

# **CHAPITRE 7**

## **TECHNIQUES DE COMPENSATION**

*(07 août 2019)*

*Jean de Lafontaine*

### Objectifs

- Savoir appliquer les méthodes de conception et de régulation des systèmes
  - Établir des critères de performance
  - Déterminer une structure de compensation pour rencontrer des spécifications données
  - Concevoir des éléments de compensation avec les techniques du lieu des racines et de la réponse en fréquence
  - Concevoir des compensateurs avance-retard de phase et PID d'après un cahier des charges
  - Savoir utiliser un compensateur en série, boucle interne et anticipation
  - Exécuter la simulation et la mise en œuvre pratique d'un système de commande et de régulation

## Contenu du chapitre 7

<b>7</b>	<b>TECHNIQUES DE COMPENSATION .....</b>	<b>7-3</b>
<b>7.1</b>	<b>SPÉCIFICATIONS ET INTERPRÉTATION DES PERFORMANCES (RAPPEL) .....</b>	<b>7-3</b>
7.1.1	<i>Performance dans le domaine temporel: Erreur en régime permanent .....</i>	<i>7-3</i>
7.1.2	<i>Performance dans le domaine temporel: Régime transitoire à la réponse à l'échelon .....</i>	<i>7-3</i>
7.1.3	<i>Performance dans le domaine fréquentiel (diagramme de Bode ou de Nyquist) .....</i>	<i>7-6</i>
<b>7.2</b>	<b>STRUCTURE DE L'ASSERVISSEMENT .....</b>	<b>7-10</b>
<b>7.3</b>	<b>OUTILS DE CONCEPTION .....</b>	<b>7-11</b>
<b>7.4</b>	<b>TYPES DE COMPENSATEURS.....</b>	<b>7-12</b>
<b>7.5</b>	<b>CONCEPTION D'UN COMPENSATEUR AVANCE-DE-PHASE .....</b>	<b>7-13</b>
7.5.1	<i>Description du compensateur avance-de-phase AvPh .....</i>	<i>7-13</i>
7.5.2	<i>Conception de l'AvPh simple et double par le lieu des racines .....</i>	<i>7-16</i>
7.5.3	<i>Conception de l'AvPh par le diagramme de Bode (Méthode 1).....</i>	<i>7-25</i>
7.5.4	<i>Conception de l'AvPh simple et double par le diagramme de Bode (Méthode 2).....</i>	<i>7-34</i>
<b>7.6</b>	<b>CONCEPTION D'UN COMPENSATEUR RETARD DE PHASE.....</b>	<b>7-42</b>
7.6.1	<i>Description du compensateur retard-de-phase (RePh).....</i>	<i>7-42</i>
7.6.2	<i>Conception du RePh par le lieu des racines .....</i>	<i>7-45</i>
7.6.3	<i>Conception du RePh par le diagramme de Bode (Méthode 1).....</i>	<i>7-50</i>
7.6.4	<i>Conception du RePh par le diagramme de Bode (Méthode 2).....</i>	<i>7-57</i>
<b>7.7</b>	<b>CONCEPTION D'UN COMPENSATEUR À AVANCE-RETARD DE PHASE.....</b>	<b>7-63</b>
7.7.1	<i>Compensateur à avance–retard de phase AvRePh.....</i>	<i>7-63</i>
7.7.2	<i>Conception AvRePh par le lieu des racines .....</i>	<i>7-63</i>
7.7.3	<i>Conception AvRePh par le diagramme de Bode .....</i>	<i>7-64</i>
<b>7.8</b>	<b>CONCEPTION D'UN COMPENSATEUR À ACTION PROPORTIONNELLE-DÉRIVÉE .....</b>	<b>7-65</b>
7.8.1	<i>Description du compensateur proportionnel-dérivé PD .....</i>	<i>7-65</i>
7.8.2	<i>Conception du PD par le lieu des racines.....</i>	<i>7-67</i>
7.8.3	<i>Conception du PD par le diagramme de Bode (Méthode 1) .....</i>	<i>7-70</i>
7.8.4	<i>Conception du PD par le diagramme de Bode (Méthode 2) .....</i>	<i>7-74</i>
<b>7.9</b>	<b>CONCEPTION D'UN COMPENSATEUR À ACTION PROPORTIONNELLE-INTÉGRALE PI.....</b>	<b>7-79</b>
7.9.1	<i>Description du compensateur proportionnel-intégral PI.....</i>	<i>7-79</i>
7.9.2	<i>Conception du PI par le lieu des racines .....</i>	<i>7-81</i>
7.9.3	<i>Conception du PI par le diagramme de Bode .....</i>	<i>7-87</i>
<b>7.10</b>	<b>CONCEPTION D'UN COMPENSATEUR PID .....</b>	<b>7-91</b>
7.10.1	<i>Compensateur PID .....</i>	<i>7-91</i>
7.10.2	<i>PI + PD .....</i>	<i>7-91</i>
7.10.3	<i>Double PD à <math>G(s)/s</math> .....</i>	<i>7-91</i>
7.10.4	<i>Méthode empirique de Ziegler-Nichols .....</i>	<i>7-92</i>
7.10.5	<i>Compensation optimale ITAE.....</i>	<i>7-93</i>
7.10.6	<i>Essai et erreur .....</i>	<i>7-94</i>

## 7 TECHNIQUES DE COMPENSATION

- Ce chapitre présente l'application des outils de conception (lieu des racines et réponse en fréquence) pour la compensation de système de commande. Voir aussi les manuels de référence Ogata, Kuo, Dorf.

### 7.1 Spécifications et interprétation des performances (rappel)

- Les systèmes asservis sont conçus selon des critères de performance précisés dans un cahier des charges. Un rappel de ces critères de performance est présenté aux sections 7.1.1 à 7.1.3.

#### 7.1.1 Performance dans le domaine temporel: Erreur en régime permanent

- L'erreur en régime permanent dépend du gain et du nombre d'intégrateurs purs (de la classe) dans la fonction de transfert en boucle ouverte.
- Pour une amplitude de l'entrée  $A$ , l'erreur en r.p. peut être déduite du tableau suivant:

$e(\infty)$	<b>Échelon</b> $Au_0(t)$ (position)	<b>Rampe</b> $Au_1(t) = Atu_0(t)$ (vitesse)	<b>Parabole</b> $Au_2(t) = \frac{1}{2}At^2u_0(t)$ (accélération)
<b>CLASSE 0</b>	$A / (1+K_{pos})$	$\infty$	$\infty$
<b>CLASSE 1</b>	0	$A / K_{vel}$	$\infty$
<b>CLASSE 2</b>	0	0	$A / K_{acc}$

$$K_{pos} = G(s) \Big|_{s=0}$$

$$K_{vel} = s G(s) \Big|_{s=0}$$

$$K_{acc} = s^2 G(s) \Big|_{s=0}$$

- **CLASSE (ou TYPE)** = nombre d'intégrateurs purs dans la fonction de transfert en **boucle ouverte**.
- Une façon de retenir ce tableau est de noter que, quand la Classe du système est égale à l'exposant  $n$  du temps  $t^n$  dans l'entrée (échelon :  $n = 0$ , rampe :  $n = 1$ , parabole :  $n = 2$ ), le système a autant de « classe » que l'entrée ce qui permet de suivre cette entrée et de générer une erreur constante (la diagonale du tableau). Quand le système n'a pas assez de « classe », il perd face à une entrée trop rapide et l'erreur devient infinie. À l'inverse, l'erreur devient zéro.
- On voit que l'erreur est inversement proportionnelle au coefficient d'erreur statique. Attention à l'exception de la Classe 0 où le coefficient d'erreur statique  $K_{pos}$  est ajouté à 1 au dénominateur.

#### 7.1.2 Performance dans le domaine temporel: Régime transitoire à la réponse à l'échelon

- Les critères de performance en régime transitoire sont typiquement exprimés en termes de la réponse d'un système standard d'ordre 2 à l'échelon unitaire:

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

- La majorité des asservissements en boucle fermée possède les caractéristiques dominantes semblables au système prototype d'ordre 2.
- Temps de montée  $t_r$   
Temps requis pour passer de 10 % à 90 % de la valeur finale ou de 0 à 100% de la valeur finale :

$$tr(10-90\%) \approx \frac{1 + 1.1\zeta + 1.4\zeta^2}{\omega_n} \quad tr(0-100\%) \approx \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_a} = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}.$$

- Dépassement maximum  $M_p$   
Rapport entre l'amplitude du premier dépassement et celle de la valeur finale

$$\boxed{M_p = 100 e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100 e^{-\frac{\pi}{\tan \phi}} \text{ (en \%)}}$$

Entre la première et la deuxième équation, les identités suivantes ont été utilisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \phi = \zeta \\ \sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - \zeta^2} \end{array} \right\} \tan \phi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

La deuxième équation utilisant l'angle  $\phi$  plutôt que la première avec le facteur d'amortissement  $\zeta$  est plus simple à utiliser, surtout quand vient le temps de l'inverser pour trouver le facteur d'amortissement pour un dépassement maximum donné :

$$\tan \phi = \frac{-\pi}{\ln\left(\frac{M_p}{100}\right)} \quad \zeta = \cos \phi$$

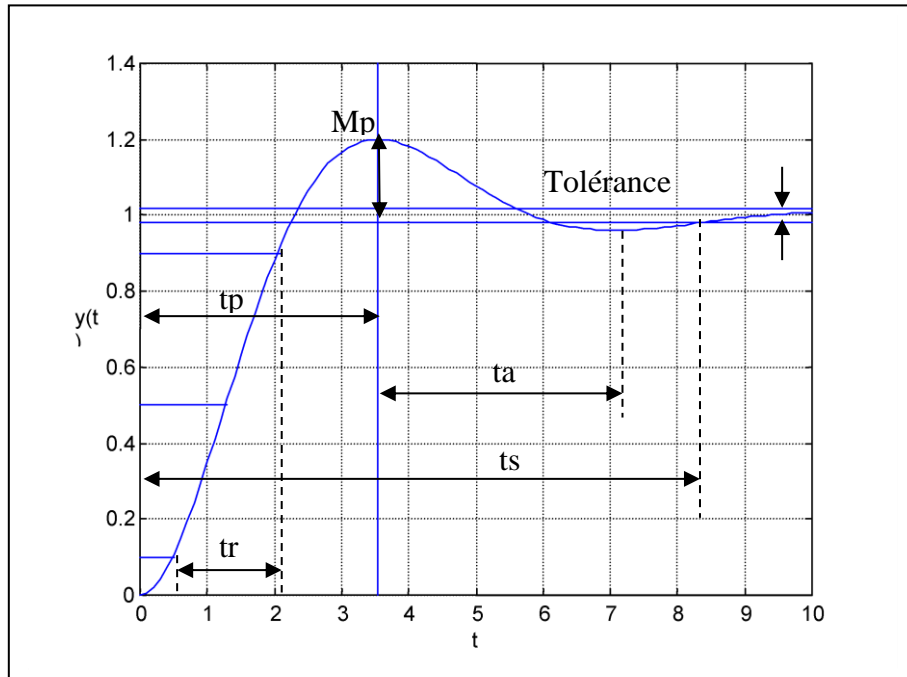
- Temps du premier pic  $t_p$   
Temps requis pour atteindre le premier maximum (pic):

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_a}}$$

où l'égalité  $\omega_a = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  a été utilisée.

- Fréquence et période des oscillations amorties  $\omega_a$  et  $t_a$ :

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad t_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2t_p$$

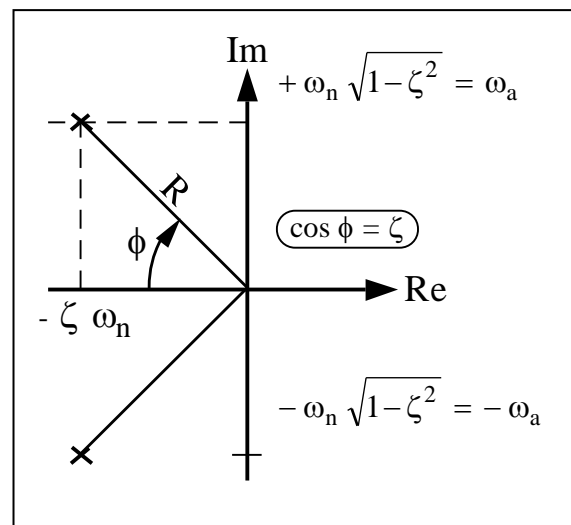


- Temps de réponse ou temps de stabilisation ou temps d'établissement  $t_s$   
Temps requis pour que la sortie atteigne la valeur finale. En pratique, une tolérance de  $\pm 5\%$ ,  $\pm 2\%$  ou  $\pm 1\%$  est utilisée.

$$\boxed{t_s = \frac{-\ln(\text{TOL})}{\zeta \omega_n}} \Rightarrow \begin{cases} \text{TOL} = 0.05 \Rightarrow t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} \\ \text{TOL} = 0.02 \Rightarrow t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \\ \text{TOL} = 0.01 \Rightarrow t_s \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n} \end{cases}$$

Au lieu d'utiliser l'équation de gauche qui est mathématiquement exacte, on utilise les approximations de droite : 5%  $\Rightarrow$  3 constantes de temps; 2%  $\Rightarrow$  4 constantes de temps; 1%  $\Rightarrow$  4.6 constantes de temps.

- Lien entre  $\omega_n$  et  $\omega_a$  et entre  $\phi$  et  $\zeta$ :
  - ♦ Pour  $\zeta < 1$  : pôles à  $-\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j$
  - ♦ Composante Imaginaire :  
 $\pm \omega_a = \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  = fréquence amortie
  - ♦ Composante réelle :  $\zeta \omega_n \approx 1 / \text{constante de temps}$
  - ♦ Grandeur  $R = \sqrt{\zeta^2 \omega_n^2 + \omega_a^2} = \omega_n$   
les pôles sur un cercle de rayon constant  $R$  ont la même fréquence naturelle
  - ♦  $\cos \phi = \frac{\zeta \omega_n}{R} = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta \Rightarrow \phi = \cos^{-1} \zeta$   
les pôles sur une droite passant par l'origine ont le même facteur d'amortissement



- Rappel:

- $\zeta > 1$  : 2 pôles réels distincts
- $\zeta = 1$  : 2 pôles réels répétés à  $-\omega_n$
- $\zeta = 1 / \sqrt{2}$  : 2 pôles complexes à  $\phi = 45^\circ$
- $\zeta = 0$  : 2 pôles purs imaginaires ( $\phi = 90^\circ$ ) (simple stabilité)

$\zeta < 0 : \phi > 90^\circ$ instable
---

### 7.1.3 Performance dans le domaine fréquentiel (diagramme de Bode ou de Nyquist)

Rappel :

- La fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  est la fréquence où le tracé de la réponse en amplitude traverse le gain de 1 (0 dB). C'est la fréquence où la marge de phase PM est mesurée.
- La fréquence de traverse en phase  $\omega_p$  est la fréquence où le tracé de la réponse en phase traverse la phase de -180 deg. C'est la fréquence où la marge de gain GM est mesurée.
- ATTENTION : La nomenclature utilisée dans le *help* de MATLAB est inversée par rapport à celle présentée ici (cette dernière étant celle utilisée dans la majorité des références). Dans MATLAB, l'usage de la fonction *margin* est présenté comme :

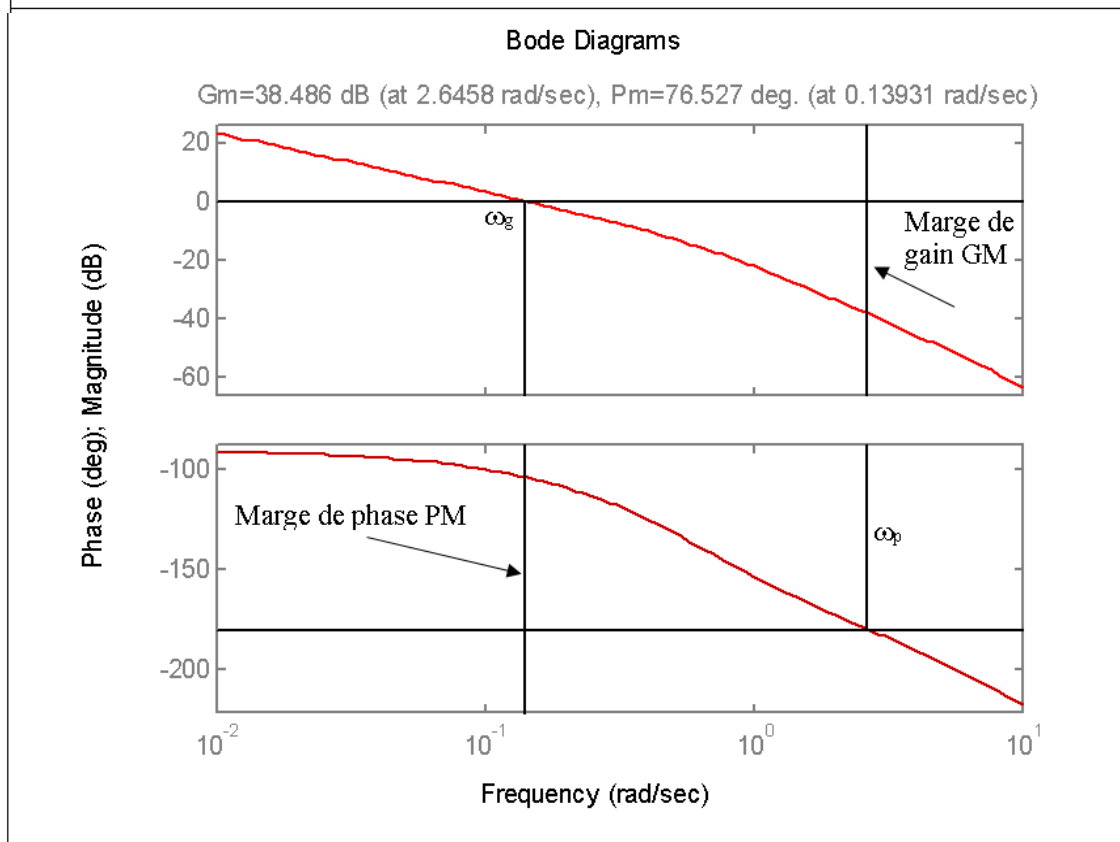
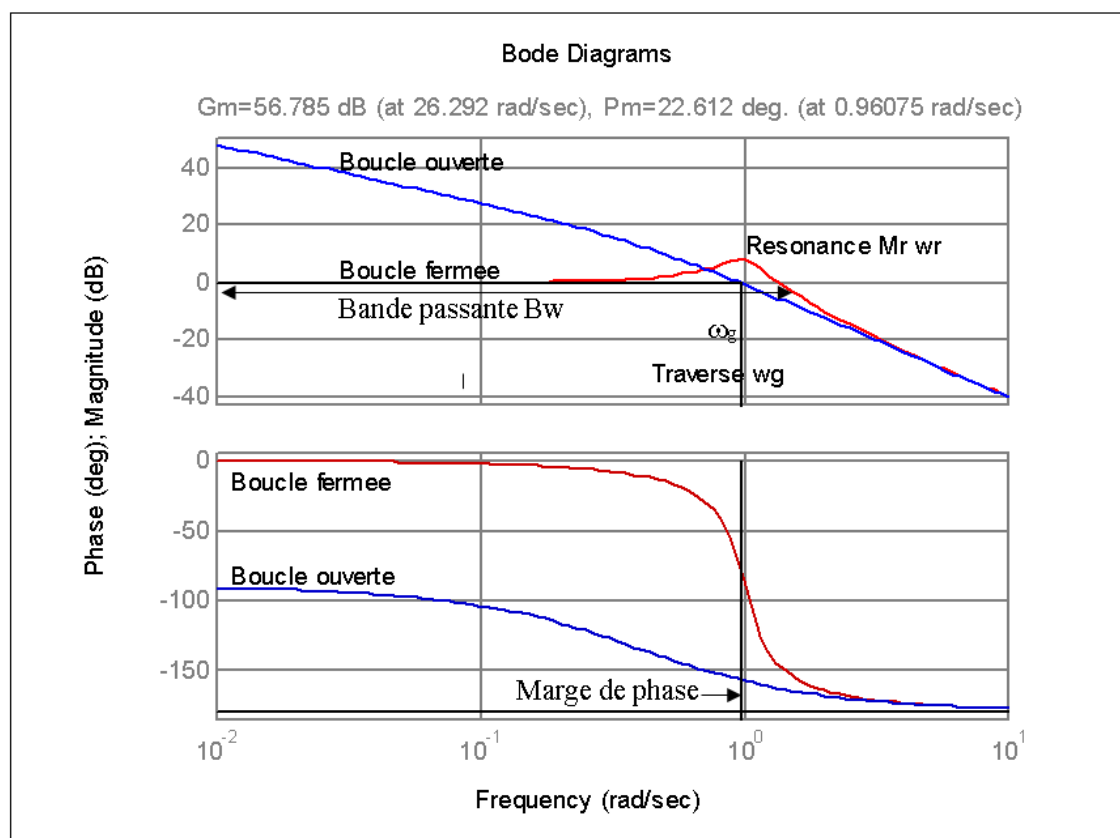
$$[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = \text{margin}(\text{SYS})$$

où

$Wcg$  = fréquence de traverse en phase (notre  $\omega_p$ ) où la marge de gain Gm (notre GM) est calculée

$Wcp$  = fréquence de traverse en gain (notre  $\omega_g$ ) où la marge de phase Pm (notre PM) est calculée

- Lieu de Bode d'un système d'ordre 2 standard (premier graphe, page suivante)  
(Note: La marge de gain est infinie dans ce cas).
- Lieu de Bode d'un système d'ordre 3 avec marge de gain finie (deuxième graphe, page suivante).



## PARAMÈTRES EN BOUCLE OUVERTE

- La marge de phase PM est la phase que le système peut perdre avant de devenir instable. Elle calculée à la fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  où le gain atteint 0 dB. Le calcul se fait en deux étapes :  
(1) calcul de la fréquence  $\omega_g \Rightarrow$  on calcule la fréquence  $\omega_g$  où l'égalité suivante est satisfaite :

$$|G(j\omega_g)| = 1$$

où le symbole  $| \quad |$  dénote le module d'un nombre complexe :  $|a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- (2) calcul de la marge de phase PM  $\Rightarrow$  c'est la phase qu'on a moins la phase critique de  $-180$  deg :

$$PM = \langle G(j\omega_g) \rangle - (-180)\text{deg}$$

$$PM = \langle G(j\omega_g) \rangle + 180 \text{ deg}$$

où le symbole  $\langle \quad \rangle$  dénote la phase d'un nombre complexe :  $\langle a + bj \rangle = \tan^{-1} \left( \frac{Im}{Re} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$

- En utilisant la fonction de transfert d'un système d'ordre 2 standard, certaines relations analytiques peuvent être obtenues pour calculer la fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  et la marge de phase PM:
  - Calcul de la fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  (où la marge de phase est calculée):

$$\omega_g = \frac{2\zeta \omega_n}{\tan(PM)} = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}.$$

- Calcul de la marge de phase à partir du facteur d'amortissement  $\zeta$ :

$$PM = \tan^{-1} \left[ \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \right]$$

- Calcul du facteur d'amortissement  $\zeta$  à partir de la marge de phase:

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\tan(PM) \sin(PM)}$$

- En faisant le graphique de ces équations, une relation approximative peut être observée:

$$PM(\text{deg}) \approx 100 \zeta \text{ pour } 0.0 < \zeta < 0.6.$$

- La marge de gain GM est (normalement) l'augmentation de gain que le système doit avoir avant de devenir instable. Elle calculée à la fréquence de traverse en phase  $\omega_p$  où la phase atteint  $-180$  deg. Le calcul se fait en deux étapes :



(1) calcul de la fréquence  $\omega_p \Rightarrow$  on calcule la fréquence  $\omega_p$  où l'égalité suivante est satisfaite :

$$\langle G(j\omega_p) \rangle = -180 \text{ deg}$$

où le symbole  $\langle \rangle$  dénote la phase d'un nombre complexe :  $\langle a + bj \rangle = \tan^{-1} \left( \frac{Im}{Re} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$

(2) calcul de la marge de gain GM  $\Rightarrow$  c'est le facteur qui rend le gain égal au gain critique de 1:

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_p)|}$$

$$GM_{dB} = -20 \log |G(j\omega_p)|$$

où le symbole  $| \cdot |$  dénote le module d'un nombre complexe.

- Pour un système stable d'ordre 2 standard, la marge de gain est infinie.

### PARAMÈTRES EN BOUCLE FERMÉE

- La bande passante (BW) est calculée avec la fonction de transfert en boucle fermée et correspond à la fréquence où le tracé du gain descend à  $-3$  dB.
- Pour un système d'ordre 2 standard, la bande passante BW peut être obtenue analytiquement:

$$BW = \omega_n \left[ (1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2} \quad BW = \frac{\omega_g \left[ (1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2}}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

- Pour un système d'ordre 2 standard, la fréquence de résonance peut être obtenue analytiquement:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

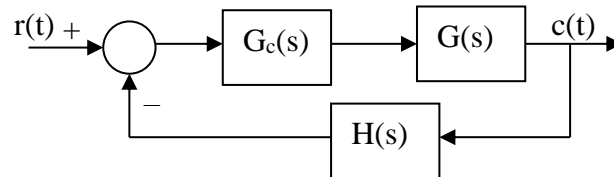
et l'amplitude de résonance aussi:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

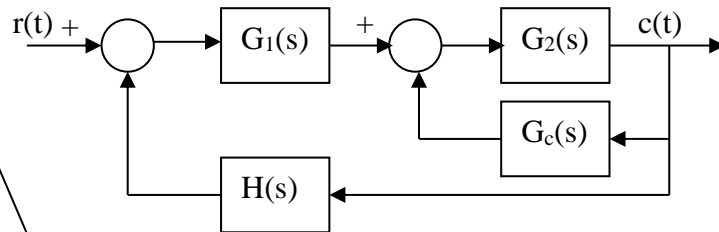
## 7.2 Structure de l'asservissement

- Après l'interprétation des spécifications et leur traduction en termes de critères de performance, un des premiers choix à faire est de définir la structure de l'asservissement.
- Les problèmes de conception d'asservissements se présentent sous différentes formes:
  - la nature du système à commander (processus), les composantes de l'asservissement (capteurs, actionneurs) et la technologie du compensateur (numérique ou cablée) sont imposés
  - l'ingénieure ou l'ingénieur en asservissement a le choix des capteurs, des actionneurs et/ou de la technologie
  - l'ingénieure ou l'ingénieur en asservissement est impliqué dans la conception du système à commander (approche intégrée – ingénierie simultanée).
- Quant à la structure du compensateur  $G_c(s)$ , plusieurs choix sont possibles:

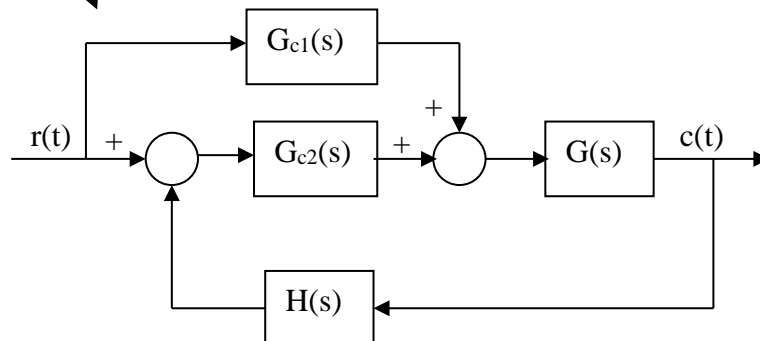
- En série (en cascade)



- Avec boucle interne (e.g. retour tachymétrique)



- Anticipation (*feedforward*)



- La compensation en cascade est la structure la plus commune et la plus simple. Elle utilise les compensateurs avance-retard de phase et PID.

### 7.3 Outils de conception

- À part la conception analytique, deux types d'outils de conception sont utilisés : le lieu des racines et la réponse en fréquence. Le choix est guidé par la nature des critères de performance.
- **Conception avec le lieu des racines**
  - Le lieu des racines donne la position des pôles en boucle fermée à partir des zéros et des pôles en boucle ouverte du système lorsque le gain  $K$  de la boucle varie de zéro à l'infini.
  - L'utilisation du lieu des racines est donc adaptée aux spécifications du client qui peuvent être traduites directement en position des pôles en boucle fermée.
  - La position des pôles en boucle fermée d'un système asservi est directement liée à la nature de la réponse temporelle transitoire du système.
  - Donc, les spécifications du client qui favorisent l'utilisation du lieu des racines comme outil de design sont les spécifications qui affectent le régime transitoire : dépassement maximum, temps de montée, temps de stabilisation, temps du premier pic, etc.
  - Un simple ajustement du gain de rétroaction  $K$  (dans une compensation proportionnelle) peut donner les pôles en boucle fermée qui rencontrent les spécifications du client. Sinon, une compensation est requise.
  - Le lieu des racines est aussi utilisé comme outil de design pour améliorer le régime permanent (erreur à un échelon, à une rampe ou à une parabole).
  - Quand des spécifications sont imposées à la fois sur le régime transitoire et sur le régime permanent, plusieurs approches sont possibles : (1) on fait la conception du compensateur pour corriger le régime transitoire en premier et ensuite celui qui règle le régime permanent, (2) on fait l'inverse i.e. on règle le régime permanent en premier et le régime transitoire en deuxième ou (3) on fait le design des deux compensateurs en même temps. Dans ce document, on utilise par défaut la technique (1) mais les deux autres seront aussi utilisées dans certains cas particuliers.
  - La compensation consiste en l'ajout judicieux de pôles et de zéros dans une fonction de transfert (le compensateur) en cascade au système original pour modifier le parcours du lieu des racines pour le faire passer par les pôles désirés et par un choix judicieux du gain pour que les pôles en boucles fermées soient exactement aux endroits désirés c'est-à-dire tels que spécifiés par les critères de performance requise par le système.
- **Conception avec les diagrammes de Bode, de Nyquist, de Nichols (réponse en fréquence)**
  - Les diagrammes de Bode, Nyquist et de Nichols donnent les caractéristiques fréquentielles du système en boucle fermée à partir de l'amplitude (module) et de la phase calculées à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte, lorsque la fréquence  $\omega$  varie de zéro à l'infini.
  - L'utilisation de la réponse en fréquence est adaptée aux spécifications du client qui sont exprimées en termes de marge de phase, marge de gain, amplitude de la résonance, largeur de bande.
  - Le diagramme de Bode permet aussi de rencontrer les spécifications du client exprimées en termes d'erreur en régime permanent à un échelon, une rampe ou une parabole.
  - Le diagramme de Bode peut être utilisé pour (1) faire deux compensateurs en cascade, un qui règle le régime transitoire (marge de phase, bande passante) et l'autre qui règle le régime permanent (erreur à un échelon, une rampe ou une parabole) ou (2) de faire un seul compensateur qui règle les deux en même temps. La première approche est appelée la « Méthode 1 » (Sections 7.5.3 et 0) et l'autre la « Méthode 2 » (Sections 7.5.4 et 0).
  - La compensation consiste en l'ajout judicieux de pôles et de zéros dans une fonction de transfert (le compensateur) en cascade au système original et d'ajuster le gain du compensateur pour modifier le tracé de la réponse en fréquence et ainsi rencontrer les spécifications en marges de stabilité et d'erreur en régime permanent.

