

# Modèles Markoviens

Frédéric Lavancier

ENSAI

2023/2024

**Références**

- “Probabilités et statistiques . Tome 2, Problèmes à temps mobile”, D. Dacunha-Castelle et M. Duflo, Masson, 1993.
- “Processus stochastiques : Processus de poisson, chaînes de Markov et martingales”, D. Foata et A. Fuchs, Dunod, 2004.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Processus stochastiques : généralités</b>	<b>3</b>
1.1	Processus et loi du processus . . . . .	5
1.1.1	Loi d'un processus . . . . .	5
1.1.2	Construction par les lois fini-dimensionnelles . . . . .	6
1.2	Exemples fondamentaux de processus . . . . .	8
1.2.1	Processus de variables aléatoires réelles indépendantes .	8
1.2.2	Processus Gaussien . . . . .	8
1.2.3	Processus à accroissements indépendants . . . . .	10
1.3	Quelques propriétés de base des processus . . . . .	12
1.3.1	Stationnarité . . . . .	12
1.3.2	Processus de Markov . . . . .	13
1.3.3	Régularité des trajectoires . . . . .	15
1.4	Premier bilan . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Processus de Poisson</b>	<b>20</b>
2.1	Processus de comptage et intensité . . . . .	20
2.2	Processus de Poisson homogène . . . . .	22
2.3	Estimation de l'intensité d'un processus de Poisson homogène	24
2.4	Processus de Poisson non-homogène . . . . .	26
2.5	Estimation paramétrique d'un processus de Poisson non-homogène	31

# Chapitre 1

## Processus stochastiques : généralités

Un processus stochastique est famille de variables aléatoires  $\{X_t, t \in T\}$ , indexée par l'ensemble  $T$ , et à valeurs dans un même espace  $E$ .

- $T$  : espace des temps (même si parfois cela peut représenter autre chose que le temps, cf exemples ci-dessous)
- $E$  : espace d'états, dans lequel le processus prend ses valeurs.

Typiquement :  $E = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$ , et idem pour  $T$ .

Voici quelques situations classiques :

- $T = \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}$  : on observe une suite de variables aléatoires à valeurs réelles.  
Exemples : suites de variables aléatoires i.i.d, séries temporelles (par ex modèles ARMA)  
Peut modéliser : évolution de la température chaque jour à 12h ; variation d'un indice boursier chaque heure ; etc
- $T = \mathbb{N}$  et  $E = \{1, \dots, M\}$ .  
Exemple : chaîne de Markov à espace d'états finis ( $M$  états).
- $T = \mathbb{R}_+$  et  $E = \mathbb{R}$  : évolution continue dans le temps d'un phénomène aléatoire réel.  
Exemple : température, cours boursier
- $T = \mathbb{R}_+$  et  $E = \mathbb{N}$  : évolution continue d'un phénomène aléatoire de comptage  
Exemple : nombre d'individus dans une population, nombre de malades, nombre de clients, etc.
- $T = \mathbb{R}_+$  et  $E = \mathbb{R}^d$  : évolution continue d'un phénomène dans  $\mathbb{R}^d$ .

Exemple : série multivariée de  $d$  cours boursiers, mouvement aléatoire d'une particule dans un liquide ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ).

- $T = \mathbb{Z}^d$  et  $E = \mathbb{R}$  : valeurs aléatoires sur un réseau (infini)  
Exemple : une image est composée  $N \times N$  pixels, chaque pixel prenant une valeur réelle. Une image peut être vue comme un ensemble aléatoire de valeur sur les pixels (aléatoire ne veut pas dire sans structure). Si  $N$  est grand, on peut approcher l'ensemble des pixels par  $\mathbb{Z}^2$ .
- $T = \mathbb{R}^d$  et  $E = \mathbb{R}$  : valeurs aléatoires en tout point de l'espace.  
Exemple : altitude à la surface du sol, ou n'importe quelle autre mesure (température, taux de nitrate, etc), hauteur des vagues à la surface de l'océan.

Dans tous ces exemples : aléatoire ne veut pas dire sans structure. Cela signifie que dans la plupart des exemples précédents,  $X_t$  et  $X_s$  ne sont pas indépendants si  $s$  et  $t$  sont proches.

En général, on distingue la présentation des processus selon deux cas :

- processus à temps discret (par  $T = \mathbb{N}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ ) : c'est le cas des chaînes de Markov et des séries temporelles.
- processus à temps continu ( $T = \mathbb{R}_+$  ou  $T = \mathbb{R}$ ) : ce sera la nouveauté de ce cours.

Plusieurs défis :

- définir proprement ce qu'est un processus stochastique : par exemple, quelle est la loi du processus  $(X_t)_{t \in T}$  et comment la caractériser ?
- proposer des exemples de processus (des modèles) permettant de modéliser des situations pertinentes (réalistes ou proches d'un phénomène réel), et dont on peut en étudier les propriétés théoriques essentielles (cf la partie suivante). Parmi ces exemples, il y a les modèles Markoviens.
- d'un point de vue statistique, on peut imaginer :
  - avoir observé une réalisation de  $X_t$  pour  $t$  appartenant à un sous-ensemble de  $T$  (par exemple une collection  $t_1, \dots, t_n$ , ou tout un intervalle  $[t_1, t_2]$ )
  - ou avoir observé plusieurs réalisations indépendantes (ou non) de ce processus (plusieurs séries de températures à différents endroits par exemple).

Les questions dans ce cas concernent l'inférence du processus, comme l'identification (l'estimation) de certains paramètres qui le définissent,

ou la construction de tests sur ces paramètres. On peut également être intéressé par la prévision du processus pour des  $t$  non observés (instants futurs si  $t$  représente le temps, ou prévision de valeurs manquantes).

Ce que vous avez déjà un peu vu :  $T = \mathbb{N}$  (chaines de Markov, séries temporelles) avec plusieurs modèles abordés (par exemple ARMA en ST), il y a en a bien entendu plein d'autres. Dans ce cours : on va aborder le cas  $T = \mathbb{R}_+$  insister dessus, c'est à dire le temps continu, et étudier quelques modèles dans ce cadre.

Dans ce chapitre : on introduit des généralités sur les processus, en particulier les propriétés de base qu'on peut être amené à étudier, et on introduira quelques processus fondamentaux en temps continu.

## 1.1 Processus et loi du processus

### 1.1.1 Loi d'un processus

On considère le cas général : on se donne un espace des temps  $T$  (quelconque) et un espace d'états mesurable  $(E, \mathcal{E})$  où  $\mathcal{E}$  est une tribu sur  $E$ . Dans les exemples classiques ( $E = \mathbb{R}$  ou  $E = \mathbb{R}^d$ ),  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$  est la tribu borélienne (plus petite tribu sur  $E$  contenant tous les ensembles ouverts).

On se donne également un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Définition 1.1.1.** *Un processus stochastique est une famille  $(X_t)_{t \in T}$  de variables aléatoires, chacune étant définie de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vers  $(E, \mathcal{E})$ .*

Un processus  $X = (X_t)_{t \in T}$  peut être vu comme une fonction aléatoire :  $X : \omega \mapsto X(\omega)$  où  $X(\omega)$  est la fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  définie de  $T$  dans  $E$ . Ainsi, une réalisation du processus est une fonction de  $T$  dans  $E$ . Le processus est donc simplement une variable aléatoire à valeurs dans  $E^T$ , l'espace des fonctions de  $T$  dans  $E$ .

Comment définir la loi du processus  $X$  ?

Par définition, puisque pour tout  $t \in T$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vers  $(E, \mathcal{E})$ , elle est mesurable, i.e., pour tout  $B \in \mathcal{E}$ ,  $X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , et sa loi est donnée par les probabilités  $\mathbb{P}(X_t \in B)$ . Ceci nous donne la loi pour chaque instant  $t$  pris de façon marginale. Mais cela ne suffit pas à définir la loi de tout le processus  $X$ , en tant que variable aléatoire dans  $E^T$ . Pour

cela, la première étape est d'équiper l'espace  $E^T$  d'une tribu, que l'on notera  $\mathcal{E}^T$ . La loi de  $X$  sera alors caractérisée par les probabilités  $\mathbb{P}(X \in C)$  pour tout  $C$  dans  $\mathcal{E}^T$ , sous réserve que cette écriture ait du sens, c'est à dire sous réserve que  $X$  soit mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(E^T, \mathcal{E}^T)$ . On considère pour  $\mathcal{E}^T$  la tribu cylindrique définie comme suit.

**Définition 1.1.2.** *La tribu cylindrique  $\mathcal{E}^T$  sur l'espace  $E^T$  est la tribu engendrée par les cylindres, c'est à dire les ensembles du type  $\prod_{t \in T} B_t$ , où pour tout  $t$ ,  $B_t \in \mathcal{E}$ , et seul un nombre fini des ensembles  $B_t$  est différent de l'ensemble trivial  $E$ .*

L'intérêt de considérer cette tribu cylindrique est double :

1. la caractérisation de la loi de  $X$  est assez simple. Puisque la tribu est engendrée par les cylindres, la loi de  $X$  est caractérisée par les probabilités  $\mathbb{P}(X \in C)$  pour tout cylindre  $C$  de  $\mathcal{E}^T$ . Or si  $C$  est un cylindre,  $C = \prod_{t \in T} B_t$  où  $B_t = E$  pour tout  $t$  sauf pour une collection finie  $t_1, \dots, t_n$ . Ainsi  $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in B_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in B_{t_n})$ . Cela signifie que les lois fini-dimensionnelles du processus suffisent à caractériser sa loi.
2. on peut montrer que  $X$  est bien une fonction mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(E^T, \mathcal{E}^T)$ . Etant donnée la forme cylindrique des ensembles générateurs de  $\mathcal{E}^T$ , ceci est en effet équivalent au fait que pour tout  $t_1, \dots, t_n$ , le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est mesurable, ce qui est équivalent au fait que pour tout  $t$ ,  $X_t$  est une fonction mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vers  $(E, \mathcal{E})$ , ce qui est vrai par définition.

