# Ayudantía 3 - Teoremas de Thévenin y Norton

**Pedro Morales Nadal**
pedro.morales1@mail.udp.cl
+56 9 30915977

**Edicson Solar Salinas**
edicson.solar@mail.udp.cl
+56 9 92763279

**Shi Hao Zhang**
shi.zhang@mail.udp.cl
+56 9 90787770

Ingeniería Civil en Informática y Telecomunicaciones

# ¿Qué veremos?

- Potencia
- Teoremas de Thévenin y Norton
- Encontrar circuitos equivalentes
- Calcular diferencia de potencial entre 2 puntos

# Potencia

En circuitos nos ayuda a estimar la energía entregada, absorbida o disipada por los componentes del mismo, lo denotamos como $P$.

$$P = V \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

Donde:

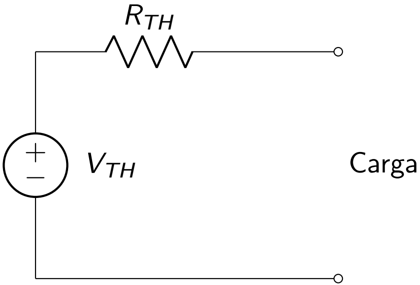
- $P$ es potencia en *Watts*
- $V$ es voltaje en *Volts*
- $I$ es corriente en *Amperes*
- $R$ es resistencia en *Ohms*

# Thévenin y Norton

- Métodos para simplificar circuitos eléctricos complejos
- Facilitan la evaluación rápida de voltaje y corriente
- Son equivalentes entre sí y fácilmente intercambiables

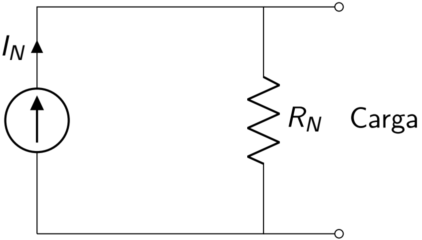
**Circuito equivalente de Thévenein**

Un circuito se reduce a una fuente de tensión ($V_{TH}$) en serie con una resistencia equivalente ($R_{TH}$)




**Circuito equivalente de Norton**

Un circuito se reduce a una fuente de corriente ($I_N$) en paralelo con una resistencia equivalente ($R_N$)



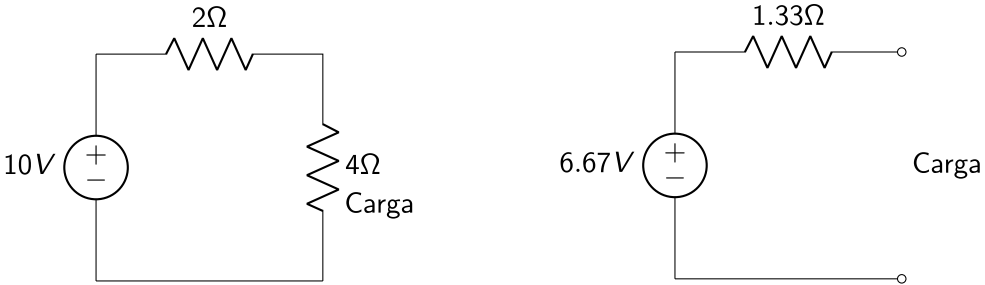
# Equivalencia Thévenin - Norton

$$V_{TH} = I_N \times R_{TH}$$
$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$
$$\Rightarrow R_{TH} = R_N$$

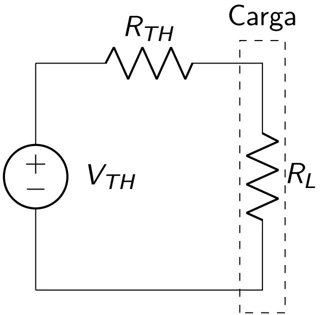
# Pasos para encontrar circuitos equivalentes

1. Retirar la carga
2. Calcular resistencia equivalente
   - 2.a Si hay fuente de tensión: cortocircuito
   - 2.b Si hay fuente de corriente: circuito abierto
3. Calcular voltaje entre terminales abiertas: **Thévenin**
4. Calcular corriente entre terminales cortocircuitadas: **Norton**
5. Dibujar circuito equivalente
6. (Opcional) Sacarse un 7