## 7.4 Types de compensateurs

- Les compensateurs ont la forme standard d'une fonction de transfert  $K \frac{(s-z)}{(s-p)}$  avec un pôle  $p < 0$ , un zéro  $z < 0$  et un gain  $K$ . Le choix de ces 3 paramètres détermine la nature de la compensation.
- Le compensateur avance-de-phase (AvPh) améliore la réponse transitoire et a peu d'effet sur la réponse en régime permanent.
- Un compensateur à action proportionnelle-dérivée (PD) est un cas limite de l'AvPh quand le pôle du compensateur est à  $-\infty$ . La forme du PD devient :  $K(s - z)$ .
- Le compensateur retard-de-phase (RePh) réduit l'erreur en régime permanent, mais peut détériorer la réponse transitoire.
- Un compensateur à action proportionnelle-intégrale (PI) est un cas limite du RePh quand le pôle du compensateur est à l'origine. La forme du PI devient :  $K \frac{(s-z)}{s}$ .
- Un compensateur avance-retard de phase (AvRePh) et son cas limite de compensateur à action proportionnelle-intégrale-dérivée (PID) combine les effets de l'avance et du retard de phase.
- Il sera démontré plus loin dans ce document que :
  - L'avantage de l'AvPh (et son cas limite PD) est dans son nom : l'avance de phase est bénéfique pour stabiliser un système instable, réduire les oscillations, le dépassement maximum et le temps de stabilisation. Son inconvénient est dans son amplitude : l'AvPh est un filtre passe-haut et l'amplification des hautes fréquences cause une augmentation du bruit dans le système (bruit des capteurs par exemple).
  - L'inconvénient du l'RePh (et son cas limite PI) est dans son nom : le retard de phase détruit la stabilité d'un système et a tendance à augmenter les oscillations, le dépassement maximum et le temps de stabilisation. Son avantage est dans son amplitude : le RePh est un filtre passe-bas qui amplifie les basses fréquences ce qui cause une augmentation du gain d'erreur statique ce qui réduit donc l'erreur en régime permanent.

## 7.5 Conception d'un compensateur avance-de-phase

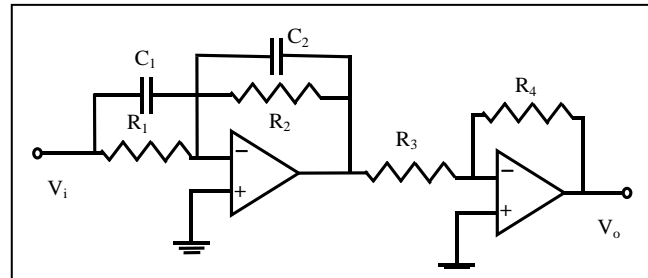
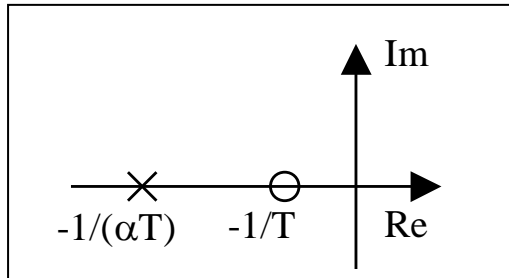
### 7.5.1 Description du compensateur avance-de-phase AvPh

- Un compensateur à avance de phase (AvPh) est utilisé pour :
  - stabiliser un système instable
  - améliorer la réponse transitoire d'un système (réduire le dépassement maximum, réduire le temps de montée, le temps de stabilisation, etc.)
- Le compensateur à AvPh est un filtre passe-haut qui ajoute une phase positive à la FTBO, sur une certaine plage de fréquence.
- Les deux formes habituelles de la fonction de transfert d'un correcteur AvPh sont les suivantes:

$$G_a(s) = K_a \frac{(s-z)}{(s-p)} \quad |p| > |z|$$

$$G_a(s) = K_a \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} = K_a \alpha \frac{(1+sT)}{(1+\alpha Ts)} \quad 0 < \alpha < 1$$

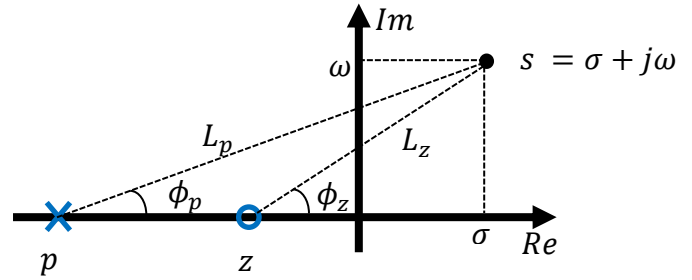
- La forme avec zéro  $z$  et pôle  $p$  est utilisée dans la conception avec le lieu des racines. La forme avec  $\alpha$  et  $T$  est utilisée dans la conception avec le diagramme de Bode. On déduit que  $z = -\frac{1}{T}$ ,  $p = -\frac{1}{\alpha T}$ .
- La forme  $K_a \left(\frac{s-z}{s-p}\right)$  suppose que le zéro  $z$  et le pôle  $p$  sont des paramètres intrinsèquement négatifs.
- Dans le cas d'un AvPh, le pôle est toujours à gauche du zéro et par conséquent  $|p| > |z|$ . Dans la forme avec  $\alpha$  et  $T$ , le fait que  $\alpha < 1$  assure que le module du pôle soit plus grand que le module du zéro. Le pôle qui est à  $p = -\frac{1}{\alpha T}$  est donc **à gauche** du zéro à  $z = -\frac{1}{T}$ . Cela crée un système passe-haut.
- La réalisation par circuit ampli-op est indiquée ci-dessous où  $R_1 C_1 > R_2 C_2$



- Conceptuellement, le compensateur AvPh peut être interprété de différentes façons:
  - mathématiquement, le compensateur passe-haut a un effet dérivatif (à cause du  $s$  au numérateur) et fait donc la dérivée de l'erreur  $e(t)$  en fonction du temps et l'amplifie avec son gain; c'est en effet la nature d'un filtre passe-haut : il amplifie les hautes fréquences, donc tout ce qui varie rapidement;
  - dynamiquement, en commandant une action inverse aux variations de l'erreur ( $-K\dot{e}$ ), cela crée l'effet d'un amortisseur, le compensateur va atténuer les variations rapides;
  - en agissant contre la pente de l'erreur, le compensateur a donc un effet d'anticipation : il prévoit la variation future de l'erreur (à partir de sa pente) et réagit d'avance à sa variation.
- L'AvPh a donc un effet d'*anticipation* durant la réponse transitoire. Il a tendance à amortir les variations rapides de l'erreur et à stabiliser le système. On l'utilise pour stabiliser un système instable et/ou améliorer sa réponse temporelle transitoire.

## Effet de l'AvPh sur le lieu des racines

- L'effet de l'AvPh est analysé en fonction de la variation de phase et d'amplitude que sa fonction de transfert  $K_a \left( \frac{s-z}{s-p} \right)$  cause dans le plan complexe.
- Supposons un nombre complexe  $s = \sigma + j\omega$ .
- La phase de l'AvPh à ce point  $s$  est :



$$\langle K_a \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \rangle = \langle K_a \rangle + \langle s-z \rangle - \langle s-p \rangle$$

le signe négatif pour le dénominateur venant du fait que l'angle de  $\frac{1}{Me^{j\phi}} = \frac{1}{M} e^{-j\phi}$  est négatif ( $-\phi$ ).

- La phase d'un nombre positif est zéro :  $\langle K_a \rangle = 0$ .
- La phase de  $s-z$  et de  $s-p$  est :

$$\begin{aligned} \langle s-z \rangle &= \langle \sigma - z + j\omega \rangle = \tan^{-1} \left( \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma - z} \right) \\ \langle s-p \rangle &= \langle \sigma - p + j\omega \rangle = \tan^{-1} \left( \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma - p} \right) \end{aligned}$$

- En analysant ces équations et le croquis ci-dessus, on remarque que  $\omega$  est la distance verticale entre  $s$  et la paire pôle-zéro  $(p, z)$  et que  $\sigma - z$  et  $\sigma - p$  sont les distances horizontales. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \langle s-z \rangle &= \phi_z \\ \langle s-p \rangle &= \phi_p \end{aligned}$$

où les angles  $\phi_z$  et  $\phi_p$  sont les angles sous-tendus entre la droite qui relie le point  $s$  et, respectivement, le zéro et le pôle. On obtient donc :

$$\langle K_a \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \rangle = \phi_z - \phi_p > 0$$

- La contribution en phase d'un AvPh est donc  $\phi_z - \phi_p$  et cette contribution est toujours positive vu que, pour un AvPh, le zéro est à droite du pôle et, selon le croquis ci-dessus, on a toujours que  $\phi_z > \phi_p$ .
- L'amplitude de l'AvPh à  $s$  est :

$$\left| K_a \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \right| = \frac{|K_a| |s-z|}{|s-p|} = \frac{K_a |\sigma - z + j\omega|}{|\sigma - p + j\omega|} = \frac{K_a \sqrt{(\sigma - z)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(\sigma - p)^2 + \omega^2}}$$

- Selon le théorème de Pythagore et le croquis :

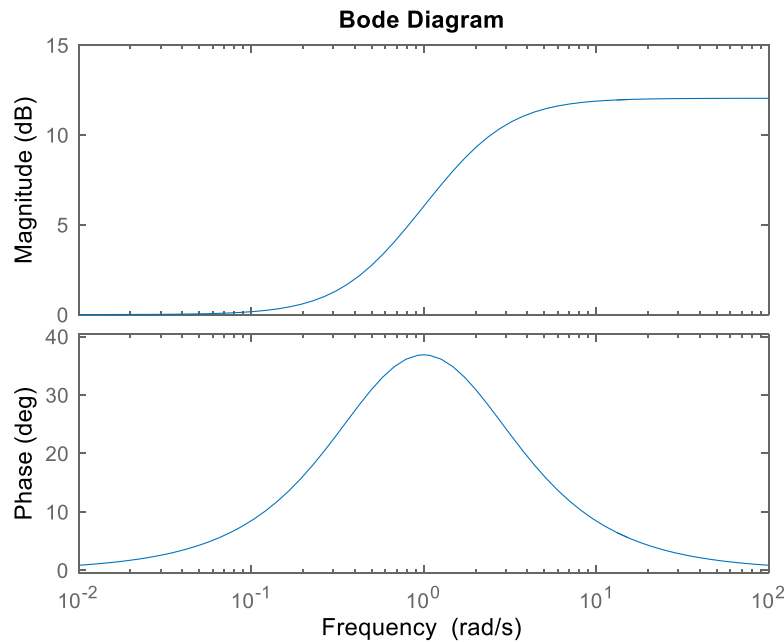
$$\left| K_a \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \right| = \frac{K_a L_z}{L_p}$$

où les longueurs  $L_z$  et  $L_p$  sont les distances entre le point  $s$  et, respectivement, le zéro et le pôle. Aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ), l'amplitude est  $\frac{K_a(-z)}{(-p)} = K_a \alpha$  où  $\left| \frac{z}{p} \right| = \alpha$  est une fraction positive  $0 < \alpha < 1$ .

## Effet de l'AvPh sur le diagramme de Bode

- La forme  $K_a \alpha \frac{(1+sT)}{(1+\alpha Ts)}$  permet de voir l'amplification aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ) :  $K_a \alpha$
- La forme  $K_a \frac{(s+1/T)}{(s+1/(\alpha T))}$  permet de voir l'amplification aux hautes fréquences ( $s \rightarrow \infty$ ) :  $K_a$
- Les hautes fréquences sont donc amplifiées d'un facteur  $1/\alpha$  par rapport aux basses fréquences.
- Comme exemple, supposons un AvPh avec  $T = 2.0$ ,  $\alpha = 0.25$  et  $K_a = 4.0$ , ce qui donne un pôle à  $p = -1/(\alpha T) = -2.0$  et un zéro à  $z = -1/T = -0.50$ , on obtient la réponse en fréquence suivante :

**Ka = 4.0; z=-0.50; p = -2.0; FT = tf(Ka\*[1 -z],[1 -p]); bode(FT)**



- L'amplification aux basses fréquences est  $K_a \alpha = (4)(0.25) = 1 = 0$  dB.
- L'amplification aux hautes fréquences est  $K_a = (4) = 12$  dB.
- On y voit donc la nature passe-haut de l'AvPh où les variations sont amplifiées pour mieux les annuler avec une rétroaction négative.
- On voit aussi que la phase du compensateur AvPh atteint un maximum entre les fréquences de coupure du numérateur ( $1/T$ ) et du dénominateur  $1/(\alpha T)$ .
- Cette augmentation de phase fait de l'AvPh un filtre anticipatif qui sera utilisé pour augmenter la phase d'un système dynamique dans le but de le stabiliser.

## 7.5.2 Conception de l'AvPh simple et double par le lieu des racines

- Le principe de la compensation AvPh avec le lieu des racines consiste à modifier le parcours du lieu des racines d'une fonction de transfert pour que ses pôles dominants en boucle fermée coïncident aux pôles désirés, ceux-ci étant calculés à partir des performances désirées du client.
- **Principe de base :** On utilise le fait que le lieu des racines est le tracé **des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)** où la **phase de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)** est de  $-180$  deg. Revoici la preuve de ce principe et son utilité dans la compensation.
  - Supposons un système asservi où la FTBO de la forme  $G(s)$  est asservie avec une rétroaction unitaire et un gain  $K$  en cascade.
  - La FTBF est donnée par  $G_{BF} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ .
  - Le dénominateur de la FTBF est  $1 + KG(s)$ .
  - Les pôles de la FTBF sont les racines du dénominateur et donc les solutions de  $1 + KG(s) = 0$ .
  - Cette équation peut être écrite sous la forme :  $KG(s) = -1$ .
  - Le chiffre  $-1$  est un nombre complexe de module 1 et de phase  $-180$  deg :  $-1 = 1e^{-j180}$
  - Donc les pôles en boucle fermée sont donnés par l'équation :

$$KG(s) = 1e^{-j180}$$

- En prenant le module  $| \cdot |$  et la phase  $\langle \cdot \rangle$  de cette équation, on obtient deux conditions qui doivent être remplies pour obtenir les pôles de la FTBF :

$$\text{la condition d'amplitude : } |KG(s)| = 1$$

$$\text{la condition d'angle ou de phase : } \langle KG(s) \rangle = -180 \text{ deg}$$

- Vu que la phase d'un gain positif  $K$  est toujours zéro,  $\langle K \rangle = 0$ , la dernière équation devient :

$$\text{la condition de phase : } \langle KG(s) \rangle = \langle K \rangle + \langle G(s) \rangle = \langle G(s) \rangle = -180 \text{ deg}$$

- Ainsi, le lieu des pôles de la FTBF dans le plan complexe (le lieu des racines) est le tracé de tous les nombres complexes  $s$  où la phase de la FTBO est de  $-180$  deg. Ça, c'est la preuve du principe.
- En inversant cette affirmation, si on veut que le lieu des racines de la FTBF passe par des pôles désirés  $s^*$  par le client, il faut changer la phase de la FTBO pour qu'elle soit  $-180$  deg à  $s^*$ .
- On a vu qu'un gain  $K$  en cascade ne peut pas changer la phase puisque sa contribution est  $0$  deg.
- Il faut donc mettre en cascade un compensateur  $G_a(s)$  dont les pôles et les zéros vont modifier le tracé de phase de la FTBO pour que cette phase devienne  $-180$  deg à  $s^*$  :

$$\langle G_a(s^*)G(s^*) \rangle = -180 \text{ deg}$$

- Ça c'est l'utilisation du principe : on a vu qu'un AvPh augmente la phase de la FTBO. On choisit les pôles et zéros du compensateur AvPh  $G_a(s)$  pour que sa contribution en phase compense ce qu'il manquait à la FTBO originale  $G(s)$  pour se rendre à  $-180$  deg.
- La condition d'amplitude ne fait que déplacer les pôles sur le tracé en fonction de  $K$ .
- Pour faire une analogie, la condition de phase décide du « trajet d'autobus » et le gain  $K$  décide de la « station d'autobus ». Si le trajet ne correspond pas aux requis, on ne peut le changer qu'en changeant la phase, i.e. en ajoutant des zéros et/ou des pôles. Le gain ne fait que déplacer les pôles sur le tracé.



- **Procédure de conception d'un compensateur AvPh par le lieu des racines**

Comme annoncé précédemment, la compensation AvPh consiste à traduire les requis du client en position de pôles désirés, calculer la phase de la FTBO à cet endroit qui manque pour atteindre  $-180$  deg, calculer la position de pôle(s) et de zéro(s) qui donne cette phase manquante (qui modifie le « trajet d'autobus ») et de calculer le gain de l'AvPh qui correspond aux pôles désirés (à l' « arrêt d'autobus »).

- (1) À partir des exigences de performance en régime transitoire, déterminer la position désirée des pôles dominants en boucle fermée : transformer les **paramètres de performance**  $M_p, t_p, t_r, t_s$  en **paramètres standards**  $\zeta, \omega_n$  et calculer les pôles désirés  $s^* = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
- (2) Dessiner le lieu des racines avant compensation (i.e. à partir de la FTBO, donc sans ajout de pôles ou de zéro encore). Déterminer si un ajustement du gain peut à lui seul donner une performance équivalente ou meilleure que celle désirée. Normalement, si le trajet du lieu des racines de la FTBO passe à gauche des pôles désirés, aucune compensation n'est requise (le trajet est déjà correct) et seul un ajustement de gain permet d'atteindre ou de dépasser les requis du client.
- (3) Sinon, il faut modifier (*compenser*) le lieu des racines par l'ajout de zéro et de pôle. Calculer la phase  $\Delta\phi$  qui manque à la FTBO pour atteindre  $-180$  deg. **Voir ci-dessous le calcul de  $\Delta\phi$ .**
- (4) Utiliser un compensateur à avance de phase :

$$G_a(s) = K_a \frac{(s - z)}{(s - p)} \quad |p| > |z|.$$

Calculer les paramètres  $z$  et  $p$  (i.e. la position d'un zéro et d'un pôle) du compensateur de façon à fournir l'avance de phase  $\Delta\phi$  requise. **Voir ci-dessous le calcul de  $z$  et  $p$ .** Comme règle du pouce, si l'augmentation de phase  $\Delta\phi$  dépasse environ 60-70 deg, on fait la conception de deux compensateurs en cascade, chacun contribuant la moitié de la phase requise,  $\Delta\phi/2$ . Voir à la fin de cette section comment concevoir un **double** compensateur AvPh.

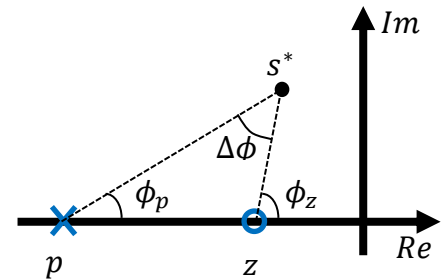
- (5) Si une erreur en régime permanent **nulle** est spécifiée pour un certain type d'entrée et qu'il faille augmenter la classe de la FTBO avec un compensateur proportionnel-intégral (PI), il y a 2 façons:
  - faire la compensation AvPh sur la FTBO originale et ajouter le compensateur PI après cette compensation avance-de-phase
  - ajouter à la FTBO le nombre d'intégrateurs purs requis pour augmenter la classe et faire le design de l'AvPh avec cette nouvelle FTBO
 Cela sera expliqué plus loin dans la section sur les compensateurs retard-de-phase RePh et PI.
- (6) Calculer le gain  $K_a$  du compensateur avec la condition d'amplitude qui correspond à la position des pôles désirés. **Voir ci-dessous le calcul gain  $K_a$ .**
- (7) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences. Une des façons de raffiner le design est d'ajuster le gain  $K_a$  et de déplacer les pôles désirés dans la direction qui permet de rencontrer les critères de performance.

- **Calcul de l'augmentation de phase  $\Delta\phi$  requise**

- La position désirée des pôles  $s^*$  a été obtenue à partir des critères de performance.
- On calcule la phase de la FTBO à ce point:  $\langle G(s^*) \rangle$ .
- Dans le cas d'un système à phase minimale, si  $\langle G(s^*) \rangle > -180$  deg, cela signifie qu'il n'y a pas de compensation à faire; un simple ajustement du gain permet d'obtenir la performance désirée ou mieux. Si  $\langle G(s^*) \rangle < -180$  deg, une compensation est requise.
- Pour que le lieu des racines passe par la position désirée des pôles  $s^*$ , la condition d'angle exige que l'angle de la FTBO soit de  $-180^\circ$ .
- L'avance de phase requise est donc de :  $\Delta\phi = -180 - \langle G(s^*) \rangle$  c'est-à-dire ce que l'on veut i.e.  $-180$  deg, moins ce qu'on a actuellement, i.e.  $\langle G(s^*) \rangle$ .
- Comme indiqué ci-dessus, si  $\Delta\phi < 0$  deg, il n'y a pas de compensation à faire.
- Si  $\Delta\phi > 0$  deg, il faut avancer la phase de  $\Delta\phi$  deg avec l'AvPh.

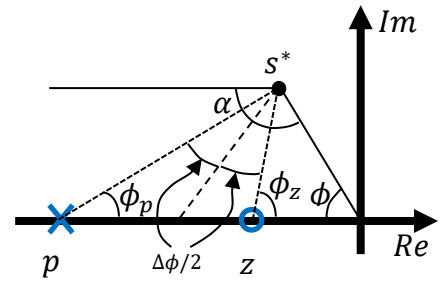
- **Calcul de la position du pôle  $p$  et du zéro  $z$  du compensateur**

- Il y a plusieurs techniques pour placer le pôle et le zéro pour obtenir une avance de phase de  $\Delta\phi$ . De plus, ces positions de pôle et zéro ne sont pas uniques. Une technique parmi plusieurs est présentée.
- On a vu plus haut qu'un AvPh augmente la phase de  $\Delta\phi = \phi_z - \phi_p$  où les angles  $\phi_z$  et  $\phi_p$  sont les angles sous-tendus entre la droite qui relie respectivement le zéro et le pôle au point  $s$  dans le plan complexe où l'augmentation de phase se fait.
- Si on choisit ce point comme étant la position des pôles désirés  $s^*$ , l'AvPh augmente la phase exactement à l'endroit où on en a besoin pour augmenter la phase de la FTBO à  $-180$  deg et pour que le lieu des racines passe maintenant par cet endroit.
- Rappel : Vu que l'AvPh est en cascade avec la FTBO originale, les phases s'additionnent.
- Par simple géométrie (laissé comme exercice...), il peut être démontré que l'angle  $\Delta\phi$  est aussi l'angle entre les deux droites qui partent du point  $s^*$  vers le pôle et le zéro (voir croquis).
- Donc, du point de vue du pôle désiré  $s^*$ , si on trace deux droites séparées par un angle  $\Delta\phi$ , l'intersection avec l'axe des réels négatifs donne la position de la paire pôle-zéro qui donne la phase requise. En balayant tout l'axe des réels négatifs, il y a donc une infinité de positions de paire pôle-zéro qui rencontre ce critère et qui donne l'avance de phase requise. Une autre contrainte est requise.
- Une des contraintes est de ne pas placer le zéro trop à droite, trop près de l'origine et idéalement pas à droite des pôles désirés sinon le zéro devient dominant. Quand le zéro devient ainsi trop dominant par rapport aux deux pôles désirés dominants, la fonction de transfert dominante n'a plus la forme de celle d'un ordre deux standard  $\left( \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)$  dans laquelle il n'y a pas de zéro. Vu que la traduction des critères de performance  $M_p, t_p, t_r, t_s$  en paramètres standards  $\zeta, \omega_n$  utilise comme point de départ la forme d'une fonction d'ordre deux standard, les performances réellement obtenues avec un AvPh dont le zéro est trop dominant vont dévier de celles prédites par ces équations.
- Entre autres, alors qu'un AvPh permet de réduire le dépassement maximum  $M_p$  quand le zéro de l'AvPh est suffisamment à gauche des pôles désirés, le dépassement maximum devient de plus en plus élevé à mesure que le zéro devient dominant. Cela a été démontré au Chapitre 5.
- L'autre contrainte est que le pôle ne doit pas être trop à gauche puisque cela peut causer des problèmes numériques (des pôles trop rapides créent un « stiff system »).
- Une des techniques proposées fait un équilibre entre ces 2 contraintes : la méthode de la bissectrice.



– **Technique no 1 : la technique de la bissectrice**

- Dans le plan des racines, tracer une droite parallèle à l'axe réel, passant par le point  $s^*$  par lequel on désire faire passer le lieu des racines compensé. Tracer aussi la droite de  $s^*$  vers l'origine.
- L'angle sous-tendu par ces deux droites est appelé  $\alpha$ .
- Faire la bissection de cet angle par une droite vers l'axe des réels.
- On placera le zéro et le pôle de chaque côté de cette bissectrice, d'un angle  $\Delta\phi/2$  de chaque côté afin d'avoir l'ajout d'angle requis.
- Tracer deux droites à un angle  $\Delta\phi/2$  de chaque côté de la bissectrice vers l'axe des réels négatifs.
- L'intersection de ces deux droites avec l'axe des réels donne la position du pôle et du zéro. Le zéro ajoutera une phase  $\phi_z$  à la fonction de transfert et le pôle enlèvera une phase  $\phi_p$  avec un résultat net de  $\Delta\phi = \phi_z - \phi_p$ , comme désiré.
- Selon le croquis, on a la relation suivante :



$$\alpha = 180 - \phi \quad \text{donc} \quad \phi = 180 - \alpha$$

où, selon la Section 7.1.2, l'angle  $\phi$  est donné par  $\phi = \cos^{-1} \zeta^*$  et où  $\zeta^*$  est le facteur d'amortissement désiré. Vu que la somme des angles d'un triangle est 180 deg, on a aussi que :

$$\phi_z + \phi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta\phi}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad \phi_z = \frac{\alpha + \Delta\phi}{2}$$

$$\phi_p + \phi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\Delta\phi}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad \phi_p = \frac{\alpha - \Delta\phi}{2}$$

- On obtient les angles  $\phi_z$  et  $\phi_p$  en fonction de quantités connues et on voit que  $\phi_z - \phi_p = \Delta\phi$ .
- Il faut enfin traduire ces angles en position désirées de la paire-pôle-zéro. Selon la géométrie:

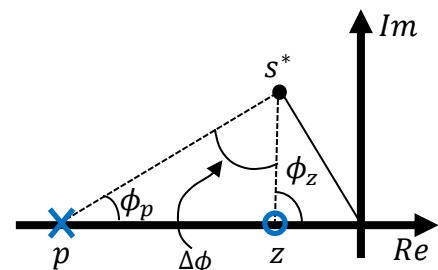
$$\tan \phi_z = \frac{\text{Im}(s^*)}{\text{Re}(s^*) - z} \quad \Rightarrow \quad z = \text{Re}(s^*) - \frac{\text{Im}(s^*)}{\tan \phi_z}$$

$$\tan \phi_p = \frac{\text{Im}(s^*)}{\text{Re}(s^*) - p} \quad \Rightarrow \quad p = \text{Re}(s^*) - \frac{\text{Im}(s^*)}{\tan \phi_p}$$

- Dans ces équations, la convention que  $z$  et  $p$  sont intrinsèquement négatifs, que  $\text{Re}(s^*)$  est négatif (on veut un système stable) et que  $\text{Im}(s^*)$  est positif (on prend le pôle désiré du haut) a été utilisée.

– **Technique no 2 : la technique du zéro sous le pôle dominant**

- Cette approche, plus rapide de design, met le zéro le plus à droite possible sans trop affecter l'amplification du dépassement maximum. Cette limite est de mettre le zéro du compensateur AvPh directement sous le pôle dominant :



$$z = \text{Re}(s^*)$$

- Sa contribution en phase est donc de  $\phi_z = 90$  deg.
- Utilisant le fait que l'avance de phase  $\Delta\phi$  fournie par le compensateur est la différence  $\Delta\phi = \phi_z - \phi_p$  entre les contributions du zéro et du pôle, la contribution en phase du pôle est donc :

$$\phi_p = \phi_z - \Delta\phi \Rightarrow \phi_p = 90 - \Delta\phi \text{ (en degrés)}$$

- Avec cette technique, il faut évidemment que l'avance de phase requise  $\Delta\phi$  soit inférieure à 90 deg.
- Si l'avance de phase requise est supérieure à 90 deg, il faut faire deux compensateurs identiques en cascade, chacun avec une contribution en phase de  $\Delta\phi/2$ . Cette approche est traitée plus loin.
- Finalement, la position du pôle du compensateur est obtenue avec la même équation qu'avec la technique de la bissectrice :

$$p = \operatorname{Re}(s^*) - \frac{\operatorname{Im}(s^*)}{\tan \phi_p}$$

### Calcul gain $K_a$

- On doit calculer la « station d'autobus » qui nous arrête aux pôles désirés, La condition d'amplitude demande que le gain de la nouvelle FTBO compensée aux pôles désirés soit unitaire :

$$|G_a(s^*)G(s^*)| = \left| K_a \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right) G(s^*) \right| = 1$$

de laquelle on déduit le gain du compensateur :

$$K_a = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right) G(s^*) \right|}$$

### • Exemple 7.1: Compensation par avance de phase avec le lieu des racines

- ♦ La FTBO originale d'un système est :

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

- ♦ Les exigences de performance sont:

- temps de stabilisation à 2% :  $t_s = 2$  s
- dépassement maximum :  $M_p = 16.3$  %

(1) Position désirée des pôles dominants en boucle fermée.

