Pauta: Ayudantía 2 - Teorema de Thévenin y Norton

Electrónica y Electrotecnia

Pedro Morales Nadal
pedro.morales1@mail.udp.cl
+56 9 30915977

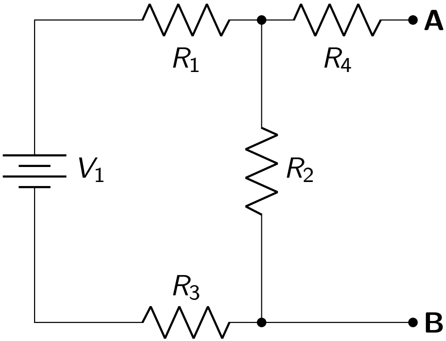
Edicson Solar Salinas
edicson.solar@mail.udp.cl
+56 9 92763279

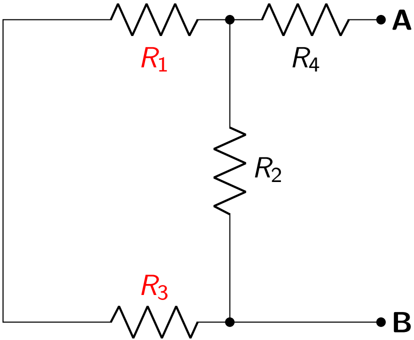
Ingeniería Civil en Informática y Telecomunicaciones

2 de septiembre de 2025

Ejercicio 1
Algebraico

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin y su corriente de Norton en función de V_1, R_1, R_2, R_3 y R_4

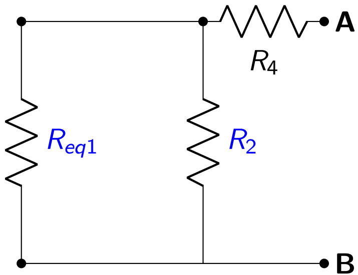


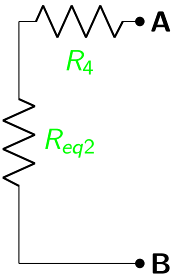


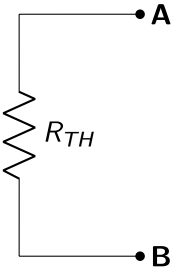
$$2.1 : R_1 + R_3 = R_{eq1}$$

- Paso 1: Al no haber carga, evidentemente no se retira.
- Paso 2: Cortocircuitar la única fuente de tensión (V_1) y se procede al cálculo de la resistencia equivalente.
  1. R_1 y R_3 se encuentran en serie, llamemos esa resistencia equivalente R_{eq1}.
  2. R_{eq1} está en paralelo con R_2, su equivalente será R_{eq2}.
  3. R_{eq2} está en serie con R_4, su equivalente será R_{TH}.

Desarrollo: Ejercicio 1
Pasos 2.2 y 2.3



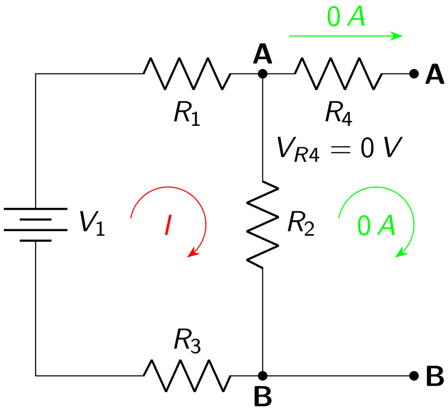




$2.2:\ R_{eq1} \,//\, R_2 = R_{eq2}$

$2.3:\ R_{eq2} + R_4 = R_{TH}$

$$R_{TH} = ((R1 + R3) \,//\, R_2) + R_4$$
$$= \left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_4$$



$$V_{AB} = V_{R2} = I R_4$$

- Paso 3: Notamos que al ser (**A** y **B**) terminales abiertas, no existe corriente que pase por ellas y no hay una caída de tensión en R_4, por lo que podemos decir con seguridad que la diferencia de potencial entre las terminal es simplemente la caída de tensión en R_2

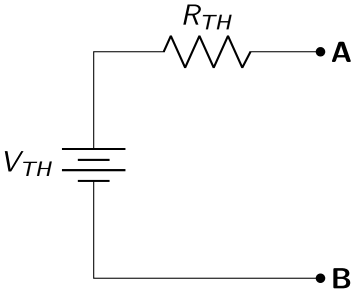
Por KVL:

$$V_1 = I(R_1 + R_2 + R_3)$$
$$\Leftrightarrow I = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Por Ley de Ohm:

$$V_{R4} = I \cdot R_2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}\right) \cdot R_2 = V_{TH}$$

