théorème 1 sur la convergence de mesures spectrales. Son utilisation, comme nous l'avons vu dans la partie 2, nécessite l'étude de la convergence dans L^2 de $a(x/n)\prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j)$. L'exemple suivant montre que cette méthode ne permet pas de généraliser aux dimensions supérieures à 2 le résultat (4.1) sans hypothèse supplémentaire. Le filtre présenté vérifie en effet les hypothèses du (i) du théorème 4 en dimension 3 mais la convergence dans L^2 de $a(x/n)\prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j)$ n'a pas lieu. Soit le filtre a défini sur $[-\pi, \pi]^3$ par :

$$\begin{array}{lll} a(x,y,z) & = 1 & \text{si } |x| \le c \text{ ou si } yz = 0 \\ & = |y|^{-\alpha}|z|^{-\alpha} & \text{sinon,} \end{array}$$

où $1/2 < \alpha < 1$ et $0 < c < \pi$. On peut montrer que ce filtre est continu en 0 avec $a(0) = 1$ et que $a(x/n)\prod_{j=1}^3 D_n(x_j, t_j)$ n'admet pas de limite dans $L^2([-\pi, \pi]^3)$.

Démonstration du théorème 4. Nous commençons par montrer le point (ii) concernant les filtres homogènes. Afin d'utiliser le théorème 1, nous devons établir la convergence suivante, lorsque $d \le 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} a^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right|^2 dx = 0. \tag{4.3}$$

Nous décomposons cette intégrale de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} a^2(x) \left| \prod_{i=1}^{d} D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i, t_i) \right|^2 dx$$
$$= \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a^2(x) \left| \prod_{i=1}^{d} D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i, t_i) \right|^2 dx + \int_{\cup_i \{|x_i| > n\pi\}} a^2(x) \prod_{i=1}^{d} |D(x_j, t_j)|^2 dx.$$

La seconde intégrale tend vers 0 ; pour la première, on fait le changement de variable $x/n \to x$:

$$\int_{[-n\pi, n\pi]^d} a^2(x) \left| \prod_{i=1}^{d} D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i, t_i) \right|^2 dx$$
$$= n^{2\alpha+d} \int_{[-\pi, \pi]^d} a^2(x) \left| \prod_{i=1}^{d} D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(nx_i, t_i) \right|^2 dx.$$

Nous déduisons de la démonstration du lemme 2 de Lavancier (2003) que

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]^d} \left| \prod_{i=1}^{d} D_n(nx_i, t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(nx_i, t_i) \right|^2 = O(n^{-2}). \tag{4.4}$$

Ainsi, puisque $\int_{[-\pi, \pi]^d} a^2(x) dx < \infty$,

$$\int_{[-n\pi, n\pi]^d} a^2(x) \left| \prod_{i=1}^{d} D_n(x_i, t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i, t_i) \right|^2 dx = 0(n^{2\alpha+d-2}).$$

Comme $d \leq 2$ et $\alpha < 0$, la convergence de ce terme vers 0 s'en suit.

Montrons maintenant le point (i). On utilise le théorème 1 et l'on doit donc montrer la convergence suivante :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^{d} D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^{d} D(x_j, t_j) \right|^2 dx = 0.$$

Nous pouvons décomposer l'intégrale ci-dessus de la même manière que dans le théorème 2 et utiliser les mêmes arguments de convergence jusqu'à l'étude de l'intégrale suivante :

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx. \tag{4.5}$$

On ne peut pas appliquer le théorème 7 sur la convergence de la convolution d'une fonction avec une approximation de l'unité car la fonction $x \mapsto |a(x) - a(0)|^2$ n'est pas continue partout et que le produit tensoriel $x \mapsto \prod_{j=1}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)$ n'est qu'une approximation de l'unité au sens faible (cf proposition 1 de l'annexe). La remarque 4 nous prouve d'ailleurs que dès $d = 3$, il est vain de compter sur la convergence du terme (4.5) en toute généralité.

Néanmoins, dans le cas $d = 1$, le théorème 7 peut s'appliquer car $\tilde{F}_{[nt_1]}(x_1)$ est une approximation de l'unité au sens fort.