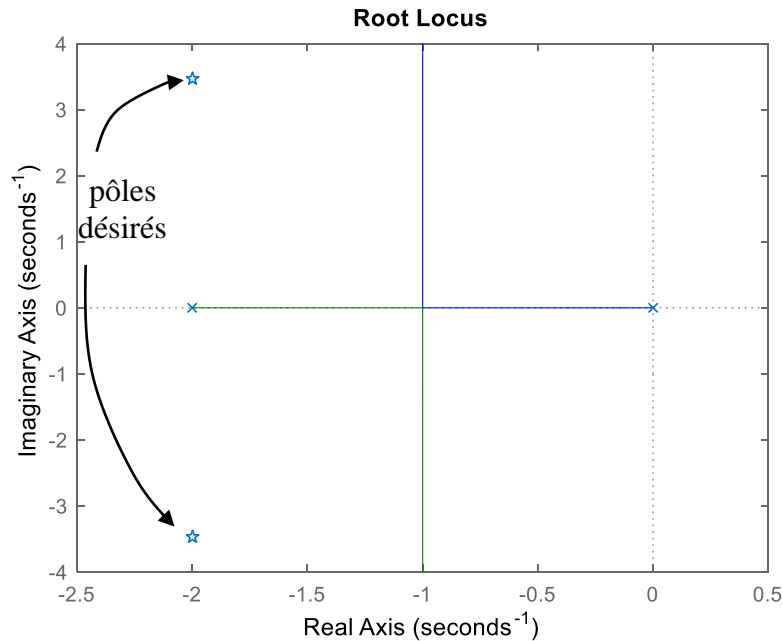
- transformer les paramètres de performance  $M_p, t_p, t_r, t_s$  en paramètres standards  $\zeta, \omega_n$

$$M_p = 16.3 \% \Rightarrow \tan \phi = \frac{-\pi}{\ln(0.163)} = 1.732 \Rightarrow \phi = 60 \text{ deg} \Rightarrow \zeta = \cos \phi = 0.5$$

$$t_s = 2 \text{ s} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = 4 \text{ rad/s}$$

- calculer les pôles désirés  $s^* = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.0 \pm j2\sqrt{3} = -2.0 \pm j3.464$

- (2) Dessiner le lieu des racines avant compensation. Déterminer si un ajustement du gain peut à lui seul donner une performance équivalente ou meilleure que celle désirée.



Le lieu des racines passe à droite des pôles désirés : une compensation est requise

- (3) Il faut modifier (*compenser*) le lieu des racines. Calculer la phase  $\Delta\phi$  qui manque à la fonction de transfert pour obtenir les pôles dominants désirés.

$$\begin{aligned}\langle G(s^*) \rangle &= \left\langle \frac{4}{s^*(s^* + 2)} \right\rangle = -\langle s^* \rangle - \langle s^* + 2 \rangle = -\langle -2.0 + j2\sqrt{3} \rangle - \langle -2.0 + j2\sqrt{3} + 2 \rangle \\ &= -\tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{-2} - \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{0} = -120 - 90.0 = -210 \text{ deg}\end{aligned}$$

$$\Delta\phi = -180 - \langle G(s^*) \rangle = -180 - (-210) = 30 \text{ deg}$$

- (4) Utiliser un compensateur AvPh. Calculer les paramètres  $z$  et  $p$  du compensateur de façon à fournir l'avance de phase  $\Delta\phi$  requise.

$$\alpha = 180 - \phi = 180 - 60 = 120$$

$$\phi_z = \frac{\alpha + \Delta\phi}{2} = \frac{120 + 30}{2} = 75 \text{ deg}$$

$$\phi_p = \frac{\alpha - \Delta\phi}{2} = \frac{120 - 30}{2} = 45 \text{ deg}$$

$$z = \text{Re}(s^*) - \frac{\text{Im}(s^*)}{\tan \phi_z} = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3.732} = -2.928$$

$$p = \text{Re}(s^*) - \frac{\text{Im}(s^*)}{\tan \phi_p} = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{1.0} = -5.464$$

On obtient aussi (dans l'autre forme):

$$T = \frac{1}{2.928} = 0.342 \quad \alpha T = \frac{1}{5.464} = 0.183 \quad \alpha = 0.536.$$

La fonction de transfert en b.o. du système compensé est donc:

$$G_a(s)G(s) = K_a \frac{s+2.928}{s+5.464} \frac{4}{s(s+2)}.$$

(5) Il n'y a pas de coefficient d'erreur en régime permanent spécifié.

(6) Calculer le gain  $K_a$  du compensateur avec la condition d'amplitude

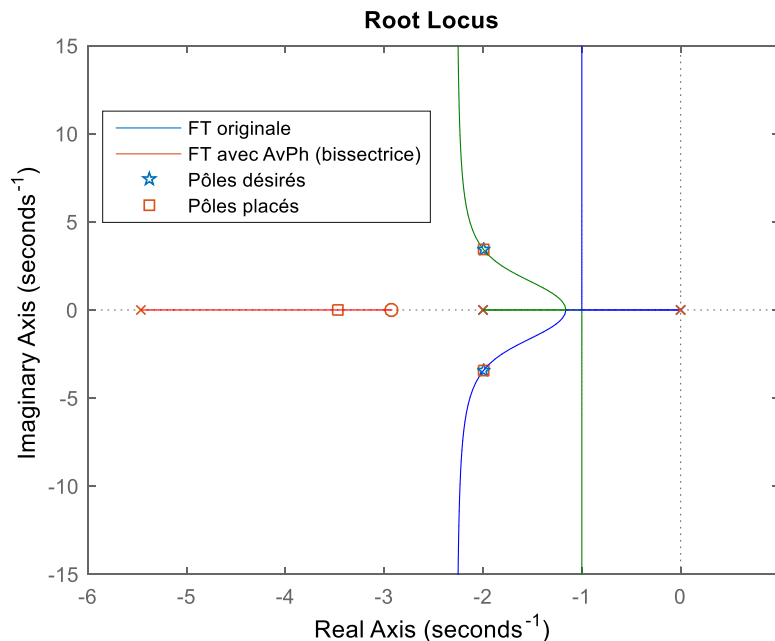
$$K_a = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right) G(s^*) \right|} = \frac{1}{\left| \left( \frac{-2.0 + j2\sqrt{3} - (-2.928)}{-2.0 + j2\sqrt{3} - (-5.464)} \right) \frac{4}{(-2.0 + j2\sqrt{3})(-2.0 + j2\sqrt{3} + 2)} \right|}$$

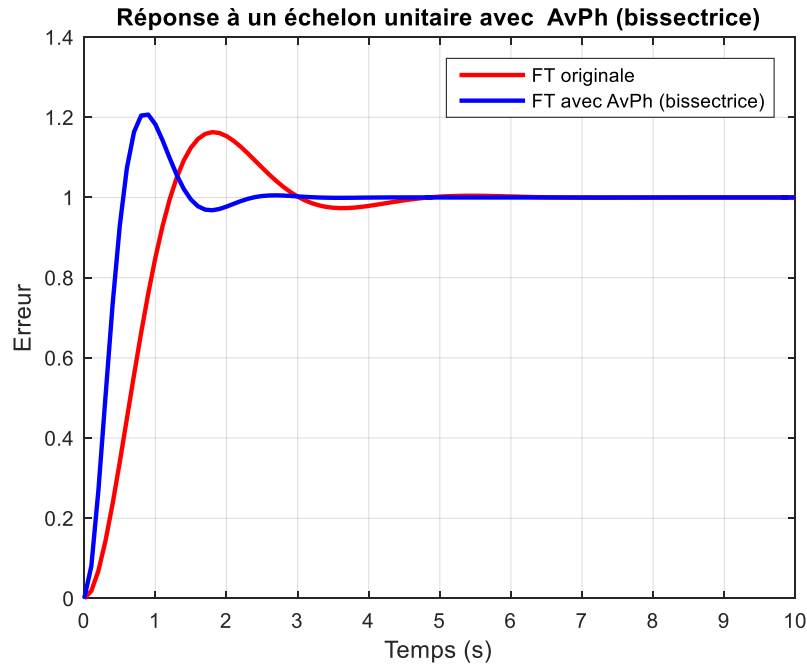
$$K_a = 4.731$$

Le compensateur est donc donné par:

$$G_a(s) = 4.731 \frac{(s+2.928)}{(s+5.464)} = 2.535 \frac{(0.342s+1)}{(0.183s+1)}$$

(7) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées.





- Le code MATLAB suivant a été utilisé pour créer le graphique du lieu des racines :

```
figure(2)
rlocus(FT)
hold on
rlocus(FTFTa)
plot(pdes, 'p')
p = rlocus(FTFTa,1);
plot(p, 's')
legend('FT originale', 'FT avec AvPh (bissectrice)', 'Pôles désirés', 'Pôles placés')
```

où **pdes** sont les pôles désirés, **FT** la fonction de transfert originale, **FTFTa** la fonction de transfert originale multipliée par le compensateur **FTa** de l'AvPh ( $FTFTa = FT * FTa$ ) et **p** = **rlocus(FTFTa,1)** permet de calculer les pôles **p** obtenus en calculant les pôles de la FTBF avec un gain de 1.

- Il est recommandé de toujours utiliser cette forme de validation parce que, quand les pôles désirés (représentés par les symboles de pentagrammes ('p') de MATLAB) sont à l'intérieur des pôles calculés (représentés par les symboles de carrés ('s') de MATLAB), cela confirme que le design a bien été fait.
- Sur la réponse à l'échelon, on remarque que la réponse du système compensé avec une commande P et avec l'AvPh. Ce dernier a un dépassement maximum d'environ 20% ce qui excède la spécification de 16.3%. C'est la conséquence de la présence du zéro de l'AvPh qui fait dévier son comportement de celui d'un système d'ordre 2 standard à partir duquel l'équation du  $M_p$  a été développée. On remarque que le  $t_s$  est bien de 2 s cependant.

- **Procédure de conception d'un double compensateur AvPh par le lieu des racines**

- Il arrive parfois que l'avance de phase  $\Delta\phi$  requise dans une compensation soit trop élevée pour être fournie par un seul compensateur AvPh.
- Dans le cas de la technique du zéro sous le pôle dominant, par exemple, on a vu que le maximum de phase qui peut être ajoutée est de 90 deg.
- Même dans le cas de la technique de la bissectrice, quand l'avance de phase requise  $\Delta\phi$  est de l'ordre de 60-70 deg ou plus, il est préférable de faire deux compensateurs AvPh en cascade, chacun contribuant  $\Delta\phi/2$  en phase plutôt que d'un seul contribuant  $\Delta\phi$ .

- Le double compensateur a la forme :

$$G_a(s) = K_a \left( \frac{s - z}{s - p} \right)^2$$

- La position du pôle  $p$  et du zéro  $z$  se fait de la même façon que décrit précédemment à la différence qu'elle est calculée pour une avance de phase de  $\Delta\phi/2$ .
- Le gain du compensateur est obtenu de la même façon, avec l'adaptation nécessaire :

$$K_a = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right)^2 G(s^*) \right|}$$



### 7.5.3 Conception de l'AvPh par le diagramme de Bode (Méthode 1)

La Méthode 1 est utilisée quand les performances demandées sont exprimées en termes de marge de phase et de bande passante BW (ou équivalent : fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  fréquence naturelle  $\omega_n$ ).

- Il a été mentionné (à la Section 7.3) que l'utilisation du diagramme de Bode pour la conception de compensateurs peut se faire (1) avec deux compensateurs, un AvPh pour régler le régime transitoire et un RePh en cascade pour régler le régime permanent ou (2) un seul compensateur qui fait les deux en même temps. L'approche (1) est appelée la Méthode 1 et est présentée dans cette section.
- La Méthode 1 est en parallèle exact avec la conception avec le lieu des racines vue à la Section 7.5.1: on traite les spécifications sur le régime transitoire en premier avec un AvPh (ou PD) et les spécifications sur le régime permanent ensuite avec un RePh (ou PI).
- Le principe de la compensation AvPh avec le diagramme de Bode consiste à modifier la réponse en fréquence d'une fonction de transfert pour que sa marge de phase (PM) et sa bande passante (BW) rencontre les performances désirées du client. Les spécifications sur la BW sont parfois remplacées par des spécifications sur la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  ou la fréquence naturelle  $\omega_n$ .
- À partir de la fonction de transfert d'un ordre 2 standard, la Section 7.1.3 démontre qu'il y a un lien analytique direct entre les paramètres de performance PM, BW (ou  $\omega_g^*$ ) et les paramètres standards  $\zeta$  et  $\omega_n$ . En effet, PM est relié par une seule équation à  $\zeta$  et BW (ou  $\omega_g^*$ ) est lié aux deux,  $\zeta$  et  $\omega_n$ .
- On peut donc dire que  $M_p$  et PM sont dans la même catégorie : ils ne dépendent que de  $\zeta$ .
- On peut aussi dire que  $t_p$ ,  $t_s$ ,  $t_r$  et BW sont dans la même catégorie : ils dépendent de  $\zeta$  et  $\omega_n$ .
- **Principe de base :** On utilise le fait que le diagramme de Bode est le tracé de l'amplitude et de la phase de la FTBO à partir duquel la marge de phase PM peut être calculée à la fréquence de traverse en gain  $\omega_g$ . Revoici le principe du diagramme de Bode et son utilité dans la compensation.
  - Supposons un système asservi où la FTBO de la forme  $G(s)$  est asservie avec une rétroaction unitaire. Le gain  $K$  en cascade est supposé intrinsèque à  $G(s)$ .
  - La FTBF est donnée par  $G_{BF} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ .
  - Le dénominateur de la FTBF est  $1 + G(s)$ .
  - Les pôles de la FTBF sont les racines du dénominateur et donc les solutions de  $1 + G(s) = 0$ .
  - Cette équation peut être écrite sous la forme :  $G(s) = -1$ .
  - Le chiffre  $-1$  est un nombre complexe de module 1 et de phase  $-180$  deg :  $-1 = 1e^{-j180}$
  - Donc les pôles en boucle fermée sont donnés par l'équation :

$$G(s) = 1e^{-j180}$$

- Si on remplace  $s$  dans cette équation par  $s = j\omega$ , comme c'est le cas pour une réponse en fréquence:

$$G(j\omega) = 1e^{-j180}$$

on rencontre deux critères : on est sur le lieu des racines de la FTBF et on est sur l'axe imaginaire. On est donc à la limite de la stabilité.

- Pour un système stable, les marges de gain GM et de phase PM sont les marges qui restent au système avant de rencontrer toutes ces conditions et devenir à la limite de stabilité.

– **Marge de gain (GM):**

La condition d'angle (ou de phase) est rencontrée à la fréquence de traverse en phase ( $\omega_p$ ) :

$$\langle G(j\omega_p) \rangle = -180 \text{ deg}$$

Le gain qui manque pour rencontrer la condition d'amplitude est la marge de gain :

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_p)|}$$

– **Marge de phase (PM) :**

La condition d'amplitude est rencontrée à la fréquence de traverse en gain ( $\omega_g$ ) :

$$|G(j\omega_g)| = 1 = 0 \text{ dB}$$

La phase perdue pour rencontrer la condition de phase est la marge de phase:

$$PM = \langle G(j\omega_g) \rangle - (-180)\text{deg} = \langle G(j\omega_g) \rangle + 180 \text{ deg}$$

• **Principe de conception d'un compensateur AvPh par le diagramme de Bode**

- Comme annoncé précédemment, la compensation AvPh consiste à traduire les requis du client en termes de :
  - marge de phase désirée  $PM^*$  (spécifiée directement ou à partir d'un facteur d'amortissement désiré  $\zeta^*$ )
  - fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  désirée (spécifiée directement ou à partir d'une bande passante désirée  $BW^*$  ou d'une fréquence naturelle  $\omega_n^*$ ).
- Les équations de la Section 7.1.3 peuvent être nécessaires pour obtenir la  $PM^*$  et la  $\omega_g^*$ .
- La spécification sur la BW (ou  $\omega_g$ ) détermine l'ajustement gain qui permet d'obtenir la fréquence de traverse en gain  $\omega_g$ .
- Ensuite, l'augmentation de phase contributive par l'AvPh est appliquée exactement à cette fréquence  $\omega_g$  pour atteindre la PM désirée.
- Vu que les gains s'additionnent en dB et que les phases s'additionnent en degrés, il est facile de voir l'effet du compensateur sur le diagramme de Bode.

- **Procédure de conception d'un compensateur AvPh avec le diagramme de Bode (Méthode 1)**

Cette méthode est utilisée quand les performances sont exprimées en termes de marge de phase  $PM^*$  et de fréquence de traverse en gain désirées  $\omega_g^*$  (ou équivalents i.e.  $BW^*$  ou  $\omega_n^*$ ).

- (1) Si les spécifications ne sont pas exprimées directement en termes de  $PM^*$  et de  $\omega_g^*$ , utiliser les équations de la Section 7.1.3 pour les obtenir.
- (2) Dessiner le diagramme de Bode avant compensation à partir de la FTBO et son gain intrinsèque. Déterminer si les performances sont déjà atteintes ou dépassées (i.e.  $\omega_g > \omega_g^*$  et  $PM > PM^*$ ). Sinon, déterminer si un ajustement du gain peut à lui seul donner une performance équivalente ou meilleure que celle désirée : si  $\omega_g > \omega_g^*$  mais  $PM < PM^*$  ou si  $\omega_g < \omega_g^*$  mais  $PM > PM^*$ , un ajustement de gain pourrait rencontrer les spécifications.
- (3) Sinon, il faut modifier le diagramme de Bode. Utiliser un compensateur AvPh (où  $0 < \alpha < 1$ ):

$$G_a(s) = K_a \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} = K_a \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} .$$

Calculer le gain  $K^*$  que doit fournir l'AvPh et qui est nécessaire à obtenir la fréquence de traverse en amplitude à  $\omega_g^*$ . À la fréquence de traverse, on doit avoir:

$$|G_a(s)G(s)|_{s=j\omega_g^*} = 1 \quad \text{ce qui donne} \quad K^* = |G_a(s)|_{s=j\omega_g^*} = \frac{1}{|G(s)|_{s=j\omega_g^*}}$$

Avec  $G(s)$  et  $\omega_g^*$  connus, on peut calculer ce gain  $K^*$  qui donne l'amplitude du compensateur à cette fréquence de traverse.

- (4) Dessiner le diagramme de Bode de la FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$  calculé à l'étape précédente, i.e. faire le tracé de Bode de  $K^*G(s)$ . Le tracé de l'amplitude devrait couper 0 dB à  $\omega_g^*$ . Déterminer si, après cet ajustement du gain, la  $PM^*$  est satisfaite. Si c'est le cas, la conception est terminée. Sinon, on doit continuer la conception avec les étapes suivantes, car il faut alors modifier (i.e. compenser) le diagramme de Bode.
- (5) Sinon, il faut modifier (*compenser*) le diagramme de Bode. Calculer l'avance de phase requise à  $\omega_g^*$  pour atteindre la marge de phase désirée. La marge de phase  $PM$  du système non compensé est:

$$PM = \langle K^*G(s) \rangle_{s=j\omega_g^*} - (-180 \text{ deg})$$

L'avance de phase requise est donc :

$$\Delta\phi = PM^* - PM$$

Le compensateur devra contribuer une phase égale à  $\Delta\phi$  à la fréquence à  $\omega_g^*$ .

- (6) Un compensateur avance de phase  $G_a(s)$  contribue une phase maximum  $\phi_m$  à une fréquence  $\omega_m$  données par les équations suivantes (voir ci-dessous **Calcul des paramètres  $\phi_m$  et  $\omega_m$** ):

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

où  $\alpha$  et  $T$  sont les paramètres du compensateur. On fait coïncider l'avance de phase maximum  $\phi_m$  de l'AvPh à l'avance de phase requise par les spécifications :  $\phi_m = \Delta\phi$ . En inversant la première équation, on peut ainsi calculer le paramètre  $\alpha$  à partir du  $\Delta\phi$  déjà calculé:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Delta\phi}{1 + \sin \Delta\phi}$$

- (7) On veut avoir cette phase maximum à la fréquence de traverse en gain désirée  $\omega_g^*$  (c'est exactement là que la marge de phase est mesurée) i.e. on fait coïncider  $\omega_m$  à  $\omega_g^*$ . En inversant la deuxième équation ci-dessus avec  $\omega_m = \omega_g^*$ , on peut calculer le paramètre  $T$  :

$$T = \frac{1}{\omega_g^* \sqrt{\alpha}}$$

- (8) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:
- le zéro du compensateur est à  $z = -1/T$  (fréquence de coupure  $1/T$ )
  - le pôle du compensateur est à  $p = -1/(\alpha T)$  (fréquence de coupure  $1/(\alpha T)$  )
- (9) Calculer le gain  $K_a$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur à la fréquence de traverse en gain. **Voir ci-dessous le calcul du gain  $K_a$ .**
- (10) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences. Une des façons de raffiner le design est de surcompenser avec une avance de phase  $\Delta\phi = PM^* - PM + mrg$  où  $mrg$  est une « marge sur la marge de phase » pour ajouter plus de phase que requis pour compenser des pertes de performances causées par l'utilisation des équations approximatives de la Section 7.1.3 ou à cause de l'ajout futur d'un RePh en cascade.

• **Calcul des paramètres  $\phi_m$  et  $\omega_m$**

- La contribution maximum de phase  $\phi_m$  et la fréquence  $\omega_m$  où elle est obtenue peuvent être calculées en trouvant la solution de:

$$\frac{d\langle G_a(j\omega) \rangle}{d\omega} = K_a \alpha \frac{d \langle \frac{(j\omega T + 1)}{(j\omega \alpha T + 1)} \rangle}{d\omega} = 0.$$

- La phase  $\langle G_a(j\omega) \rangle = \phi$  est donnée par :

$$\phi = \langle G_a(j\omega) \rangle = \left\langle \frac{(j\omega T + 1)}{(j\omega \alpha T + 1)} \right\rangle = \left\langle \frac{(j\omega T + 1)(-j\omega \alpha T + 1)}{(j\omega \alpha T + 1)(-j\omega \alpha T + 1)} \right\rangle = \left\langle \frac{(\alpha \omega^2 T^2 + 1) + j\omega T(1 - \alpha)}{(1 + \alpha^2 \omega^2 T^2)} \right\rangle$$

- On a multiplié le haut et le bas de la fraction par le conjugué complexe du dénominateur pour que ce dernier devienne réel. On peut donc calculer la phase avec le numérateur seulement (la phase du dénominateur est nulle puisque le dénominateur est un réel positif):

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{\omega T(1 - \alpha)}{(\alpha \omega^2 T^2 + 1)}$$

- En dérivant par rapport à  $\omega$  et en égalant à zéro, on obtient :

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow 1 - \alpha \omega^2 T^2 = 0$$

d'où on extrait la fréquence  $\omega_m$  où la phase est maximum:

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- En remplaçant cette solution dans l'équation pour la phase,  $\tan \phi = \frac{\omega T(1-\alpha)}{(\alpha \omega^2 T^2 + 1)}$ , on obtient la phase maximum  $\phi_m$  :

$$\tan \phi_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{(1 - \alpha)}{2}$$

- Finalement, avec l'identité trigonométrique  $\sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$ , on obtient finalement l'équation pour la phase maximum :

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

### Calcul du gain $K_a$

- Le gain  $K_a$  est calculé de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur à la fréquence de traverse en gain calculé à l'étape (1). On veut:

$$K^* = |G_a(s)|_{s=j\omega_g^*} = K_a \left| \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} \right|_{s=j\omega_g^*}$$

- Considérant que  $\omega_g^* = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ , il est facile de démontrer que :

$$\left| \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} \right|_{s=j\omega_g^*} = \left| \frac{\left(j\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{T}\right)}{\left(j\frac{1}{T\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\alpha T}\right)} \right| = \sqrt{\alpha}$$

et donc :

$$K_a = \frac{K^*}{\sqrt{\alpha}}.$$

• **Exemple 7.2 : Compensation par avance de phase par le diagramme de Bode (Méthode 1)**

- ♦ La FTBO originale d'un système est :

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

- ♦ Les exigences de performance sont:

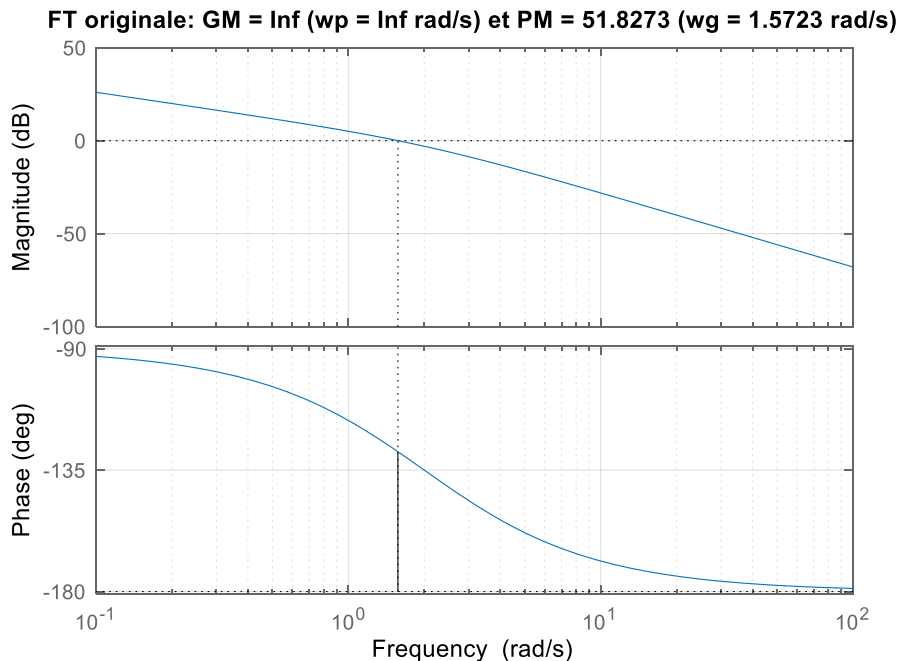
- Marge de phase d'au moins 52 deg correspondant approximativement à  $\zeta = 0.5$  de l'exemple 7.1
- Bande passante de 5.0 rad/s correspondant approximativement à  $\omega_n = 4$  rad/s de l'exemple 7.1.

(1) Obtenir  $PM^*$  et  $\omega_g^*$

$PM^*$  est déjà spécifiée :  **$PM^* = 52$  deg.**

Selon la Section 7.1.3, on a :  **$\omega_g^* = 3.09$  rad/s** (et  $\omega_n^* = 3.94$  rad/s mais pas requise dans le design)

(2) Dessiner le diagramme de Bode avant compensation à partir de la FTBO.

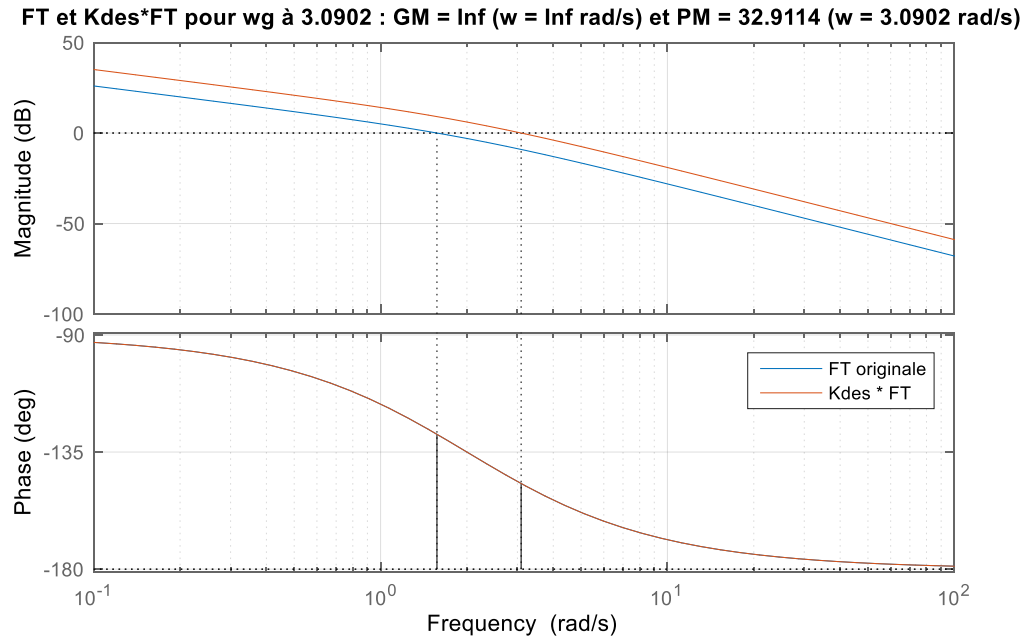


On voit que la PM actuelle est à peu près celle demandée mais que la fréquence de traverse en gain actuelle est de 1.57 rad/s ce qui est inférieur à  $\omega_g^* = 3.09$  rad/s. Il est possible de voir qu'à 3.09 rad/s, la marge de phase de 52 deg ne sera pas atteinte.

(3) Calculer le gain  $K^*$  nécessaire pour obtenir la fréquence de traverse en amplitude à  $\omega_g^*$ .

$$K^* = \frac{1}{|G(s)|_{s=j\omega_g^*}} = \frac{1}{\left| \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=j3.09}} = 2.844$$

- (4) Dessiner le lieu de Bode de la FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$ . Le tracé de l'amplitude devrait couper 0 dB à  $\omega_g^*$ . Déterminer si, après cet ajustement du gain, la  $PM^*$  est satisfaite.



On voit que la marge de phase est descendue à 32.9 deg. Il faut donc augmenter la phase.

- (5) Il faut modifier (compenser) le lieu de Bode. Calculer l'avance de phase requise à  $\omega_g^*$  pour atteindre la marge de phase désirée  $PM^*$ . La marge de phase  $PM$  du système non compensé est:

$$PM = \langle K^*G(s) \rangle_{s=j\omega_g^*} + 180 \text{ deg} = \langle 2.844 \frac{4}{s(s+2)} \rangle_{s=j3.09} + 180 = 32.9 \text{ deg}$$

L'avance de phase requise est :

$$\Delta\phi = PM^* - PM = 52.0 - 32.9 = 19.1 \text{ deg}$$

Le compensateur devra contribuer une phase  $\Delta\phi = 19.37 \text{ deg}$  à la fréquence  $\omega_g^* = 3.09 \text{ rad/s}$ .