# Ejemplo híper fome



# Potencia máxima



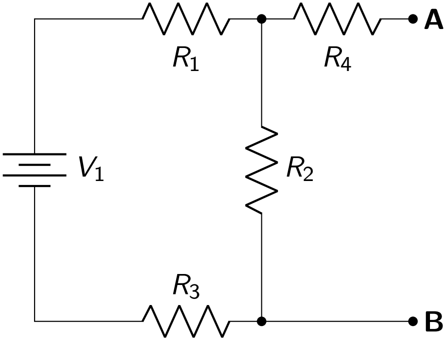

La potencia es máxima cuando
$R_{TH} = R_L$
Considerando $P = V \cdot I$

$$
\begin{aligned}
P_{max} &= V_{R_L} \cdot I_N \\
&= I_N \cdot R_L \cdot I_N \\
&= \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \cdot R_L \cdot \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \\
&= \left( \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right)^2 \cdot R_L \\
&= \left( \frac{V_{TH}}{2R_{TH}} \right)^2 \cdot R_{TH} \\
&= \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}
\end{aligned}
$$

# Ejercicio 1

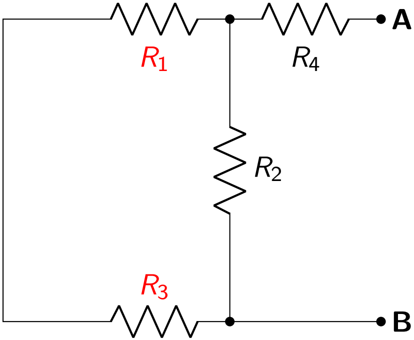
## Algebraico

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin y su corriente de Norton en función de $V_1, R_1, R_2, R_3$ y $R_4$



# Desarrollo: Ejercicio 1

## Pasos 1 y 2

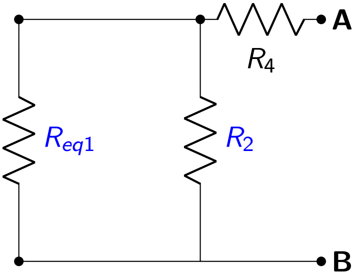


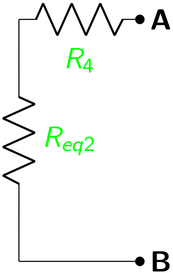

$$2.1: \ R_1 + R_3 = R_{eq1}$$

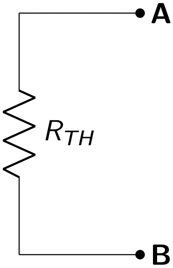
- Paso 1: Al no haber carga, evidentemente no se retira.
- Paso 2: Cortocircuitar la única fuente de tensión ($V_1$) y se procede al cálculo de la resistencia equivalente.
  1. $R_1$ y $R_3$ se encuentran en serie, llamemos esa resistencia equivalente $R_{eq1}$.
  2. $R_{eq1}$ está en paralelo con $R_2$, su equivalente será $R_{eq2}$.
  3. $R_{eq2}$ está en serie con $R_4$, su equivalente será $R_{TH}$.

# Desarrollo: Ejercicio 1

## Pasos 2.2 y 2.3




$2.2: \ R_{eq1} \, // \, R_2 = R_{eq2}$

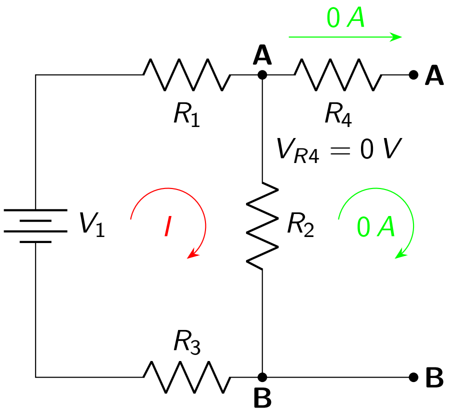
$2.3: \ R_{eq2} + R_4 = R_{TH}$

$$\begin{aligned} R_{TH} &= ((R1 + R3) \, // \, R_2) + R_4 \\ &= \left( \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} + R_4 \end{aligned}$$

udp

# Desarrollo: Ejercicio 1

## Paso 3 (y 4)




$$V_{AB} = V_{R2} = I R_4$$

- Paso 3: Notamos que al ser (**A** y **B**) terminales abiertas, no existe corriente que pase por ellas y no hay una caída de tensión en $R_4$, por lo que podemos decir con seguridad que la diferencia de potencial entre las terminal es simplemente la caída de tensión en $R_2$

