



UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté de génie

Département de génie électrique et génie informatique

ÉLÉMENTS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE

APP 1

Présenté à :

M. Raef Cherif et M. Jean-Samuel Lauzon

Présenté par :

Hubert Dubé - dubh3401

Marc Sirois - sirm2508

Gabriel Lavoie - lavg2007

Sherbrooke

18 septembre 2019

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Équations physiques du système | 1 |
| 2.1 | Système électrique | 1 |
| 2.2 | Système électromécanique | 1 |
| 2.3 | Système mécanique | 1 |
| 3 | Variables et équations d'état | 2 |
| 4 | Réponse du système en boucle fermée | 2 |
| 5 | Arbre flexible | 3 |
| 6 | Conclusion | 4 |

Table des figures

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Réponse impulsionnelle de l'arbre flexible et comparaison entre les deux systèmes. | 3 |
|---|--|---|

1 Introduction

La compagnie EstampBeauce a donné le mandat à notre équipe de modéliser un système permettant d'asservir la position angulaire d'une antenne. Les trois systèmes, soit électrique, électromécanique et mécanique, sont décrits séparément. Par la suite, une analyse complète du mécanisme est fournie en représentation d'état et par sa fonction de transfert.

2 Équations physiques du système

2.1 Système électrique

Le système électrique sert à transformer le signal d'entrée e_{in} en tension e_a qui alimente le moteur. Il s'agit d'un amplificateur avec une réponse correspondant à un système d'ordre 1, dont l'équation est la suivante.

$$\frac{de_a}{dt} = \frac{K}{\tau} e_{in} - \frac{1}{\tau} e_a \quad (1)$$

2.2 Système électromécanique

Le moteur à courant continu permet de convertir l'énergie électrique en rotation. L'analyse de la dynamique du système donne l'équation suivante.

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{1}{L_a} e_b \quad (2)$$

La force contre-électromotrice de moteur est définie en fonction de sa vitesse angulaire par l'équation suivante.

$$e_b = K_b \omega_m \quad (3)$$

En insérant (3) dans (2), on obtiens l'équation différentielle du courant i_a

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b}{L_a} \omega_m \quad (4)$$

2.3 Système mécanique

On considère ici que l'arbre reliant la transmission et la charge est rigide. L'équation dynamique du système mécanique est la suivante.

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = T_m - T_l - B_m \omega_m \quad (5)$$

Le couple du moteur est défini en fonction du courant d'armature

$$T_m = K_i i_a \quad (6)$$

Le couple de la charge est simplement défini par sa friction et son inertie. On transforme ensuite cette équation pour obtenir le couple de la charge tel que vu du côté du moteur.

$$T_l = \frac{d\omega_l}{dt} J_l + B_l \omega_l = N^2 \frac{d\omega_m}{dt} J_l + N^2 B_l \omega_m \quad (7)$$

Insérer (6) et (7) dans (5) donne une expression pour la vitesse angulaire du moteur.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_i i_a}{N^2 J_l + J_m} - \frac{N^2 B_l + B_m}{N^2 J_l + J_m} \omega_m$$

Finalement, on transforme l'équation en utilisant $\omega_m = \omega_l/N$ pour obtenir la forme désirée.

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{N K_i i_a}{N^2 J_l + J_m} - \frac{N^2 B_l + B_m}{N^2 J_l + J_m} \omega_m \quad (8)$$

3 Variables et équations d'état

Les quatre variables d'état du système sont θ_l , ω_l , i_a et e_a . On utilise les équations (1), (4) et (8), ainsi que la suivante, pour décrire le système.

$$\frac{d\theta_l}{dt} = \omega_l \quad (9)$$

On obtiens donc la représentation d'état en forme ABCD.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_l \\ \dot{\omega}_l \\ \dot{i}_a \\ \dot{e}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(N^2 B_l + B_m)}{N^2 J_l + J_m} & \frac{N K_i}{N^2 J_l + J_m} & 0 \\ 0 & \frac{K_b}{N L_a} & \frac{-R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix} e_{in}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix}$$

4 Réponse du système en boucle fermée

La réponse à l'échelon de la fonction de transfert du système en boucle fermée, donnée par l'équation (BOUCLE FERMÉE), est la suivante. (insert figure step response) On remarque premièrement que la réponse se stabilise autour de la valeur $\theta_l = 1$, soit la valeur de consigne donnée. Deuxièmement, le système présente un léger sous-amortissement, qu'on remarque puisque l'angle mesurée oscille autour de la consigne. Ce résultat est logique physiquement, et représente le comportement désiré du système.

5 Arbre flexible

Si on remplace l'arbre de transmission rigide par une tige flexible, on doit ajouter θ_m et ω_m au système d'équations d'état. Comme la tige est situé après la transmission dans le système, le couple causé par sa torsion est défini ainsi, avec l'angle θ_m vu du côté de la charge.

$$T_k = K_l(N\theta_m - \theta_l) \quad (10)$$

Pour décrire le système dynamique, on sépare les équations de mécanique en deux équations différentielles.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_i i_a}{J_m} - \frac{B_m}{J_m} - \frac{NK_l}{J_m}(N\theta_m - \theta_l) \quad (11)$$

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{K_l}{J_l}(N\theta_m - \theta_l) - \frac{B_l}{J_l}\omega_l \quad (12)$$

À partir de ces équations et celles définissant le système avec arbre rigide, on déduit la représentation d'état d'ordre 6

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_l \\ \dot{\omega}_l \\ \dot{i}_a \\ \dot{e}_a \\ \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_l}{J_l} & -\frac{B_l}{J_l} & 0 & 0 & \frac{NK_l}{J_l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{NK_l}{J_m} & 0 & \frac{k_i}{J_m} & 0 & -\frac{K_l N^2}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{in}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix}$$

La réponse impulsionnelle du système est la suivante.

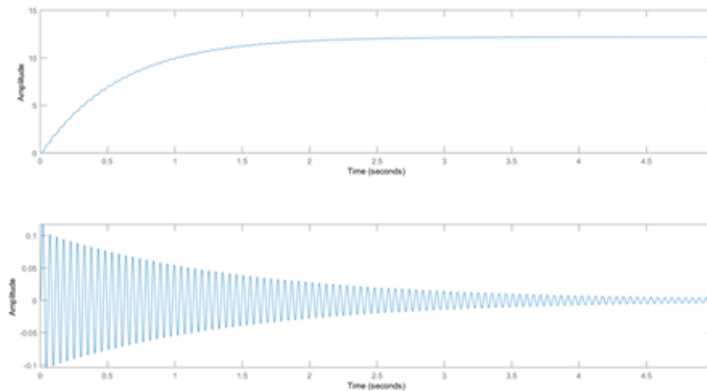


FIGURE 1 – Réponse impulsionnelle de l'arbre flexible et comparaison entre les deux systèmes.

On remarque que la réponse est très similaire à celle du système avec l'arbre rigide. De plus, les oscillations causées par le ressort torsionnel diminuent avec la stabilisation du système.

6 Conclusion

La modélisation présentée dans ce rapport démontre que le système conçu pour l'asservissement de l'antenne remplit les requis d'EstampBeauce.