- (6) Le paramètre  $\alpha$  est calculé à partir du  $\Delta\phi$ :

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Delta\phi}{1 + \sin \Delta\phi} = \frac{1 - \sin 19.1}{1 + \sin 19.1} = 0.507$$

- (7) On veut avoir cette phase maximum à la fréquence de traverse en gain désirée  $\omega_g^*$ . Le paramètre  $T$  est:

$$T = \frac{1}{\omega_g^* \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{3.09 \sqrt{0.507}} = 0.454$$

(8) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:

- le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{1}{T} = -2.20$  (fréquence de coupure  $\frac{1}{T} = 2.20$  rad/s)
- le pôle du compensateur est à  $p = -\frac{1}{\alpha T} = -4.34$  (fréquence de coupure  $\frac{1}{\alpha T} = 4.34$  rad/s)

(9) Calculer le gain  $K_a$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur à la fréquence de traverse en gain.

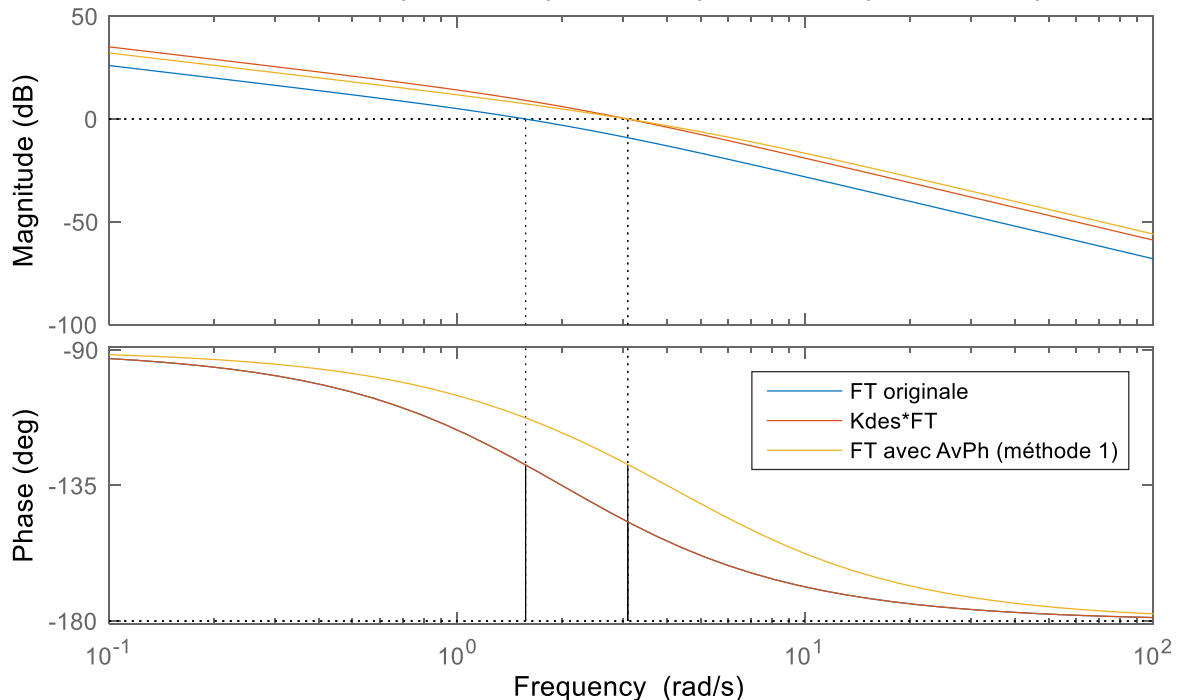
$$K_a = \frac{K^*}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2.844}{\sqrt{0.507}} = 3.99$$

(10) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences. Le compensateur devient:

$$G_a(s) = K_a \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} = 3.99 \frac{(s + 2.20)}{(s + 4.34)}$$

On peut voir toutes les étapes de la conception dans le diagramme suivant :

**FT, Kdes\*FT et FT compensée (Méthode 1): GM = Inf (w = Inf rad/s) et PM = 52 (w = 3.0902 rad/s)**



On remarque que la marge de gain est infinie parce que le tracé de la phase ne traverse pas  $-180$  deg. Il n'y a donc pas de fréquence de traverse en phase  $\omega_p$ . On voit aussi que la marge de phase désirée est atteinte. Il peut être vérifié sur MATLAB (avec **BWa = bandwidth(FTabf)**) que la bande passante en boucle fermée est de 5.0 rad/s, comme désiré.

- Il est recommandé de toujours utiliser cette forme de validation (1) faire le diagramme de Bode de la FTBO originale  $G(s)$ , (2) superposer le graphique de  $K^*G(s)$ , (3) superposer le graphique de  $G_a(s)G(s)$  (sur MATLAB avec **margin** de la FTBO compensée) pour vérifier  $PM^*$  et  $\omega_g^*$  et (4) vérifier la bande passante obtenue (sur MATLAB avec **bandwidth** de la FTBF compensée).



- Le code MATLAB suivant a été utilisé pour créer le graphique du diagramme de Bode et calculer la marge de retard et la bande passante BW :

```
figure
hold on
grid on
margin(FT)
margin(Kdes*FT)
margin(FTabo)

[GM, PM, wp, wg] = margin(FTabo);
title(['FT, Kdes*FT et FT compensée (Méthode 1): '...
'GM = ', num2str(GM), ' (w = ', num2str(wp), ' rad/s) et ', ...
'PM = ', num2str(PM), ' (w = ', num2str(wg), ' rad/s)'])

legend('FT originale','Kdes*FT','FT avec AvPh (méthode 1)')

disp(' ')
disp(['Marge de phase = ', num2str(PM), ' deg'])

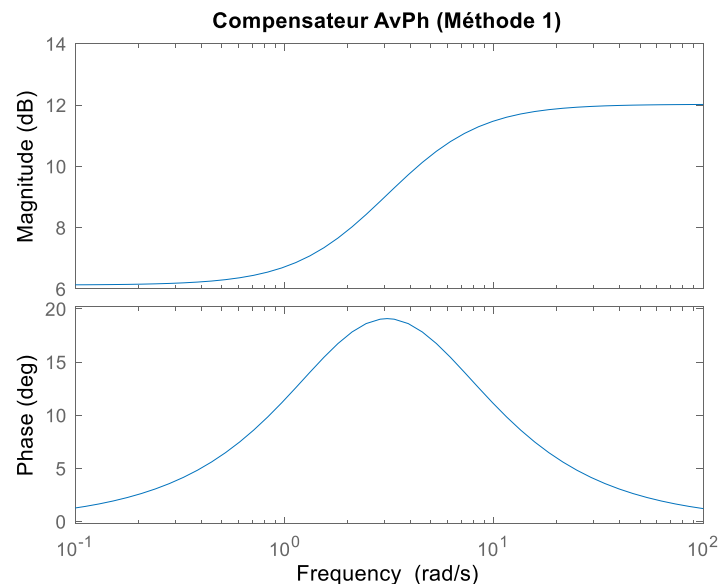
delay_AvPh = (PM*pi)/(wg*180);
disp(['Marge de retard = ', num2str(delay_AvPh), ' s'])

% Calcul de la bande passante

FTabf = feedback(FTabo,1);
Bwa = bandwidth(FTabf);
```

où **FT** est la fonction de transfert originale, **Kdes\*FT** la fonction de transfert originale amplifiée du  $K^*$ , **FTabo** la fonction de transfert originale avec compensateur **FTa** de l'AvPh ( $FTabo = FT*FTa$ ).

- Le compensateur AvPh a la réponse en fréquence suivante où on voit le maximum de phase de 19.1 deg à la fréquence 3.09 rad/s:



- L'amplification aux basses fréquences est  $K_a \alpha = 2.02 = 6.1$  dB, l'amplification aux basses fréquences est  $K_a = 3.99 = 12$  dB et le gain à la fréquence  $\phi_m$  est  $K_a \sqrt{\alpha} = 2.84 = 9.07$  dB.

#### 7.5.4 Conception de l'AvPh simple et double par le diagramme de Bode (Méthode 2)

La Méthode 2 est utilisée quand les performances demandées sont exprimées en termes de marge de phase et d'erreur en régime permanent. On tente de régler le régime transitoire et le régime permanent en même temps, sans considération de la BW ou de la fréquence de traverse  $\omega_g^*$  et donc, de la vitesse de réponse.

- Il a été mentionné (à la Section 7.3) que l'utilisation du diagramme de Bode pour la conception de compensateurs peut se faire (1) avec deux compensateurs, un AvPh pour régler le régime transitoire et un RePh en cascade pour régler le régime permanent ou (2) un seul compensateur qui fait les deux en même temps. L'approche (2) est appelée la Méthode 2 et est présentée dans cette section.
- Les principes de base et les étapes sont très semblables à la Méthode 1. La seule exception est le fait qu'avec la Méthode 1, on utilise le gain  $K^*$  pour viser une fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  alors qu'avec la Méthode 2, on utilise le gain  $K^*$  pour viser un gain d'erreur statique ( $K_{pos}, K_{vel}, K_{acc}$ ) aux basses fréquences pour rencontrer le critère de l'erreur en régime permanent.

##### • Procédure de conception d'un compensateur AvPh avec le diagramme de Bode (Méthode 2)

Cette méthode est utilisée quand les performances sont exprimées en termes de marge de phase  $PM^*$  et d'erreur en régime permanent  $e_{RP}^*$ . On règle le régime transitoire et le régime permanent dans un seul compensateur. Par contre, la bande passante (BW) ou ses équivalents ( $\omega_n$  et  $\omega_g$ ) ne sont pas contraintes.

- (1) Exprimer les spécifications en termes de  $PM^*$  (si pas déjà sous cette forme, utiliser les équations de la Section 7.1.3) et de gain d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$  selon la classe.
- (2) Dessiner le diagramme de Bode avant compensation à partir de la FTBO et son gain intrinsèque. Calculer aussi l'erreur en régime permanent actuelle. Déterminer si les performances sont déjà atteintes ou dépassées. Sinon, déterminer si un ajustement du gain peut à lui seul donner une performance équivalente ou meilleure que celle désirée.
- (3) Sinon, il faut modifier le diagramme de Bode. Utiliser un compensateur AvPh (où  $0 < \alpha < 1$ ):

$$G_a(s) = K_a \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T}\right)} = K_a \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} = K G'_a(s) \text{ où } G'_a(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \text{ et } K = K_a \alpha.$$

À partir l'exigence de performance sur l'erreur en régime permanent traduite en coefficient d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{pos}^*}{K_{pos}}, \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}, \frac{K_{acc}^*}{K_{acc}} \quad \text{selon la classe}$$

où  $K_{pos}, K_{vel}, K_{acc}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale (selon sa classe).

Sachant qu'aux basses fréquences, le gain d'un AvPh est donné par :

$$K^* = K_a \alpha$$

où  $K^*$  est maintenant connu, on obtient déjà une relation entre deux paramètres du compensateur.

- (4) Dessiner le diagramme de Bode de la FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$  calculé à l'étape précédente, i.e. faire le tracé de Bode de  $K^*G(s)$ . Le tracé de l'amplitude aux basses fréquences devrait donner le gain d'erreur statique désiré. Déterminer si, après cet ajustement du gain, la  $PM^*$  est satisfaite.
- (5) Sinon, il faut modifier (*compenser*) le diagramme de Bode. Calculer la marge de phase du système non compensé  $K^*G(s)$  à la fréquence de traverse obtenue dénotée  $\omega'_g$ . Ce ne sera pas la fréquence de traverse finale. Déterminer à  $\omega'_g$  la phase  $\Delta\phi$  qui manque pour obtenir la marge de phase désirée.

$$PM = \langle K^*G(s) \rangle_{s=j\omega'_g} + 180 \text{ deg}$$

L'avance de phase que le compensateur devra contribuer est:

$$\Delta\phi = PM^* - PM + \Delta\phi_{mrg}$$

où  $\Delta\phi_{mrg}$  est une correction qui tient compte du déplacement de la fréquence de traverse de  $\omega'_g$  à  $\omega_g^*$  tel qu'expliqué plus loin. Typiquement, on commence avec  $\Delta\phi_{mrg} = 5 \text{ deg}$  et on l'augmente par itérations jusqu'à ce que la  $PM^*$  soit atteinte.

- (6) Un compensateur avance de phase  $G_a(s)$  contribue une phase maximum  $\phi_m$  à une fréquence  $\omega_m$  données par:

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

où  $\alpha$  et  $T$  sont les paramètres du compensateur. On fait coïncider l'avance de phase maximum  $\phi_m$  de l'AvPh à l'avance de phase requise par les spécifications :  $\phi_m = \Delta\phi = PM^* - PM + \Delta\phi_{mrg}$ . On peut ainsi calculer le paramètre  $\alpha$  à partir du  $\Delta\phi$  déjà calculé:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Delta\phi}{1 + \sin \Delta\phi}$$

- (7) Déterminer la fréquence de traverse désirée  $\omega_g^*$  du système compensé (voir ci-dessous **Calcul de la fréquence de traverse du système compensé**):
- localiser la fréquence où le tracé de l'amplitude du système non-compensé  $K^*G(s)$  coupe la ligne horizontale à  $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$
  - cette fréquence correspond à celle où le maximum de phase  $\phi_m = \Delta\phi = PM^* - PM + \Delta\phi_{mrg}$  sera ajoutée au système, ce qui donne la valeur numérique de  $\omega_m = \omega_g^*$
  - le paramètre  $T$  peut donc ainsi être calculé:

$$T = \frac{1}{\omega_g^* \sqrt{\alpha}}$$

- (8) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:
- le zéro du compensateur est à  $z = -1/T$  (fréquence de coupure  $1/T$ )
  - le pôle du compensateur est à  $p = -1/(\alpha T)$  (fréquence de coupure  $1/(\alpha T)$ )

- (9) Calculer le gain  $K_a$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur. On inverse l'équation obtenue à l'étape (3) ci-dessus :

$$K_a = \frac{K^*}{\alpha}$$

- (10) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

• **Calcul de la fréquence de traverse du système compensé**

- La fréquence de traverse du système compensé, i.e. la fréquence quand  $|G_a(s)G(s)| = 1$ , est celle où la marge de phase est calculée. Cette fréquence détermine le point où l'avance de phase doit être ajoutée. Contrairement à la Méthode 1 où le gain  $K^*$  visait justement à atteindre la fréquence de traverse désirée, dans la Méthode 2, le gain  $K^*$  vise à atteindre un gain aux basses fréquences. Le gain du compensateur à la fréquence de traverse n'est donc plus égal à 1. Une fois le compensateur ajouté en cascade, ce gain non unitaire va déplacer la fréquence de traverse en gain qui était à  $\omega_g'$  après l'ajout du gain  $K^*$ . Il faut donc tenir compte du gain du compensateur  $|G_a(s)|$  dans le calcul de cette fréquence de traverse.

- On veut trouver la fréquence  $\omega_g^*$  où :

$$|G_a(s)G(s)|_{s=j\omega_g^*} = \left| K_a \alpha \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} G(s) \right|_{s=j\omega_g^*} = \left| K^* \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} G(s) \right|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

où on a utilisé  $K^* = K_a \alpha$  de l'étape (3), ce qui devient:

$$|K^* G(s)|_{s=j\omega_g^*} \left| \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \right|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

- Vu que la fréquence de traverse en gain est choisie pour être :

$$\omega_g^* = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

il est facile de calculer le facteur  $\left| \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \right|_{s=j\omega_g^*}$  de l'équation ci-dessus :

$$\left| \frac{(1+Ts)}{(1+\alpha Ts)} \right|_{s=j\omega_g^*} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

- Le compensateur va donc amplifier la réponse en amplitude d'un gain  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  (NB :  $0 < \alpha < 1$ ).
- La fréquence de traverse désirée  $\omega_g^*$  doit donc répondre à la condition :

$$|K^* G(s)|_{s=j\omega_g^*} = \sqrt{\alpha}$$

- On cherche donc sur le diagramme de Bode la fréquence où le tracé de  $|K^* G(s)|$  coupe le gain de  $\sqrt{\alpha}$  où, plus habilement, on cherche sur le diagramme de Bode la fréquence où le tracé de  $|K^* G(s)|/\sqrt{\alpha}$  coupe le gain de 1.

- Sur MATLAB, on trouve donc la fréquence de traverse en gain désirée **wg\_des** avec :

$$[\text{dum1}, \text{dum2}, \text{dum3}, \text{wg\_des}] = \text{margin}(\mathbf{Kdes} * \mathbf{FT} / \text{sqrt}(\alpha))$$

où **wg\_des** est  $\omega_g^*$ , **Kdes** est  $K^*$ , **alpha** est  $\alpha$  et **FT** est la fonction de transfert en boucle ouverte.

- À cause de l'augmentation du gain par un facteur  $1/\sqrt{\alpha}$ , la fréquence de traverse en gain se déplace vers les hautes fréquences, augmentant la bande passante et diminuant ainsi la marge de phase. C'est pourquoi il fallait prévoir une correction  $\Delta\phi_{mrg}$  dans la compensation pour pré-compenser cette diminution de la marge de phase.
- **Exemple 7.3 : Compensation par avance de phase par le diagramme de Bode (Méthode 2)**

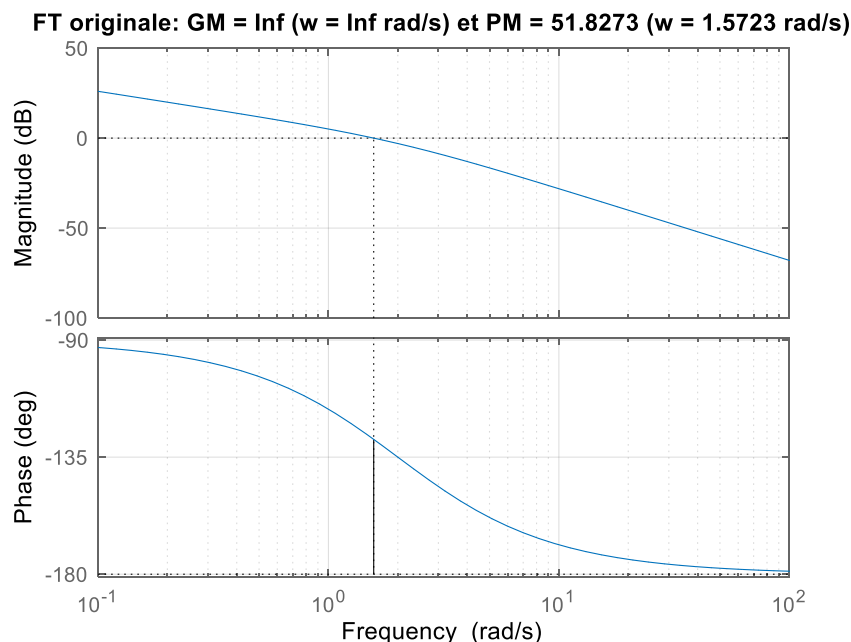
- ♦ La FTBO originale d'un système est :

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

- ♦ Les exigences de performance sont:

- Erreur à une entrée échelon unitaire de 0.05
- Marge de phase d'au moins 50 deg.

- (1) Exprimer les spécifications en termes de  $PM^*$  et de gain d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$  selon la classe. La  $PM^*$  est directement spécifiée à 50 deg. L'erreur en régime permanent pour une rampe se traduit en coefficient d'erreur statique en vitesse  $K_{vel}^* = \frac{1}{e_{RP}^*} = \frac{1}{0.05} = 20 \text{ s}^{-1}$ .
- (2) Dessiner le diagramme de Bode avant compensation à partir de la FTBO et son gain intrinsèque. Calculer aussi l'erreur en régime permanent actuelle. Déterminer si les performances sont déjà atteintes ou dépassées.



La marge de phase est atteinte. Cependant, le coefficient  $K_{vel}$  actuel est 2 et l'erreur en régime permanent à une rampe unitaire serait de 0.50, soit 10 fois trop. Il faut faire une compensation.

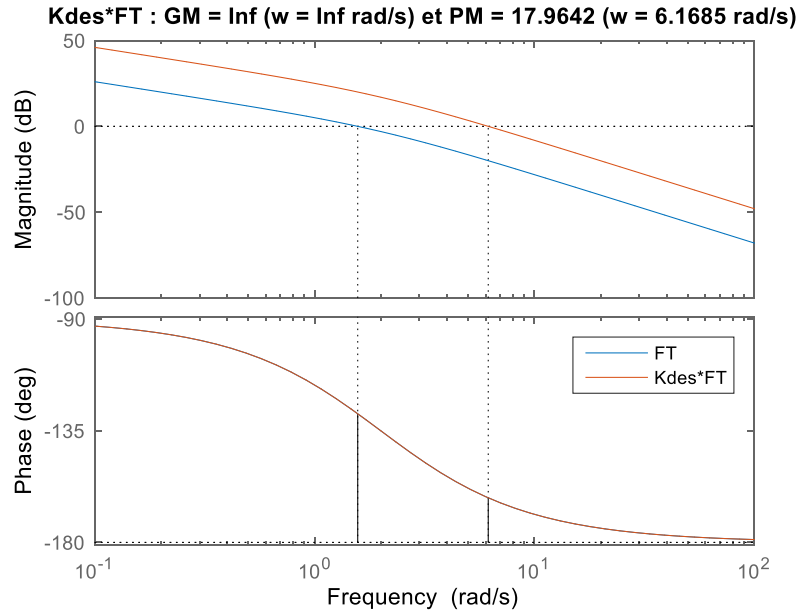
- (3) Calculer le gain du compensateur  $K^*$  aux basses fréquences pour satisfaire le  $K_{vel}^* = 20$ .

$$K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}} = \frac{20}{2} = 10$$

On obtient aussi la relation :

$$K^* = K_a \alpha = 10$$

- (4) Dessiner le diagramme de Bode de la FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$  i.e. faire le tracé de Bode de  $K^*G(s)$ .



En augmentant le gain d'un facteur  $K^*$ , la marge de phase est descendue à 18 deg. Il faut donc toujours faire une compensation. La fréquence de traverse en gain obtenue est  $\omega'_g = 6.17$  rad/s.

- (5) Déterminer à  $\omega'_g$  la phase  $\Delta\phi$  qui manque pour obtenir la marge de phase désirée.

$$PM = \langle K^*G(s) \rangle_{s=j\omega'_g} + 180 = \left\langle 10 \frac{4}{s(s+2)} \right\rangle_{s=j6.17} + 180 = -162 + 180 = 18 \text{ deg}$$

L'avance de phase que le compensateur devra contribuer est:

$$\Delta\phi = PM^* - PM + \Delta\phi_{mrg} = 50 - 18 + 5 = 37 \text{ deg}$$

où  $\Delta\phi_{mrg} = 5$  deg est la correction qui tient compte du déplacement de la fréquence de traverse. Des itérations peuvent être requises pour ajuster cette marge de façon à atteindre la  $PM^*$ .

- (6) Calculer le paramètre  $\alpha$  à partir du  $\Delta\phi$  déjà calculé :

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Delta\phi}{1 + \sin \Delta\phi} = \frac{1 - \sin 37}{1 + \sin 37} = 0.248$$

- (7) Déterminer la fréquence de traverse désirée  $\omega_g^*$  du système compensé : localiser la fréquence où le tracé de  $|K^*G(s)|$  coupe le gain de  $\sqrt{\alpha}$  i.e. où le tracé de  $|K^*G(s)|/\sqrt{\alpha}$  coupe le gain de 1. On trouve

$\omega_g^* = 8.85 \text{ rad/s}$ . C'est à cette fréquence que le maximum de phase est ajouté :  $\omega_m = \omega_g^*$ . Le paramètre  $T$  peut donc ainsi être calculé:

$$T = \frac{1}{\omega_g^* \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{8.85 \sqrt{0.248}} = 0.227$$

(8) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:

- le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{1}{T} = -4.41$  (fréquence de coupure  $\frac{1}{T} = 4.41 \text{ rad/s}$ )
- le pôle du compensateur est à  $p = -\frac{1}{\alpha T} = -17.76$  (fréquence de coupure  $\frac{1}{\alpha T} = 17.76 \text{ rad/s}$ )

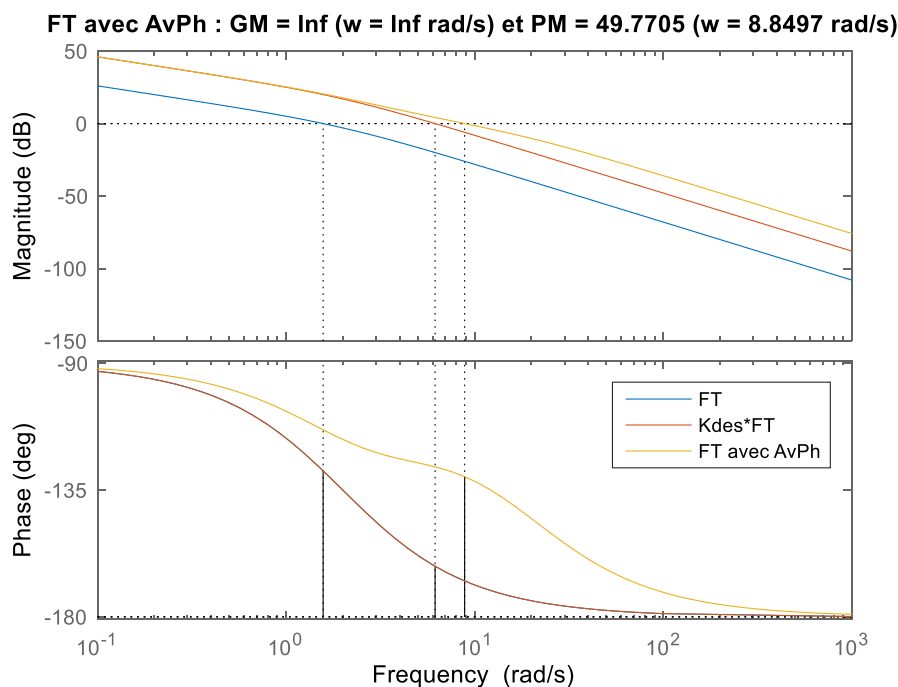
(9) Calculer le gain  $K_a$  du compensateur:

$$K_a = \frac{K^*}{\alpha} = \frac{10}{0.248} = 40.3$$

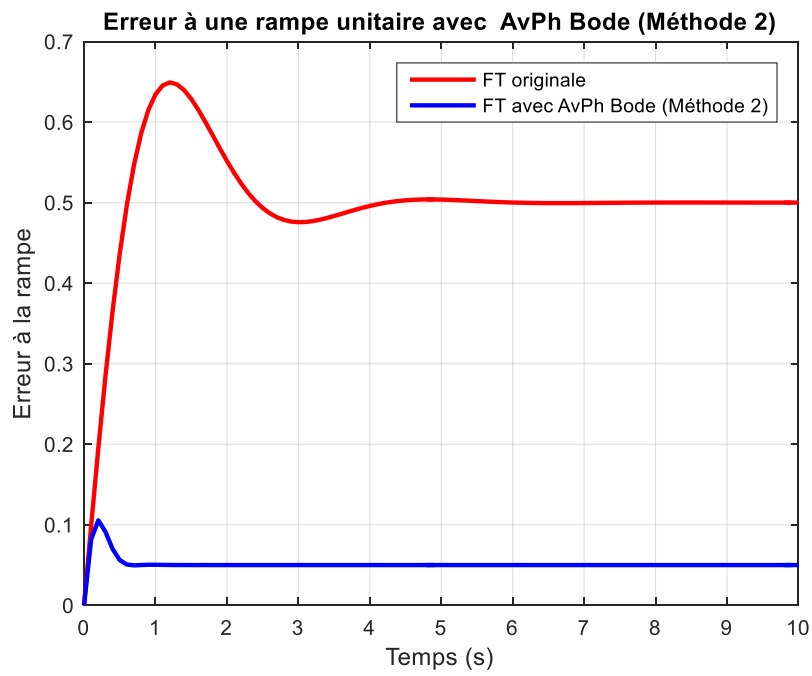
(10) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences. La FTBO du système compensé est:

$$G_a(s) = 40.3 \frac{(s + 4.41)}{(s + 17.76)} \frac{4}{s(s + 2)} = 10.0 \frac{(0.227s + 1)}{(0.056s + 1)} \frac{4}{s(s + 2)}$$

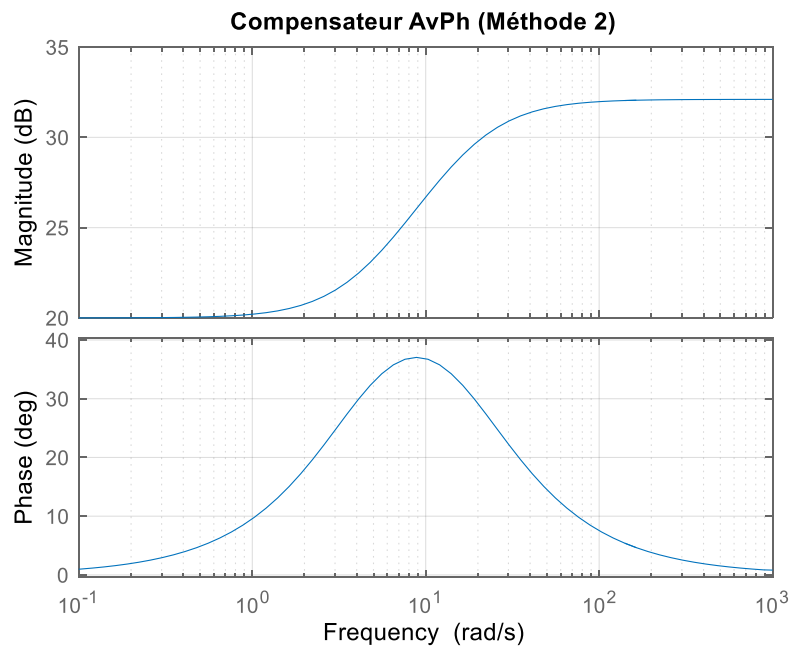
On voit dans la dernière équation ci-dessus que le gain du compensateur aux basses fréquences est de 10, comme requis. Les étapes de conception sont illustrées dans le diagramme de Bode ci-dessous. On voit que la marge de phase finale est de 49.77 deg. En faisant une autre itération avec  $\Delta\phi_{mrg} = 5.27 \text{ deg}$  plutôt que 5 deg, la spécification  $PM^* = 50 \text{ deg}$  est rencontrée.



