



UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté de génie

Département de génie électrique et génie informatique

# MODÉLISATION ET IDENTIFICATION DE SYSTÈMES DYNAMIQUES

APP 3

Présenté à :

Jean-Baptiste Michaud

Présenté par :

Hubert Dubé - dubh3401

Gabriel Lavoie - lavg2007

Sherbrooke

2 octobre 2019

# Table des matières

## Table des figures

# 1 Introduction

«««< HEAD La compagnie EstampBeauce a donné le mandat à notre équipe de modéliser un système permettant d'asservir la position angulaire d'une antenne. Les trois systèmes, soit électrique, électromécanique et mécanique, sont décrits séparément. Par la suite, une analyse complète du mécanisme est fournie en représentation d'état et par sa fonction de transfert.

## 2 Équations physiques du système

### 2.1 Système électrique

Le système électrique sert à transformer le signal d'entrée  $e_i n$  en tension  $e_i n$  qui alimente le moteur. Il s'agit d'un amplificateur avec une réponse correspondant à un système d'ordre 1, dont l'équation est la suivante.

$$\frac{de_a}{dt} = \frac{K}{\tau} e_{in} - \frac{1}{\tau} e_a \quad (1)$$

### 2.2 Système électromécanique

Le moteur à courant continu permet de convertir l'énergie électrique en rotation. L'analyse de la dynamique du système donne l'équation suivante.

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{1}{L_a} e_b \quad (2)$$

La force contre-électromotrice de moteur est définie en fonction de sa vitesse angulaire par l'équation suivante.

$$e_b = K_b \omega_m \quad (3)$$

En insérant (3) dans (2), on obtiens l'équation différentielle du courant  $i_a$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b}{L_a} \omega_m \quad (4)$$

### 2.3 Système mécanique

On considère ici que l'arbre reliant la transmission et la charge est rigide. L'équation dynamique du système mécanique est la suivante.

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = T_m - T_l - B_m \omega_m \quad (5)$$

Le couple du moteur est défini en fonction du courant d'armature

$$T_m = K_i i_a \quad (6)$$

Le couple de la charge est simplement défini par sa friction et son inertie. On transforme ensuite cette équation pour obtenir le couple de la charge tel que vu du côté du moteur.

$$T_l = \frac{d\omega_l}{dt} J_l + B_l \omega_l = N^2 \frac{d\omega_m}{dt} J_l + N^2 B_l \omega_m \quad (7)$$

Insérer (6) et (7) dans (5) donne une expression pour la vitesse angulaire du moteur.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_i i_a}{N^2 J_l + J_m} - \frac{N^2 B_l + B_m}{N^2 J_l + J_m} \omega_m$$

Finalement, on transforme l'équation en utilisant  $\omega_m = \omega_l / N$  pour obtenir la forme désirée.

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{N K_i i_a}{N^2 J_l + J_m} - \frac{N^2 B_l + B_m}{N^2 J_l + J_m} \omega_m \quad (8)$$

### 3 Variables et équations d'état

Les quatre variables d'état du système sont  $\theta_l$ ,  $\omega_l$ ,  $i_a$  et  $e_a$ . On utilise les équations (1), (4) et (8), ainsi que la suivante, pour décrire le système.

$$\frac{d\theta_l}{dt} = \omega_l \quad (9)$$

On obtiens donc la représentation d'état en forme ABCD.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_l \\ \dot{\omega}_l \\ \dot{i}_a \\ \dot{e}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(N^2 B_l + B_m)}{N^2 J_l + J_m} & \frac{N K_i}{N^2 J_l + J_m} & 0 \\ 0 & \frac{K_b}{N L_a} & \frac{-R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix} e_{in}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \end{bmatrix}$$

#### 3.1 Représentation graphique

Sous forme de schéma bloc, le système peut être représenté à la figure ??.