Nous supposons donc à partir de maintenant que $d = 2$. Nous traitons le terme (4.5) de la manière suivante en choisissant une suite positive $(\delta_n)_{n>0}$ qui tend vers 0 assez vite :

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi]^2} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx \\
&= \int_{||x||\leq\delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx + \int_{||x||>\delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 par continuite de a en l'origine. On suppose sans nuire à la généralité que la norme considérée sur $\mathbb{R}^2$ est la norme infini : $||(x_1, x_2)|| = \max(|x_1|, |x_2|)$. On traite alors le second terme de (4.6) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{||x||>\delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx \qquad (4.7) \\
&\leq \int_{|x_1|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx + \int_{|x_2|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx.
\end{aligned}$$

Les deux termes se traitent de la même manière, par exemple pour le premier :

$$\begin{aligned}
&\int_{|x_1|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx \\
&\qquad = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2) \left(\int_{|x_1|>\delta_n} |a(x) - a(0)|^2 \tilde{F}_{[nt_1]}(x_1)dx_1 \right) dx_2.
\end{aligned}$$

La proposition 2 de l'annexe et l'expression de $\tilde{F}$ défini en (3.2) nous donnent la propriété suivante :

$$\sup_{|x_1|>\delta_n} \tilde{F}_{[nt_1]}(x_1) \leq \frac{\pi^2}{n\delta_n^2}.$$

Ainsi

$$\int_{|x_1|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)dx \leq \frac{\pi^2}{\delta_n^2} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2)b(x_2)dx_2,$$

où $b(x_2) = \int_{[-\pi,\pi]} |a(x) - a(0)|^2 dx_1$ est une fonction intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

On sait par l'expression (3.2) de $\tilde{F}$ et la proposition 2 que

$$v_{2,n} = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2)b(x_2)dx_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il suffit donc de choisir $\delta_n^2 = (v_{1,n} \vee v_{2,n})^{1/2}$ où $v_{1,n}$ est défini comme $v_{2,n}$ mais relativement à t_1. On a alors bien $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ et, à t_1 et t_2 fixés, la convergence de tous les termes de (4.7) vers 0.

□

4.2 Théorèmes limite en dimension quelconque pour des classes de champs aléatoires particuliers

Le théorème 4 nous donne dans un cadre général la loi limite des sommes partielles d'un champ obtenu par filtrage en dimension $d \leq 2$. La remarque 4 nous a montré qu'il est vain, avec notre approche, de chercher à généraliser ces résultats en dimension supérieure. Cependant, il est possible de se restreindre à certains champs pour lesquels la convergence des sommes partielles est obtenue quel que soit d. Nous en proposons deux classes : la première concerne les champs linéaires dont la densité spectrale s'écrit $f(x_1, .., x_d) = g(\sum \lambda_i x_i)$ où $g \in L^2(\mathbb{R})$ est une fonction réelle continue à l'origine et les λ_i des constantes réelles ; la seconde concerne les champs linéaires dont la densité spectrale est homogène, de la forme $f(x_1, \dots, x_d) = |\sum \lambda_i x_i|^{2\alpha}$, où $-1/2 < \alpha < 0$ et les λ_i des constantes réelles.

Théorème 5. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire à densité spectrale bornée vérifiant l'hypothèse* **H 1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ défini par (2.2), obtenu par filtrage de ξ à travers a.*

On suppose que le filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ s'écrit :

$$a(x_1, \dots, x_d) = g(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i),$$

où les λ_i sont des constantes réelles et g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable, continue en l'origine avec $g(0) \neq 0$.

Considérons, pour $t \in]0, \infty[^d$, la somme $S_n(t)$ définie par (2.1). On a alors la convergence en loi suivante :

$$S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} g(0)(2\pi)^{d/2} B(t),$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ intervenant dans l'hypothèse **H 1**.

Démonstration. On utilise toujours le théorème 1 en s'appuyant sur la convergence (3.1). Pour montrer cette dernière, on utilise les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 2 jusqu'à l'étude de l'intégrale :

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx = \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| g\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i\right) - g(0) \right|^2 \prod_{j=1}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx.$$