L'erreur à une entrée rampe unitaire est illustrées ci-dessous. On voit que l'erreur en régime permanent a été diminuée d'un facteur 10, de 0.50 à 0.05 :



Le compensateur AvPh a la réponse en fréquence suivante où on voit le maximum de phase de 37 deg à la fréquence 8.85 rad/s:





- **Procédure de conception d'un double compensateur AvPh avec le diagramme de Bode (Méthode 2)**

- Comme annoncé à la fin de la section 7.5.2, il arrive parfois que l'avance de phase  $\Delta\phi$  requise dans une compensation soit trop élevée pour être fournie par un seul compensateur AvPh.
- D'ailleurs, il est facile de voir avec l'équation  $\alpha = \frac{1-\sin\Delta\phi}{1+\sin\Delta\phi}$  que l'avance de phase  $\Delta\phi$  requise ne doit pas dépasser 90 deg sinon le paramètre  $\alpha$  sera négatif alors que, par design, il doit être  $0 < \alpha < 1$ .
- De plus, comme on l'a vu précédemment pour la Méthode 2, il faut ajouter à la conception de l'AvPh une marge correctrice  $\Delta\phi_{mrg}$  pour pré-compenser la diminution de marge de phase causée par le gain du compensateur qui déplace la fréquence de traverse en gain vers les hautes fréquences. Cet ajout de marge  $\Delta\phi_{mrg}$  peut être très important dans certains cas causant un déplacement important de la fréquence de traverse en gain vers les hautes fréquences (augmentant la bande passante du système, et donc, sa consommation en énergie et les efforts demandés aux actionneurs).
- Le recours à un double compensateur évite cette escalade vers les autres fréquences et permet parfois de trouver une solution à un problème de conception là où un simple compensateur ne réussit pas.
- Le double compensateur a la forme :

$$G_a(s) = K_a \left( \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \right)^2$$

- Le calcul des paramètres  $\alpha$  et  $T$  se fait avec les mêmes principes que décrits précédemment avec les adaptations suivantes.
- Le paramètre  $\alpha$  est calculée pour une avance de phase de  $\Delta\phi/2$  au lieu de  $\Delta\phi$  dans  $\alpha = \frac{1-\sin\Delta\phi}{1+\sin\Delta\phi}$ .
- Vu que le compensateur va fournir un gain de  $K_a\alpha^2$  (au lieu de  $K_a\alpha$ ) aux basses fréquences, le calcul du gain  $K_a$  est donné par :

$$K_a = \frac{K^*}{\alpha^2}$$

- Le compensateur va aussi amplifier le gain à la fréquence de traverse d'un facteur  $1/\alpha$  (au lieu de  $1/\sqrt{\alpha}$ ). La fréquence de traverse désirée  $\omega_g^*$  doit donc répondre à la condition :

$$|K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*} = \alpha$$

- Sur MATLAB, on trouve donc la fréquence de traverse en gain désirée **wg\_des** avec :

$$[\text{dum1}, \text{dum2}, \text{dum3}, \text{wg\_des}] = \text{margin}(\text{Kdes} * \text{FT} / \alpha)$$

**wg\_des** est  $\omega_g^*$ , **Kdes** est  $K^*$ , **alpha** est  $\alpha$  et **FT** est la fonction de transfert en boucle ouverte.

## 7.6 Conception d'un compensateur retard de phase

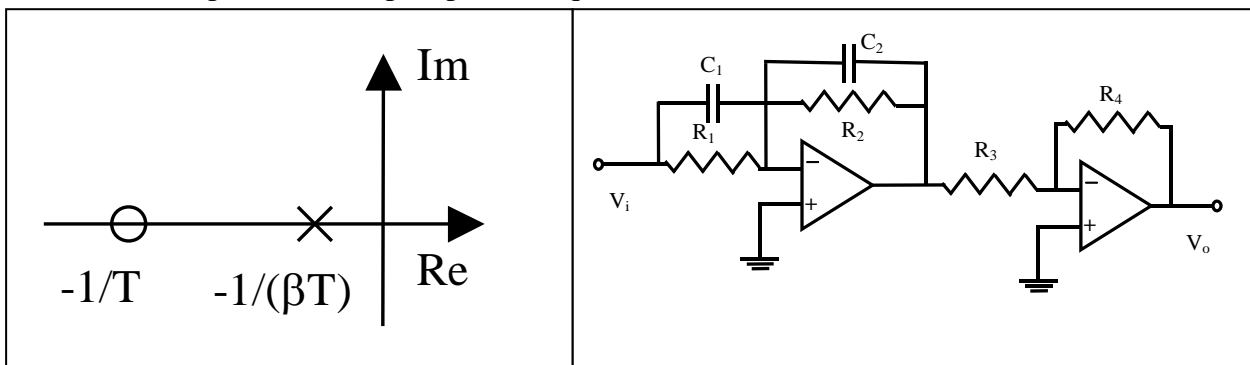
### 7.6.1 Description du compensateur retard-de-phase (RePh)

- Un compensateur à retard de phase (RePh) est utilisé pour:
  - améliorer la réponse en régime permanent d'un système par l'augmentation du gain statique (augmentation du  $K_{pos}^*$ ,  $K_{vel}^*$ ,  $K_{acc}^*$ ) sans modifier appréciablement le tracé du lieu des racines ou la phase du système pour éviter de modifier la réponse transitoire du système (supposée satisfaisante).
- Le compensateur à retard de phase est un filtre passe-bas qui réduit légèrement la phase de la fonction de transfert du trajet direct (idéalement  $< 5^\circ$ ) sur une certaine plage de fréquence. La réponse aux basses fréquences est amplifiée de façon à mettre plus de poids sur les erreurs constantes i.e. en régime permanent pour mieux les annuler.
- Les deux formes habituelles de la fonction de transfert d'un correcteur RePh sont les suivantes

$$G_r(s) = K_r \frac{(s-z)}{(s-p)} \quad |p| < |z|$$

$$G_r(s) = K_r \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = K_r \beta \frac{(1+sT)}{(1+\beta Ts)} \quad \beta > 1$$

- La forme  $K_r \left(\frac{s-z}{s-p}\right)$  suppose que le zéro  $z$  et le pôle  $p$  sont des paramètres intrinsèquement négatifs.
- Dans le cas d'un RePh, le pôle est toujours à droite du zéro et par conséquent  $|p| < |z|$ . Dans la forme avec  $\beta$  et  $T$ , le fait que  $\beta > 1$  assure que le module du pôle soit plus petit que le module du zéro. Le pôle qui est à  $p = -\frac{1}{\beta T}$  est donc **à droite** du zéro à  $z = -\frac{1}{T}$ . Cela crée un système passe-bas.
- La réalisation par circuit ampli-op est indiquée ci-dessous où  $R_1 C_1 < R_2 C_2$

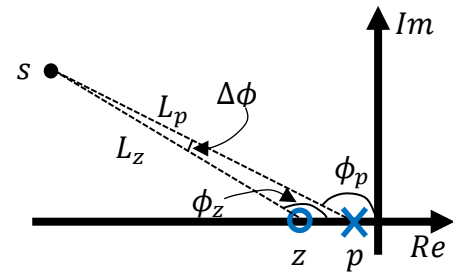


- Conceptuellement, le compensateur RePh peut être interprété comme suit:
  - le compensateur passe-bas amplifie les basses fréquences, donc tout ce qui varie peu ou pas donc les erreurs constantes en régime permanent;
  - en commandant une action inverse aux erreurs constantes, le compensateur lutte contre ces erreurs.
- Dans le RePh, le pôle et le zéro sont près l'un de l'autre et près de zéro. Ainsi, la phase du système (et donc son régime transitoire) sera peu affectée mais le gain statique sera augmenté du facteur  $\beta$  où  $\beta > 1$ .

## Effet du RePh sur le lieu des racines

- L'effet du RePh est analysé en fonction de la variation de phase et d'amplitude que sa fonction de transfert  $K_r \left( \frac{s-z}{s-p} \right)$  cause sur le lieu des racines.
- Il a été démontré à la Section 7.5.1 que la phase contribué par un tel compensateur à un point  $s$  est:

$$\angle K_r \left( \frac{s-z}{s-p} \right) = \phi_z - \phi_p < 0$$



- La contribution en phase d'un RePh est donc  $\phi_z - \phi_p$  et cette contribution est toujours négative vu que, pour un RePh, le pôle est à droite du zéro et, selon le croquis ci-dessus, on a toujours que  $\phi_z < \phi_p$ . C'est l'inconvénient d'un RePh. Cependant, si le pôle et le zéro sont très près l'un de l'autre, tel que vus de la position  $s$ , la perte de phase  $\Delta\phi = \phi_z - \phi_p$  sera petite.
- L'amplitude du RePh à  $s$  est :

$$\left| K_r \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \right| = \frac{K_r L_z}{L_p}$$

où les longueurs  $L_z$  et  $L_p$  sont les distances entre le point  $s$  et, respectivement, le zéro et le pôle.

- Aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ), l'amplitude est  $\frac{K_r(-z)}{(-p)} = K_r \beta$  où  $\left| \frac{z}{p} \right| = \beta > 1$ . C'est l'avantage du RePh : il amplifie aux basses fréquences pour augmenter le gain d'erreur statique et réduire l'erreur en régime permanent. Le prix à payer est une légère perte de phase.
- Cette perte de phase quand l'ajout d'un RePh est prévue peut être anticipée lors de la conception de l'AvPh en surcompensant l'avance de phase.
- La version simple du RePh utilise le gain  $K_r = 1$  et le rapport pôle-zéro  $\left| \frac{z}{p} \right| = \beta$  fournit entièrement l'amplification des basses fréquences pour rencontrer les spécifications d'erreur en régime permanent :

$$G_r(s) = \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \quad \text{RePh version simple}$$

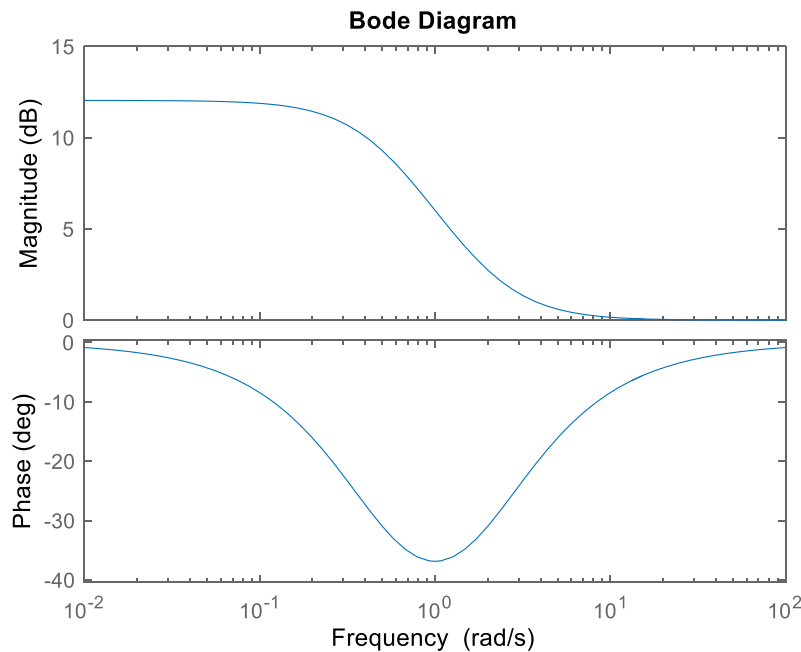
- Dans la version générale du RePh, le gain  $K_r$  est utilisé comme degré de liberté additionnel pour rencontrer d'autres spécifications, selon différents cas à être présentés plus loin :

$$G_r(s) = K_r \left( \frac{s-z}{s-p} \right) \quad \text{RePh version générale}$$

## Effet du RePh sur le diagramme de Bode

- La forme  $K_r \beta \frac{(1+sT)}{(1+\beta Ts)}$  permet de voir l'amplification aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ) :  $K_r \beta$
- La forme  $K_r \frac{(s+1/T)}{(s+1/(\beta T))}$  permet de voir l'amplification aux hautes fréquences ( $s \rightarrow \infty$ ) :  $K_r$
- Les basses fréquences sont donc amplifiées d'un facteur  $\beta$  par rapport aux hautes fréquences.
- Comme exemple, supposons un RePh avec  $T = 0.5$ ,  $\beta = 4.0$  et  $K_r = 1.0$ , ce qui donne un pôle à  $p = -1/(\beta T) = -0.5$  et un zéro à  $z = -1/T = -2.0$ , on obtient la réponse en fréquence suivante :

**Kr = 1.0; z=-2.0; p = -0.5; FT = tf(Kr\*[1 -z],[1 -p]); bode(FT)**



- L'amplification aux basses fréquences est  $K_r \beta = (1)(4) = 4 = 12$  dB.
- L'amplification aux hautes fréquences est  $K_r = (1) = 0$  dB.
- On y voit donc la nature passe-bas du RePh où les valeurs constantes (DC) sont amplifiées pour mieux les annuler avec une rétroaction négative.
- On voit aussi que la phase du compensateur RePh atteint un minimum entre les fréquences de coupure du numérateur ( $1/T$ ) et du dénominateur  $1/(\beta T)$ . Cette perte de phase est l'élément négatif du RePh. Dans sa conception, on s'assurera que la fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  du système soit dans les hautes fréquences par rapport au RePh pour éviter d'affecter la marge de phase. Une règle du pouce est de séparer le zéro du RePh à  $(1/T)$  d'un facteur 10 par rapport à  $\omega_g$ .
- L'avantage du RePh est donc dans le fait qu'il amplifie les basses fréquences pour réduire l'erreur en régime permanent.

## 7.6.2 Conception du RePh par le lieu des racines

- Le but du compensateur à retard de phase est d'accroître le gain statique du système (aux basses fréquences) tout en gardant le pôle et le zéro près l'un de l'autre et les deux près de l'origine. De cette façon, le lieu des racines des pôles dominants n'est pas trop modifié, la perte de phase est minimisée et la réponse en régime transitoire est maintenue.
- Comme mentionné à la Section 7.3, on suppose ici que les spécifications sur le régime transitoire ont déjà été rencontrées, soit que la FTBO originale les rencontrait déjà, soit qu'un AvPh a déjà été conçu et placé en cascade avec la FTBO originale. Dans les deux cas, il est supposé qu'on ne veut pas trop détruire le travail déjà fait.
- Dans le cas où un AvPh a déjà été mis en cascade, il faut faire le design du RePh considérant l'AvPh déjà ajouté : on fait le design du RePh en partant de  $G_a(s)G(s)$ .

### • Procédure de conception d'un compensateur RePh par le lieu des racines

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer le coefficient d'erreur en régime permanent désiré :  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , selon la classe du système.
- (2) À partir de l'exigence de performance sur l'erreur en régime permanent traduite en coefficient d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{pos}^*}{K_{pos}}, \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}, \frac{K_{acc}^*}{K_{acc}} \quad \text{selon la classe}$$

où  $K_{pos}, K_{vel}, K_{acc}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale (selon sa classe).

- (3) Dessiner le lieu des racines avant compensation à partir de la FTBO  $G(s)$ . Rappel que  $G(s)$  peut contenir la FTBO originale et un AvPh en cascade. Localiser les pôles désirés en boucle fermée  $s^*$ .
- (4) Utiliser un compensateur à retard de phase :

$$G_r(s) = K_r \frac{(s-z)}{(s-p)} \quad |p| < |z|$$

La FTBO compensée devient  $G_c(s)G(s)$ . Comme règle du pouce, placer le zéro du RePh à un facteur 10 de la partie réelle des pôles désirés (normalement obtenus avec un AvPh) :

$$z = \frac{\text{Re}(s^*)}{10}$$

Cela assure une séparation entre la paire pôle-zéro et les pôles désirés. Cela a pour conséquence que la perte de phase  $\Delta\phi$  causée par le RePh soit négligeable.

- (5) Déterminer la position relative du pôle  $p$  pour obtenir l'amplification désirée  $K^*$  aux basses fréquences, calculée à l'étape (2). Cette amplification a été calculée plus tôt :  $K_r\beta = K_r \left| \frac{z}{p} \right|$ . Dans la conception du RePh simple, on utilise  $K_r = 1$  (pour ne pas amplifier les hautes fréquences) et

l'amplification aux basses fréquences devient  $\beta = \left| \frac{z}{p} \right|$  qui doit être égale à  $K^*$  selon l'étape (2). La valeur du pôle est donc calculée ainsi :

$$p = \frac{z}{\beta} = \frac{z}{K^*}$$

- (6) En ajoutant le compensateur RePh, le lieu des racines original sera légèrement modifié. Dans certaines références, le gain  $K_r$  est calculé avec la condition d'amplitude pour que la position des pôles désirés soit réajustée suite à ce changement :

$$|G_r(s^*)G(s^*)| = \left| K_r \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right) G(s^*) \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_r = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right) G(s^*) \right|}$$

Vu que le lieu des racines est peu modifié, ce calcul donnera normalement  $K_r \approx 1$ . C'est pourquoi ce calcul est souvent omis.

- (7) Redessiner le lieu des racines avec le système compensé. Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

- **Note sur la règle du pouce (facteur 10)**

- Le facteur 10 dans le calcul du zéro  $z = \frac{\text{Re}(s^*)}{10}$  est un paramètre de réglage fin. Si ce facteur est diminué (par exemple  $z = \frac{\text{Re}(s^*)}{2}$ ), le temps pour atteindre la nouvelle erreur en régime permanent sera plus rapide. Cependant, la perte de phase sera plus grande et le régime transitoire sera plus détérioré qu'avec le facteur 10 (plus d'oscillations). Si ce facteur est augmenté (par exemple  $z = \frac{\text{Re}(s^*)}{20}$ ), le temps pour atteindre la nouvelle erreur en régime permanent sera plus lent. Cependant, la perte de phase sera plus petite et le régime transitoire sera moins détérioré qu'avec le facteur 10. Le comportement sera plus semblable à la réponse sans le RePh.

- **Exemple 7.4: Amélioration de la performance en régime permanent de l'exemple 7.1**

- ♦ Exigence additionnelle de performance :

- Rendre l'erreur en régime  $e_{RP} = 0.05$  pour une entrée rampe unitaire.

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer le coefficient d'erreur en régime permanent désiré  $K_{vel}^*$ . On obtient  $K_{vel}^* = \frac{1}{e_{RP}} = \frac{1}{0.05} = 20$ .
- (2) À partir du coefficient d'erreur statique désiré  $K_{vel}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}$$

où  $K_{vel}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale. À la fin de l'exemple 7.1, la fonction de transfert compensée avec l'AvPh était :

$$G_a(s)G(s) = 4.731 \frac{(s + 2.928)}{(s + 5.464)} \frac{4}{s(s + 2)}$$

et le  $K_{vel}$  est donc égal à  $K_{vel} = 4.731 \frac{2.928}{5.464} \frac{4}{2} = 5.07$ . On a donc :

$$K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}} = \frac{20}{5.07} = 3.94$$

- (3) Localiser les pôles désirés en boucle fermée  $s^*$ . Les pôles désirés étaient à  $-2.0 \pm j2\sqrt{3}$ .
- (4) Utiliser un compensateur à retard de phase :

$$G_r(s) = K_r \frac{(s - z)}{(s - p)} \quad |p| < |z|$$

Comme règle du pouce, placer le zéro du RePh à un facteur 10 de la partie réelle des pôles désirés:

$$z = \frac{\text{Re}(s^*)}{10} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

- (5) Déterminer la position relative du pôle  $p$  pour obtenir l'amplification désirée  $K^*$  aux basses fréquences, calculée à l'étape (2) :

$$p = \frac{z}{\beta} = \frac{z}{K^*} = \frac{-0.2}{3.94} = -0.0507$$

- (6) Dans certaines références, le gain  $K_r$  est calculé avec la condition d'amplitude pour que la position des pôles désirés soit réajustée suite à ce changement :

$$K_r = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^* - p} \right) G(s^*) \right|} = 1.0182$$

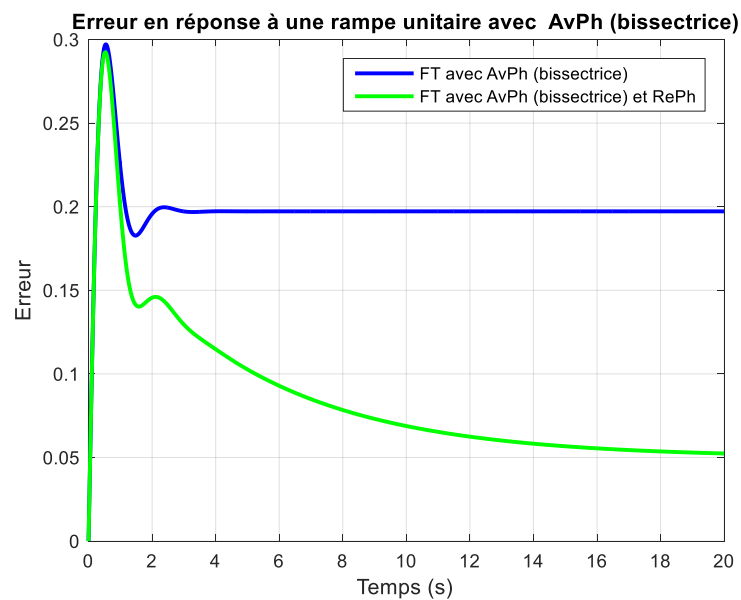
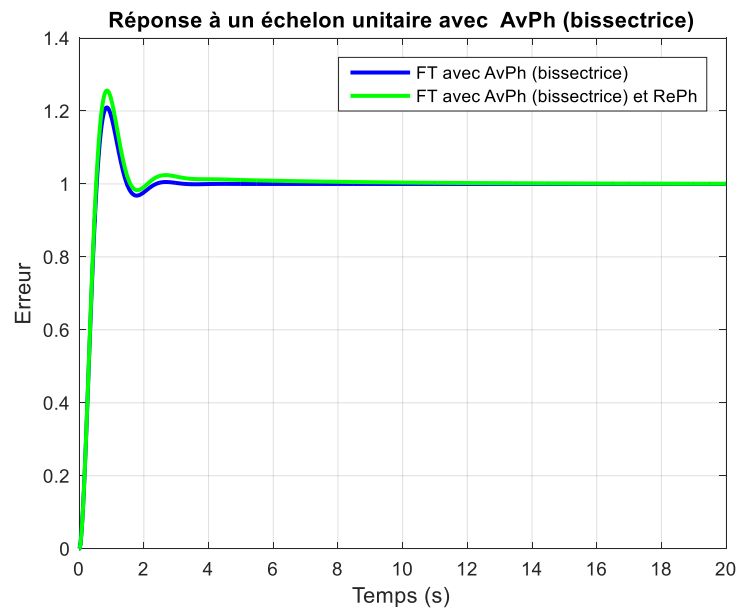
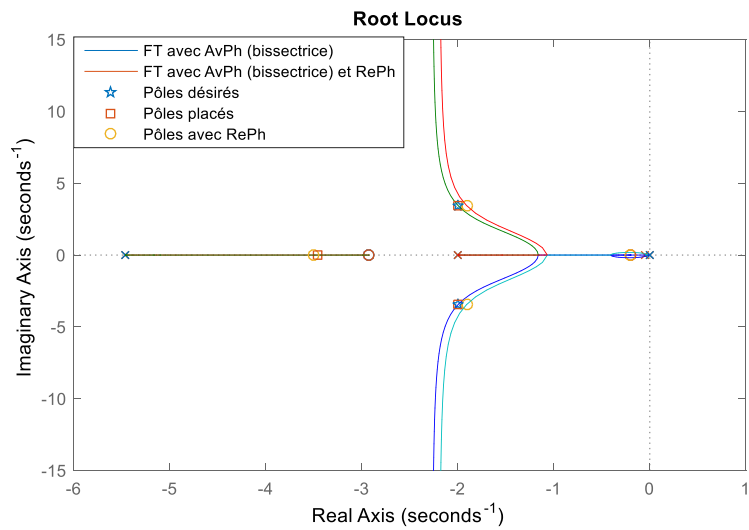
Vu que le lieu des racines est peu modifié, ce calcul donnera normalement  $K_r \approx 1$ . C'est pourquoi ce calcul est souvent omis et  $K_r = 1$  est utilisé ici.

- (7) Redessiner le lieu des racines avec le système compensé. Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

Le lieu des racines avec le RePh est illustré. Le lieu avant le RePh est aussi montré pour voir le changement (le code de couleur de MATLAB n'est pas toujours clair avec **rl locus**).

La réponse à une entrée échelon unitaire avant et après l'ajout du RePh est illustrée sur le graphique suivant. On voit que la réponse transitoire est peu affectée.

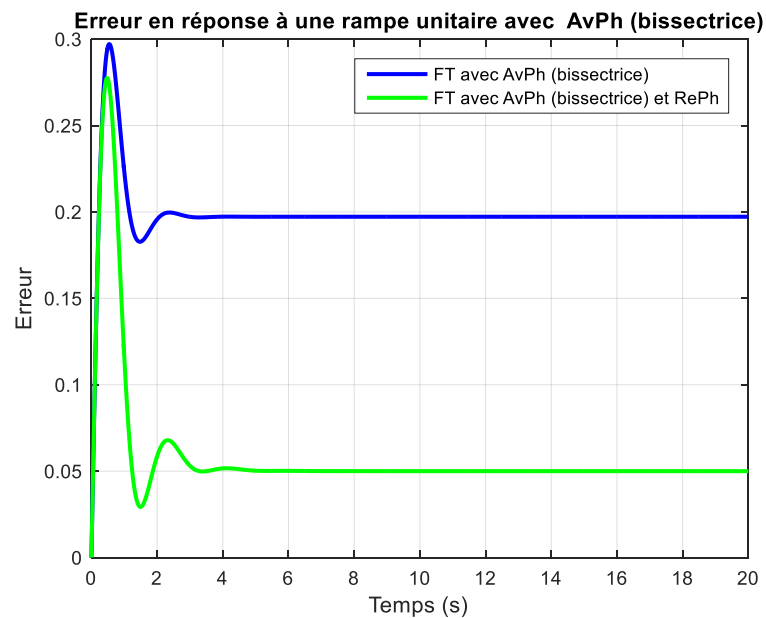
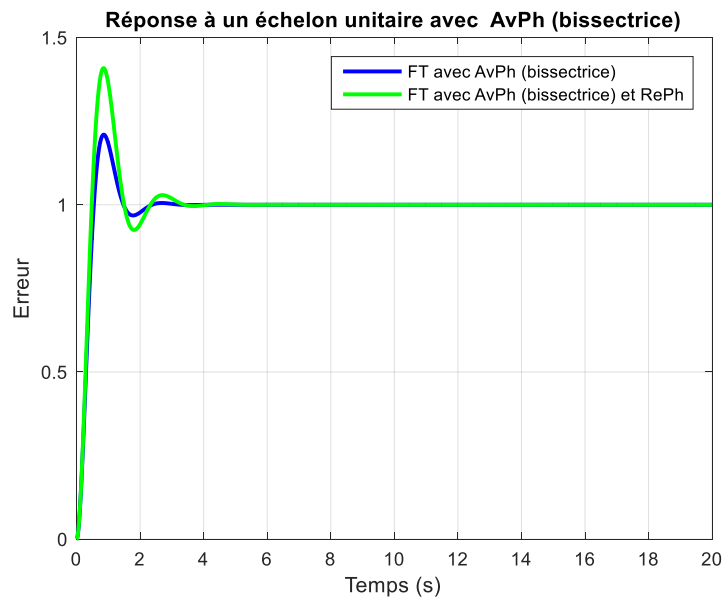
L'erreur en régime permanent pour une entrée rampe unitaire est aussi illustrée au graphique suivant avec le facteur 10 comme règle du pouce.





La réponse à une entrée échelon unitaire avant et après l'ajout du RePh est illustrée sur le graphique suivant avec le facteur de 2 comme règle du pouce. La réponse transitoire est plus affectée.

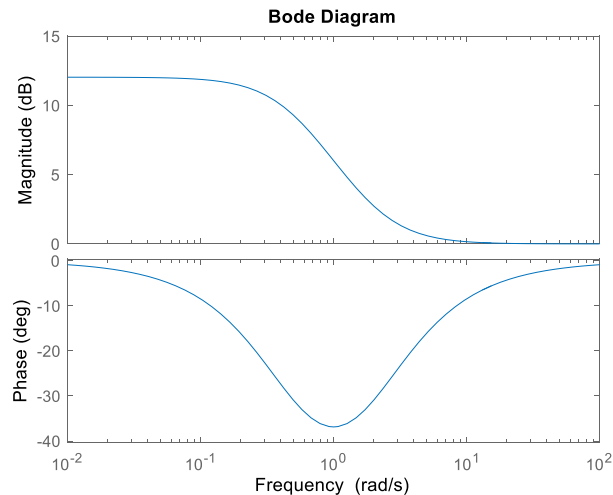
L'erreur en régime permanent pour une entrée rampe unitaire est aussi illustrée au graphique suivant avec le facteur 2 comme règle du pouce. Le régime permanent est atteint après environ 4 s alors que cela a pris environ 20 s avec le facteur 10.



### 7.6.3 Conception du RePh par le diagramme de Bode (Méthode 1)

La Méthode 1 est utilisée quand le régime transitoire d'un système a déjà été compensé avec un AvPh en utilisant la Méthode 1 (Section 7.5.3) ou quand le régime transitoire est déjà conforme aux spécifications. Le design vise à préserver la marge de phase PM et la fréquence de traverse en gain actuelles tout en amplifiant les basses fréquences pour réduire l'erreur en régime permanent.