Finalmente el circuito equivalente de Thévenin queda (como cualquier otro):



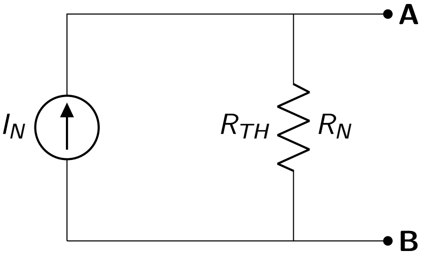
Con la particularidad de que:

- $R_{TH} = \left(\dfrac{1}{R_1 + R_3} + \dfrac{1}{R_2} \right)^{-1} + R_4$
- $V_{TH} = \left(\dfrac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right) \cdot R_2$

NOTA: Para quienes les sea más cómodo ver con números todo, pueden tranquilamente asignarle los valores que quieran a cada elemento del circuito y comparar su resultado largo con el ingreso de los valores en las expresiones mostradas. Les dejamos otra **simulación** con números, tal vez les sirva para algún laboratorio, quien sabe

Desarrollo: Ejercicio 1
Equivalente de Norton

Analogamente, el circuito equivalente de Norton queda (nuevamente, como cualquier otro):

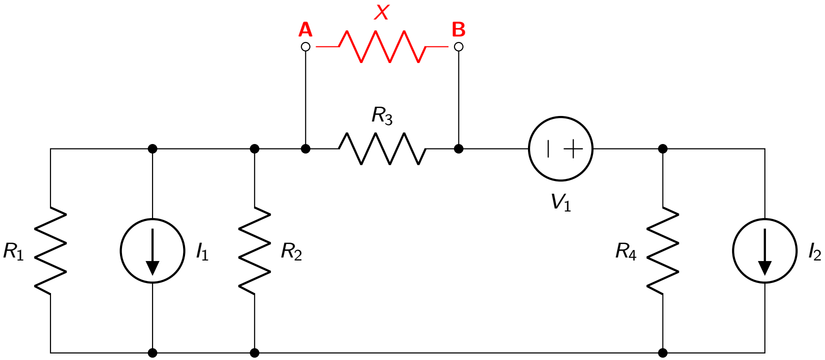


Con la particularidad de que:

- $R_N = R_{TH} = \left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_4$
- $I_N = \frac{V_{TH}}{R_N}$
- $V_{TH} = \left(\frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}\right) \cdot R_2$

Ejercicio 2

Demuestre que el valor de la resistencia de carga (**X**) para que exista la máxima transferencia de potencia es $\dfrac{R_3\left[R_1R_2 + R_4(R_1+R_2)\right]}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)+R_1R_2}$ y que el valor de dicha potencia es $\left(\frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1R_2+(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \times \left(V_1 + I_2R_4 - \dfrac{I_1R_1R_2}{R_1+R_2}\right)\right)^2 \cdot 0.25\mathbf{X}^{-1}$



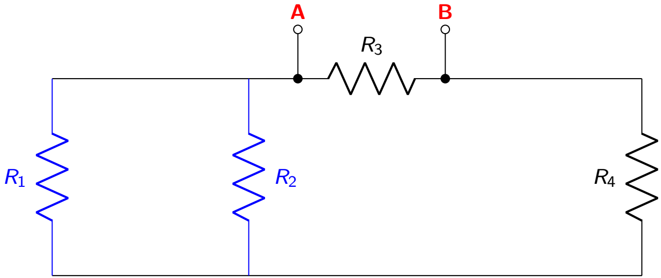
Desarrollo: Ejercicio 2

En un inicio, el problema pareciera ser muy tedioso (no lo niego) así que si les es más facil de procesar con valores, pueden avanzar un par de slides y encontrar un ejemplo con valores que corresponde a **esta simulación**.

Dejando eso de lado, el objetivo es claro en que solo buscamos encontrar el circuito equivalente de Thévenin entre las terminales **A** y **B**.

Por lo tanto, partamos por encontrar la resistencia equivalente de Thévenin (R_{TH}).