On suppose sans perte de généralité que $\lambda_1 \neq 0$ et on effectue le changement de variable $u = x_1 + \sum_{i=2}^{d} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i$, les autres variables étant inchangées. On obtient donc :

$$\begin{aligned}&\int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x) - a(0)|^2 \prod_{j=1}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx \\ &\qquad \leq \int_{[-\tau,\tau]} |g(\lambda_1 u) - g(0)|^2 \left(\int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \tilde{F}_{[nt_1]} \left(u - \sum_{i=2}^{d} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i \right) \prod_{j=2}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx_2 \dots dx_d \right) du,\end{aligned}$$

où $[-\tau, \tau]$ est un compact contenant le domaine d'intégration de u obtenu à la suite du changement de variable. En posant

$$K_n(u) = \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \tilde{F}_{[nt_1]} \left(u - \sum_{i=2}^{d} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} x_i \right) \prod_{j=2}^{d} \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j) dx_2 \dots dx_d,$$

on est ramené à montrer la convergence vers 0 de :

$$\int_{[-\tau,\tau]} |g(\lambda_1 u) - g(0)|^2 K_n(u) du. \tag{4.8}$$

Lorsque, pour tout i, $\lambda_i = 1$ et $t_i = 1$, K_n est, à une constante près, le produit de convolution $(d-1)^{\text{ème}}$ du noyau de Fejer F_n par lui-même. D'après la proposition 1 de l'annexe, K_n est donc dans ce cas une approximation de l'unité au sens fort (à une constante près et sur $[-\tau, \tau]$ au lieu de $[-\pi, \pi]$ ce qui ne change rien). Dans le cas général où tous les λ_i (ou tous les t_i) ne sont pas égaux à 1, en s'appuyant sur la définition (3.2) de $\tilde{F}_{[nt]}$, et en reprenant exactement le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 1, on voit que K_n se comporte, à t fixé, comme une approximation de l'unité au sens fort.

Le résultat relatif aux approximations de l'unité au sens fort du théorème 7 nous permet alors de conclure, la fonction $u \mapsto |g(\lambda_1 u) - g(0)|^2$ étant continue à l'origine et intégrable ailleurs. Le terme (4.8) converge donc vers 0 lorsque $n \to \infty$.

□

On propose enfin un résultat de convergence des sommes partielles en toute dimension pour certains champs à densité spectrale homogène.

Théorème 6. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire à densité spectrale bornée vérifiant l'hypothèse* **H 1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ défini par (2.2), obtenu par filtrage de ξ à travers a.*

On suppose que le filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^d)$ s'écrit :

$$a(x) = \left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et les λ_i sont des constantes réelles. Alors,

- Si $d \leq 3$, on obtient la convergence en loi suivante :

$$n^\alpha S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} I_o\left(a(x)\prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right), \tag{4.9}$$

où I_o est l'application linéaire définie dans le théorème 1.

- Si $d \geq 4$ et si $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ alors la convergence en loi (4.9) a lieu également.

Démonstration. On utilise le théorème 1 et nous devons donc établir la convergence suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha}\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx = 0.$$

Nous décomposons cette intégrale de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha}\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx$$
$$= \int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha}\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx + \int_{\cup_i\{|x_i|>n\pi\}}\left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha}\prod_{i=1}^d |D(x_j,t_j)|^2 dx.$$

La seconde intégrale tend vers 0 ; pour la première, on fait le changement de variable $x/n \to x$:

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha}\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx$$
$$= n^{2\alpha+d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha}\left|\prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i)\right|^2 dx. \tag{4.10}$$

On introduit à présent l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A}_n = \left\{x \in [-\pi,\pi]^d\ ;\ \left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha} \geq n^\gamma \text{ où } \gamma < 1 - 2\alpha\right\}.$$

En posant $\overline{\mathcal{A}_n}$ le complémentaire de $\mathcal{A}_n$ dans $[-\pi,\pi]^d$, on décompose (4.10) sur $\mathcal{A}_n$ et $\overline{\mathcal{A}_n}$. Le lemme 2 de Lavancier (2003) montre par ailleurs que

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left| \prod_j D_n(x_j,t_j) - \prod_j D(x_j,t_j) \right|^2 dx = O(n^{-1}),$$

donc

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \prod_j D_n(nx_j,t_j) - \prod_j D(nx_j,t_j) \right|^2 dx = O(n^{-d-1}). \tag{4.11}$$

On a donc, d'après la définition de $\overline{\mathcal{A}_n}$ et en utilisant (4.11) :

$$\begin{aligned} &n^{2\alpha+d} \int_{\overline{\mathcal{A}_n}} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i) \right|^2 dx \\ &\leq n^{2\alpha+d+\gamma} \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i) \right|^2 dx = 0(n^{2\alpha-1+\gamma}). \end{aligned}$$