- Le but du compensateur à retard de phase est d'accroître le gain statique du système aux basses fréquences tout en minimisant l'impact sur le système original dont les spécifications en régime transitoire ( $PM^*$ ,  $\omega_g^*$ ) sont déjà rencontrées.
- On suppose ici que les spécifications sur le régime transitoire sont rencontrées, soit que la FTBO originale les rencontrait déjà, soit qu'un AvPh a déjà été conçu avec la Méthode 1 et placé en cascade avec la FTBO originale. Dans les deux cas, il est supposé qu'on ne veut pas trop détruire le travail déjà fait.
- Dans le cas d'un AvPh déjà en cascade, il faut faire le design du RePh considérant l'AvPh déjà ajouté : on fait le design du RePh en partant de  $G_a(s)G(s)$ .
- En reprenant la réponse en fréquence du RePh :



la conception vise deux objectifs :

- le gain aux basses fréquences doit correspondre à l'amplification requise pour rencontrer l'erreur en régime permanent spécifiée
  - la fréquence de coupure du zéro i.e.  $\frac{1}{T}$  doit être assez éloignée (vers les basses fréquences) de la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  obtenue avec l'AvPh (ou obtenue au départ) pour éviter la perte de marge de phase à  $\omega_g^*$ ; la règle du pouce est d'assurer un facteur de 10 entre les deux, ce qui réduit typiquement la perte de phase à 5 deg ou moins (ce 5 deg est habituellement pris en compte dans la conception de l'AvPh par surcompensation).
- Pour ce faire, un rappel des caractéristiques du diagramme de Bode (Section 7.6.1) est utile:
    - L'amplification aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ) est  $K_r\beta$ . Ce gain, appelé  $K^*$  ici, correspondra donc à l'amplification requise pour rencontrer l'erreur en régime permanent spécifiée :  $K^* = K_r\beta$ .
    - Cependant, les hautes fréquences ne doivent pas être amplifiées puisque l'on veut maintenir la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  où la spécification de la  $PM^*$  est déjà rencontrée. Il faut donc atténuer l'amplification aux hautes fréquences et revenir à un gain de 0 dB à  $\omega_g^*$ .
    - Sachant que le gain du compensateur aux hautes fréquences ( $s \rightarrow \infty$ ) est  $K_r$ , on voit donc que les hautes fréquences seront atténuées d'un facteur  $\beta$  par rapport aux basses fréquences. Cette atténuation sera donc utilisée pour faire courber la réponse en amplitude vers un gain de 0 dB à  $\omega_g^*$ .

• **Procédure de conception d'un compensateur RePh par le diagramme de Bode (Méthode 1)**

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer le coefficient d'erreur en régime permanent désiré :  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , selon la classe du système.
- (2) À partir l'exigence de performance sur l'erreur en régime permanent traduite en coefficient d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{pos}^*}{K_{pos}}, \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}, \frac{K_{acc}^*}{K_{acc}} \quad \text{selon la classe}$$

où  $K_{pos}, K_{vel}, K_{acc}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale (selon sa classe).

- (3) Utiliser un compensateur à retard de phase (où  $\beta > 1$ ):

$$G_r(s) = K_r \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = K_r \beta \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} = K G'_r(s) \quad \text{où } G'_r(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} \text{ et } K = K_r \beta.$$

Sachant qu'aux basses fréquences, le gain d'un RePh est donné par  $K_r \beta$ , on a donc:

$$K^* = K_r \beta$$

où  $K^*$  est maintenant connu. On obtient déjà une relation entre deux paramètres du compensateur.

- (4) Dessiner le diagramme de Bode de la fonction FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$  calculé à l'étape précédente, i.e. faire le tracé de Bode de  $K^*G(s)$ . Le tracé de l'amplitude aux basses fréquences devrait donner le gain d'erreur statique désiré. Cependant, la fréquence de traverse originale  $\omega_g^*$  vient d'être déplacée à cause du gain  $K^*$  qui a amplifié le tracé d'amplitude sur toutes les fréquences. Il faut la récupérer : le gain du compensateur doit être tel que le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  doit revenir à 1 pour que la marge de phase y soit toujours égale à  $PM^*$ .
- (5) On sait que l'atténuation du compensateur RePh des basses fréquences vers les hautes fréquences est  $\beta$ . Donc, il faut atténuer le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  d'un facteur  $\beta$  pour qu'il revienne à 1 à cet endroit. On trouve le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  et ce gain est donc l'atténuation requise  $\beta$  :

$$\beta = |K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*}$$

Dans le cas où le design d'un AvPh a déjà été fait en amont pour rencontrer cette exigence, on sait déjà que :

$$|G(s)|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

et le gain  $K_p$  calculé avec la condition d'amplitude à  $\omega_g^*$  devient donc  $\beta = K^*$ .

- (6) Placer le zéro du compensateur, i.e. sa fréquence de coupure  $\omega = 1/T$ , une décade sous la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$ . Cela assurera une perte de phase maximum de 5 deg à  $\omega_g^*$ .

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_g^*}{10}$$

- (7) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:

- le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{1}{T} = -\frac{\omega_g^*}{10}$  (fréquence de coupure  $1/T$ )
- le pôle du compensateur est à  $p = -\frac{1}{\beta T}$  où  $\beta = K^*$  (fréquence de coupure  $1/(\beta T)$  )

- (8) Calculer le gain  $K_r$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur. On inverse l'équation obtenue à l'étape (3) ci-dessus :

$$K_r = K^*/\beta$$

et donc  $K_r = 1$  comme dans le cas du RePh simple avec le lieu des racines. Cependant, cette équation est basée sur la supposition que la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  est dans les « hautes fréquences » i.e.  $j\omega \rightarrow \infty$  et que le module de  $\left| \frac{(s-z)}{(s-p)} \right|$  tend vers l'unité. Ce n'est pas toujours exactement le cas. Donc, pour être plus exact, le gain  $K_r$  doit être calculé avec la condition d'amplitude à  $\omega_g^*$  :

$$K_r = \frac{K^*}{\beta \left| \frac{(s-z)}{(s-p)} \right|_{s=j\omega_g^*}}$$

Tout comme pour le lieu des racines, cela donne  $K_r \approx 1$  et on accepte  $K_r = 1$ . Dans ce cas ( $K_r = 1$ ), il faut réaliser que la fréquence de traverse en gain sera légèrement différente du  $\omega_g^*$  spécifié dans l'AvPh. Dans le cas où on utilise le calcul exact de  $K_r$  ci-dessus, le  $\omega_g^*$  spécifié sera exactement atteint mais l'erreur en régime permanent sera légèrement différente de celle spécifiée. Il y a un choix à faire.

- (9) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

### • Exemple 7.5: Amélioration de la performance en régime permanent de l'exemple 7.2

- ◆ Exigence additionnelle de performance :

- Rendre l'erreur en régime  $e_{RP} = 0.005$  pour une entrée rampe unitaire.

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer le coefficient d'erreur en régime permanent désiré  $K_{vel}^*$ . On obtient  $K_{vel}^* = \frac{1}{e_{RP}} = \frac{1}{0.005} = 200$ .
- (2) À partir du coefficient d'erreur statique désiré  $K_{vel}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}$$

où  $K_{vel}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale. À la fin de l'exemple 7.2b, la fonction de transfert compensée avec l'AvPh était :

$$G_a(s)G(s) = 3.99 \frac{(s + 2.20)}{(s + 4.34)} \frac{4}{s(s + 2)}$$

et le  $K_{vel}$  est donc égal à  $K_{vel} = 3.99 \frac{2.20}{4.34} \frac{4}{2} = 4.05$ . On a donc :

$$K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}} = \frac{200}{4.05} = 49.38$$

(3) Utiliser un compensateur à retard de phase (où  $\beta > 1$ ):

$$G_r(s) = K_r \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = K_r \beta \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} = K G'_r(s) \text{ où } G'_r(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} \text{ et } K = K_r \beta.$$

Sachant qu'aux basses fréquences, le gain d'un RePh est donné par :

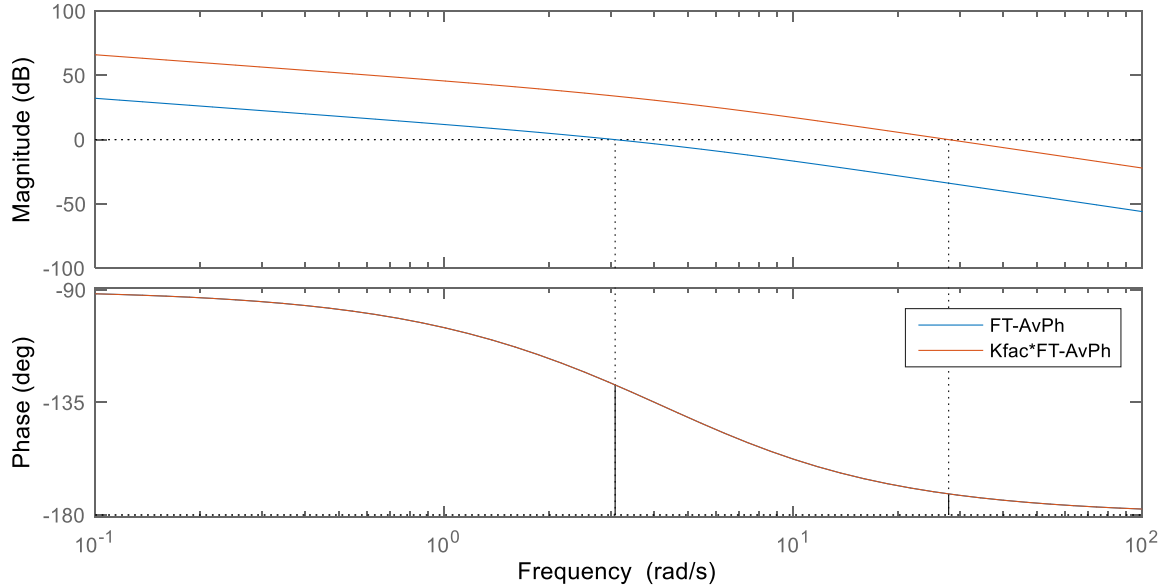
$$K^* = K_r \beta$$

où  $K^*$  est maintenant connu, on obtient déjà une relation entre deux paramètres du compensateur :

$$K_r \beta = 49.38$$

(4) Dessiner le diagramme de Bode de la fonction FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$  calculé à l'étape précédente, i.e. faire le tracé de Bode de  $K^*G(s)$ . Le tracé de l'amplitude aux basses fréquences devrait donner le gain d'erreur statique désiré.

FT-AvPh, Kfac\*FT-AvPh (méthode 1 pour PM et BW): GM = Inf (w = Inf rad/s) et PM = 8.4257 (w = 27.9176 rad/s)



La valeur de la fréquence de traverse originale  $\omega_g^* = 3.09$  rad/s est maintenant rendue à 27.9 rad/s. Il faut récupérer  $\omega_g^*$  à 3.09 rad/s. Le gain du compensateur doit être tel que le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  doit revenir à 1 pour que la marge y soit toujours calculée.

- (5) On trouve le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  et ce gain est donc l'atténuation requise  $\beta$  :

$$\beta = |K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*} = K^* = 49.38$$

- (6) Placer le zéro du compensateur, i.e. sa fréquence de coupure  $\omega = 1/T$ , une décade sous fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$ . Cela assurera une perte de phase maximum de 5 deg.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_g^*}{10} = \frac{3.09}{10} = 0.309$$

- (7) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:

- le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{1}{T} = \frac{\omega_g^*}{10} = 0.309$
- le pôle du compensateur est à  $p = -\frac{1}{\beta T} = \frac{0.309}{49.38} = 0.0063$

- (8) Calculer le gain  $K_r$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur. On inverse l'équation obtenue à l'étape (3) ci-dessus. Comme mentionné, il y a deux valeurs possibles :

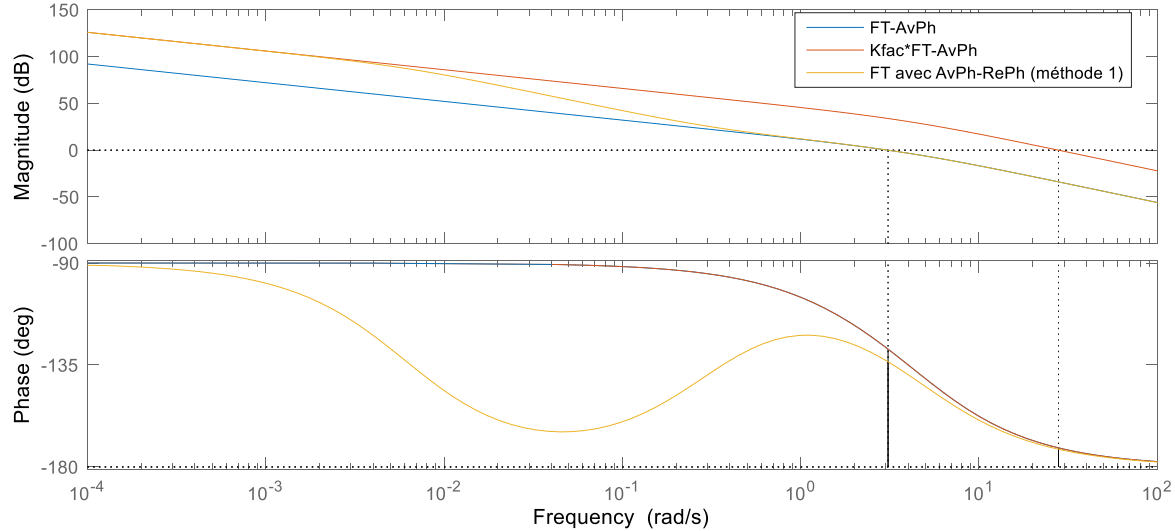
$$K_r = \frac{K^*}{\beta} = 1 \quad K_r = \frac{K^*}{\beta \left| \frac{(s-z)}{(s-p)} \right|_{s=j\omega_g^*}} = 0.995$$

- (9) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences. Le compensateur devient :

$$G_r(s) = K_r \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = 1.0 \frac{(s + 0.309)}{(s + 0.0063)}$$

On peut voir toutes les étapes de la conception dans le diagramme suivant :

**FT-AvPh, Kfac\*FT-AvPh et FT-RePh-AvPh (méthode 1 pour PM et BW): GM = Inf (w = Inf rad/s) et PM = 46.4054 (w = 3.0902 rad/s)**

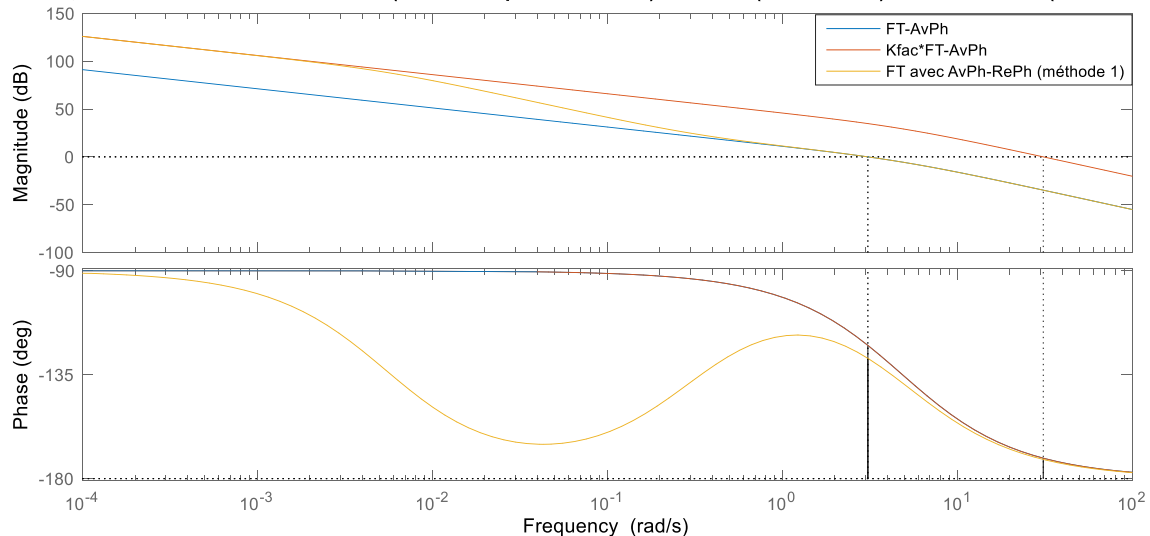


On voit que la perte de phase du au RePh est aux basses fréquences, avant la fréquence de traverse en gain.

On voit aussi que la fréquence de traverse en gain est maintenue à 3.09 rad/s mais que la marge de phase est descendue de 52 deg à 46.4 deg. C'est parce qu'aucune marge a été prise lors de la conception de l'AvPh. Le RePh a donc fait perdre 5.6 deg.

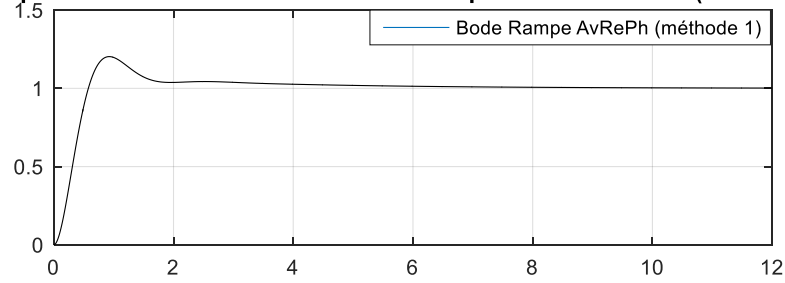
En faisant une pré-compensation de 5.7 deg lors de la conception de l'AvPh, on obtient la PM\* :

**FT-AvPh, Kfac\*FT-AvPh et FT-RePh-AvPh (méthode 1 pour PM et BW): GM = Inf (w = Inf rad/s) et PM = 52.0937 (w = 3.0902 rad/s)**

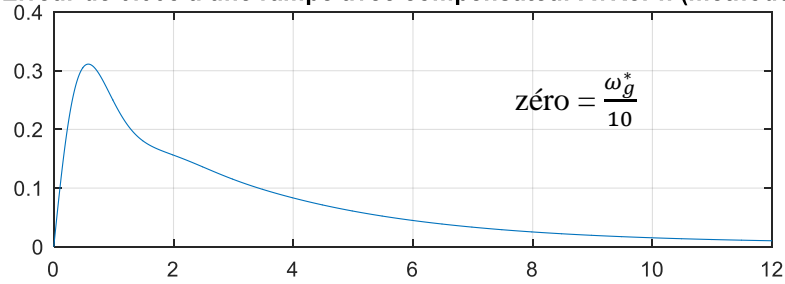


La réponse à un échelon unitaire et l'erreur à une rampe unitaire sont illustrées (avec  $K_r = 1$ ) avec un facteur 10 pour la règle du pouce.

**Réponse à un échelon unitaire avec compensateur AvRePh (méthode 1)**

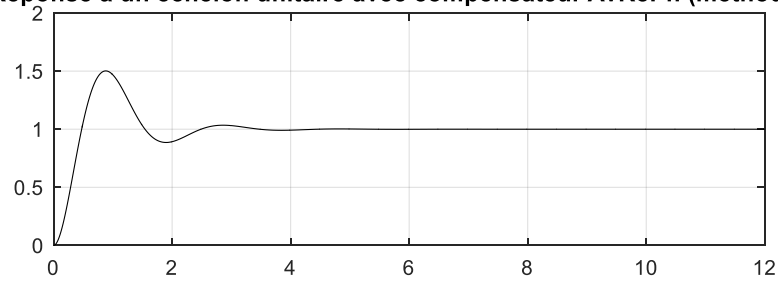


**Erreur de 0.005 à une rampe avec compensateur AvRePh (méthode 1)**

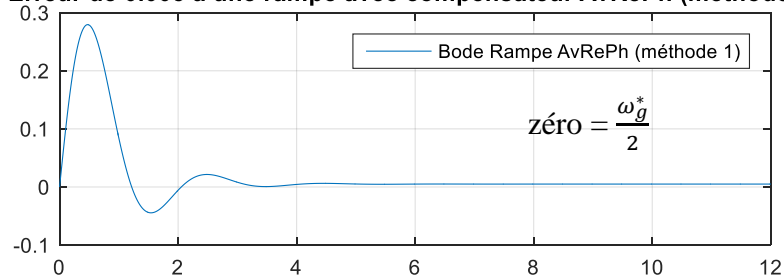


L'erreur en régime permanent de 0.005 à la rampe est obtenue après environ 12 s. Avec un facteur 2, on atteint le régime permanent après environ 4 s.

**Réponse à un échelon unitaire avec compensateur AvRePh (méthode 1)**



**Erreur de 0.005 à une rampe avec compensateur AvRePh (méthode 1)**





#### 7.6.4 Conception du RePh par le diagramme de Bode (Méthode 2)

La Méthode 2 est utilisée quand les performances demandées sont exprimées en termes de marge de phase et d'erreur en régime permanent. Tout comme l'AvPh (Méthode 2), on tente de régler le régime transitoire et le régime permanent en même temps, sans considération de la BW ou de la fréquence de traverse  $\omega_g^*$ .

- Le RePh avec la Méthode 2 ne suppose donc pas qu'un AvPh a été conçu avant. La fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  n'est donc pas contrainte et peut être choisie pour rencontrer les critères de performance spécifiés.
- Les principes de base et les étapes sont très semblables à la Méthode 1. La seule exception est le fait qu'avec la Méthode 1, on doit récupérer la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  (obtenue lors de l'AvPh) alors qu'avec la Méthode 2, on utilise la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  pour satisfaire le critère de performance PM\*.

- **Procédure de conception d'un compensateur RePh par le diagramme de Bode (Méthode 2)**

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer le coefficient d'erreur en régime permanent désiré :  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , selon la classe du système.
- (2) À partir l'exigence de performance sur l'erreur en régime permanent traduite en coefficient d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*, K_{vel}^*, K_{acc}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{pos}^*}{K_{pos}}, \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}, \frac{K_{acc}^*}{K_{acc}} \quad \text{selon la classe}$$

où  $K_{pos}, K_{vel}, K_{acc}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale (selon sa classe).

- (3) Utiliser un compensateur à retard de phase (où  $\beta > 1$ ):

$$G_r(s) = K_r \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = K_r \beta \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} = K G_r'(s) \quad \text{où} \quad G_r'(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} \quad \text{et} \quad K = K_r \beta$$

Sachant qu'aux basses fréquences, le gain d'un RePh est donné par :

$$K^* = K_r \beta$$

où  $K^*$  est maintenant connu, on obtient déjà une relation entre deux paramètres du compensateur.

- (4) Dessiner le diagramme de Bode de la FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$  calculé à l'étape précédente, i.e. faire le tracé de Bode de  $K^* G(s)$ . Le tracé de l'amplitude aux basses fréquences devrait donner le gain d'erreur statique désiré. La nouvelle fréquence de traverse en gain devient  $\omega_g'$ . Déterminer si, après cet ajustement du gain, la marge de phase désirée est satisfaite.

- (5) Sinon, il faut en tenir compte dans le design. Contrairement à l'AvPh (Méthode 2) où on ajoutait une avance de phase à cette fréquence pour rencontrer la spécification sur la PM\*, avec le RePh (Méthode 2), on recherche dans les basses fréquences la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  où la marge de phase serait satisfaite si le tracé de l'amplitude coupait la ligne de 0 dB à cette fréquence  $\omega_g^*$ . Dans ce calcul, ajouter d'avance une correction de  $\Delta\phi_{mrg} = 5$  deg pour tenir compte du retard de phase introduit par le compensateur. Voir le document [Comment\\_trouver\\_wg\\_pour\\_PM.pdf](#) pour y voir 3 techniques pour trouver la fréquence  $\omega_g^*$  qui donne une marge de phase désirée PM\*.
- (6) Déterminer l'atténuation requise à  $\omega_g^*$  pour faire passer le tracé d'amplitude à ce point. On sait que l'atténuation du compensateur RePh des basses fréquences vers les hautes fréquences est  $\beta$ . Donc, il faut atténuer le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  d'un facteur  $\beta$  pour qu'il revienne à 1. On trouve le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  et ce gain est donc l'atténuation requise  $\beta$  :

$$\beta = |K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*}$$

- (7) Placer le zéro du compensateur, i.e. sa fréquence de coupure  $\omega = 1/T$ , une décade sous la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$ . Cela assurera une perte de phase maximum de 5 deg.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_g^*}{10}$$

- (8) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:
- le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{1}{T} = -\frac{\omega_g^*}{10}$  (fréquence de coupure  $1/T$ )
  - le pôle du compensateur est à  $p = -\frac{1}{\beta T}$ ,  $\beta$  a été calculé en (6) (fréquence de coupure  $1/(\beta T)$  )
- (9) Calculer le gain  $K_r$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur. On inverse l'équation obtenue à l'étape (3) ci-dessus :

$$K_r = K^*/\beta$$

Dans ce cas-ci,  $K_r$  n'est pas normalement près de 1.

- (10) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

### • Exemple 7.6: Conception du RePh par le diagramme de Bode (Méthode 2)

Le problème de l'Exemple 7.3 (Section 7.5.4 ) est repris.

- ♦ La FTBO originale d'un système est :

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

- ♦ Les exigences de performance sont:
  - Erreur à une entrée échelon unitaire de 0.05
  - Marge de phase d'au moins 50 deg.

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer le coefficient d'erreur en régime permanent désiré :  $K_{pos}^*$ ,  $K_{vel}^*$ ,  $K_{acc}^*$ , selon la classe du système.

$$K_{vel}^* = \frac{1}{e_{RP}^*} = \frac{1}{0.05} = 20 \text{ s}^{-1}$$

- (2) À partir l'exigence de performance sur l'erreur en régime permanent traduite en coefficient d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*$ ,  $K_{vel}^*$ ,  $K_{acc}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

Le coefficient  $K_{vel}$  actuel est  $4/2 = 2$ . L'erreur actuelle en régime permanent à une rampe unitaire serait de  $1/2 = 0.50$ , soit 10 fois trop. Il faut faire une compensation.

$$K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}} = \frac{20}{2} = 10$$

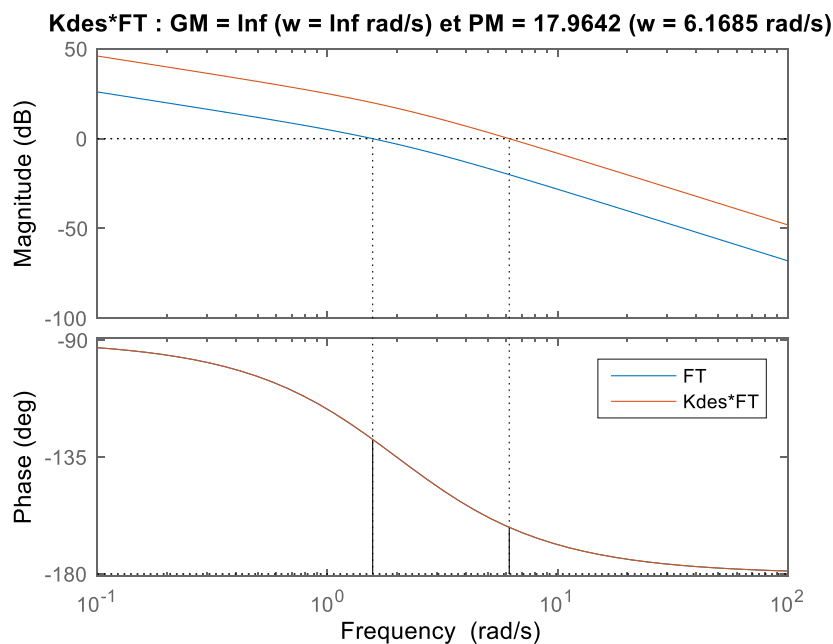
- (3) Utiliser un compensateur à retard de phase (où  $\beta > 1$ ):

$$G_r(s) = K_r \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = K_r \beta \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} = K G'_r(s) \text{ où } G'_r(s) = \frac{(Ts + 1)}{(\beta T s + 1)} \text{ et } K = K_r \beta.$$

On obtient déjà une relation entre deux paramètres du compensateur:

$$K^* = K_r \beta = 10$$

- (4) Dessiner le diagramme de Bode de la FTBO  $G(s)$  avant compensation mais tenant compte du gain  $K^*$ , i.e. faire le tracé de Bode de  $K^*G(s)$ . Le tracé de l'amplitude aux basses fréquences devrait donner le gain d'erreur statique désiré.



En augmentant le gain d'un facteur  $K^*$ , la marge de phase est descendue à 18 deg. Il faut donc toujours faire une compensation. La fréquence de traverse en gain obtenue est  $\omega'_g = 6.17 \text{ rad/s}$ .

- (5) Contrairement à l'AvPh (Méthode 2) où on ajoutait une avance de phase à cette fréquence pour rencontrer la spécification sur la PM\*, avec le RePh (Méthode 2), on recherche dans les basses fréquences la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  où la marge de phase serait satisfaite si le tracé de l'amplitude coupait la ligne de 0 dB à cette fréquence  $\omega_g^*$ . Dans ce calcul, ajouter d'avance une correction de  $\Delta\phi_{mrg} = 5 \text{ deg}$  pour tenir compte du retard de phase introduit par le compensateur.

On veut une marge de phase de  $PM^* = 50 \text{ deg}$ . Avec la correction de  $\Delta\phi_{mrg} = 5 \text{ deg}$ , on cherche donc la fréquence où la phase de la fonction  $K^*G(s)$  (ou simplement  $G(s)$  puisque la phase d'un gain positif est zéro) est  $-180 + 50 + 5 = -125 \text{ deg}$ . Avec MATLAB (par itération ou graphiquement), on recherche cette fréquence où  $\angle G(j\omega_g^*) = -125 \text{ deg}$  et cette fréquence  $\omega_g^*$  devient le point où on veut que le tracé de l'amplitude coupe 0 dB, pour que la nouvelle marge de phase soit calculée à cet endroit.