On a donc la proposition suivante.

**Proposition 1.1.3.** *Soit  $(X_t)_{t \in T}$  un processus à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  au sens de la définition 1.1.1. Alors la fonction  $X : \omega \mapsto (X_t(\omega))_{t \in T}$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(E^T, \mathcal{E}^T)$  où  $\mathcal{E}^T$  est la tribu cylindrique de la définition 1.1.2. On appelle loi du processus  $(X_t)_{t \in T}$ , la loi de la variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $(E^T, \mathcal{E}^T)$ . Cette dernière est caractérisée par les lois fini-dimensionnelles, c'est à dire les lois des vecteurs  $(X_t)_{t \in I}$  où  $I$  est un sous-ensemble fini de  $T$ .*

### 1.1.2 Construction par les lois fini-dimensionnelles

On vient de voir que la loi d'un processus est caractérisée par ses lois fini-dimensionnelles. Cela signifie en particulier que deux processus  $X$  et  $Y$

ont même loi (on dit qu'ils sont *équivalents*) si et seulement si, pour tout  $n$ , pour tous  $t_1, \dots, t_n$ , les vecteurs  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  et  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$  ont même loi. Cela nous permettra également de faire des calculs sur la loi du processus : il suffira de considérer les lois fini-dimensionnelles.

Cela suggère la question naturelle suivante, qui est en quelque sorte la réciproque et permettra de construire des processus : si on se donne les lois fini-dimensionnelles, c'est à dire les lois de tout vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , pour tout  $n$ , pour tous  $t_1, \dots, t_n$ , cela suffit-il à définir entièrement la loi du processus  $(X_t)_{t \in T}$  ? Comme le théorème de Kolmogorov suivant le montre, cela est en général vrai sous réserve que les lois fini-dimensionnelles proposées soient consistantes entre elles.

Convainquons-nous d'abord que des conditions de consistance sont nécessaires, via la remarque triviale suivante : étant donnée la loi  $\mathbb{P}_X$  d'un processus  $X$  sur  $(E^T, \mathcal{E}^T)$ , pour deux sous-ensembles emboîtés  $I$  et  $J$  de  $T$ ,  $I \subset J$ , la loi marginale associée aux indices  $I$ , c'est à dire la loi de  $(X_t)_{t \in I}$ , est identique à la loi marginale des sous-indices  $I$  du vecteur  $(X_t)_{t \in J}$ , lui-même étant la marginale en  $J$  du processus  $X$  global. Formellement, pour  $I \subset J$ , désignons par  $\pi_{J,I}$  la projection naturelle de  $E^J$  dans  $E^I$  définie par  $\pi_{J,I}((x_t)_{t \in J}) = (x_t)_{t \in I}$  (en d'autres termes  $\pi_{J,I}$  extrait les coordonnées  $I$  d'un vecteur indexé par  $J$ ). La mesure image  $\pi_{T,I} * \mathbb{P}_X$ , définie pour tout  $B$  dans  $\mathcal{E}^I$  par  $\pi_{T,I} * \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}_X(\pi_{T,I}^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\omega : \pi_{T,I}(X)(\omega) \in B)$ , n'est autre que la loi marginale de  $(X_t)_{t \in I}$ . Ainsi, si  $J$  est inclut dans  $I$ , la remarque précédente sur la consistance des lois marginales s'écrit

$$\pi_{J,I} * \pi_{T,J} * \mathbb{P}_X = \pi_{T,I} * \mathbb{P}_X.$$

On voit donc que si on se donne une famille de lois de probabilité  $\mu_I$  sur  $(E^I, \mathcal{E}^I)$  pour tout sous-ensemble fini  $I \subset T$ , pour que cette famille de lois correspondent aux lois marginales d'un processus sur  $(E^T, \mathcal{E}^T)$ , il faut nécessairement que

$$\mu_I = \pi_{J,I} * \mu_J, \quad \forall I \subset J. \quad (1.1)$$

Si cette condition est vérifiée, on dit que la famille des lois  $\mu_I$  est consistante. On écrit parfois cette condition de la façon suivante : pour tout  $B \in \mathcal{E}^I$ ,  $\mu_I(B) = \mu_J(B \times E^{J \setminus I})$ , autrement dit si on marginalise la distribution  $\mu_J$  en intégrant sur tout l'espace  $E$  tous les indices n'appartenant pas à  $I$ , on retrouve  $\mu_I$ .

Le théorème d'extension de Kolmogorov assure qu'il n'y a besoin de rien d'autre pour garantir l'existence d'une loi sur  $(E^T, \mathcal{E}^T)$ , sous réserve que



l'ensemble  $E$  ne soit pas trop tordu. Il suffit qu'il soit polonais, c'est à dire métrique, complet et séparable, ce qui est le cas des espaces usuels ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^d$ ). Autrement dit, si on se donne des lois fini-dimensionnelles consistantes, on définit la loi d'un processus.

**Theorem 1.1.4** (Théorème d'extension de Kolmogorov (admis)). *Soit  $E$  un espace polonais et  $T$  un espace quelconque. Soit  $\mu_I$  une famille de lois sur  $(E^I, \mathcal{E}^I)$ , pour tout sous-ensemble fini  $I \subset T$ . Si cette famille de lois est consistante au sens de (1.1), alors il existe un processus sur  $(E^T, \mathcal{E}^T)$  dont les lois fini-dimensionnelles coïncident avec les  $\mu_I$ .*

## 1.2 Exemples fondamentaux de processus

### 1.2.1 Processus de variables aléatoires réelles indépendantes

Soit  $(F_t)_{t \in T}$  une famille de fonctions de répartitions sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n$ , pour tous  $t_1, \dots, t_n$ , on considère la loi multivariée sur  $\mathbb{R}^n$  définie par la fonction de répartition  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) \times \dots \times F_{t_n}(x_n)$ . Ce système de lois fini-dimensionnelles est consistant car si on marginalise une telle loi multivariée, on retrouve évidemment la loi produit sur les marges. D'après le théorème d'extension de Kolmogorov, il existe donc un processus  $(X_t)_{t \in T}$  qui admet comme lois fini-dimensionnelles les distributions précédentes. Il s'agit d'une collection de variables indépendantes, chaque variable  $X_t$  ayant pour fonction de répartition  $F_t$ .

Si  $T = \mathbb{N}$ , il s'agit d'une suite de variables aléatoires indépendantes, dont l'existence a déjà été abordée en cours de probabilité.

### 1.2.2 Processus Gaussien

Soit  $m$  une fonction de  $T$  vers  $\mathbb{R}$ . Soit  $\Sigma$  une fonction de  $T \times T$  vers  $\mathbb{R}$  symétrique et semi-définie positive, c'est à dire que pour tout  $n$ , pour tout  $t_1, \dots, t_n$ , la matrice  $(\Sigma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  est semi-définie positive.

**Définition 1.2.1.** *Un processus  $(X_t)_{t \in T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est dit Gaussien de moyenne  $m$  et de fonction de covariance  $\Sigma$ , si pour tout  $n$ , pour tous  $t_1, \dots, t_n$ , le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur Gaussien d'espérance  $(m(t_1), \dots, m(t_n))$  et de matrice de covariance  $(\Sigma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .*

Etant donnés  $m$  et  $\Sigma$ , l'existence d'un processus Gaussien est garantie par le théorème d'extension de Kolmogorov, car on sait que si on marginalise un vecteur Gaussien d'espérance  $m_J$  et de matrice de covariance  $\Sigma_J$ , pour ne garder que les indices  $I$ , on obtient bien un vecteur Gaussien dont l'espérance correspond aux indices  $I$  de  $m_J$  et dont la matrice de covariance est la sous-matrice de  $\Sigma_J$  associées aux indices  $I$ . Les marges sont donc bien consistantes.

Pour définir un processus Gaussien, il suffit donc de se donner la fonction espérance  $m(t)$  et une fonction de covariance  $\Sigma(s, t)$ . Cette dernière doit être symétrique et semi-définie positive pour garantir que la matrice  $(\Sigma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  est bien une matrice de covariance. Nous admettrons que pour les exemples suivants la fonction  $\Sigma(s, t)$  vérifie ces conditions.

### Exemple : mouvement Brownien

Le mouvement Brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est le processus Gaussien  $(B_t)_{t \geq 0}$  vérifiant  $B_0 = 0$ , de fonction moyenne  $m = 0$  et de fonction de covariance  $\Sigma(s, t) = \min(s, t)$ , pour tout  $s, t > 0$ .

Autre façon de l'introduire : via le théorème de Donsker, comme limite d'une marche aléatoire  $\frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^{[nt]} \epsilon_i - (nt - [nt])\epsilon_{[nt]+1} \right)$  où les  $\epsilon_i$  sont iid centrés de variance 1 (cf Exercice 1). On l'appelle aussi processus de Wiener (en hommage à Norbert Wiener qui a défini mathématiquement le mouvement Brownien). Processus fondamental car il modélise le chaos parfait, c'est à dire un déplacement infinitésimal totalement aléatoire (en accord avec l'interprétation d'une marche aléatoire à pas infinitésimal). Pour cette raison il sert de brique de base pour la construction d'une multitude de phénomène aléatoires, notamment en finance pour tout ce qui traite au "calcul stochastique".

Nous étudierons certaines de ces propriétés au fil du cours et dans des exercices.

### Exemple : mouvement Brownien fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H \in ]0, 1[$  est le processus Gaussien  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  vérifiant  $B_0^H = 0$ , de fonction moyenne  $m = 0$  et de fonction de covariance  $\Sigma(s, t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H})$ , pour tout  $s, t > 0$ .