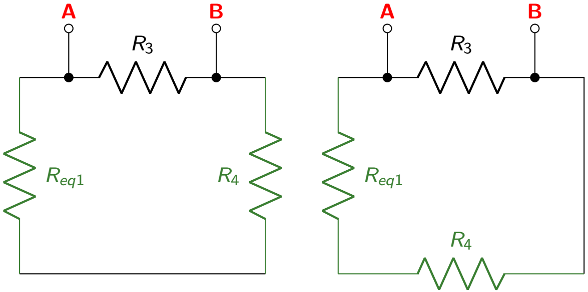
Retiramos la carga (**X**), las fuentes de corriente I_1 e I_2 se dejan abiertas y la fuente de tensión V_1 se cortocircuita.



Partiendo por la reducción, es evidente que R_1 y R_2 están en paralelo, llamaremos a su equivalente R_{eq1}.

$$R_{eq1} = R_1 // R_2$$
$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$
$$= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Va quedando algo más lindo y más trabajable.



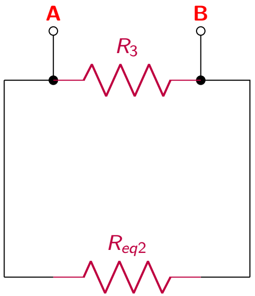
1: No tan evidente **2: Evidentemente en serie**

ES EL MISMO CIRCUITO

R_{eq1} está en serie con R_4. Si no es tan evidente al ojo (**Dibujo 1**), pueden ver el **Dibujo 2** donde simplemente se movió R_4 un poco hacia el lado, a este equivalente, llamemosle R_{eq2}

$$
\begin{aligned}
R_{eq2} &= R_{eq1} + R_4 \\
&= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4 \\
&= \frac{R_1 R_2 + R_4(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2}
\end{aligned}
$$

Incluso más lindo y trabajable.



R_{eq2} está evidentemente en paralelo con R_3. Su equivalente es finalmente la resistencia equivalente de Thévenin (R_{TH})

$$\begin{aligned}
R_{TH} &= R_{eq2}//R_3 \\
&= \left(\frac{1}{R_{eq2}} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_4(R_1 + R_2)} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2 + R_4(R_1 + R_2)}{R_3\left[R_1 R_2 + R_4(R_1 + R_2)\right]}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

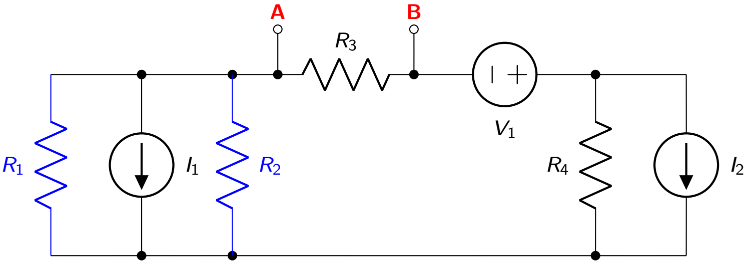
Reduciendo un poquito la expresión fea:

$$\begin{aligned} R_{TH} &= \left(\frac{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2+R_4(R_1+R_2)}{R_3\left[R_1R_2+R_4(R_1+R_2)\right]} \right)^{-1} \\ &= \frac{R_3\left[R_1R_2+R_4(R_1+R_2)\right]}{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2+R_4(R_1+R_2)} \\ &= \frac{R_3\left[R_1R_2+R_4(R_1+R_2)\right]}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2} \end{aligned}$$

En este punto al tener R_{TH} podríamos contestar la primera parte del ejercicio, si sabemos que **X** es la resistencia de carga, la máxima transferencia de potencia se dará cuando **X** tenga el valor de R_{TH}, es decir, cuando **X** valga $\dfrac{R_3\left[R_1R_2+R_4(R_1+R_2)\right]}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}$

Vuelta al circuito original y calcular V_{TH}

Volvemos a poner las fuentes, en azul marcaremos los elementos que se encuentren en paralelo



El primer paso es igual que en la parte anterior, sabemos que R_1 y R_2 están en paralelo, llamaremos a su equivalente R_A otra vez

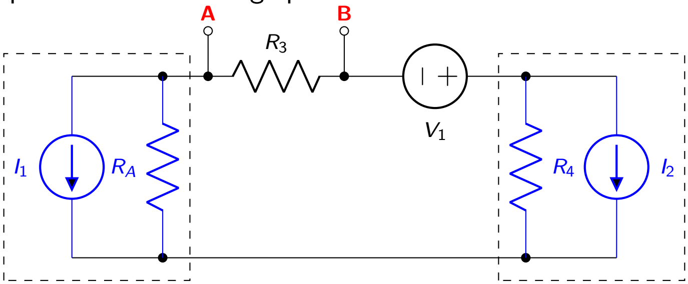
$$
\begin{aligned}
R_A &= R_1 // R_2 \\
&= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \\
&= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}
\end{aligned}
$$

PARA QUÉ?