En zoomant sur le graphique ci-dessus (ou en utilisant MATLAB), on trouve :

$$\omega_g^* = 1.401 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- (6) Déterminer l'atténuation requise à  $\omega_g^*$  pour faire passer le tracé d'amplitude à ce point. On sait que l'atténuation du compensateur RePh des basses fréquences vers les hautes fréquences est  $\beta$ . Donc, il faut atténuer le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  d'un facteur  $\beta$  pour qu'il revienne à 1. On trouve le gain de  $K^*G(s)$  à  $\omega_g^*$  et ce gain est donc l'atténuation requise  $\beta$  :

$$\beta = |K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*} = \left| 10 \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s=j1.401} = 11.70$$

- (7) Placer le zéro du compensateur, i.e. sa fréquence de coupure  $\omega = 1/T$ , une décade sous fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$ . Cela assurera une perte de phase maximum de 5 deg.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_g^*}{10} = \frac{1.401}{10} = 0.1401 \quad T = 7.140$$

- (8) Calculer les fréquences de coupure du compensateur:

- le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{1}{T} = -\frac{\omega_g^*}{10} = -0.1401$
- le pôle du compensateur est à  $p = -\frac{1}{\beta T} = -\frac{0.1401}{11.70} = -0.120$

- (9) Calculer le gain  $K_r$  du compensateur de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur. On inverse l'équation obtenue à l'étape (3) ci-dessus :

$$K_r = \frac{K^*}{\beta} = \frac{10.00}{11.70} = 0.855$$

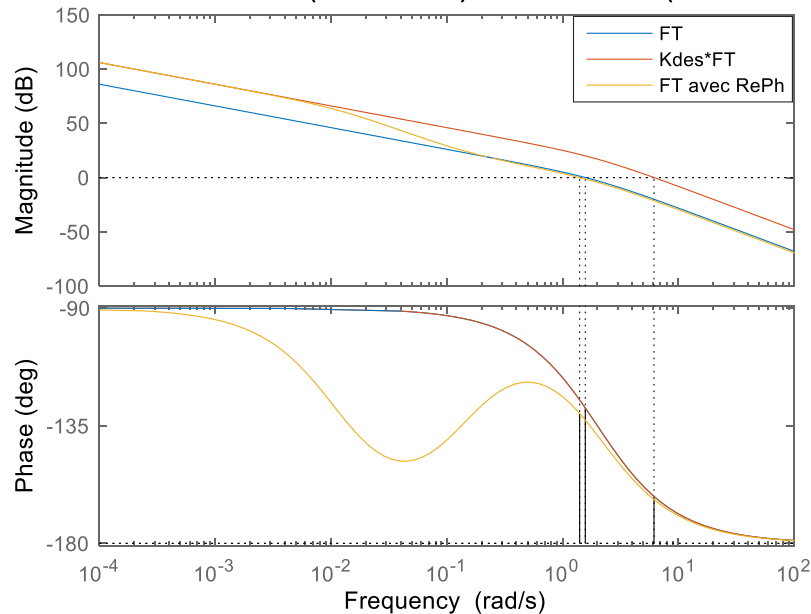
Dans ce cas-ci,  $K_r$  n'est pas normalement près de 1.

(10) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences. La FTBO du système compensé est:

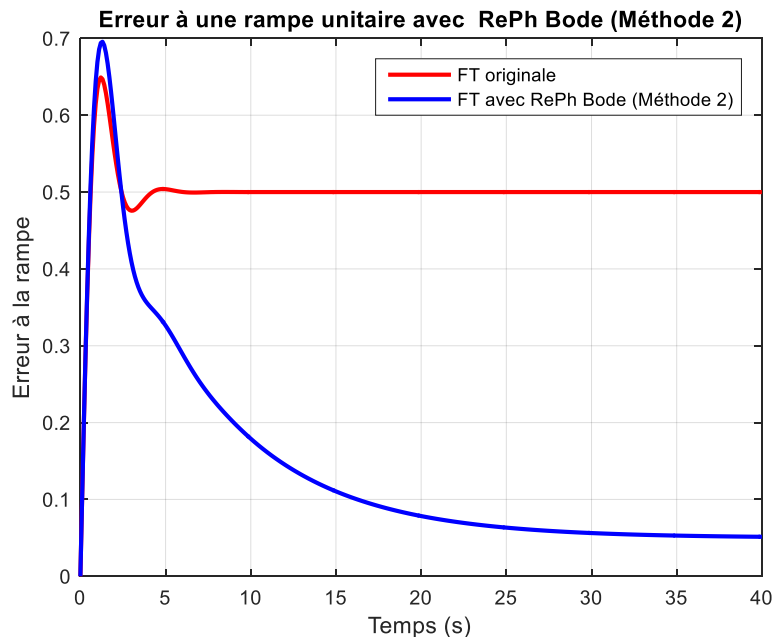
$$G_a(s) = 0.855 \frac{(s + 0.1401)}{(s + 0.0120)} \frac{4}{s(s + 2)} = 10.0 \frac{(7.140s + 1)}{(83.52s + 1)} \frac{4}{s(s + 2)}$$

On voit dans la dernière équation ci-dessus que le gain du compensateur aux basses fréquences est de 10, comme requis. Les étapes de conception sont illustrées dans le diagramme de Bode ci-dessous. On voit que la marge de phase finale est de 49.7 deg. Une autre itération avec une marge  $\Delta\phi_{mrg}$  légèrement supérieur à 5 deg pourrait rencontrer ce critère de performance.

**FT avec RePh : GM = Inf (w = Inf rad/s) et PM = 49.6974 (w = 1.4057 rad/s)**

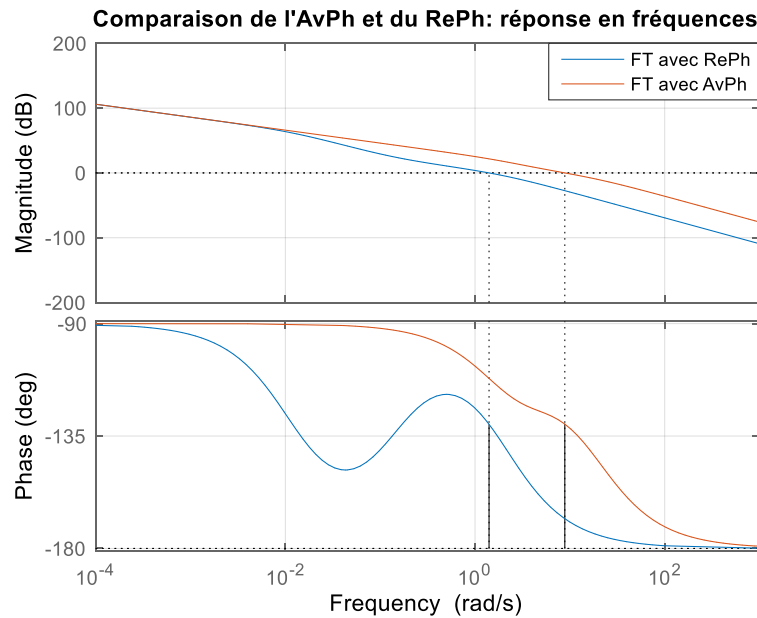


L'erreur à une entrée rampe unitaire est illustrée ci-dessous. On voit que l'erreur en régime permanent a été diminuée d'un facteur 10, de 0.50 à 0.05 :

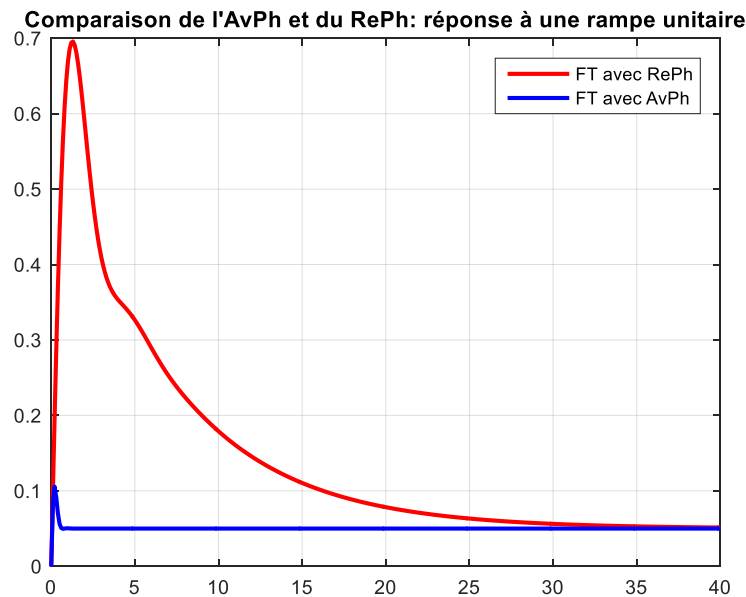


- **Comparaison de l'AvPh (Méthode 2) et du RePh (Méthode 2) avec diagramme de Bode**

- Il a été mentionné qu'avec la Méthode 2, l'AvPh (Section 7.5.4) et le RePh (cette section) peuvent tous les deux répondre à des exigences mixtes de régime transitoire (PM\*) et de régime permanent ( $e_{RP}^*$ ). Cependant, le résultat final est très différent.
- Le graphique suivant illustre la réponse fréquentielle comparées des deux designs :



- On voit que la bande passante de l'AvPh est plus élevée que celle du RePh. Avec la fonction MATLAB **bandwidth** appliquée à la FTBF compensée, on calcule une bande passante de 14.5 rad/s pour l'AvPh et de 2.31 rad/s pour le RePh, un facteur de 6.27.
- Une plus grande bande passant indique une réponse plus rapide, comme cela est vérifié sur le graphique ci-dessous illustrant l'erreur en réponse à une rampe unitaire.



- Le temps pour atteindre le régime permanent est d'environ 40 s pour le RePh et il est de moins de 1 s pour l'AvPh.

## 7.7 Conception d'un compensateur à avance-retard de phase

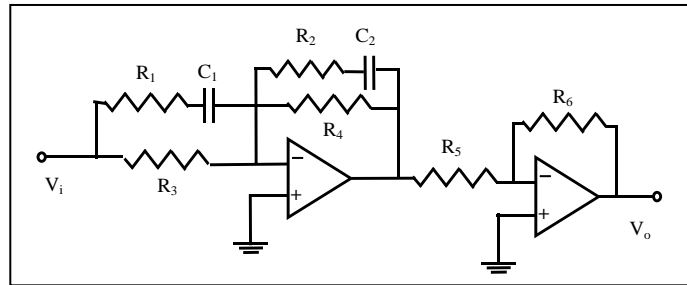
### 7.7.1 Compensateur à avance–retard de phase AvRePh

- Un compensateur à avance–retard de phase est utilisé pour:
  - améliorer la réponse transitoire d'un système et améliorer sa stabilité
  - améliorer la réponse en régime permanent d'un système par l'augmentation du gain statique.
- Une des techniques de compensation avance-retard de phase par le lieu des racines consiste à exécuter en premier la compensation avance de phase (Section 7.5.2) et ensuite la compensation retard de phase (Section 7.6.2) en tenant compte de la fonction de transfert en boucle ouverte compensée par l'avance de phase. Ce sera la technique privilégiée ici. Une autre approche est présentée ici pour information.
- La forme particulière de la fonction de transfert d'un correcteur avance-retard de phase est :

$$G_c(s) = K_c \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{\left(1 + s \frac{T_1}{\beta}\right)(1 + \beta T_2 s)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad \beta > 1$$

- La commande avance-retard de phase introduit dans la fonction de transfert du trajet direct :
  - deux zéros à  $-1/T_1$  et  $-1/T_2$
  - deux pôles à  $-\beta/T_1$  et  $-1/(\beta T_2)$
  - avec  $T_2 > T_1$  et  $\beta > 1$ .

- La paire  $-1/T_1$  et  $-\beta/T_1$  est la partie avance de phase (pôle à gauche du zéro)
- La paire  $-1/T_2$  et  $-1/(\beta T_2)$  est la partie retard de phase (pôle à droite du zéro)



### 7.7.2 Conception AvRePh par le lieu des racines

- La conception par le lieu des racines est une combinaison de chacune des techniques pour l'avance et le retard de phase:
  - (1) Trouver la position désirée des pôles dominants en boucle fermée,  $s^*$ .
  - (2) Calculer la valeur du gain  $K_c$  pour atteindre la performance en régime permanent ( $K_{vel}$ ).
  - (3) Calculer l'avance de phase  $\varphi_m$  requise pour modifier le tracé des racines vers les pôles désirés.
  - (4) Avec  $\varphi_m$ , déterminer les valeurs de  $T_1$  et de  $\beta$  de la partie avance-de-phase:

$$\left| K_c \frac{\left( s^* + \frac{1}{T_1} \right)}{\left( s^* + \frac{\beta}{T_1} \right)} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \angle \frac{\left( s^* + \frac{1}{T_1} \right)}{\left( s^* + \frac{\beta}{T_1} \right)} = \varphi_m$$

(5) Calculer  $T_2$  pour que la contribution de la partie retard de phase soit:

$$\left| \frac{\left( s^* + \frac{1}{T_2} \right)}{\left( s^* + \frac{1}{\beta T_2} \right)} \right| \cong 1 \quad \text{et} \quad 0^\circ < \angle \frac{\left( s^* + \frac{1}{T_2} \right)}{\left( s^* + \frac{1}{\beta T_2} \right)} < 5^\circ.$$

- Les basses fréquences seront amplifiées de  $K_c$  et l'avance de phase requise sera assurée.

### 7.7.3 Conception AvRePh par le diagramme de Bode

- Une des techniques de compensation avance-retard de phase par le diagramme de Bode consiste à exécuter en premier la compensation avance de phase avec la Méthode 1 (Section 7.5.3) et ensuite la compensation retard de phase avec la Méthode 1 (Section 7.6.3) en tenant compte de la fonction de transfert en boucle ouverte compensée par l'avance de phase. Ce sera la technique privilégiée ici.



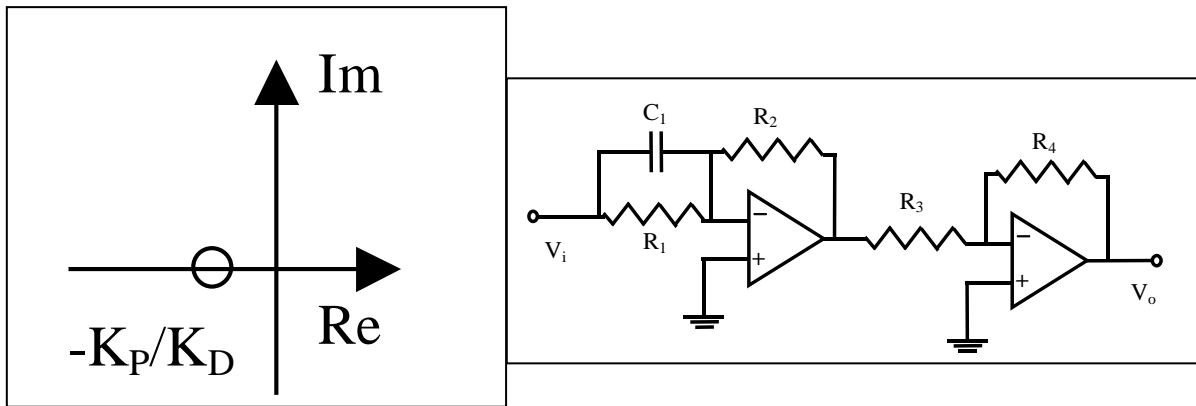
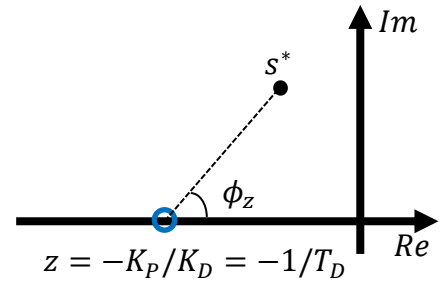
## 7.8 Conception d'un compensateur à action proportionnelle-dérivée

### 7.8.1 Description du compensateur proportionnel-dérivé PD

- Le compensateur PD est un cas limite du compensateur AvPh qui consiste à n'ajouter qu'un zéro à la fonction de transfert en boucle ouverte (le pôle est effectivement à  $-\infty$ ).
- Les différentes formes de la fonction de transfert d'un PD sont :

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P(1 + T_D s) = K_D(s - z)$$

où  $z$  est le zéro du PD :  $z = -K_P/K_D = -1/T_D$



### Effet du PD sur le lieu des racines

- L'effet de l'AvPh est analysé en fonction de la variation de phase et d'amplitude que sa fonction de transfert  $K_D(s - z)$  cause dans le plan complexe.
- Supposons un pôle désiré placé à  $s^* = \sigma + j\omega$  et où on veut calculer la contribution en angle du PD.
- La phase du PD à ce point  $s$  est :

$$\angle K_D(s^* - z) = \angle K_D + \angle s^* - z = \angle s^* - z$$

la phase d'un nombre positif étant zéro :  $\angle K_D = 0$ .

- La phase de  $s^* - z$ :

$$\angle s^* - z = \angle \sigma - z + j\omega = \tan^{-1} \left( \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma - z} \right)$$

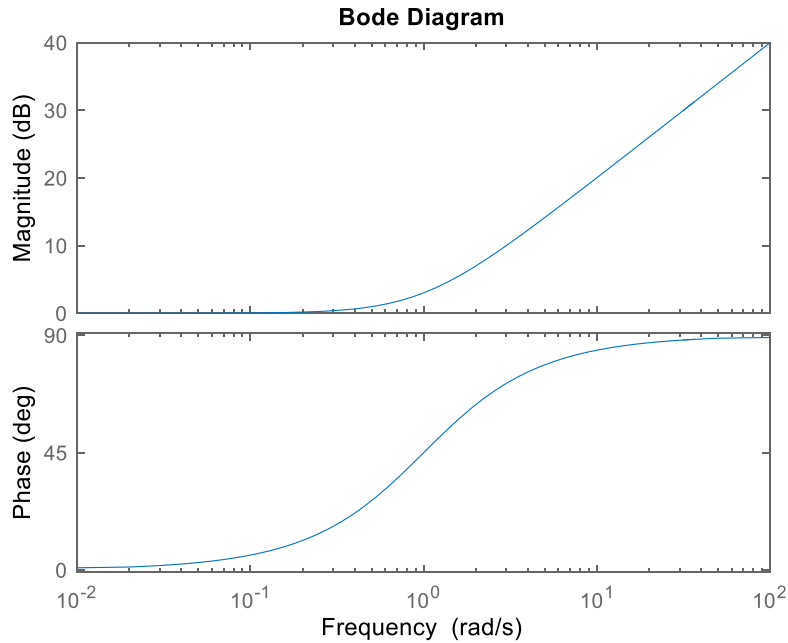
- En analysant ces équations et le croquis ci-dessus, on remarque que  $\omega$  est la distance verticale entre  $s$  et le zéro et que  $\sigma - z$  est la distance horizontale. Par conséquent, la contribution en phase d'un PD est :

$$\phi_z = \angle s - z = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma + K_P/K_D} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma + 1/T_D} \right)$$

## Effet du PD sur le diagramme de Bode

- La forme  $K_p(1 + T_D s)$  permet de voir l'amplification aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ) :  $K_p$
- La forme  $K_D(s - z)$  permet de voir l'amplification aux hautes fréquences ( $s \rightarrow \infty$ ) :  $\infty$
- Comme exemple, supposons un PD avec  $T_D = 2.0$  et  $K_D = 4.0$ , ce qui donne un zéro à  $z = -1/T_D = -0.50$ , on obtient la réponse en fréquence suivante :

**KD = 1.0; z=-1.00; FT = tf(KD\*[1 -z], [1]); bode(FT)**



- L'amplification aux basses fréquences est  $K_p = 1 = 0$  dB.
- L'amplification aux hautes fréquences est  $\infty$ . C'est un inconvénient majeur du PD puisqu'il peut amplifier le bruit des capteurs qui se retrouve dans les hautes fréquences.
- On y voit donc la nature passe-haut du PD où les variations sont amplifiées pour mieux les annuler avec une rétroaction négative.
- La contribution en phase passe de 0 deg aux basses fréquences à 90 deg aux hautes fréquences et est donnée en fonction de la fréquence par :

$$\phi_z = \angle(j\omega - z) = \tan^{-1}\left(\frac{K_D}{K_p} \omega\right) = \tan^{-1}(\omega T_D)$$

- Dans le graphique ci-dessus, à  $\omega = 1$ , on voit que la contribution en phase est :

$$\phi_z = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45 \text{ deg}$$

- Cette augmentation de phase fait du PD un filtre anticipatif qui sera utilisé pour augmenter la phase d'un système dynamique dans le but de le stabiliser.

## 7.8.2 Conception du PD par le lieu des racines

- La procédure de conception d'un compensateur PD est la même que celle d'un compensateur à avance de phase. Toutes les étapes de la Section 7.5.2 sont identiques.
- La seule exception est dans le calcul de la position du zéro. Toute l'avance de phase requise  $\Delta\phi$  est maintenant contribué par le PD puisqu'il n'y a pas de pôle pour en faire la soustraction :  $\phi_z = \Delta\phi$ .
- L'équation pour trouver la position du zéro devient donc :

$$z = \text{Re}(s^*) - \frac{\text{Im}(s^*)}{\tan \Delta\phi}$$

- Le calcul du gain  $K_{PD}$  est aussi adapté:

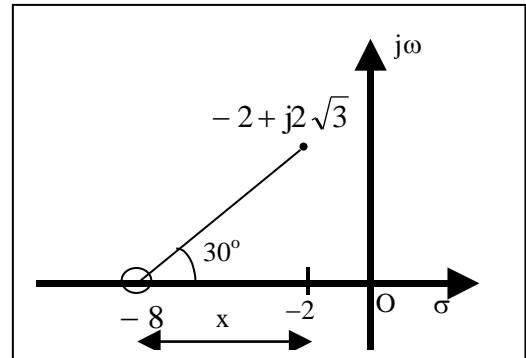
$$|G_{PD}(s^*)G(s^*)| = |K_D(s^* - z)G(s^*)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_D = \frac{1}{|(s^* - z)G(s^*)|}$$

### • Exemple 7.7: Reprise de l'Exemple 7.1 avec un compensateur PD

- ♦ La FTBO originale d'un système est :

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

- ♦ Les exigences de performance sont:
  - temps de stabilisation à 2% :  $t_s = 2$  s
  - dépassement maximum :  $M_p = 16.3$  %



- (1) Position désirée des pôles dominants en boucle fermée (Exemple 7.1)

$$s^* = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.0 \pm j2\sqrt{3} = -2.0 \pm j3.464$$

- (2) Dessiner le lieu des racines avant compensation. (Exemple 7.1)

Le lieu des racines passe à droite des pôles désirés : une compensation est requise

- (3) Il faut modifier (*compenser*) le lieu des racines. Calculer la phase  $\Delta\phi$  qui manque à la fonction de transfert pour obtenir les pôles dominants désirés. (Exemple 7.1)

$$\Delta\phi = -180 - \langle G(s^*) \rangle = -180 - (-210) = 30 \text{ deg}$$

- (4) Utiliser un compensateur PD.

Calculer le paramètre  $z$  du compensateur de façon à fournir l'avance de phase  $\Delta\phi$  requise.

$$\phi_z = \Delta\phi = 30 \text{ deg}$$

$$z = \text{Re}(s^*) - \frac{\text{Im}(s^*)}{\tan \phi_z} = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{0.5774} = -8.0$$

La fonction de transfert en b.o. du système compensé est donc:

$$G_{PD}(s)G(s) = K_D(s - z) \frac{4}{s(s + 2)} = K_D(s + 8) \frac{4}{s(s + 2)}$$

(5) Il n'y a pas de coefficient d'erreur en régime permanent spécifié.

(6) Calculer le gain  $K_D$  du compensateur avec la condition d'amplitude :

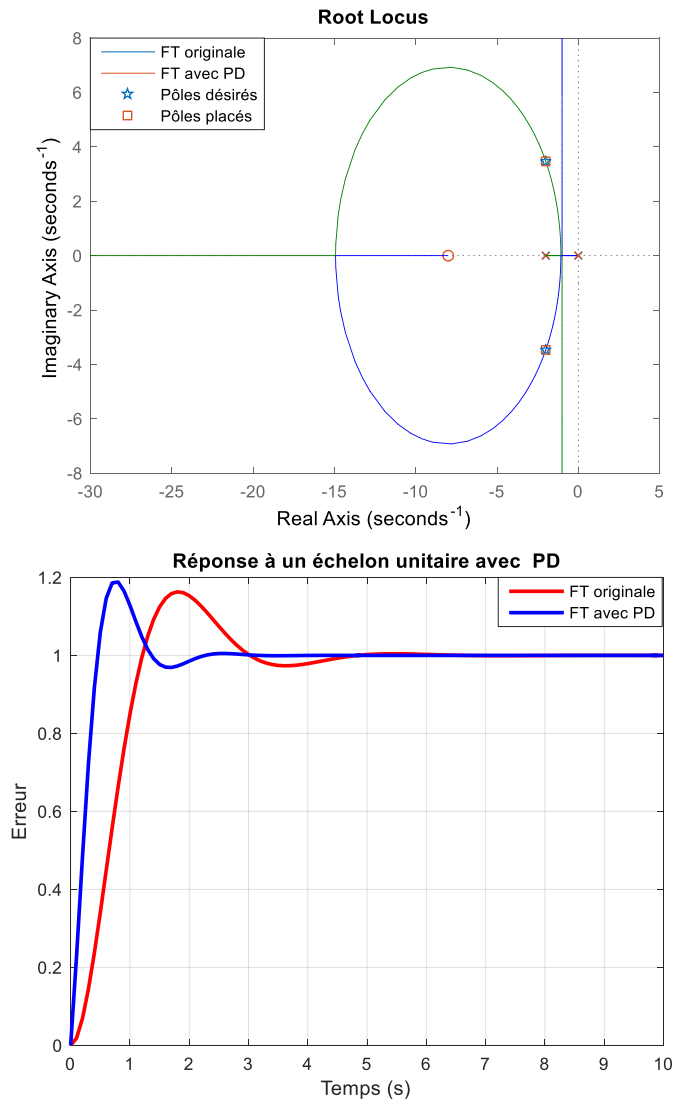
$$K_D = \frac{1}{|(s^* - z)G(s^*)|} = \frac{1}{\left| (-2.0 + j2\sqrt{3} - (-8.0)) \frac{4}{(-2.0 + j2\sqrt{3})(-2.0 + j2\sqrt{3} + 2)} \right|}$$

$$K_D = 0.50$$

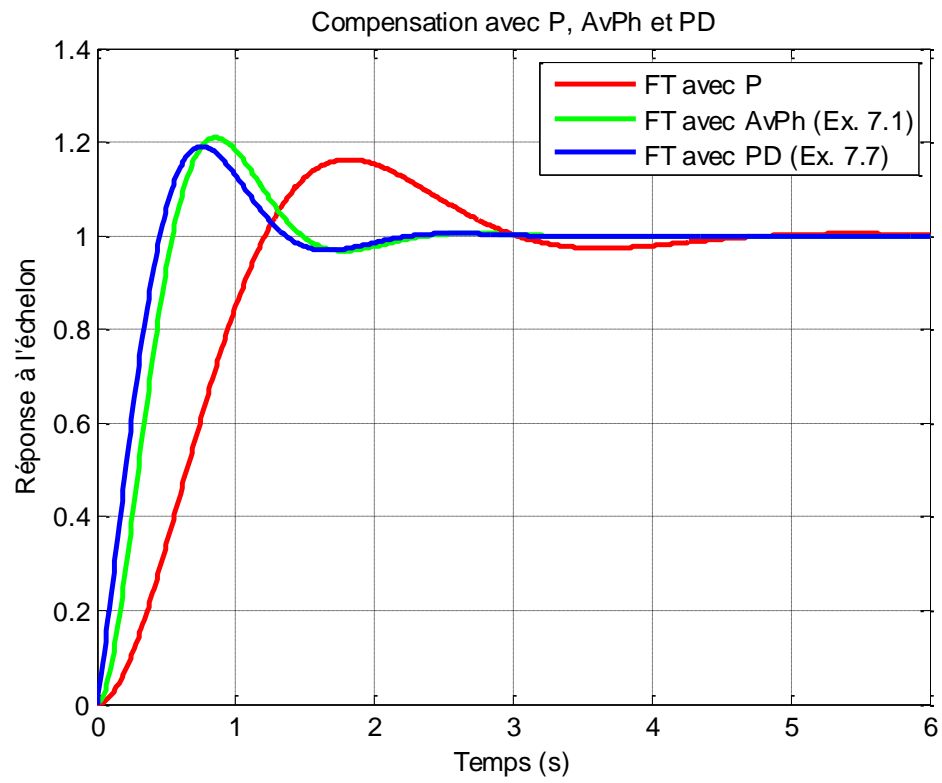
Le compensateur est donc donné par:

$$G_a(s) = 0.50(s + 8) = 4.0(0.125s + 1)$$

(7) Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées.



(8) Le graphique suivant fait la comparaison entre l'AvPh de l'exemple 7.1 et le PD du présent exemple.



### 7.8.3 Conception du PD par le diagramme de Bode (Méthode 1)

La Méthode 1 est utilisée quand les performances demandées sont exprimées en termes de marge de phase et de bande passante BW (ou équivalent : fréquence de traverse en gain  $\omega_g$  fréquence naturelle  $\omega_n$ ).

- La procédure de conception d'un compensateur PD avec le diagramme de Bode est semblable à celle d'un compensateur AvPh, Section 7.5.3. Les adaptations sont notées ci-dessous.
- Les étapes (1) à (5) sont inchangées, utilisant un PD plutôt qu'un AvPh.
  - traduction des spécifications en termes de  $PM^*$  et de  $\omega_g^*$ ,
  - dessiner le diagramme, déterminer si les performances sont dépassées ( $\omega_g > \omega_g^*$  et  $PM > PM^*$ )
  - sinon, utiliser un PD :  $G_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P \left(1 + \frac{K_D}{K_P} s\right) = K_P(1 + T_D s)$
  - calculer le gain  $K^*$  pour obtenir la fréquence de traverse en amplitude à  $\omega_g^*$  :  $K^* = \frac{1}{|G(s)|_{s=j\omega_g^*}}$
  - vérifier si la  $PM^*$  est rencontrée à  $s = j\omega_g^*$
  - sinon, calcul de la marge de phase actuelle  $PM$  :  $PM = \langle K^* G(s) \rangle_{s=j\omega_g^*} - (-180 \text{ deg})$
  - calcul de l'avance de phase requise  $\Delta\phi = PM^* - PM$
- Étapes (6)-(8): Un compensateur PD contribue une phase  $\phi_z$  qui varie entre 0 deg et 90 deg en fonction de la fréquence  $\omega$ :

$$\phi_z = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{K_D}{K_P} \omega_m \right) = \tan^{-1}(\omega_m T_D)$$

où  $\omega_m$  est la fréquence où on obtient la phase  $\phi_z$ . On choisit donc le compensateur pour qu'il fournisse une avance de phase égale à celle requise i.e.  $\Delta\phi = \phi_z$  à la fréquence de traverse désirée i.e.  $\omega_m = \omega_g^*$ . Connaissant ainsi  $\phi_z$  et  $\omega_m$ , on peut calculer le rapport  $\frac{K_D}{K_P}$  ou, de façon équivalente, le paramètre  $T_D$ .

$$\frac{K_D}{K_P} = T_D = \frac{\tan \Delta\phi}{\omega_g^*}$$

Le paramètre  $T_D = \frac{K_D}{K_P}$  est maintenant connu.