Lorsque  $H = 1/2$ , il s'agit du mouvement Brownien standard (le vérifier). Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont plus irrégulières que celles du Brownien standard lorsque  $H < 1/2$  et plus régulières lorsque  $H > 1/2$ . On peut en effet montrer (Exercice 4) que les accroissements successifs du Brownien fractionnaire sont négativement corrélés lorsque  $H < 1/2$ , induisant un comportement très erratique, sont indépendants dans

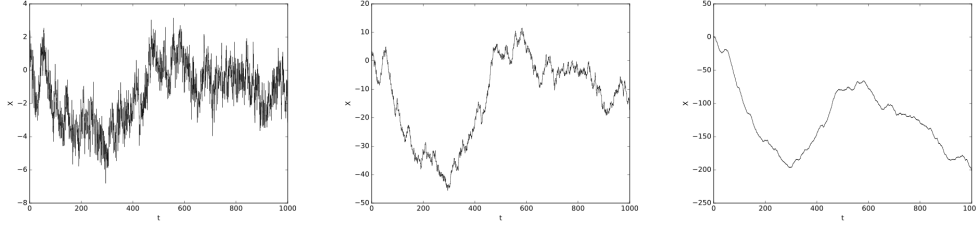


FIGURE 1.1 – Réalisations du mouvement Brownien fractionnaire pour  $H = 0.15$ ,  $H = 0.55$  et  $H = 0.95$  (de gauche à droite). Source : Wikipédia.

le cas  $H = 1/2$  (cas du chaos parfait), et sont positivement corrélés lorsque  $H > 1/2$  régularisant en un certain sens les trajectoires. Cf la figure 1.1 pour des exemples de trajectoires lorsque  $T = \mathbb{R}_+$  et ce lien pour des exemples concernant la généralisation du MBF lorsque  $T = \mathbb{R}^2$ .

Ce processus, introduit par Mandelbrot, est très utilisé pour décrire des phénomènes auto-similaires, c'est à dire fractales. On dit que le processus  $X$  est auto-similaire d'indice  $H$  si pour tout  $a > 0$ , l'égalité en loi  $(X_{at})_{t \geq 0} = a^H (X_t)_{t \geq 0}$  est vérifiée. Autrement dit, en zoomant sur la trajectoire (ce que fait le changement d'échelle  $at$ ), on retrouve le même type de fluctuations. On peut montrer (Exercice 5), que c'est le cas du mouvement Brownien fractionnaire.

**Remarque 1.2.2.** *On considère parfois le mouvement Brownien d'espérance  $m_0$  et de variance  $\sigma_0$  défini par  $\sigma_0(B_t + m_0)$ , de même pour le Brownien fractionnaire. Le cas  $m_0 = 0$  et  $\sigma_0 = 1$  correspond au mouvement Brownien standard.*

### 1.2.3 Processus à accroissements indépendants

Soit  $T \subset \mathbb{R}$  et  $E$  un espace polonais.

**Définition 1.2.3.** *On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \in T}$  à valeurs dans  $E$  est à accroissements indépendants si pour tout  $n$ , pour tous  $t_1, \dots, t_n$ , les variables aléatoires  $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.*

Un tel processus existe toujours lorsque  $T = \mathbb{R}_+$ , pourvu qu'on se donne la loi des accroissements et qu'on fixe le point initial  $X_0 = 0$ . En effet, notons  $\mu_{s,t}$

la loi de l'accroissement entre  $s$  et  $t$ ,  $s < t$ . Si  $s < t < u$ , l'accroissement entre  $s$  et  $u$  est la somme des accroissements entre  $s$  et  $t$  d'une part, et entre  $t$  et  $u$  d'autre part, que l'on a supposé indépendants. Il faut donc nécessairement que

$$\mu_{s,u} = \mu_{s,t} \star \mu_{t,u} \quad (1.2)$$

où  $\star$  désigne la convolution. C'est en réalité la seule condition à vérifier lorsque l'on se donne la loi des accroissements. Pour le reste, par indépendance des accroissements et puisque  $X_0 = 0$ , la loi du vecteur  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  est le produit tensoriel  $\mu^{\otimes n} = \mu_{0,t_1} \otimes \mu_{t_1,t_2} \otimes \dots \otimes \mu_{t_{n-1},t_n}$ . Puisque le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est l'image des accroissements précédents par l'application  $f_n(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n)$ , la loi  $\nu_{t_1, \dots, t_n}$  de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est la loi image de  $\mu^{\otimes n}$  par  $f_n$ , i.e.  $\nu_{t_1, \dots, t_n} = f_n \star \mu^{\otimes n}$ .

Ainsi, si on se donne la loi des accroissements  $\mu_{s,t}$ , en s'assurant bien que (1.2) est vérifié, définir un processus à accroissements indépendants revient à se donner les lois fini-dimensionnelles  $\nu_{t_1, \dots, t_n} = f_n \star \mu^{\otimes n}$ . On peut vérifier que ces lois sont consistantes (cf tableau pour l'idée), et donc d'après le théorème d'extension de Kolmogorov, le processus est bien défini.

### Exemple : mouvement Brownien (bis)

On suppose que la loi  $\mu_{s,t}$  des accroissements est une loi Gaussienne centrée de variance  $t - s$ . On vérifie facilement que (1.2) est satisfaite : en effet  $\mu_{s,t} \star \mu_{t,u}$  correspond alors à la loi de la somme de deux Gaussiennes centrées indépendantes, de variance respective  $t - s$  et  $u - t$ ; cette somme est une Gaussienne centrée de variance la somme des variances (par indépendance), c'est à dire  $u - s$ , ce qui correspond bien à  $\mu_{s,u}$ . Notre hypothèse définit donc un processus indexé par  $\mathbb{R}_+$  partant de 0 en 0. On montre (Exercice 6) qu'il s'agit du mouvement Brownien : il suffit pour cela d'identifier toutes les lois fini-dimensionnelles.

Un mouvement Brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  peut donc (aussi) être défini comme étant un processus partant de 0 en  $t = 0$ , à accroissements indépendants dont les accroissements  $B_t - B_s$ , pour  $s < t$ , suivent une loi Gaussienne centrée de variance  $t - s$ .

### Contre-exemple : mouvement Brownien fractionnaire

Contrairement au mouvement Brownien, les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire ne sont pas indépendants lorsque  $H \neq 1/2$  (Exercice 4). On ne peut donc pas espérer le construire en tant que processus à accroissement indépendants.

**Exemple : processus de Poisson**

On suppose que la loi  $\mu_{s,t}$  des accroissements est une loi de Poisson de paramètres  $\lambda(t-s)$  pour  $\lambda > 0$  fixé. La somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, donc (1.2) est vérifié. Ceci définit donc un processus indexé par  $\mathbb{R}_+$ , partant de 0 en  $t = 0$ , et à valeurs dans  $\mathbb{N}$  : il s'agit du processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , dont on reparlera plus longuement dans le prochain chapitre.

**1.3 Quelques propriétés de base des processus****1.3.1 Stationnarité**

On suppose que  $T \subset \mathbb{R}$  ou  $T \subset \mathbb{R}^d$  (de façon générale, la suite est valide si  $T$  admet une opération de translation, telle que  $+$  lorsque  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{R}^d$ ).

**Définition 1.3.1.** *Un processus est dit stationnaire si sa loi est invariante par translation. Cela signifie que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $t_1, \dots, t_n$  dans  $T$ , et pour tout  $h \in T$ , la loi de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est la même que la loi de  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ .*

En particulier, pour un processus stationnaire, l'espérance  $\mathbb{E}(X_t)$  est constante quel que soit  $t$  (prendre  $h = -t$ ), de même pour la variance  $\mathbb{V}(X_t)$ . De plus la fonction de covariance  $\Sigma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$  ne dépend que de  $t - s$  (prendre  $h = -s$ ).

On distingue parfois la stationnarité stricte (qui est la définition ci-dessus), à la stationnarité faible, qui ne concerne que les deux premiers moments du processus :

**Définition 1.3.2.** *Un processus est dit stationnaire au sens faible, ou stationnaire au second ordre, si pour tout  $t$ ,  $\mathbb{E}(X_t)$  ne dépend pas de  $t$ , et pour tous  $s, t \in T$ ,  $\Sigma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$  ne dépend que de  $t - s$ .*

**Exemples :**

- Une série temporelle ARMA centrée dont les racines du polynôme AR sont de module différent de 1 est stationnaire (cf cours de Séries Temporelles).
- Un processus Gaussien à temps continu, d'espérance constante  $m(t) = m$  et de fonction de covariance invariante par translation  $\Sigma(s, t) = \sigma(t - s)$  est stationnaire (par exemple  $m = 0$  et  $\sigma(h) = \exp(-|h|)$ ).

Dans le cas où  $T \subset \mathbb{R}$ , on peut considérer les accroissements du processus, comme dans la section 1.2.3. Beaucoup de processus ne sont pas stationnaires mais sont à accroissements stationnaires, au sens de la définition suivante.

**Définition 1.3.3.** *Soit  $T \subset \mathbb{R}$ . Un processus est à accroissements stationnaires si pour tout  $t$ , pour tout  $h$ , la loi de  $X_{t+h} - X_t$  ne dépend pas de  $t$  mais uniquement de  $h$ .*

Evidemment, si un processus est stationnaire, il est à accroissements stationnaires.

**Exemples :** Le mouvement Brownien, le mouvement Brownien fractionnaire et le processus de Poisson sont des processus non stationnaires, mais à accroissements stationnaires (Exercice 7).

### 1.3.2 Processus de Markov

On se place une nouvelle fois dans le cas  $T \subset \mathbb{R}$ . On désigne par  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$  la tribu engendrée par le “passé” du processus jusqu’au temps  $t$ . La famille  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  est appelée *filtration naturelle* du processus.

