UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté de génie

Département de génie électrique et génie informatique

Éléments de statique et de dynamique

APP 1

Présenté à :

M. Raef Cherif et M. Jean-Samuel Lauzon

Présenté par :

Hubert Dubé - dubh3401

Marc Sirois - sirm2508

Gabriel Lavoie - lavg2007

Sherbrooke

18 septembre 2019

Table des matières

Table des figures

1 Introduction

Some shits and stuff

2 Équations physiques du système

2.1 Système électrique

Le système électrique sert à transformer le signal d'entrée e_in en tension e_in qui alimente le moteur. Il s'agit d'un amplificateur avec une réponse correspondant à un système d'ordre 1, dont l'équation est la suivante.

$$\frac{de_a}{dt} = \frac{K}{\tau} e_{in} - \frac{1}{\tau} e_a \tag{1}$$

2.2 Système électromécanique

Le moteur à courant continu permet de convertir l'énergie électrique en rotation. L'analyse de la dynamique du système donne l'équation suivante.

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{1}{L_a} e_b \tag{2}$$

La force contre-électromotrice de moteur est définie en fonction de sa vitesse angulaire par l'équation suivante.

$$e_b = K_b \omega_m \tag{3}$$

En insérant (3) dans (2), on obtiens l'équation différentielle du courant i_a

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b}{L_a} \omega_m \tag{4}$$

2.3 Système mécanique

On considère ici que l'arbre reliant la transmission et la charge est rigide. L'équation dynamique du système mécanique est la suivante.

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = T_m - T_l - B_m \omega_m \tag{5}$$

Le couple du moteur est défini en fonction du courant d'armature

$$T_m = K_i i_a \tag{6}$$

Le couple de la charge est simplement défini par sa friction et son inertie. On transforme ensuite cette équation pour obtenir le couple de la charge tel que vu du côté du moteur.

$$T_l = \frac{d\omega_l}{dt} J_l + B_l \omega_l = N^2 \frac{d\omega_m}{dt} J_l + N^2 B_l \omega_m \tag{7}$$

Insérer (6) et (7) dans (5) donne une expression pour la vitesse angulaire du moteur.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_i i_a}{N^2 J_l + J_m} - \frac{N^2 B_l + B_m}{N^2 J_l + J_m}\omega_m$$

Finalement, on transforme l'équation en utilisant $\omega_m = \omega_l / N$ pour obtenir la forme désirée.

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{N K_i i_a}{N^2 J_l + J_m} - \frac{N^2 B_l + B_m}{N^2 J_l + J_m}\omega_m \tag{8}$$

3 Variables et équations d'état

Les quatre variables d'état du système sont θ_l, ω_l, i_a et e_a. On utilise les équations (1), (4) et (8), ainsi que la suivante, pour décrire le système.

$$\frac{d\theta_l}{dt} = \omega_l \tag{9}$$

On obtiens donc la représentation d'état en forme ABCD.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta_l} \\ \dot{\omega_l} \\ \dot{i_a} \\ \dot{e_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(N^2 B_l + B_m)}{N^2 J_l + J_m} & \frac{N K_i}{N^2 J_l + J_m} & 0 \\ 0 & \frac{K_b}{N L_a} & \frac{-R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix} e_{in}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix}$$

4 Arbre flexible

Si on remplace l'arbre de transmission rigide par une tige flexible, on doit ajouter θ_m et ω_m au système d'équations d'état. Comme la tige est situé après la transmission dans le système, le couple causé par sa torsion est défini ainsi, avec l'angle θ_m vu du côté de la charge.

$$T_k = K_l(N\theta_m - \theta_l) \tag{10}$$

Pour décrire le système dynamique, on sépare les équations de mécanique en deux équations différentielles.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_i i_a}{J_m} - \frac{B_m}{J_m} - \frac{N K_l}{J_m}(N\theta_m - \theta_l) \tag{11}$$

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{K_l}{J_l}(N\theta_m - \theta_l) - \frac{B_l}{J_l}\omega_l \tag{12}$$

À partir de ces équations et celles définissant le système avec arbre rigide, on déduit la représentation d'état d'ordre 6

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta_l} \\ \dot{\omega_l} \\ \dot{i_a} \\ \dot{e_a} \\ \dot{\theta_m} \\ \dot{\omega_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_l}{J_l} & -\frac{B_l}{J_l} & 0 & 0 & \frac{NK_l}{J_l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{NK_l}{J_m} & 0 & \frac{k_i}{J_m} & 0 & \frac{-K_l N^2}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{in}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix}$$

5 Conclusion