**Por KVL:**

$$V_1 = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

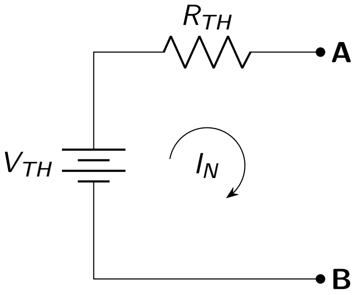
$$\Leftrightarrow I = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} = I_N$$

**Por Ley de Ohm:**

$$V_{R4} = I \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}\right) \cdot R_2 = V_{TH}$$

Finalmente el circuito equivalente de Thévenin queda (como cualquier otro):

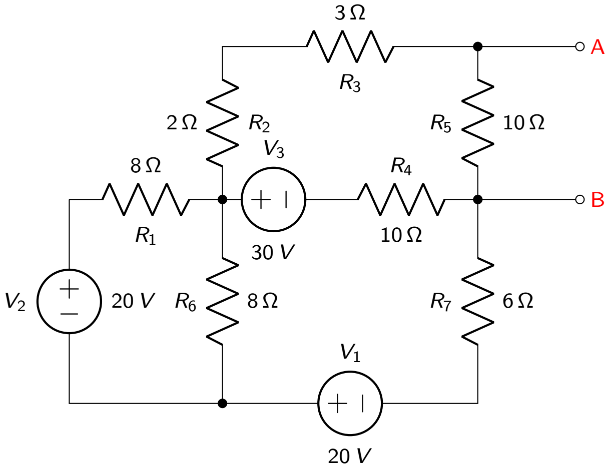


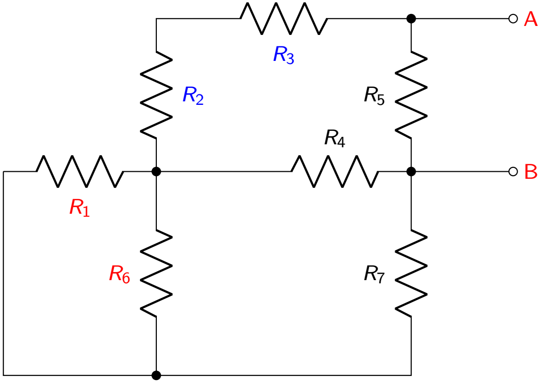

Donde:

- $I_N = \dfrac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}$
- $R_{TH} = \left(\dfrac{1}{R_1 + R_3} + \dfrac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_4$
- $V_{TH} = \left(\dfrac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}\right) \cdot R_2$

# Ejercicio 2

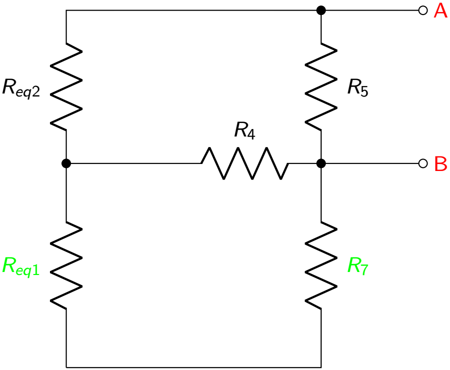
Encuentre el equivalente de Thévenin para el siguiente circuito entre los terminales A y B e indique su corriente de Norton.