**Définition 1.3.4.** *On dit que  $(X_t)_{t \in T}$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  est un processus de Markov s’il vérifie la propriété, pour tout  $s \leq t$  et pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,*

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s).$$

En d’autres termes, le futur du processus ne dépend du passé qu’à travers le présent.

**Définition 1.3.5.** *Un processus de Markov est dit homogène si pour  $s \leq t$ , la loi de  $X_t$  sachant  $X_s$  ne dépend que de  $X_s$  et de  $t - s$ .*

La propriété de Markov permet d’étudier finement la dépendance du processus et son comportement en temps long. L’étude générale des processus de Markov n’est pas l’objet de ce cours, mais nous en exploiterons à plusieurs reprises la propriété pour les exemples de processus de Markov que nous croiserons.

La propriété de Markov est très courante, comme l’atteste la proposition suivante, dans laquelle  $E = \mathbb{R}$ .

**Proposition 1.3.6.** *Tout processus réel à accroissements indépendants est un processus de Markov. Si de plus les accroissements sont stationnaires, alors il s'agit d'un processus de Markov homogène.*

*Démonstration.* Nous allons utiliser la fonction caractéristique et prouver que pour tout  $s \leq t$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{iuX_t} | X_s).$$

La fonction caractéristique caractérisant la loi, la propriété de Markov sera ainsi montrée. Nous avons en effet, puisque  $X_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable,

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)} e^{iuX_s} | \mathcal{F}_s) = e^{iuX_s} \mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s).$$

Or par indépendance des accroissements avec le passé,

$$\mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)}) = \mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)} | X_s).$$

En multipliant par  $e^{iuX_s}$ , on obtient le résultat recherché.

Si de plus les accroissements sont stationnaires, on a  $\mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)}) = \mathbb{E}(e^{iu(X_{t-s} - X_0)})$ . On déduit donc des calculs précédents que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{iuX_t} | X_s) &= e^{iuX_s} \mathbb{E}(e^{iu(X_t - X_s)}) \\ &= e^{iuX_s} \mathbb{E}(e^{iu(X_{t-s} - X_0)}) \\ &= e^{iuX_s} \mathbb{E}(e^{iuX_{t-s}}) \mathbb{E}(e^{iuX_0}), \end{aligned}$$

qui ne dépend que de  $X_s$  et  $t - s$ , le terme  $\mathbb{E}(e^{iuX_0})$  jouant le rôle d'une constante. Le processus de Markov est donc homogène.  $\square$

### Exemples :

- Le mouvement Brownien est un processus de Markov homogène en tant que processus réel à accroissements indépendants et stationnaires.
- Pour les mêmes raisons, le processus de Poisson est un processus de Markov homogène.
- Le mouvement Brownien fractionnaire (pour  $H \neq 1/2$ ) n'est pas Markovien (par ailleurs il n'est pas à accroissements indépendants et la proposition précédente ne s'applique pas). Cela peut par exemple se montrer en calculant  $\mathbb{E}(X_t | X_s, X_{s'})$  pour  $t > s > s'$ , et en remarquant que cette quantité ne dépend pas que de  $X_s$  lorsque  $H \neq 1/2$ .

### 1.3.3 Régularité des trajectoires

Une trajectoire est une réalisation du processus  $(X_t)_{t \in T}$ . Il s'agit donc d'une fonction de  $T$  dans  $E$ . La régularité des trajectoires concerne l'aspect continu, dérivable, höldérien, etc, des trajectoires.

Avant d'aller plus loin, remarquons que tel que nous l'avons défini, un processus n'est pas unique. En effet, la définition ne concerne que les lois fini-dimensionnelles (donc la loi du processus) et plusieurs processus peuvent avoir la même loi.

L'ensemble des processus ayant même loi forme une classe d'équivalence. On appelle *version* d'un processus un membre de sa classe d'équivalence.

**Exemple :** On dit que  $(Y_t)_{t \in T}$  est une *modification* de  $(X_t)_{t \in T}$  si pour tout  $t \in T$ ,  $\mathbb{P}(Y_t = X_t) = 1$ . Toute modification d'un processus admet les mêmes lois fini-dimensionnelles (les vecteurs sont égaux presque sûrement) donc les deux processus sont équivalents. En guise d'illustration, soit  $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ . Alors le processus  $Y_t = \mathbf{1}_{U < t}$ , pour  $t \in [0, 1]$  est une modification du processus  $X_t = \mathbf{1}_{U \leq t}$ . Les trajectoires de  $Y$  sont continues à gauche alors que les trajectoires de  $X$  sont continues à droite (dessin).

Comme l'exemple précédent le montre, la régularité des trajectoires d'un processus dépend de la version que l'on prend pour ce processus. Pour la continuité, on a donc la définition suivante.

**Définition 1.3.7.** *Un processus est dit à trajectoires continues, presque sûrement, s'il existe une version de ce processus dont les trajectoires sont continues, presque sûrement. Pour cette version, on a donc qu'il existe un ensemble négligeable  $N \in \mathcal{F}$ , tel que pour tout  $\omega \notin N$ , la fonction  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue.*

De même, on peut définir les processus à trajectoires continues à droite, dérivables, höldériennes, etc.

**Theorem 1.3.8** (Critère de continuité de Kolmogorov). *S'il existe  $c > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\beta > 0$  tels que pour tout  $t$  et  $t + h$  dans  $T$ , on ait*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) \leq \frac{c}{\epsilon^\beta} |h|^{1+\rho},$$

*alors le processus admet une version à trajectoires continues, presque sûrement.*



**Corollary 1.3.9.** *Avec les mêmes notations, si*

$$\mathbb{E}(|X_{t+h} - X_t|^\beta) \leq c|h|^{1+\rho},$$

*alors le processus admet une version à trajectoires continues, presque sûrement.*

*Démonstration.* Il s'agit d'une application de l'inégalité de Markov.  $\square$

**Exemple :** Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice  $H$  (dont le mouvement Brownien lorsque  $H = 1/2$ ) est à trajectoires continues, presque sûrement (Exercice 9).

On peut montrer de plus que ces trajectoires ne sont nulle part dérivables, presque sûrement. En fait elles sont hölderiennes d'exposant  $H$  (plus  $H$  est proche de 1, plus les trajectoires sont régulières), dans le sens où pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq c(\omega)|t - s|^{H-\epsilon}$ , pour presque tout  $\omega$ .

**Exemple :** Le processus de Poisson n'est pas à trajectoires continues, puisque ses accroissements suivent une loi discrète (de Poisson). Il y a donc des sauts. En fait ses trajectoires sont constantes par morceaux, croissantes et on peut choisir une version continue à droite. Cf le chapitre suivant pour plus de détails.

## 1.4 Premier bilan

Pour les processus à temps continu ( $T = \mathbb{R}_+$ ), on a vu que

- les lois fini-dimensionnelles caractérisent la loi du processus, et il suffit de se les donner pour définir entièrement la loi (pourvu que ces lois soient consistantes).
- En particulier, les processus Gaussiens et les processus à accroissements indépendants peuvent ainsi être définis facilement.
- Plusieurs propriétés de base facilitent l'étude des processus : parmi elles la propriété de Markov et la stationnarité (ou les accroissements stationnaires).

On peut distinguer deux grandes familles de processus à temps continus :

- les processus dont les trajectoires sont continues (presque sûrement). Le modèle fondamental de base est le mouvement Brownien. De nombreux modèles alternatifs sont construits à partir de ce dernier, notamment en calcul stochastique.

- les processus dont les trajectoires présentent des sauts. Le modèle fondamental de base est le processus de Poisson, que nous verrons en détail dans le chapitre suivant. De même de nombreux modèles alternatifs sont des généralisations de ce dernier.

Pour information : on appelle *processus de Lévy* un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont càdlàg. Le mouvement Brownien et le processus de Poisson sont les deux exemples fondamentaux de processus de Lévy. Par contre, le Brownien fractionnaire n'est pas un processus de Lévy (ses accroissements ne sont pas indépendants).

## Exercices

**Exercice 1.** Soit  $(\epsilon_i)$  une suite i.i.d de variables aléatoires réelles centrées et de variance 1. Soit  $S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^{[nt]} \epsilon_i + (nt - [nt])\epsilon_{[nt]+1} \right)$ .

1. Que vaut  $\mathbb{E}(S_n(t))$  et  $\text{Cov}(S_n(t), S_n(s))$  ?
2. Quelle est la loi limite, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de  $S_n(t)$  ?
3. Justifier que le mouvement Brownien est le bon candidat pour correspondre à la limite en loi du processus  $(S_n(t))_{t \geq 0}$ .

La convergence précédente est l'objet du théorème de Donsker (dont l'énoncé précis et la preuve sont omis).

**Exercice 2. [TP]** Soit  $(\epsilon_i)$  une suite i.i.d de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ . Tracer une réalisation de  $S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^{[nt]} \epsilon_i + (nt - [nt])\epsilon_{[nt]+1} \right)$  pour  $t \in [0, 1]$ , et lorsque  $n = 10, 100, 1000, 10\,000$ . Répéter la simulation plusieurs fois. Recommencer lorsque  $(\epsilon_i)$  est une suite i.i.d suivant une  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 3.** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien. Montrer les propriétés suivantes

1. Symétrie :  $\tilde{B}_t = -B_t$  est encore un mouvement Brownien.
2. Auto-similarité : Pour tout  $c > 0$ ,  $\tilde{B}_t = B_{ct}/\sqrt{c}$  est encore un mouvement Brownien.

3. Inversion du temps :  $\tilde{B}_t = tB_{1/t}$  est encore un mouvement Brownien.
4. Invariance par translation : Pour tout  $h > 0$ ,  $\tilde{B}_t = B_{t+h} - B_t$  est encore un mouvement Brownien, indépendant de  $(B_t)_{0 \leq t \leq h}$ .
5. Retournement du temps : Soit  $T > 0$ , le processus  $\tilde{B}_t = B_T - B_{T-t}$  est un mouvement Brownien pour  $t \in [0, T]$ .