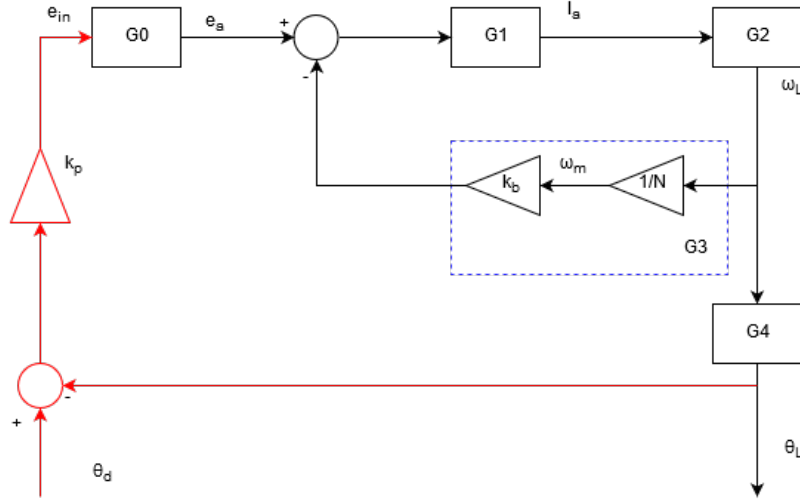


FIGURE 1 – Schéma bloc du système

La partie en noire correspond au circuit en boucle ouverte et avec l'ajout de la partie en rouge, il s'agit du circuit en boucle fermé. Le même schéma peut être obtenu sous forme de graphe de fluence à la figure ??.

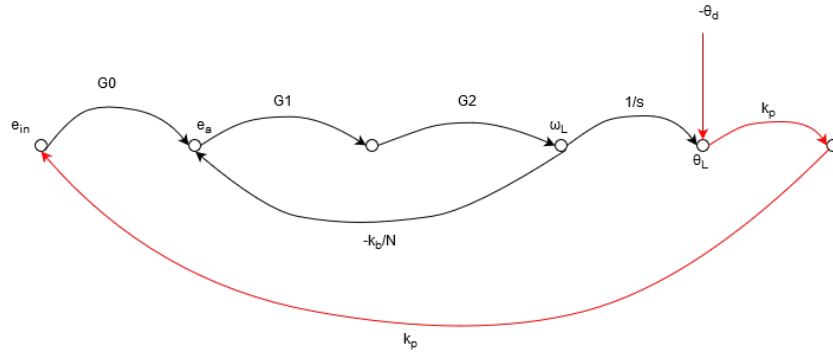


FIGURE 2 – Graphe de fluence du système

Encore une fois, la boucle ouverte est en noir et la boucle fermée est en rouge. Dans les deux figures, les fonctions  $G$  représentent les fonctions d'ordre 1 déclarées au début de cette section.

### 3.2 Représentation en fonction de transfert

Afin d'obtenir la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) la loi de Masson est appliqué sur la partie noire de la figure ??. De manière analytique, la FTBO peut être représentée comme :

$$M = \frac{\theta_L}{e_{in}} = \frac{G_0 G_1 G_2 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3} \quad (10)$$

Comme les paramètres de la FTBO sont connues, elle peut être exprimée par :

$$M = \frac{\theta_L}{e_{in}} = \frac{2.083e06}{s^4 + 1101s^3 + 1.018e05s^2 + 1.708e05s} \quad (11)$$

L'équation caractéristique est les cas où le dénominateur de la fonction est égale à 0, ce qui permet d'obtenir les pôles de la fonction. Donc celle-ci est :

$$0 = s^4 + 1101s^3 + 1.018e05s^2 + 1.708e05s \quad (12)$$

Pour obtenir la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) il faut inclure l'équation (XXXX) dans (??), car elle permet de lier l'entrée de la consigne à la sortie du système. En effet,

$$M = \frac{\theta_L}{k_p(\theta_L - \theta_d)}$$

En manipulant l'équation on obtient donc

$$H = \frac{\theta_L}{\theta_d} = \frac{M \cdot k_p}{1 + M \cdot k_p} \quad (13)$$

En remplaçant les paramètres de (??) et (??) et en normalisant la FTBF peut être écrite comme :

$$H = \frac{\theta_L}{\theta_d} = \frac{6.625e05}{s^4 + 1101s^3 + 1.018e05s^2 + 1.708e05s + 6.625e05} \quad (14)$$

Ces solutions sont obtenues à l'aide de Matlab vue la complexité des équations.