$2.1: R_1//R_6 = R_{eq1}$  $2.2: R_2 + R_6 = R_{eq2}$

- Paso 1: Al no haber carga, evidentemente no se retira.
- Paso 2: Cortocircuitar las fuentes de tensión $(V_1, V_2$ y $V_3)$ y se procede al cálculo de la resistencia equivalente.
  1. $R_1$ y $R_6$ están en paralelo, llamemos esa resistencia equivalente $R_{eq1}$.
  2. $R_2$ y $R_3$ están en serie, llamemos esa resistencia equivalente $R_{eq2}$.
  3. $R_{eq1}$ y $R_7$ están en serie, llamemos esa resistencia equivalente $R_{eq3}$.

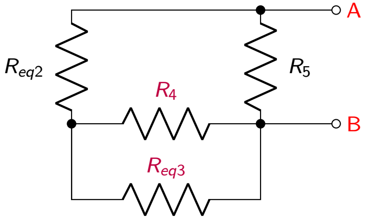


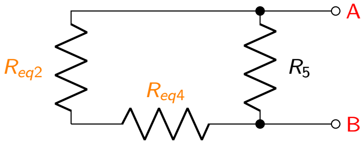

$2.3: \; R_{eq3} = R_{eq1} + R_7$

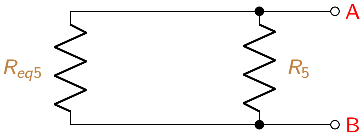
4. $R_{eq3}$ y $R_4$ están en paralelo, llamemos esa resistencia equivalente $R_{eq4}$.
5. $R_{eq2}$ y $R_{eq4}$ están en serie, llamemos esa resistencia equivalente $R_{eq5}$.
6. $R_{eq5}$ y $R_5$ están en paralelo, su equivalente será $R_{TH}$.

# Desarrollo: Ejercicio 2

## Continuando con Paso 2




$2.4: \ R_{eq3} // R_4 = R_{eq4}$

$2.5: \ R_{eq2} + R_{eq4} = R_{eq5}$

$2.6: \ R_{eq5} // R_5 = R_{TH}$

Algebraicamente:

$$R_{TH} = \left( \frac{1}{\left( \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6}\right)^{-1} + R_7} + \frac{1}{R_4} \right)^{-1} + R_2 + R_3} + \frac{1}{R_5} \right)^{-1}$$

$$R_{TH} = \left( \frac{1}{\left( \frac{1}{\left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)^{-1} + 6} + \frac{1}{10} \right)^{-1} + 2 + 3} + \frac{1}{10} \right)^{-1} = 5\,\Omega$$

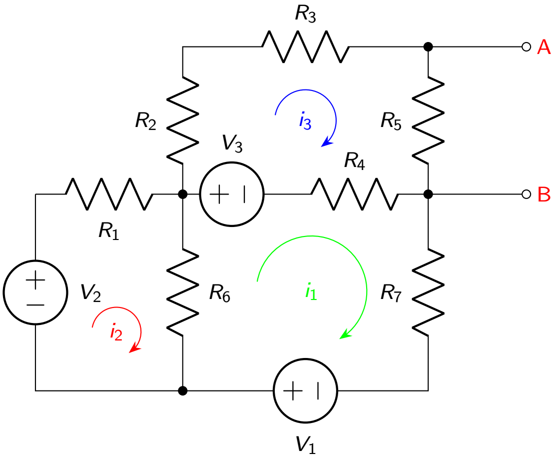
**MUY FEO? SIGUIENTE SLIDE PARA ALGO MÁS AMIGABLE**

## Cálculo amigable para Paso 2

1. $R_1//R_6 = R_{eq1} \Leftrightarrow R_{eq1} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)^{-1} = 4\,\Omega$
2. $R_2 + R_3 = R_{eq2} \Leftrightarrow R_{eq2} = 3 + 2 = 5\,\Omega$
3. $R_{eq1} + R_7 = R_{eq3} \Leftrightarrow R_{eq3} = 4 + 6 = 10\,\Omega$
4. $R_{eq3}//R_4 = R_{eq4} \Leftrightarrow R_{eq4} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)^{-1} = 5\,\Omega$
5. $R_{eq2} + R_{eq4} = R_{eq5} \Leftrightarrow R_{eq5} = 5 + 5 = 10\,\Omega$
6. $R_{eq5}//R_5 = R_{TH} \Leftrightarrow R_{TH} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)^{-1} = 5\,\Omega$

# Desarrollo: Ejercicio 2

## Pasos 3 y 4




- Paso 3 (y 4): Evidentemente para obtener la diferencia de voltaje entre **A** y **B** ($V_{TH}$) basta con ver la caída de tensión en $R_5$ correspondiente al producto entre la corriente que pasa por la misma, que corresponde a $i_3$ en el dibujo. Usaremos método de mallas para obtener la corriente en la malla 3 (azul) y completar el ejercicio.