**Exercice 4.** Pour  $\delta > 0$ , on définit  $\Delta_t^H = B_{t+\delta}^H - B_t^H$  où  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  est le mouvement Brownien fractionnaire.  $(\Delta_t^H)_{t \geq 0}$  s'appelle le processus des accroissements d'ordre  $\delta$  du mouvement Brownien fractionnaire.

1. Calculer l'espérance et la fonction de covariance de  $(\Delta_t^H)_{t \geq 0}$ .
2. En déduire que les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire sont négativement corrélés lorsque  $H > 1/2$ , indépendants pour  $H = 1/2$  et positivement corrélés lorsque  $H < 1/2$ .

**Exercice 5.** Montrer que le mouvement Brownien fractionnaire  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  est auto-similaire d'indice  $H$ .

**Exercice 6.** Montrer qu'un processus partant de 0 en 0, à accroissements indépendants, et dont les accroissements entre  $s$  et  $t$ , pour tout  $s < t$ , suivent une loi normale centrée de variance  $t-s$ , correspond au mouvement Brownien.

**Exercice 7.** Montrer que le mouvement Brownien, le mouvement Brownien fractionnaire et le processus de Poisson sont des processus non stationnaires, mais à accroissements stationnaires.

**Exercice 8.** On a vu que le mouvement Brownien fractionnaire est auto-similaire et à accroissements stationnaires. Nous allons montrer la réciproque. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus Gaussien auto-similaire d'indice  $H$ , pour  $0 < H < 1$ , et à accroissements stationnaires. On suppose qu'il est standard dans le sens où  $X_0 = 0$  et  $\mathbb{V}(X_1) = 1$ .

1. Montrer que  $\mathbb{E}(X_1) = 2^H \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1)$ . En déduire que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  et par suite, que  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  pour tout  $t > 0$ .

2. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

3. En déduire que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est nécessairement le mouvement Brownien fractionnaire d'indice  $H$ .

**Exercice 9.** Montrer que le mouvement Brownien fractionnaire est à trajectoires continues, presque sûrement.

## Chapitre 2

# Processus de Poisson

Nous avons déjà introduit le processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$  dans le chapitre précédent, en tant que processus à accroissements indépendants dont les accroissements entre  $s$  et  $t$ ,  $s < t$ , suivent une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$ . Les trajectoires de ce processus sont donc constantes par morceaux et présentent des sauts (puisque les accroissements sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ). On verra de plus que ces sauts sont forcément d'amplitude 1, autrement dit il ne peut pas y avoir plusieurs sauts en même temps.

Il s'agit du cas le plus simple d'un processus de comptage, famille de processus que nous présentons dans la première partie. Le processus de Poisson homogène sera étudié en détail par la suite, suivi du processus de Poisson inhomogène.

### 2.1 Processus de comptage et intensité

**Définition 2.1.1.** *Un processus de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus stochastique partant de  $N_0 = 0$ , dont les trajectoires sont croissantes par sauts d'amplitude 1, continues à droite.*

On note  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite des instants de sauts de  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Elle vérifie  $0 < T_1 < T_2 < \dots$  presque sûrement. On peut donc écrire un processus de comptage sous la forme

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t}.$$

La suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  des instants de sauts est un *processus ponctuel* sur  $\mathbb{R}_+$ . On

vérifie facilement que

$$N_t \geq n \iff T_n \leq t \quad (2.1)$$

de telle sorte que connaître  $(N_t)_{t \geq 0}$  est équivalent à connaître  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

On désigne par  $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$  la tribu engendrée par le passé de  $N_t$ , que l'on appelle parfois *l'historique* de  $N_t$ . L'ensemble  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  s'appelle la *filtration naturelle* de  $(N_t)_{t \geq 0}$ .

**Définition 2.1.2.** *On dit que la fonction  $\lambda$  est l'intensité du processus de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$  si pour tout  $t$ ,  $\lambda(t)$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_t$ , continu à gauche, et si*

$$\mathbb{E}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E} \left( \int_s^t \lambda(u) du | \mathcal{F}_s \right).$$

De manière plus intuitive, en prenant  $t = s + h$  et en faisant tendre  $h$  vers 0, on peut voir  $\lambda(s)$  comme étant la variation moyenne du nombre de sauts, autour de  $s$  :

$$\lambda(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}(N_{s+h} - N_s | \mathcal{F}_s).$$

Ou encore, en écrivant  $ds = h$ , les sauts ne valant que 0 ou 1 dans le petit intervalle  $ds$ , cela donne :

$$\lambda(s)ds \approx \mathbb{P}(N_s \text{ présente un saut dans } [s, s + ds] | \mathcal{F}_s).$$

La proposition suivante est parfois présentée comme la définition de l'intensité. Elle fait le lien entre les processus de comptage et les martingales, qui sont des processus bien compris en probabilité et donnant accès à de nombreuses propriétés théoriques.

**Proposition 2.1.3.** *La fonction  $\lambda$  est l'intensité du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  si le processus  $\int_0^t \lambda(u) du$ ,  $t \geq 0$ , est le compensateur du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$ , dans le sens où  $N_t - \int_0^t \lambda(u) du$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.*

*Démonstration.* On rappelle que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale si  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ . On calcule donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( N_t - \int_0^t \lambda(u) du | \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbb{E}(N_t - N_s | \mathcal{F}_s) - \mathbb{E} \left( \int_s^t \lambda(u) du | \mathcal{F}_s \right) + \mathbb{E}(N_s | \mathcal{F}_s) - \mathbb{E} \left( \int_0^s \lambda(u) du | \mathcal{F}_s \right) \\ &= 0 + N_s - \int_0^s \lambda(u) du, \end{aligned}$$

le premier terme étant nul par définition de l'intensité et les autres étant  $\mathcal{F}_s$ -mesurables.  $\square$

**Remarque 2.1.4.** *En toute généralité, l'intensité  $\lambda(t)$  peut être aléatoire et dépendre du passé de  $N_t$ . Ce ne sera pas le cas pour le processus de Poisson étudié ci-après, pour lequel l'intensité est une fonction déterministe (constante dans le cas homogène). C'est par contre le cas pour le processus de Hawkes (vu en activité personnelle), dont l'intensité à l'instant  $t$  dépend des sauts passé du processus.*

## 2.2 Processus de Poisson homogène

Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de comptage et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  le processus ponctuel de ses sauts. En posant  $T_0 = 0$ , on note

$$\tau_n = T_n - T_{n-1}$$

les *temps inter-sauts* du processus de comptage.

La définition suivante d'un processus de Poisson homogène est intuitive, et permet de construire facilement un algorithme de simulation du processus. On verra par la suite qu'elle est équivalente à la définition via les accroissements donnée dans le chapitre précédent.

**Définition 2.2.1.** *Un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$  est un processus de comptage dont les temps inter-sauts  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ , la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .*

Pour simuler une trajectoire d'un processus de Poisson jusqu'à l'instant  $t$ , il suffit donc de simuler des variables aléatoires i.i.d suivant une  $\mathcal{E}(\lambda)$  jusqu'à ce que leur somme dépasse  $t$ . Précisément, on part de  $\tau_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$  et  $n = 1$ . Tant que  $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i < t$ , faire

1.  $n \leftarrow n + 1$
2.  $\tau_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$

A l'issue de cet algorithme, on aura soit simulé uniquement  $T_1 > t$ , soit simulé  $T_1, \dots, T_{n+1}$  avec  $T_n < t$  et  $T_{n+1} > t$ . Le processus de Poisson jusqu'à l'instant  $t$  est donné dans le premier cas par  $N_s = 0$  pour tout  $s \leq t$ , et par  $T_1, \dots, T_n$  dans le second cas (le plus courant), i.e.  $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t}$ .

La loi jointe des instants de sauts d'un processus de Poisson est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 2.2.2.** *Pour un processus de Poisson,*

(i) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$  admet pour densité*

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n}.$$

(ii) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant que  $N_t = n$  est celle de  $n$  variables aléatoires i.i.d ordonnées suivant la loi uniforme sur  $[0, t]$ , i.e., de densité*

$$f_{T_1, \dots, T_n | N_t = n}(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < t}.$$

*Démonstration.* La preuve de (i) découle du fait que  $(T_1, \dots, T_n) = \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  avec  $\varphi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n)$ . Il suffit d'appliquer le changement de variables (cf tableau).

La preuve de (ii) correspond à la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant que  $N_t = n$ , c'est à dire sachant que  $T_n \leq t < T_{n+1}$ . On peut calculer sa densité grâce au résultat précédent (cf tableau).

□

On peut à présent montrer que la définition d'un processus de Poisson telle qu'adoptée ci-dessus est équivalente à celle du chapitre précédent.

**Proposition 2.2.3.** *Un processus stochastique  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  ssi  $N_0 = 0$ , ses accroissements sont indépendants et  $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t - s))$  pour tous  $s < t$ .*

*Démonstration.* Partant de la définition 2.2.1 et de la proposition précédente (ii), on peut calculer la loi jointe de  $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$  pour tout  $t_1 < \dots < t_n$ . On commence pour cela par conditionner par  $N_{t_n} = k$ , puis on en déduit la loi recherchée (cf tableau). On obtient que le vecteur précédent suit un produit tensoriel de loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda t_1, \dots, \lambda(t_n - t_{n-1})$ , ce qui prouve l'indépendance des accroissements et leur loi.