## 4 Fonction de transfert en boucle ouverte et fermée

Les équations des parties précédente permette d'obtenir toutes les fonctions de transfert nécessaire pour représenter le système en utilisant uniquement des système d'ordre 1. De manière analytique, en reprenant l'équation (XXXXX) :

$$G0 = \frac{e_a}{e_{in}} = \frac{K}{Ts + 1}$$

avec l'équation (XXXXX) :

$$G1 = \frac{I_a}{e_a - \frac{k_b \omega_L}{N}} = \frac{1}{L_a s + R_a}$$

avec l'équation (XXXXX) :

$$G2 = \frac{\omega_L}{I_a} = \frac{\frac{k_i}{\frac{J_m}{N} + N J_L}}{s + \frac{\frac{B_m}{N} + N B_L}{\frac{J_m}{N} + N J_L}}$$

adn d'obtenir  $\theta_L$  comme sortie il suffit d'ajouter un intégrateur à la suite de  $G2$  :

$$G4 = \frac{\theta_L}{\omega_L} = \frac{1}{s}$$

## 5 Réduction

La réduction de l'ordre d'un système consiste à retirer les modes les moins importants à l'allure générale du système pour ne conserver que ceux les plus importants, simplifiant les équations de représentation.

## 5.1 Réduction physique

En regardant le modèle établie à la figure ?? il est possible de conclure que le système peut être réduit à un ordre 3 sans problème. En effet, en considérant l'hypothèse que la valeur de l'inductance est beaucoup plus petite que la valeur de la résistance dans le modèle du moteur,  $G0$  ne fait qu'être un gain d'environ  $\frac{1}{R_a}$ . Posant  $L_a = 0$ , la FTBO devient alors :

$$M_3 = \frac{\theta_L}{e_{in}} = \frac{k_{m3}G_0G_2G_4}{1 + k_{m3}G_2G_3} \quad (15)$$

où  $k_{m3}$  est un gain correspondant à  $G1$  avec  $L_a = 0$ . Il est aussi possible d'obtenir un système d'ordre 2 en réduisant aussi  $G0$  à un simple gain. Ceci peut aussi être fait, car la valeur de  $T$  est très petite en comparaison aux autres termes multipliant  $s$  des autres fonctions de transfert. Ainsi, la faible constante de temps de  $G0$  réduit l'impact de cette fonction sur la réponse globale du système. La FTBO d'ordre 2 est donc

$$M_2 = \frac{\theta_L}{e_{in}} = \frac{k_{m3}k_{m2}G_2G_4}{1 + k_{m3}G_2G_3} \quad (16)$$

où  $k_{m3}$  est un gain correspondant à  $G0$  avec  $T = 0$ . L'impact de ces réductions sur la réponse impulsionnelle peut être observé à la figure ??. Comme tracé, la différence de la réduction  $M_3$  est moins importante que celle de  $M_2$ , car la constante de temps de  $G1$  ( $L_a$ ) était encore plus faible que  $T$ . Dans les deux cas, les fonctions représentent tout de même très bien le système en boucle ouvert et pourraient être utilisé afin de simplifier l'expression du système.

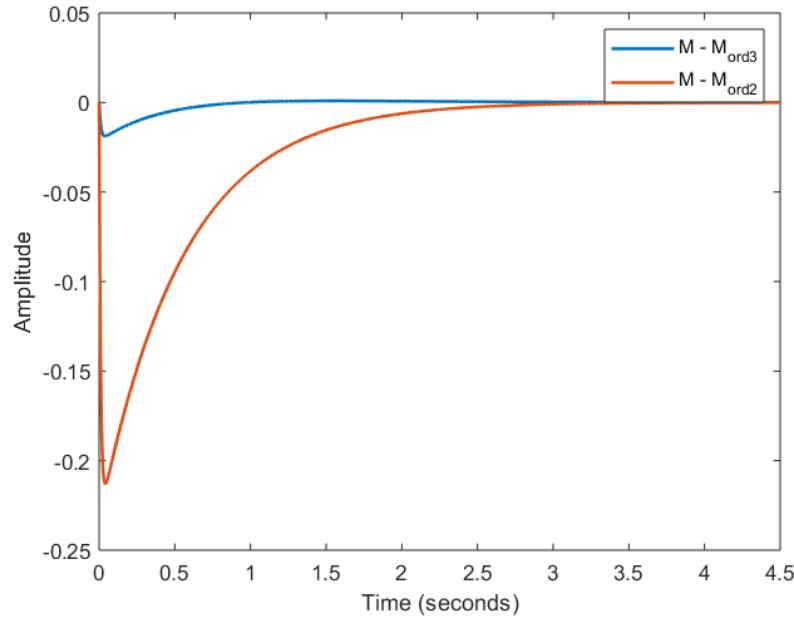


FIGURE 3 – Différence de réponse impulsionnelle suite aux réductions



## 5.2 Réduction numérique

La réduction numérique correspond à utiliser une stratégie semblable à la méthode physique, mais au lieu de réduire la complexité en regardant les paramètres physiques, il suffit de supprimer les pôles les moins importants de la FTBO originale (??). Pour se faire, il faut utiliser la fonction *residue* de Matlab. Celle retourne les pôles de FTBO. Ceux-ci sont :