Comme $\gamma < 1-2\alpha$, ce terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Il nous reste à étudier l'intégrale (4.10) sur $\mathcal{A}_n$. On a, d'après (4.4)

$$n^{2\alpha+d} \int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right|^{2\alpha} \left| \prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i) \right|^2 dx \leq 0(n^{2\alpha+d-2}) \int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right|^{2\alpha} dx. \tag{4.12}$$

En posant $u = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i$, les autres variables restant inchangées, on a, puisque $\alpha < 0$,

$$\mathcal{A}_n = \left\{ |u|^{2\alpha} \geq n^\gamma \right\} = \left\{ |u| \leq n^{\frac{\gamma}{2\alpha}} \right\}.$$

Donc

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right|^{2\alpha} dx = \int_{-n^{\frac{\gamma}{2\alpha}}}^{n^{\frac{\gamma}{2\alpha}}} |u|^{2\alpha} du \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} dx_2 \dots dx_d = \kappa\, n^{\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1)},$$

où κ est une constante strictement positive. Pour que le terme (4.12) tende vers 0, il suffit que

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left| \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right|^{2\alpha} dx = o(n^{2-d-2\alpha}),$$

il suffit donc que $\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1) - 2 + d + 2\alpha < 0$.

Si $d \leq 2$, cela est toujours vrai.

Si $d = 3$,

$$\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1) + 2\alpha + 1 < 0 \Leftrightarrow \gamma > -2\alpha,$$

ce qui est possible en choisissant γ dans $]-2\alpha;\ 1-2\alpha[$.

Pour $d \geq 4$, la condition est remplie si

$$\gamma > -2\alpha \frac{d+2\alpha-2}{2\alpha+1},$$

ce qui est possible dès que $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ compte tenu de la condition initiale sur γ. On retrouve les différents cas du théorème, en particulier la condition portant sur α dès que $d \geq 4$.

□

5 Annexe : propriétés des approximations de l'unité

Dans cette partie, nous résumons quelques propriétés des approximations de l'unité dont nous avons besoin pour nos démonstrations. Certaines sont connues ou évidentes, d'autres sont particulières à l'utilisation que nous en avons et n'ont pas été trouvées dans la littérature. Il s'agit notamment des propriétés du produit tensoriel et du produit de convolution d'approximations de l'unité. Ces dernières dépendent de la nature des approximations de l'unité que l'on considère. Nous en distinguons en effet deux classes : la première concerne les approximations de l'unité en un sens faible (c'est le sens courant d'une approximation de l'unité), l'autre en un sens fort. Nous appliquons ces résultats au noyau de Fejer qui est une approximation de l'unité au sens fort ; nous en résumons finalement les propriétés spécifiques, transversales aux démonstrations des parties précédentes. En vue de cette utilisation finale, nous focalisons notre étude sur des approximations de l'unité définies sur $[-\pi,\pi]^d$.

Définition 2. Nous dirons qu'une fonction $K_n : [-\pi,\pi]^d \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité au sens faible si $\forall n,\ K_n \geq 0,\ \int_{[-\pi,\pi]^d} K_n(x)dx = 1$ et si

$$\forall \delta > 0,\ \lim_{n\to\infty} \int_{||x||>\delta} K_n(x)dx = 0. \tag{5.1}$$

Nous dirons qu'une fonction $K_n : [-\pi,\pi]^d \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité au sens fort si $\forall n,\ K_n \geq 0,\ \int_{[-\pi,\pi]^d} K_n(x)dx = 1$ et si

$$\forall \delta > 0,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{||x||>\delta} K_n(x)dx = 0. \tag{5.2}$$

Une approximation de l'unité au sens fort l'est aussi clairement au sens faible. Ces fonctions sont principalement utilisées pour la propriété bien connue suivante, applicable à une plus large classe de fonctions dans le cas des approximations de l'unité au sens fort.

Théorème 7. *Soit K_n une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]^d$, alors pour toute fonction $g \in L^1([-\pi,\pi]^d)$, bornée et continue en 0,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx = g(0) \tag{5.3}$$

Soit K_n une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]^d$, alors pour toute fonction $g \in L^1([-\pi,\pi]^d)$ continue en 0,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx = g(0) \tag{5.4}$$

Démonstration. Dans le cas d'une approximation de l'unité au sens faible, (5.3) provient de la décomposition suivante, sachant que pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité de g en 0 assure l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $||x|| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx - g(0) \right| &= \left| \int_{[-\pi,\pi]^d} (g(x) - g(0))K_n(x)dx \right| \\
&\leq \int_{||x||\leq\delta} |g(x) - g(0)|K_n(x)dx + \int_{||x||>\delta} |g(x) - g(0)|K_n(x)dx \\
&\leq \varepsilon + 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{|g(x)|\} \int_{||x||>\delta} K_n(x)dx,
\end{aligned}$$

la première majoration étant due à la continuité de g en 0 et la seconde au fait que g est bornée. En utilisant enfin la propriété (5.1) d'une approximation au sens faible, nous obtenons la convergence vers 0 voulue.