Pour la réciproque, on prouve dans un premier temps que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est nécessairement un processus simple, au sens où il ne peut y avoir au plus qu'un seul saut à chaque instant (cf tableau). On peut donc définir la suite des sauts  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , de telle sorte que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de comptage. On déduit de la loi des accroissements  $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ , la loi du vecteur  $(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n})$ , qui permet quant à lui d'obtenir la loi de



$(T_1, \dots, T_n)$  grâce à la correspondance (2.1), et au final d'en déduire la loi des temps inter-sauts  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Ces calculs suivent la démarche inverse de ceux effectués dans la preuve de la proposition 2.2.2 et dans la première partie de cette preuve : ils sont donc similaires. On obtient que  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  est un vecteur i.i.d de variables aléatoires suivant une  $\mathcal{E}(\lambda)$ , ce qui prouve que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson au sens de la définition 2.2.1.  $\square$

On rappelle les propriétés fondamentales suivantes.

**Proposition 2.2.4.** *Un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$  est à accroissements indépendants et stationnaires. En conséquences, il s'agit d'un processus de Markov homogène.*

*Démonstration.* La proposition précédente donne le premier point (c'est la définition du processus de Poisson homogène du chapitre précédent). La proposition 1.3.6 permet d'en déduire le caractère Markovien homogène.  $\square$

## 2.3 Estimation de l'intensité d'un processus de Poisson homogène

On va considérer trois scénarios d'observation du processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$  :

1. On observe le processus jusqu'à l'arrivée du  $n$ -ème saut  $T_n$  ;
2. On observe le processus sur un intervalle de temps  $[0; t]$  ;
3. On observe le processus uniquement en des instants discrets  $t_1, \dots, t_n$ , sans savoir ce qu'il s'est passé entre ces instants.

L'objectif dans chaque scénario est d'estimer l'intensité  $\lambda$ . Nous allons dans chaque cas calculer la vraisemblance et considérer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\lambda$ .

### Scénario 1

Dans ce scénario, on observe  $T_1, \dots, T_n$ . La loi de ces observations est donnée par le (i) de la proposition 2.2.2. La vraisemblance s'écrit donc :

$$V(\lambda; T_1, \dots, T_n) = \lambda^n e^{-\lambda T_n}.$$

On en déduit le maximum de vraisemblance :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T_n}.$$

Les propriétés de cet estimateur, en particulier lorsque  $n \rightarrow \infty$ , font l'objet de l'exercice 11.

### Scénario 2

Dans ce scénario, on observe le processus jusqu'à l'instant  $t$ , donc on connaît le nombre de sauts  $n$  ayant eu lieu avant  $t$ , ce qui se traduit par l'information que  $N_t = n$ , et on observe tous les sauts  $T_1, \dots, T_n$  ayant eu lieu avant  $t$ . La loi des observations correspond donc à la loi jointe de  $N_t$  et  $(T_1, \dots, T_{N_t})$ . Par (ii) de la proposition 2.2.2, on connaît la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $N_t = n$ , et on sait par ailleurs que  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ . La densité de la loi jointe  $(T_1, \dots, T_{N_t}, N_t)$  calculée en  $t_1, \dots, t_n, n$  vaut donc :

$$f_{T_1, \dots, T_n | N_t = n}(t_1, \dots, t_n) \times \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{t_1 < \dots < t_n < t} \times \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

et donc la vraisemblance des observations s'écrit

$$V(\lambda; (N_s)_{0 \leq s \leq t}) = \lambda^{N_t} e^{-\lambda t}.$$

On en déduit le maximum de vraisemblance :

$$\hat{\lambda} = \frac{N_t}{t}.$$

On observe que bien que le schéma d'observation soit différent, l'estimateur final est le même que dans le premier scénario, dans le sens où il consiste à compter le nombre de sauts, divisé par le temps d'observation. Les propriétés de cet estimateur, en particulier lorsque  $t \rightarrow \infty$ , font l'objet de l'exercice 12.

### Scénario 3

Dans ce scénario, on observe  $N_{t_1}, \dots, N_{t_n}$ , ce qui revient à observer  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ . Ces variables sont indépendantes de lois respectives

$\mathcal{P}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$  pour  $i = 1, \dots, n$ . La vraisemblance s'écrit donc

$$\begin{aligned} V(\lambda; N_{t_1}, \dots, N_{t_n}) &= \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}}}{(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})!} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \\ &= \lambda^{N_{t_n}} e^{-\lambda t_n} \times \prod_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}}}{(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})!}. \end{aligned}$$

Le produit à droite est une constante en  $\lambda$ , on en déduit donc facilement que le maximum de vraisemblance vaut :

$$\hat{\lambda} = \frac{N_{t_n}}{t_n}.$$

Ici aussi l'estimateur est simplement le nombre de sauts observés, divisé par le temps d'observation. Il est remarquable (et plutôt exceptionnel), que l'observation en des temps discrets ne nuit en rien à la qualité d'estimation : on obtient en effet le même estimateur que si on avait observé toute la trajectoire du processus jusqu'à l'instant  $t_n$ , comme dans le scénario 2. Les propriétés de cet estimateur sont identiques à celles du scénario 2, pourvu que l'asymptotique considéré implique  $t_n \rightarrow \infty$ .

## 2.4 Processus de Poisson non-homogène

Pour un processus de Poisson homogène, les sauts arrivent avec la même intensité  $\lambda > 0$  au cours du temps. Dans certains applications, cette intensité dépend du temps : par exemple les instants d'arrivée des clients dans un magasin peuvent être plus fréquents à certains moments de la journée qu'à d'autres, de même pour des arrivées aux urgences à l'hôpital, ou des appels vers une plateforme téléphonique. C'est aussi le cas si on considère la survenue de pannes dans un système : ces dernières peuvent devenir de plus en plus fréquentes avec le temps à cause du vieillissement.

Le processus de Poisson non-homogène permet d'étendre la définition du processus de Poisson pour tenir compte de cette inhomogénéité.

**Définition 2.4.1.** Soit  $\lambda$  une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  localement intégrable (par exemple continue). On dit qu'un processus de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  si  $N_0 = 0$ , si ses accroissements sont indépendants et si pour tous  $s < t$ ,  $N_t - N_s$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\int_s^t \lambda(u) du$ .

En tant que processus à accroissement indépendants partant de  $N_0 = 0$ , un tel processus existe (cf le chapitre 1). Il suffit de vérifier que la loi des accroissements est compatible, ce qui est vrai : pour  $s < t < u$ , la loi de  $N_u - N_s$  correspond bien à la somme indépendante de la loi de  $N_u - N_t$  et de  $N_t - N_s$ , puisque la somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres.

Si  $\lambda$  est une fonction constante, on retrouve évidemment la définition d'un processus de Poisson homogène.

**Proposition 2.4.2.** *Un processus de Poisson est un processus de Markov. C'est un processus de Markov homogène uniquement si son intensité est constante.*

*Démonstration.* C'est une conséquence de la proposition 1.3.6.  $\square$

On peut construire un processus de Poisson non-homogène à partir d'un processus de Poisson homogène par changement de temps.

**Proposition 2.4.3.** *Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson homogène d'intensité 1 dont les instants de sauts sont  $(T_n)_{n \geq 1}$ . Soit  $\lambda$  une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  localement intégrable et  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ . On note  $\Lambda^{-1}$  la pseudo-inverse de  $\Lambda$ , définie par  $\Lambda^{-1}(t) = \inf\{x \geq 0, \Lambda(x) \geq t\}$ ,  $t > 0$ . Alors :*

- $(N_{\Lambda(t)})_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson non-homogène d'intensité  $\lambda$ .
- De façon équivalente, la suite  $(\Lambda^{-1}(T_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  correspond aux instants de sauts d'un processus de Poisson non-homogène d'intensité  $\lambda$ .

*Démonstration.* La fonction  $\Lambda$  est continue et croissante. En particulier  $\Lambda(t) > \Lambda(s)$  si  $s > t$ . Puisque  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson homogène d'intensité 1, ses accroissements sont indépendants, ce qui reste vrai pour le processus  $(N_{\Lambda(t)})_{t \geq 0}$ . De plus la loi de  $N_{\Lambda(t)} - N_{\Lambda(s)}$  est par définition une loi de Poisson de paramètre  $1 \times (\Lambda(t) - \Lambda(s))$ , ce qui montre que  $(N_{\Lambda(t)})_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson non-homogène d'intensité  $\lambda$ .

Par ailleurs,  $\Lambda$  étant continue et croissante, on peut donc bien définir sa pseudo-inverse continue à gauche comme dans l'énoncé. On peut vérifier en particulier que  $\Lambda(x) \geq t \iff x \geq \Lambda^{-1}(t)$ . On a ainsi

$$N_{\Lambda(t)} = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq \Lambda(t)} = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\Lambda^{-1}(T_n) \leq t},$$

ce qui montre que la suite  $(\Lambda^{-1}(T_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  correspond aux instants de sauts de  $(N_{\Lambda(t)})_{t \geq 0}$ .  $\square$

On peut également construire un processus de poisson non-homogène d'intensité  $\lambda$  sur tout intervalle  $[0, t]$ , en élaguant un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda^*$ , pourvu que  $\lambda^* > \lambda(s)$  pour tout  $s \in [0, t]$ .