$$P_0 = -998.9565$$

$$P_1 = -100.0000$$

$$P_2 = -1.7101$$

$$P_3 = 0$$

en utilisant la forme standard d'un filtre d'ordre 1, il est possible de reconstruire 2 filtre d'ordre 1 avec les deux filtres les plus lents ( $P_2$  et  $P_3$ ). En les combinants en un seul, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$h_2 = \frac{-0.2335s + 20.86}{s^2 + 1.71s} \quad (17)$$

La différence à la réponse impulsionnelle originale est représenté à la figure ?? . Comme la différence est que très petite, il est correct de dire que cette fonction ( $h_2$ ) représente bien le système. Ceci était attendu puisque qu'elle a été construit à partir des pôles les moins négatifs et ceux ci sont très éloignés des deux autres pôles qui ont moins d'impact sur l'allure de la réponse.

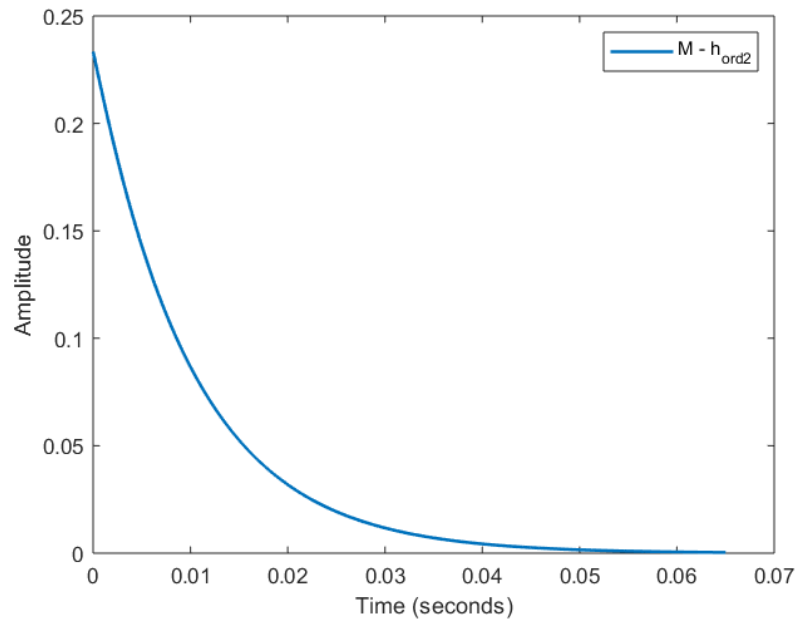


FIGURE 4 – Difference de réponse impulsionnelle suite aux réductions

## 6 Réponse du système à la consigne

La réponse à l'échelon de la fonction de transfert du système en boucle fermée, donnée par l'équation (BOUCLE FERMÉE), est la suivante. (insert figure step response) On remarque premièrement que la réponse se stabilise autour de la valeur  $\theta_l = 1$ , soit la valeur de consigne donnée. Deuxièmement, le système présente un léger sous-amortissement, qu'on remarque puisque l'angle mesurée oscille autour de la consigne. Ce résultat est logique physiquement, et représente le comportement désiré du système.

## 7 Identification du moteur

Les résultats de l'expérience à rotor bloqué permettent d'identifier les valeurs de  $R_a$ ,  $k_i$  et  $k_b$ . Durant cet expérience, la force contre électromotrice est nulle (il n'y a pas de rotation) et l'hypothèse est tel que l'inductance est beaucoup plus petite que la résistance. Ceci nous permet d'obtenir :

$$R_a = \frac{e_a}{I_a} = 7.34\Omega$$

$$k_i = \frac{T_m}{I_a} = 0.48$$

$$k_b = k_i$$

Ensuite, afin de trouver les deux dernières variables,  $B_m$  et  $J_m$ , il est possible de passer par la fonction de transfert qu'on obtient par l'équation physique du couple exercé par le moteur. Partant de