# Desarrollo: Ejercicio 2

## Ecuaciones de malla

$$
\begin{aligned}
M_1 &: R_4(i_1 - i_3) + R_6(i_1 - i_2) + R_7 i_1 = V_1 - V_3 \\
&: (R_4 + R_6 + R_7) i_1 - R_6 i_2 - R_4 i_3 = V_1 - V_3 \\
&: 24 i_1 - 8 i_2 - 10 i_3 = -10 \\
&: 12 i_1 - 4 i_2 - 5 i_3 = -5 \\
M_2 &: R_1 i_2 + R_6(i_2 - i_1) = V_2 \\
&: (R_1 + R_6) i_2 - R_6 i_1 = V_2 \\
&: 16 i_2 - 8 i_1 = 20 \\
&: -2 i_1 + 4 i_2 = 5 \\
M_3 &: (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) i_3 - R_4 i_1 = V_3 \\
&: 25 i_3 - 10 i_1 = 30 \\
&: -2 i_1 + 5 i_3 = 6
\end{aligned}
$$

Pasando el sistema a forma matricial:

$$\begin{cases} M_1 : 12i_1 - 4i_2 - 5i_3 = -5 \\ M_2 : -2i_1 + 4i_2 = 5 \\ M_3 : -2i_1 + 5i_3 = 6 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 12 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Se obtienen:

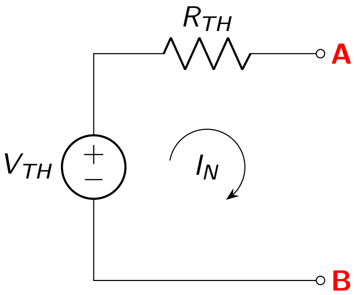
- $i_1 = 0.75\,A$
- $i_2 = 1.625\,A$
- $i_3 1.5\,A \Rightarrow V_{TH} = V_{R5} = 1.5 \cdot R_5 = 1.5 \cdot 10 = 15\,V$

Además: $I_N = \dfrac{V_{TH}}{R_{TH}} = \dfrac{15}{5} = 3\,A$

# Desarrollo: Ejercicio 2

## Paso 5

Finalmente, el circuito equivalente de Thévenin:

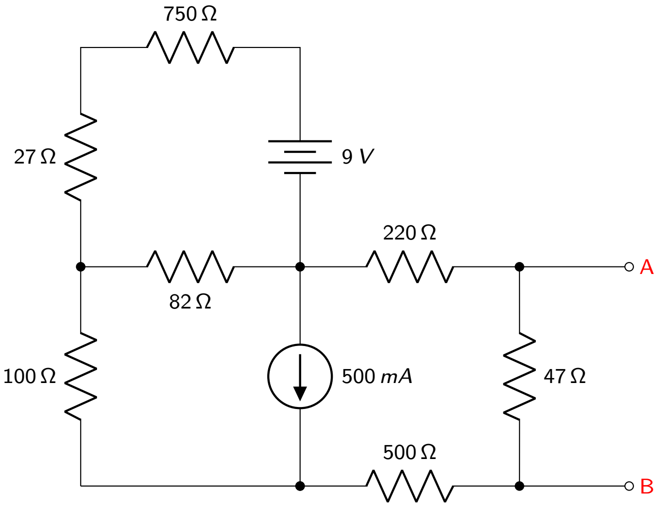



Donde:

- $I_N = 3\,A$
- $R_{TH} = 5\,\Omega$
- $V_{TH} = 15\,V$

# Ejercicio 3

Obtener el equivalente de Thévenin entre los terminales A y B, para el siguiente circuito



# ¿DUDAS?

# CHAO GENTE