**Proposition 2.4.4.** *Soit  $\lambda$  une fonction localement intégrable de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  et soit  $\lambda^* > 0$  un majorant de  $\lambda$  sur  $[0, t]$ , i.e.  $\lambda^* > \lambda(s)$  pour tout  $s \in [0, t]$ . Soit  $(T_n)$ , pour  $n = 1, \dots, N_t$ , les instants de sauts d'un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda^*$  sur l'intervalle  $[0, t]$ . On construit les instants  $\tilde{T}_n$  en sélectionnant de façon aléatoire un sous-ensemble des  $T_n$  de la façon suivante (on parle d'élagage ou de "thinning" en anglais) : indépendamment pour chaque  $n$ , on garde l'instant  $T_n$  avec probabilité  $\lambda(T_n)/\lambda^*$  et on ne le garde pas avec probabilité  $1 - \lambda(T_n)/\lambda^*$ . Les instants  $\tilde{T}_n$  ainsi obtenus correspondent aux instants de saut d'un processus de Poisson non-homogène d'intensité  $\lambda$  sur  $[0, t]$ .*

*Démonstration.* Les accroissements de  $N_t$  étant indépendants (le nombre de sauts dans chaque intervalle disjoint est indépendant), il en est de même pour le processus des sauts  $\tilde{T}_n$  puisque la sélection de chaque  $T_n$  se fait de manière indépendante. Pour prouver qu'on obtient bien un processus de Poisson non-homogène d'intensité  $\lambda$  sur  $[0, t]$ , il reste à montrer que la loi du nombre de sauts dans n'importe quel intervalle  $[a, b]$  de  $[0, t]$  est une loi de Poisson de paramètre  $\int_a^b \lambda(u) du$ . Pour simplifier les notations et sans perte de généralité, on le montre par la suite pour  $a = 0$ . Notons  $\tilde{N}_t$  le processus de comptage associé aux instants de sauts  $\tilde{T}_n$ , et montrons donc que  $\tilde{N}_b \sim \mathcal{P}(\Lambda)$  où  $\Lambda = \int_0^b \lambda(u) du$ . Pour tout  $k$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{N}_b = k) &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(\tilde{N}_b = k | N_b = n) \mathbb{P}(N_b = n) \\ &= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(\tilde{N}_b = k | N_b = n) \frac{(\lambda^* b)^n}{n!} e^{-\lambda^* b}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\tilde{N}_b = k | N_b = n) \\ &= \int \mathbb{P}(\tilde{N}_b = k | N_b = n, T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n) f_{T_1, \dots, T_n | N_b = n}(t_1, \dots, t_n) dt_1, \dots, dt_n \end{aligned}$$

L'évènement  $\tilde{N}_b = k$  consiste à compter le nombre d'instants  $T_i$  retenus par élagage, où les  $T_i$  sont les  $n$  statistiques d'ordre d'une loi uniforme sur

$[0, b]$ , de par le conditionnement  $N_b = n$  et d'après la proposition 2.2.2 (ii). Ce comptage ne dépend pas de l'ordre et on peut donc considérer le même évènement pour  $n$  variables uniformes sur  $[0, b]$ , de densité  $1/b^n$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{N}_b = k | N_b = n) = \\ \int_{[0, b]^n} \mathbb{P}(k \text{ instants } t_i \text{ parmi } n \text{ ont été sélectionnés} | N_b = n, T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n) \\ \times \frac{1}{b^n} dt_1, \dots, dt_n. \end{aligned}$$

La probabilité ci-dessus est la somme sur toutes les partitions possibles de  $\{1, \dots, n\}$  en  $k$  éléments d'une part et  $n - k$  éléments d'autre part, de la probabilité que les  $k$  éléments en question aient été sélectionnés. Cette somme contient  $n!/(k!(n - k)!)$  termes. L'intégrale ci-dessus est donc une somme sur ces partitions. Pour une partition donnée, notons  $\{i_1, \dots, i_k\}$  le premier ensemble des  $k$  indices retenus, et  $\{i_{k+1}, \dots, i_n\}$  l'ensemble des  $n - k$  autres indices. Pour cette partition l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{[0, b]^n} \mathbb{P} \left( \begin{array}{l} \text{les instants } t_{i_1}, \dots, t_{i_k} \text{ sont retenus et les instants } t_{i_{k+1}}, \dots, t_{i_n} \\ \text{ne sont pas retenus} \end{array} \middle| N_b = n, T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \right) \times \frac{1}{b^n} dt_1, \dots, dt_n. \end{aligned}$$

Par indépendance du processus de sélection, et d'après les probabilités de sélection, cela donne :

$$\begin{aligned} & \int_{[0, b]^n} \prod_{j=1}^k \frac{\lambda(t_{i_j})}{\lambda^*} \prod_{j=k+1}^n \left( 1 - \frac{\lambda(t_{i_j})}{\lambda^*} \right) \times \frac{1}{b^n} dt_1, \dots, dt_n \\ &= \frac{1}{(\lambda^* b)^n} \prod_{j=1}^k \int_0^b \lambda(t_j) dt_j \prod_{j=k+1}^n \int_0^b (\lambda^* - \lambda(t_j)) dt_j \\ &= \frac{1}{(\lambda^* b)^n} \Lambda^k((\lambda^* b) - \Lambda)^{n-k}. \end{aligned}$$

On remarque en particulier que ce résultat ne dépend pas de la partition choisie. En sommant sur toutes les partitions on obtient donc

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_b = k | N_b = n) = \frac{n!}{k!(n - k)!} \frac{1}{(\lambda^* b)^n} \Lambda^k((\lambda^* b) - \Lambda)^{n-k}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{N}_b = k) &= \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(\lambda^* b)^n} \Lambda^k((\lambda^* b) - \Lambda)^{n-k} \frac{(\lambda^* b)^n}{n!} e^{-\lambda^* b} \\
&= e^{-\lambda^* b} \frac{\Lambda^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{1}{(n-k)!} ((\lambda^* b) - \Lambda)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda^* b} \frac{\Lambda^k}{k!} e^{(\lambda^* b) - \Lambda} = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda},
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.  $\square$

Les deux propositions précédentes fournissent des stratégies de simulation d'un processus de Poisson non-homogène. Pour la première il faut connaître  $\Lambda^{-1}$ , pour la seconde il faut connaître un majorant de  $\lambda$ .

Comme pour le cas homogène (proposition 2.2.2), on peut spécifier la loi jointe des temps de sauts, ce qui sera utile pour en déduire la vraisemblance et estimer des paramètres inconnus (cf partie suivante). La proposition suivante généralise la proposition 2.2.2.

**Proposition 2.4.5.** *Supposons que  $\lambda$  est une fonction continue, strictement positive, telle que son intégrale sur  $[0, \infty]$  soit infini. Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et  $(T_n)$  ses instants de saut.*

(i) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$  admet pour densité*

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = e^{-\int_0^{t_n} \lambda(u) du} \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n}.$$

(ii) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant que  $N_t = n$  admet pour densité*

$$f_{T_1, \dots, T_n | N_t = n}(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{\left(\int_0^t \lambda(u) du\right)^n} \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < t}.$$

*Démonstration.* (i) D'après la proposition 2.4.3, les instants de sauts  $S_n = \Lambda(T_n)$  sont ceux d'un processus de Poisson homogène d'intensité 1, avec la notation usuelle  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ . De plus la fonction  $\Lambda$  est inversible puisque  $\lambda$  est continue et strictement positive. On a donc pour toute fonction  $\Phi$  mesurable bornée

$$\mathbb{E}(\Phi(T_1, \dots, T_n)) = \mathbb{E}(\Phi(\Lambda^{-1}(S_1), \dots, \Lambda^{-1}(S_n))).$$

On connaît la loi de  $(S_1, \dots, S_n)$  par la proposition 2.2.2 (i). On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Phi(T_1, \dots, T_n)) &= \int \Phi(\Lambda^{-1}(s_1), \dots, \Lambda^{-1}(s_n)) 1^n e^{-s_n} \mathbf{1}_{0 < s_1 < \dots < s_n} ds_1 \dots ds_n \\ &= \int \Phi(t_1, \dots, t_n) e^{-\Lambda(t_n)} \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n} \lambda(t_1) \dots \lambda(t_n) dt_1, \dots, dt_n\end{aligned}$$

par le changement de variable  $s_i = \Lambda(t_i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

(ii) La preuve se fait comme pour la proposition 2.2.2 (ii) : on utilise le fait que  $N_t = n$  équivaut à  $T_n \leq t < T_{n+1}$  et on en déduit la loi conditionnelle en s'appuyant sur la loi jointe de  $(T_1, \dots, T_{n+1})$  obtenue précédemment.  $\square$

## 2.5 Estimation paramétrique d'un processus de Poisson non-homogène

En présence d'observations d'un processus de Poisson non-homogène, il est naturel de vouloir estimer sa fonction intensité  $\lambda$ .

On peut envisager cette estimation de façon non-paramétrique, comme on le fait pour une densité de probabilité par la méthode des noyaux (par exemple). Un estimateur non-paramétrique très connu est celui de Nelson-Aalen (cf cours d'analyse de survie) : il n'estime pas exactement  $\lambda$  mais son intégrale  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ .

Dans cette partie, on considère l'estimation paramétrique de  $\lambda$ . On suppose donc que la fonction d'intensité dépend d'un paramètre  $\theta$  et on la notera  $\lambda_\theta$  pour le souligner. Le but est d'estimer  $\theta$ .

**Exemple :** On appelle processus de Weibull un processus de Poisson dont l'intensité dépend du paramètre  $\theta = (\alpha, \beta)$  où  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , de la manière suivante :

$$\lambda_\theta(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

Ce modèle est utile pour décrire l'apparition de pannes et tenir compte du vieillissement : l'intensité augmente avec le temps si  $\beta > 1$ .

On considère deux schémas d'observations :



**Scénario 1**

On observe le processus jusqu'à l'arrivée du  $n$ -ème saut  $T_n$ . La vraisemblance est donnée par le (i) de la proposition 2.4.5 :

$$V(\theta; T_1, \dots, T_n) = e^{-\Lambda_\theta(T_n)} \prod_{i=1}^n \lambda_\theta(T_i),$$

en notant  $\Lambda_\theta(t) = \int_0^t \lambda_\theta(u) du$ .

Dans le cas du processus de Weibull,  $\Lambda_\theta(t) = (t/\alpha)^\beta$ , d'où

$$V(\theta; T_1, \dots, T_n) = e^{-(T_n/\alpha)^\beta} \frac{\beta^n}{\alpha^n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{T_i}{\alpha} \right)^{\beta-1}.$$

On peut montrer (exercice) que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le processus de Weibull vaut

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \exp \left( \log T_n - \frac{1}{\hat{\beta}} \log n \right), \\ \hat{\beta} = \left( \log T_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log T_i \right)^{-1}. \end{cases}$$

On peut montrer que ces estimateurs sont convergents presque sûrement, et obtenir leur loi asymptotique.