$$k_i I_a = J_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m \quad (18)$$

et en utilisant la même hypothèse que dans la partie précédente, la fonction qui sera obtenue sera d'ordre 1 seulement. Avec l'équation de  $I_a$  obtenue précédemment, où l'hypothèse permet d'éliminer son élément différentiel, la fonction de transfert de la vitesse de rotation du moteur en fonction de la tension de l'armature est :

$$\frac{\omega_m}{e_a} = \frac{k_i/R_a}{J_m s + B_m + \frac{k_i k_b}{R_a}} \quad (19)$$

Comme il est maintenant possible d'évaluer le rapport entre la vitesse angulaire et la tension du moteur par un système d'ordre 1. L'équation d'un tel système peut être représenté par l'équation générale suivante :

$$tf = \frac{\omega_m}{e_a} = \frac{K}{1 + Ts} \quad (20)$$

En utilisant la méthode des moindres carrée et les données fournies, les valeurs du gain et de la constante de temps peuvent être obtenue pour le modèle simplifié. Les valeurs suivantes sont ressorties en utilisant Matlab :

$$K = 1.4121$$

$$T = 0.4984$$

Réutilisant les equations (??) et (??) avec les résultats pour K et T, il est possible de trouver les valeurs de  $J_m$  et  $B_m$  pour finaliser l'identification du moteur.

$$B_m = 0.0150$$

$$J_m = 0.0229$$

## 8 Arbre flexible

Si on remplace l'arbre de transmission rigide par une tige flexible, on doit ajouter  $\theta_m$  et  $\omega_m$  au système d'équations d'état. Comme la tige est situé après la transmission dans le système, le couple causé par sa torsion est défini ainsi, avec l'angle  $\theta_m$  vu du côté de la charge.

$$T_k = K_l(N\theta_m - \theta_l) \quad (21)$$

Pour décrire le système dynamique, on sépare les équations de mécanique en deux équations différentielles.

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{K_l i_a}{J_m} - \frac{B_m}{J_m} - \frac{NK_l}{J_m}(N\theta_m - \theta_l) \quad (22)$$

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{K_l}{J_l}(N\theta_m - \theta_l) - \frac{B_l}{J_l}\omega_l \quad (23)$$

À partir de ces équations et celles définissant le système avec arbre rigide, on déduit la représentation d'état d'ordre 6

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_l \\ \dot{\omega}_l \\ \dot{i}_a \\ \dot{e}_a \\ \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_l}{J_l} & -\frac{B_l}{J_l} & 0 & 0 & \frac{NK_l}{J_l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{NK_l}{J_m} & 0 & \frac{k_i}{J_m} & 0 & -\frac{K_l N^2}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_{in}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_l \\ \omega_l \\ i_a \\ e_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix}$$

La réponse impulsionnelle du système est la suivante.

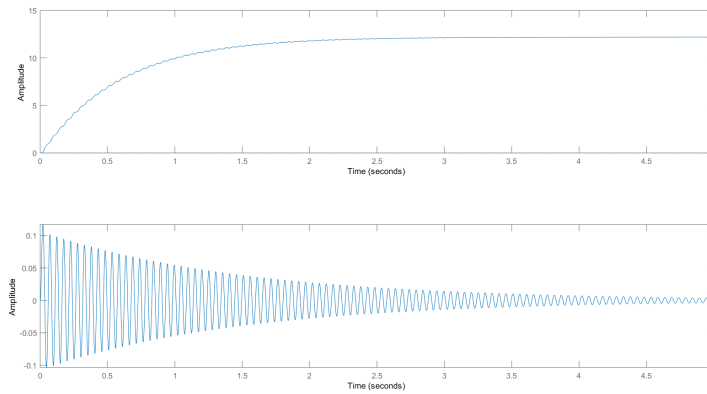


FIGURE 5 – Réponse impulsionnelle de l'arbre flexible et comparaison entre les deux systèmes.

On remarque que la réponse est très similaire à celle du système avec l'arbre rigide. De plus, les oscillations causées par le ressort torsionnel diminuent avec la stabilisation du système.

## 9 Linéarisation

## 10 Conclusion

La modélisation présentée dans ce rapport démontre que le système conçu pour l'asservissement de l'antenne remplit les requis d'EstampBeauce.