Dans le cas d'une approximation de l'unité au sens fort, g n'est pas nécessairement bornée :

$$\left|\int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx - g(0)\right| =$$
$$\left|\int_{||x||\leq\delta} (g(x)-g(0))K_n(x)dx + \int_{||x||>\delta} g(x)K_n(x)dx - g(0)\int_{||x||>\delta} K_n(x)dx\right|,$$

d'où

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} g(x)K_n(x)dx - g(0)\right|$$
$$\leq \int_{||x||\leq\delta} |g(x)-g(0)|K_n(x)dx + ||g||_{L^1} \sup_{||x||>\delta}\{K_n(x)\} + |g(0)|\int_{||x||>\delta} K_n(x)dx.$$

Le premier terme est aussi petit que l'on veut par continuité de g à l'origine en choisissant δ correctement. Le second terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ par la propriété (5.2) d'une approximation de l'unité au sens fort et le dernier terme également par la propriété (5.1) vérifiée par une approximation de l'unité au sens faible, à plus forte raison par une au sens fort. □

La propriété d'approximation de l'unité se conserve de la manière suivante pour le produit de convolution et le produit tensoriel :

Proposition 1. *Soit $K_n^{(1)}, \ldots, K_n^{(d)}$ des approximations de l'unité de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$.*
Si les $K_n^{(i)}$ sont des approximations de l'unité au sens faible, alors

1. *$K_n^{(1)} * \cdots * K_n^{(d)}(t)$ est encore une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]$.*
2. *$P_n(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{i=1}^d K_n^{(i)}(x_i)$ est une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]^d$.*

Si les $K_n^{(i)}$ sont des approximations de l'unité au sens fort, alors

1. *$K_n^{(1)} * \cdots * K_n^{(d)}(t)$ est encore une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]$.*
2. *$P_n(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{i=1}^d K_n^{(i)}(x_i)$ n'est plus une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]^d$, mais uniquement au sens faible.*

Démonstration. Nous montrons ces propriétés pour $d = 2$, les résultats se généralisant facilement par récurrence à d quelconque.

Soit pour commencer $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ deux approximations de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]$. Ces deux approximations de l'unité peuvent être considérées comme des densités de probabilité sur $[-\pi,\pi]$. Soient donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densité $K_n^{(1)}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densité $K_n^{(2)}$. La condition (5.1) sur $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ signifie :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad \text{et} \qquad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

les convergences ayant lieu en probabilité. La suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de densité $K_n^{(1)} * K_n^{(2)}$ et converge elle aussi en probabilité vers 0. Le produit de convolution de $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ vérifie donc la propriété (5.1), est positif et de somme 1 quel que soit $n \in \mathbb{N}$: c'est donc une approximation de l'unité au sens faible.

Considérons à présent le produit $P_n(x,y) = K_n^{(1)}(x)K_n^{(2)}(y)$. La fonction P_n est positive et de somme 1 dans $[-\pi,\pi]^2$ de façon évidente. Regardons la propriété (5.1), nous supposons sans perte de généralité que la norme est la norme infini : $||(x,y)|| = \max(x,y)$, on obtient ainsi :

$$\int_{||(x,y)||>\delta} K_n^{(1)}(x)K_n^{(2)}(y)dxdy \leq \int_{|x|>\delta} K_n^{(1)}(x)dx + \int_{|y|>\delta} K_n^{(2)}(y)dy,$$

car les $K_n^{(i)}$ sont positifs et de somme 1. La propriété (5.1) s'en déduit directement et P_n est une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]^2$.