**Scénario 2**

On observe le processus sur un intervalle de temps  $[0; t]$ . Comme dans le cas homogène, on s'intéresse donc à la densité de la loi jointe  $(T_1, \dots, T_{N_t}, N_t)$  calculée en  $t_1, \dots, t_n, n$  :

$$f_{T_1, \dots, T_n | N_t = n}(t_1, \dots, t_n) \times \mathbb{P}(N_t = n) = \frac{n!}{\Lambda_\theta(t)^n} \prod_{i=1}^n \lambda_\theta(t_i) \mathbf{1}_{0 < t_1 < \dots < t_n < t} \times \frac{\Lambda_\theta(t)^n}{n!} e^{-\Lambda_\theta(t)},$$

en notant  $\Lambda_\theta(t) = \int_0^t \lambda_\theta(u) du$ . Ceci conduit à la vraisemblance :

$$V(\theta; (N_s)_{0 \leq s \leq t}) = e^{-\Lambda_\theta(t)} \prod_{i=1}^{N_t} \lambda_\theta(T_i).$$

Dans le cas du processus de Weibull, cela aboutit aux estimateurs

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \exp \left( \log t - \frac{1}{\hat{\beta}} \log N_t \right), \\ \hat{\beta} = \left( \log t - \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \log T_i \right)^{-1}. \end{cases}$$

Il s'agit des mêmes estimateurs que dans le premier scénario où l'instant final d'observations  $T_n$  est remplacé par  $t$  (qui devient déterministe) et le nombre de sauts  $n$  est remplacé par  $N_t$  (qui devient aléatoire).

### Scénario 3

On observe le processus uniquement en des instants discrets  $t_1, \dots, t_n$ , sans savoir ce qu'il s'est passé entre ces instants. Comme dans le cas homogène, on observe  $N_{t_1}, \dots, N_{t_n}$ , ce qui revient à observer  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ . Ces variables sont indépendantes et suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre  $\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(u) du$ . On obtient

$$\begin{aligned} V(\theta; N_{t_1}, \dots, N_{t_n}) &= \prod_{i=1}^n \frac{(\Lambda_\theta(t_i) - \Lambda_\theta(t_{i-1}))^{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}}}{(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})!} e^{-(\Lambda_\theta(t_i) - \Lambda_\theta(t_{i-1}))} \\ &= e^{-\Lambda_\theta(t_n)} \prod_{i=1}^n \frac{(\Lambda_\theta(t_i) - \Lambda_\theta(t_{i-1}))^{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}}}{(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})!}. \end{aligned}$$

Contrairement au cas homogène, il n'est pas possible en général de factoriser en une expression simple faisant intervenir le paramètre  $\theta$ . Ainsi, en toute généralité, l'estimation de  $\theta$  requiert tous les instants d'observations  $t_1, \dots, t_n$  (ce qui est plutôt moral).

Dans le cas particulier du processus de Weibull, puisque  $\Lambda_\theta(t) = (t/\alpha)^\beta$ , on obtient

$$V(\theta; N_{t_1}, \dots, N_{t_n}) = \frac{e^{-(t_n/\alpha)^\beta}}{\alpha^{\beta N_{t_n}}} \prod_{i=1}^n \frac{(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)^{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}}}{(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})!}.$$

On remarque qu'à  $\beta$  connu, l'estimation de  $\alpha$  est similaire au scénario 2, et donc on ne perd rien à avoir des observations à temps discrets. Par contre l'estimation de  $\beta$  requiert tous les instants d'observations et n'est pas similaire à l'estimation dans le cas du scénario 2. Il convient d'utiliser un algorithme d'optimisation pour trouver son expression.

## Exercices

**Exercice 10.** Montrer que la somme de deux processus de Poisson homogènes indépendants, d'intensité respective  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , est un processus de Pois-

son homogène d'intensité  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**Exercice 11.** On considère le schéma d'observation 1 d'un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$ , c'est à dire que l'on observe le processus jusqu'à l'arrivée du  $n$ -ème saut  $T_n$ . Dans ce schéma  $n$  n'est donc pas aléatoire, mais les observations  $T_1, \dots, T_n$  le sont. On a vu que l'estimateur du maximum de vraisemblance dans ce cas vaut  $\hat{\lambda} = n/T_n$

1. Donner la loi de  $T_n$ .
2. Montrer que  $\hat{\lambda}$  est biaisé, asymptotiquement sans biais (lorsque  $n \rightarrow \infty$ ) et calculer sa variance.
3. Montrer qu'il converge presque sûrement et dans  $L^2$  vers  $\lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
4. Montrer que  $\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)$  converge en loi vers une  $\mathcal{N}(0, \lambda^2)$

**Exercice 12.** On considère le schéma d'observation 2 d'un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$ , c'est à dire que l'on observe le processus jusqu'à l'instant  $t > 0$ . On a vu que l'estimateur du maximum de vraisemblance dans ce cas est  $\hat{\lambda} = N_t/t$ .

1. Montrer que  $\hat{\lambda}$  est un estimateur sans biais et calculer sa variance.
2. En déduire qu'il converge dans  $L^2$  vers  $\lambda$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
3. En utilisant la décomposition

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_{[t]}}{[t]} \times \frac{[t]}{t} + \frac{N_t - N_{[t]}}{t},$$

où  $[t]$  désigne la partie entière de  $t$ , montrer que  $\hat{\lambda}$  converge presque sûrement vers  $\lambda$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

4. Prouver que  $(N_t - N_{[t]})/\sqrt{t}$  converge en probabilité vers 0.
5. En utilisant le même type de décomposition que ci-dessus et le résultat précédent, montrer que  $\sqrt{t}(\hat{\lambda} - \lambda)$  converge en loi vers une  $\mathcal{N}(0, \lambda)$ .

**Exercice 13. [TP]** Simuler un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 1$  jusque  $t = \max(10\,000, T_{10\,000})$  où  $T_{10\,000}$  est l'instant du 10 000-ème saut. On suppose qu'on a observé le processus selon les scénarios suivants, dans lesquels on fera varier  $n$  (cf la suite) :

1. Observation jusqu'à  $T_n$ . On considère  $\hat{\lambda}_1(n)$ , le maximum de vraisemblance dans ce cas.
2. Observation jusqu'à  $t = n$ . On considère  $\hat{\lambda}_2(n)$ , le maximum de vraisemblance dans ce cas.

Calculer la valeur des estimateurs pour  $n$  variant de 10 à 10 000, par pas de 10. Répéter la simulation pour obtenir un échantillon de 100 valeurs de  $\hat{\lambda}_1(n)$  et  $\hat{\lambda}_2(n)$  pour chaque  $n$ . Estimer le biais et la variance de  $\hat{\lambda}_1(n)$  et  $\hat{\lambda}_2(n)$  pour chaque  $n$  et tracer les courbes correspondantes en fonction de  $n$ . Comparer avec les valeurs théoriques.

**Exercice 14.** (Paradoxe de l'autobus ou paradoxe de l'inspection). On suppose que les instants d'arrivée des bus à un arrêt forment un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On notera  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ces instants d'arrivée et  $(N_t)_{t \geq 0}$  le processus de comptage associé. En particulier, le temps entre deux arrivées de bus suit une loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ . Soit  $t > 0$  un instant donné, qui représente l'arrivée d'un usager à l'arrêt de bus. On remarque que nécessairement  $t \in [T_{N_t}, T_{N_t+1}]$ . Soit  $\Delta = t - T_{N_t}$  le temps écoulé depuis le dernier bus qui s'est arrêté (et que l'usager a donc raté) et  $\Delta' = T_{N_t+1} - t$  le temps restant avant l'arrivée du prochain bus.

1. Justifier que pour tout  $u \geq 0$  et pour tout  $t \geq 0$ ,  $(T_{N_t} \leq u) \iff (N_u \geq N_t)$ .
2. Quelles sont les valeurs possibles de  $\Delta$  ?
3. Dédire des deux questions précédentes la valeur de  $\mathbb{P}(\Delta \geq s)$ , pour tout  $s > 0$ .
4. Calculer de même  $\mathbb{P}(\Delta' > s)$ , pour tout  $s > 0$ .
5. Montrer que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux variables aléatoires indépendantes en calculant, pour tout  $s, s' > 0$ ,  $\mathbb{P}(\Delta > s, \Delta' > s')$ .
6. Que vaut  $\mathbb{E}(\Delta)$  (le temps moyen écoulé depuis le dernier bus), et  $\mathbb{E}(\Delta')$  (le temps moyen d'attente avant le prochain bus) ?
7. En déduire  $\mathbb{E}(T_{N_t+1} - T_{N_t})$ . En quoi ce résultat paraît-il paradoxal ?

**Exercice 15. [TP]** On considère un processus de Poisson inhomogène suivant une intensité de Weibull (2.2) pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ .

1. Combien de sauts peut-on s'attendre à observer en moyenne sur l'intervalle de temps  $[0, 20]$  ?
2. Simuler une réalisation de ce processus sur l'intervalle de temps  $[0, 20]$ .
3. En déduire une estimation de  $\alpha$  et  $\beta$  par maximum de vraisemblance.
4. Evaluer les qualités de cette estimation lorsque le temps d'observation grandit (disons de 2 à 20), en répétant plusieurs simulations.
5. On suppose à présent que l'on n'observe le processus qu'à  $n$  instants discrets répartis de façon régulière sur  $[0, 20]$ . Estimer les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  en vous basant sur ces observations et évaluer la qualité d'estimation en fonction de  $n$ . Comparer avec l'estimation de  $\alpha$  et  $\beta$  lorsque l'on observe toute la trajectoire sur  $[0, 20]$ .