SIGUIENTE SLIDE

Desarrollo: Ejercicio 2
Siguiendo la búsqueda de V_{TH}

La idea será dejar todo con fuentes de tensión para aplicar una malla de golpe



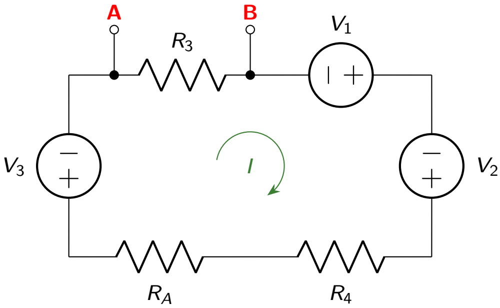
$$V_3 = I_1 R_A = \frac{I_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_2 = I_1 R_4$$

Por si no se entiende en el dibujo, realizamos una transformación de fuentes, pasando fuentes de corriente en paralelo con una resistencia a su equivalente, que son fuente de voltaje en serie con la misma resistencia (siguiente slide).

Se hizo aplicando el principio de equivalencia de fuentes (Norton $\leftrightarrow$ Thévenin)

Ahora a aplicar KVL para encontrar ese V_{TH} que no es más que la caída de tensión en R_3



La ecuación de la malla queda de manera sencilla como:

$$V_1 + V_2 - V_3 = I(R_A + R_3 + R_4)$$

Y de manera fea reemplazando los valores anteriores:

$$V_1 + I_1 R_4 - \frac{I_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4\right)$$

$$I = \frac{V_1 + I_1 R_4 - \dfrac{I_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\dfrac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2}}$$

Desarrollo: Ejercicio 2

Trabajando un poquito más esa I:

$$I = \frac{V_1 + I_1 R_4 - \dfrac{I_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\dfrac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2}}$$

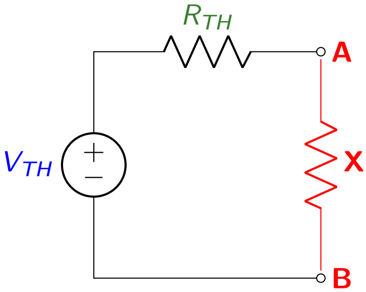
$$= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \times \left(V_1 + I_1 R_4 - \frac{I_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Así, el voltaje de Thévenin que es la caída de tensión en R_3, es decir, $I \cdot R_3$:

$$V_{TH} = I \cdot R_3$$

$$= \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \times \left(V_1 + I_1 R_4 - \frac{I_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Finalmente el circuito equivalente de Thévenin queda:



Con la particularidad de que:

- $R_{TH} = \dfrac{R_3\left[R_1R_2 + R_4(R_1+R_2)\right]}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}$
- $V_{TH} =$ $$\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1R_2+(R_1+R_2)(R_3+R_4)} \times \left(V_1 + I_1R_4 - \frac{I_1R_1R_2}{R_1+R_2}\right)$$

Por tanto para que exista la mayor transferencia de potencia, **X** debe ser igual a R_{TH} que es la expresión fea de ahí. El valor de esa potencía máxima estará dada por $\dfrac{{V_{TH}}^2}{4R_{TH}}$ lo cual va a ser efectivamente la expresión feísima del enunciado considerando el valor anterior para **X**.

VIDEO CON NÚMEROS (CLICKEEN)

RECUERDEN QUE EL EJERCICIO 3 QUEDÓ PARA SOLTAR LA MANO EN LA CASA. PUEDEN MOSTRARLE A SUS FAMILIARES, AMIGOS, MASCOTAS, ETC. LO QUE HACEN EN EL RAMO

Pueden escribirnos, por todos los medios que conozcan (y que sean apropiados) para comprobar sus repuestas. Si quieren un video explicativo también diganlo.

VIDEO DE EJERCICIO RESUELTO PASO A PASO