Soit maintenant $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ deux approximations de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]$. Considérons leur produit de convolution $K_n(t) = K_n^{(1)} * K_n^{(2)}(t)$, il est positif et de somme 1 dans $[-\pi,\pi]$ de façon évidente. Montrons qu'il vérifie la propriété (5.2). Soit $\delta > 0$, soit $0 < \gamma < \delta$,

$$\sup_{|t|>\delta} K_n(t) = \sup_{|t|>\delta} \left(\int_{|x|>\gamma} K_n^{(1)}(t-x) K_n^{(2)}(x) dx + \int_{|x|\leq\gamma} K_n^{(1)}(t-x) K_n^{(2)}(x) dx \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang on a $\sup_{|x|>\gamma} K_n^{(2)}(x) < \varepsilon$. D'autre part, si $|t| > \delta$ et $|x| \leq \gamma$, alors $|t-x| > \delta - \gamma > 0$ et donc, uniformément sur ce domaine, $K_n^{(1)}(t-x) < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. D'où quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang,

$$\sup_{|t|>\delta} K_n(t) \leq \varepsilon \sup_{|t|>\delta} \int_{|x|>\gamma} K_n^{(1)}(t-x) dx + \varepsilon \sup_{|t|>\delta} \int_{|x|\leq\gamma} K_n^{(2)}(x) dx \leq 2\varepsilon,$$

car les $K_n^{(i)}$ sont de somme 1. La propriété (5.2) est donc vérifiée pour K_n et c'est une approximation de l'unité au sens fort.

Enfin, le produit tensoriel de deux approximations de l'unité au sens fort n'est pas nécessairement une approximation de l'unité au sens fort. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le noyau de Fejer F_n défini en (5.5) ci-dessous. C'est une approximation de l'unité au sens fort, mais on a $F_n(0)F_n(\pi) = 0$ si n est pair et $F_n(0)F_n(\pi) = \frac{1}{4\pi^2}$ si n est impair. La propriété (5.2) n'est donc pas vérifiée pour le produit tensoriel $(x,y) \mapsto F_n(x)F_n(y)$. □

Nous nous focalisons maintenant plus particulièrement sur le noyau de Fejer, défini sur $[-\pi,\pi]$ par

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \tfrac{1}{2\pi n} \tfrac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2))} && \text{si } x \neq 0 \\ &= \tfrac{n}{2\pi} && \text{si } x = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nous résumons certaines de ses propriétés dont nous avons constamment besoin dans les autres parties.

Proposition 2. *Soit F_n le noyau de Fejer défini sur $[-\pi,\pi]$.*

1. *F_n est une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$*
2. *$\forall\delta > 0 \ \sup_{|x|>\delta} F_n(x) \leq \frac{\pi}{2n\delta^2}$*
3. *$\forall\delta > 0 \ \int_{|x|>\delta} F_n(x)dx \geq \frac{1}{2\pi n}\left(\pi - \delta + \frac{\sin(n\delta)}{n}\right)$*
4. *$\forall g \in L^1([-\pi,\pi])$, $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)F_n(x)dx = o(n)$ lorsque $n \to \infty$*
5. *Soit $\alpha > -1$, alors $\int_{-\pi}^{\pi} |x|^\alpha F_n(x)dx \sim \kappa n^{-\alpha}$ lorsque $n \to \infty$, où κ est une constante strictement positive.*

Démonstration. Les quatre premiers points sont immédiats à vérifier. Le point 5 est montré dans le lemme 9 de Viano et al. (1995). □

Références

Breuer, P. and Major, P. (1983). Central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields. *Journal of Mulivariate Analysis*, 13 :425–441.

Dobrushin, R. L. and Major, P. (1979). Non central limit theorems for non-linear functionals of gaussian fields. *Z. Warsch. verw. Geb.*, 50 :27–52.

Doukhan, P., Lang, G., and Surgailis, D. (2002). Asymptotics of weighted empirical processes of linear fields with long-rang dependence. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 6 :879–896.

Lang, G. and Soulier, P. (2000). Convergence de mesures spectrales aléatoires et applications à des principes d'invariance. *Stat. Inf. for Stoch. Proc.*, 3 :41–51.

Lavancier, F. (2003). Principes d'invariance pour les champs aléatoires fortement dépendants, partie 1 : théorème de convergence de champs spectraux. Technical Report 60, XII, IRMA, Lille.

Oppenheim, G., Ould Haye, M., and Viano, M.-C. (2000). Long memory with seasonal effects. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 3 :53–68.

Viano, M.-C., Deniau, C., and Oppenheim, G. (1995). Long-range dependence and mixing for discrete time fractional processes. *J. Time Ser. Anal.*, 16(3) :323–338.