- Étape (9) : Le gain  $K_P$  est calculé de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur à la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$ . Tout comme ce fut fait pour le gain  $K_a$  du compensateur de l'AvPh, on veut:

$$K^* = |G_{PD}(s)|_{s=j\omega_g^*} = K_P \left| \left( 1 + \frac{K_D}{K_P} s \right) \right|_{s=j\omega_g^*} = K_P \sqrt{1 + \left( \frac{K_D}{K_P} \right)^2 \omega_g^{*2}}$$

$$K_P = \frac{K^*}{\sqrt{1 + \left( \frac{K_D}{K_P} \right)^2 \omega_g^{*2}}} \quad \text{et} \quad K_D = \left( \frac{K_D}{K_P} \right) K_P = T_D K_P$$

- NOTE : Si l'augmentation de phase est plus grande que  $\sim 70$  à  $90$  deg, l'avance de phase requise  $\Delta\phi$  est divisée en deux, un PD est calculé pour  $\Delta\phi/2$  et deux PD identiques en cascade vont fournir l'avance de phase requise. Le compensateur prend ainsi la forme :

$$G_{PD}(s) = K_P \left(1 + \frac{K_D}{K_P} s\right)^2 = K_P (1 + T_D s)^2$$

et le calcul du gain  $K_P$  devient :

$$K_P = \frac{K^*}{1 + \left(\frac{K_D}{K_P}\right)^2 \omega_g^{*2}}$$

- Dans le cas où la forme équivalente suivante est utilisée :

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_D (s - z_{PD})$$

il est facile de démontrer les résultats équivalents suivants :

$$\phi_z = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_m}{-z_{PD}} \right)$$

et avec  $\omega_m = \omega_g^*$  et  $\phi_z = \Delta\phi$  on obtient:

$$z_{PD} = -\frac{\omega_g^*}{\tan \Delta\phi}$$

- Le gain  $K_D$  est calculé avec la règle habituelle :

$$K^* = |G_{PD}(s)|_{s=j\omega_g^*} = K_D |(s - z_{PD})|_{s=j\omega_g^*} = K_D \sqrt{\omega_g^{*2} + z_{PD}^2} \Rightarrow K_D = \frac{K^*}{\sqrt{\omega_g^{*2} + z_{PD}^2}}$$

- Dans le cas d'un double PD:  $G_{PD}(s) = K_D (s - z_{PD})^2$ , le paramètre  $K_D$  est donné par :

$$K_D = \frac{K^*}{(\omega_g^{*2} + z_{PD}^2)}$$

- **Exemple 7.8 : Reprise de l'Exemple 7.2 avec un compensateur PD**

- ♦ La fonction de transfert en b.o. du système est :  $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ .

- ♦ **Les exigences de performance sont:**

- Marge de phase d'au moins 52 deg correspondant approximativement à  $\zeta = 0.5$  de l'exemple 7.1
- Bande passante de 5.0 rad/s correspondant approximativement à  $\omega_n = 4$  rad/s de l'exemple 7.1.

- Étapes (1) à (5) : (Exemple 7.2)

- $\omega_g^* = 3.09$  rad/s
- $K^* = 2.844$
- $PM = 32.9$  deg
- $\Delta\phi = 19.1$  deg

- Étapes (6) à (8) :

- On choisit donc le compensateur pour qu'il fournisse une avance de phase égale à celle requise i.e.  $\Delta\phi - \phi_z = 19.1$  à la fréquence de traverse désirée i.e.  $\omega_g^* = \omega_m = 3.09$  rad/s. On calcule le rapport  $\frac{K_D}{K_P}$ :

$$\frac{K_D}{K_P} = T_D = \frac{\tan \Delta\phi}{\omega_g^*} = \frac{\tan 19.1}{3.09} = 0.1120$$

- Le zéro du compensateur est à  $z = -\frac{K_P}{K_D} = -8.93$ .

- Étape (9) : Le gain  $K_P$  est calculé de façon à obtenir le gain désiré  $K^*$  du compensateur à la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$ . On veut:

$$K^* = |G_{PD}(s)|_{s=j\omega_g^*} = K_P \left| \left( 1 + \frac{K_D}{K_P} s \right) \right|_{s=j\omega_g^*} = K_P \sqrt{1 + \left( \frac{K_D}{K_P} \right)^2 \omega_g^{*2}} = 2.844$$

$$K_P = \frac{2.844}{\sqrt{1 + (0.1120)^2 (3.09)^2}} = 2.687$$

et

$$K_D = \left( \frac{K_D}{K_P} \right) K_P = (0.1120)(2.687) = 0.301$$

- Le compensateur devient:

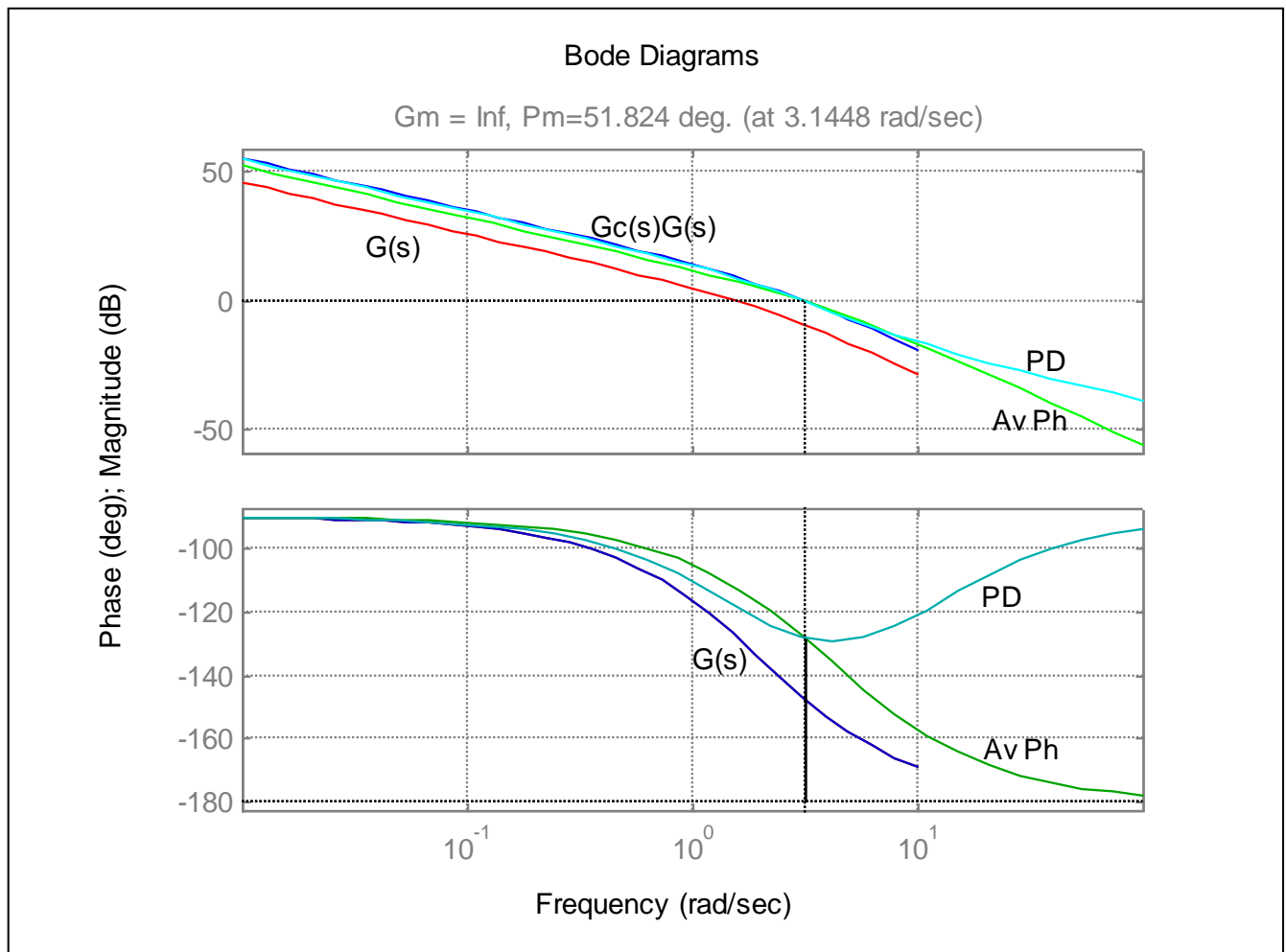
$$G_{PD}(s) = K_D(s - z) = 0.301(s + 8.93) = 0.301s + 2.687$$

- La FTBO compensée devient:

$$G_{PD}(s)G(s) = K_D(s - z) \frac{4}{s(s+2)} = (0.301s + 2.687) \frac{4}{s(s+2)}$$

- La réponse en fréquence ci-dessous illustre l'effet de la compensation PD de cette section comparée à celle de la compensation à avance de phase conçue à la Section 7.3:





- La marge de phase du système compensé est de 51.8 à 3.145 rad/s, telle que désirée.
- Le principal désavantage du compensateur PD (par rapport à l'avance de phase) est l'amplification du bruit à hautes fréquences.

### 7.8.4 Conception du PD par le diagramme de Bode (Méthode 2)

La Méthode 2 est utilisée quand les performances demandées sont exprimées en termes de marge de phase et d'erreur en régime permanent.

- La procédure de conception d'un compensateur PD avec le diagramme de Bode est semblable à celle d'un compensateur AvPh (Section 7.5.4). Les adaptations sont notées ci-dessous.
- Les étapes (1) et (2) sont inchangées.
  - traduire les spécifications
  - dessiner le diagramme et vérifier si les performances sont atteintes ou non.
- Étape (3) : Utiliser un compensateur PD :

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{K_D}{K_P} s \right)$$

- À partir l'exigence de performance sur l'erreur en régime permanent traduite en coefficient d'erreur statique désiré  $K_{pos}^*$ ,  $K_{vel}^*$ ,  $K_{acc}^*$ , calculer le gain du compensateur aux basses fréquences  $K^*$  requis pour satisfaire ces exigences :

$$K^* = \frac{K_{pos}^*}{K_{pos}}, \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}}, \frac{K_{acc}^*}{K_{acc}} \quad \text{selon la classe}$$

où  $K_{pos}$ ,  $K_{vel}$ ,  $K_{acc}$  est le gain d'erreur statique de la FTBO originale (selon sa classe). Sachant qu'aux basses fréquences, le gain d'un PD est donné par  $K_P$ , on obtient:

$$K^* = K_P$$

$K_P$  est maintenant connu.

- Les étapes (4) et (5) sont inchangées.
  - avec l'application du gain  $K^*$ , le tracé de  $K^*G(s)$  a une fréquence de traverse en gain dénotée  $\omega'_g$
  - vérifier si la  $PM^*$  est rencontrée à la nouvelle fréquence de traverse en gain  $s = j\omega'_g$
  - sinon calculer la marge de phase  $PM$  à  $\omega'_g$  et l'avance de phase requise  $\Delta\phi = PM^* - PM + \Delta\phi_{mrg}$
- Étapes (6)-(10): Un compensateur PD contribue une phase  $\phi_m$  à la fréquence  $\omega_m$  selon l'équation:

$$\phi_m = \tan^{-1} \left( \frac{K_D}{K_P} \omega_m \right) = \tan^{-1}(\omega_m T_D)$$

Le compensateur doit fournir cette avance de phase  $\Delta\phi = \phi_m$  à la fréquence de traverse en gain  $\omega_m = \omega_g^*$ . Tout comme pour l'AvPh, il faut déterminer cette fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  parce qu'elle va se faire déplacer de  $\omega'_g$  à cause du gain non unitaire du PD à cette fréquence: voir ci-dessous **Calcul de la fréquence de traverse du système compensé**. Connaissant ainsi  $\phi_m = \Delta\phi$  et  $\omega_m = \omega_g^*$ , on peut calculer le rapport  $\frac{K_D}{K_P}$  ou, de façon équivalente, le paramètre  $T_D$  et ensuite  $K_D$  avec  $K_P$  déjà calculé :

$$\frac{K_D}{K_P} = T_D = \frac{\tan \Delta\phi}{\omega_g^*} \quad K_D = K_P \left( \frac{K_D}{K_P} \right) = K_P T_D$$

Le compensateur est maintenant entièrement défini :

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{K_D}{K_P} s \right)$$

Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences

- **Calcul de la fréquence de traverse du système compensé**

- La fréquence de traverse du système compensé, i.e. la fréquence quand  $|G_{PD}(s)G(s)| = 1$ , est celle où la marge de phase est calculée. Cette fréquence détermine le point où l'avance de phase doit être ajoutée. Contrairement à la Méthode 1 où le gain  $K^*$  visait justement à atteindre la fréquence de traverse désirée, dans la Méthode 2, le gain  $K^*$  vise à atteindre un gain aux basses fréquences. Le gain du compensateur à la fréquence de traverse n'est donc plus égal à 1. Une fois le compensateur ajouté en cascade, ce gain non unitaire va déplacer la fréquence de traverse en gain qui était à  $\omega'_g$  après l'ajout du gain  $K^*$ . Il faut donc tenir compte du gain du compensateur  $|G_{PD}(s)|$  dans le calcul de cette fréquence de traverse.

- On veut trouver la fréquence  $\omega_g^*$  où :

$$|G_{PD}(s)G(s)|_{s=j\omega_g^*} = |K_P(1 + T_D s)G(s)|_{s=j\omega_g^*} = |K^*(1 + T_D s)G(s)|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

où on a utilisé  $K_P = K^*$  de l'étape (3), ce qui devient:

$$|K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*} |(1 + T_D s)|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

- Vu que la fréquence de traverse en gain est choisie pour être  $\omega_g^* = \omega_m$ , on a :

$$|(1 + T_D s)|_{s=j\omega_g^*} = \sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2}$$

où  $T_D \omega_m = \tan \Delta\phi$  est déjà connu.

- Le compensateur va donc amplifier la réponse en amplitude d'un gain  $\sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2} > 1$ .
- La fréquence de traverse désirée doit donc répondre à la condition :

$$|K^*G(s)|_{s=j\omega_g^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2}}$$

- On cherche donc sur le diagramme de Bode la fréquence où le tracé de  $|K^*G(s)|$  coupe le gain de  $\frac{1}{\sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2}}$  où, plus habilement, on cherche sur le diagramme de Bode la fréquence où le tracé de  $|K^*G(s)|\sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2}$  coupe le gain de 1.

- À cause de l'augmentation du gain par un facteur  $\sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2}$ , la fréquence de traverse en gain se déplace vers les hautes fréquences, augmentant la bande passante et diminuant ainsi la marge de phase. C'est pourquoi il fallait prévoir une correction  $\Delta\phi_{mrg}$  dans la compensation pour pré-compenser cette diminution de la marge de phase.

• **Exemple 7.9 : Reprise de l'Exemple 7.3 avec un compensateur PD**

- ♦ La FTBO originale d'un système est :

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

- ♦ Les exigences de performance sont:
- Erreur à une entrée échelon unitaire de 0.05
  - Marge de phase d'au moins 50 deg.

- ♦ La FTBO du système était :  $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$

- Étapes (1)-(3) :

Calcul du gain  $K^*$  :

$$K_P = K^* = \frac{K_{vel}^*}{K_{vel}} = \frac{20}{2} = 10$$

Le gain d'un PD aux basses fréquences est donné par  $K_P$ , donc on obtient:

$$K_P = K^* = 10$$

- Étapes (4)-(5) :

Déterminer à  $\omega'_g$  la phase  $\Delta\phi$  qui manque pour obtenir la marge de phase désirée :

$$PM = \langle K^* G(s) \rangle_{s=j\omega'_g} + 180 = \langle 10 \frac{4}{s(s+2)} \rangle_{s=j6.17} + 180 = -162 + 180 = 18 \text{ deg}$$

L'avance de phase que le compensateur devra contribuer est:

$$\Delta\phi = PM^* - PM + \Delta\phi_{mrg} = 50 - 18 + 5 = 37 \text{ deg}$$

- Étapes (6)-(10): Un compensateur PD contribue une phase  $\phi_m$  à la fréquence  $\omega_m$  selon l'équation:

$$\phi_m = \tan^{-1} \left( \frac{K_D}{K_P} \omega_m \right) = \tan^{-1}(\omega_m T_D)$$

Le compensateur fournit une phase  $\Delta\phi = \phi_m$  à la fréquence de traverse en gain  $\omega_m = \omega_g^*$ . On a :

$$\omega_m T_D = \tan \Delta\phi = \tan 37 = 0.754$$

Déterminer la fréquence de traverse désirée  $\omega_g^*$  du système compensé : localiser la fréquence où le tracé de  $|K^* G(s)|\sqrt{1 + T_D^2 \omega_m^2} = |K^* G(s)|\sqrt{1 + 0.7540^2} = |K^* G(s)|1.252$  coupe le gain de 1. On trouve on trouve  $\omega_g^* = \mathbf{6.94 \text{ rad/s}}$ . C'est à cette fréquence que le maximum de phase est ajouté :  $\omega_m = \omega_g^*$ . On peut calculer le rapport  $\frac{K_D}{K_P} = T_D$  et ensuite  $K_D$  avec  $K_P$  déjà calculé :

$$\frac{K_D}{K_P} = T_D = \frac{\tan \Delta \phi}{\omega_g^*} = \frac{0.7540}{6.939} = 0.1087 \quad K_D = K_P \left( \frac{K_D}{K_P} \right) = K_P T_D = (10)(0.1087) = 1.087$$

Le compensateur est maintenant entièrement défini :

$$G_{PD}(s) = K_P + K_D s = 10 + 1.087s = 10(1 + 0.1087s)$$

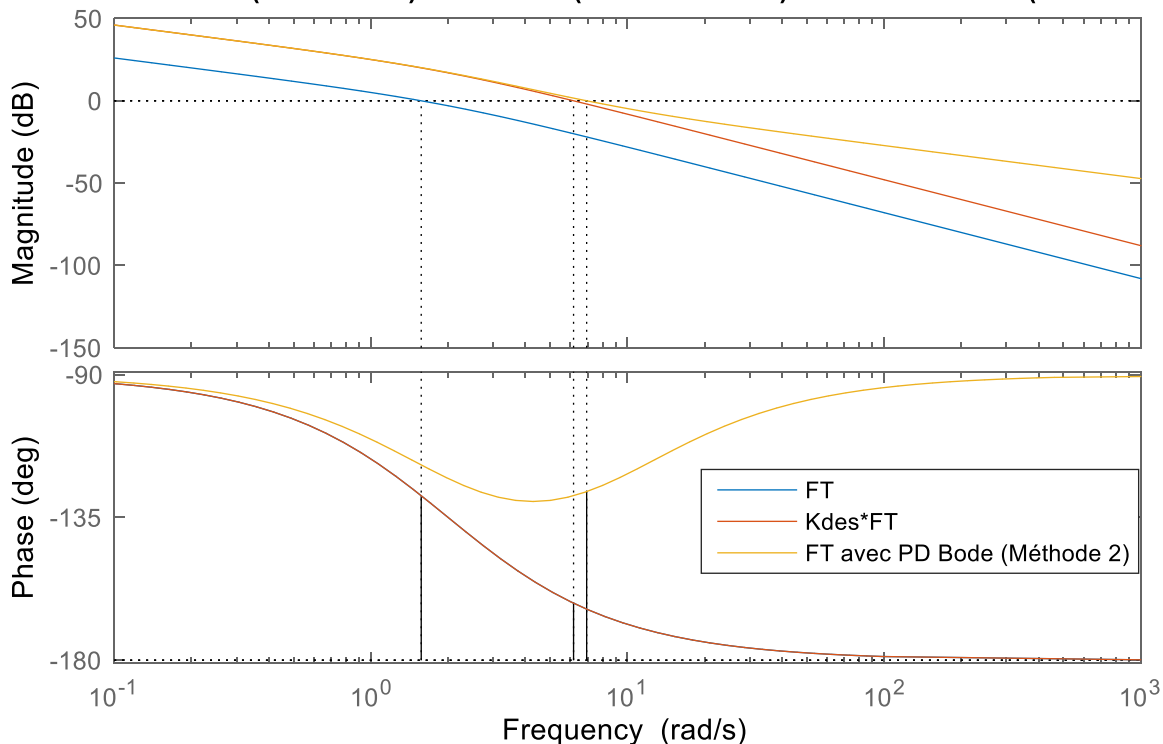
On vérifie ensuite que les exigences de performance ont été rencontrées.

- La FTBO compensée devient:

$$G_{PD}(s)G(s) = (K_P + K_D s)G(s) = (10 + 1.087s) \frac{4}{s(s+2)}$$

- Les étapes du design sont illustrées ci-dessous:

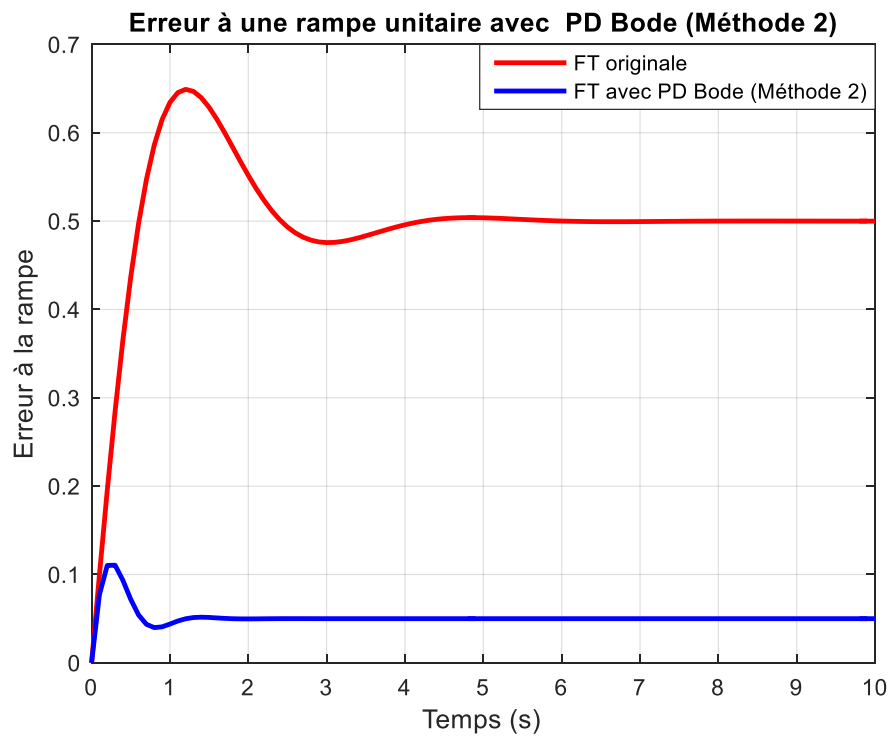
**FT avec PD Bode (Méthode 2) : GM = Inf (w = NaN rad/s) et PM = 53.1144 (w = 6.939 rad/s)**



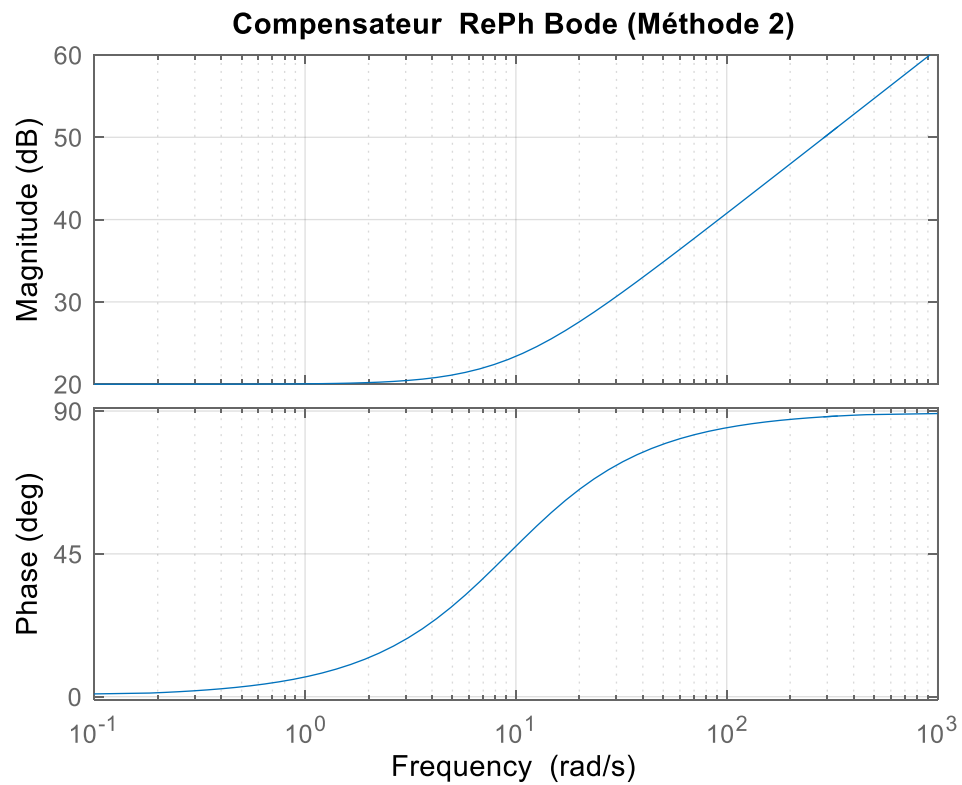
La marge de phase du système compensé est de 53.1o à 6.94 rad/s. Il aurait fallu surcompenser moins de 5 deg cette fois.

On voit que les hautes fréquences sont très amplifiées par rapport à l'AvPh de la Section 7.5.4. Le principal désavantage du compensateur PD est l'amplification du bruit à haute fréquence.

L'erreur à une entrée rampe unitaire est illustrées ci-dessous. On voit que l'erreur en régime permanent a été diminuée d'un facteur 10, de 0.50 à 0.05 :



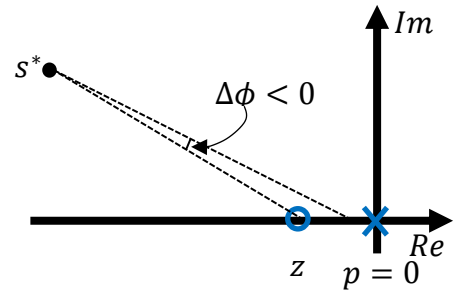
Le compensateur PD a la réponse en fréquence suivante où on voit l'avance de phase de 37 deg à la fréquence 6.939 rad/s:



## 7.9 Conception d'un compensateur à action proportionnelle-intégrale PI

### 7.9.1 Description du compensateur proportionnel-intégral PI

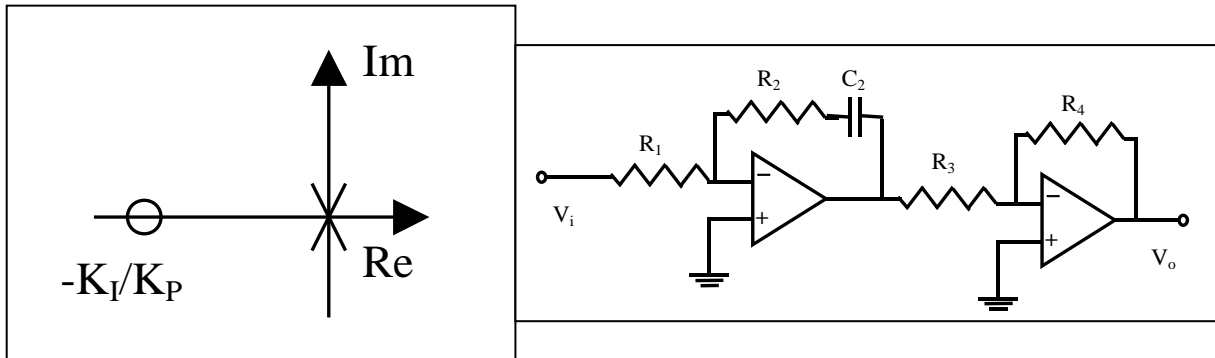
- Le compensateur PI est un cas limite du compensateur à retard de phase qui consiste à mettre le pôle du compensateur à l'origine, causant une amplification infinie des basses fréquences et augmentant la classe de la FTBO de 1.
- Les différentes formes de la fonction de transfert d'un PI sont :



$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \left( \frac{s + K_I/K_P}{s} \right) = K_P \frac{(s - z)}{s}$$

où  $z$  est le zéro du PI :  $z = -K_I/K_P$

- La commande PI introduit un pôle à  $s = 0$  et un zéro à  $s = -K_I/K_P$ .
- En comparant avec le RePh de la Section 7.6.1,  $G_r(s) = K_r \frac{(s-z)}{(s-p)}$ , on voit par analogie que le gain  $K_r$  du RePh correspond au gain  $K_P$  du PI quand  $s \rightarrow 0$ .



#### Effet du PI sur le lieu des racines

- Comme pour le RePh, la phase contributive par un tel compensateur à un point  $s$  est toujours négative:

$$\angle \left( K_P \frac{(s - z)}{s} \right) = \phi_z - \phi_p < 0$$

vu que le pôle est à droite du zéro.

- L'amplitude du PI à  $s$  est :

$$\left| K_P \frac{(s - z)}{s} \right| = \frac{K_r L_z}{L_p}$$

où les longueurs  $L_z$  et  $L_p$  sont les distances entre le point  $s$  et, respectivement, le zéro et le pôle.

- Aux basses fréquences ( $s \rightarrow 0$ ), l'amplitude est  $\frac{K_P(-z)}{(0)} = \infty$ . C'est l'avantage du PI : il amplifie infiniment les basses fréquences pour changer la classe du système. Le prix à payer est une légère perte de phase. Cette perte de phase peut être anticipée lors de la conception de l'AvPh en surcompensant l'avance de phase.

- La version simple du PI utilise le gain  $K_p = 1$ :

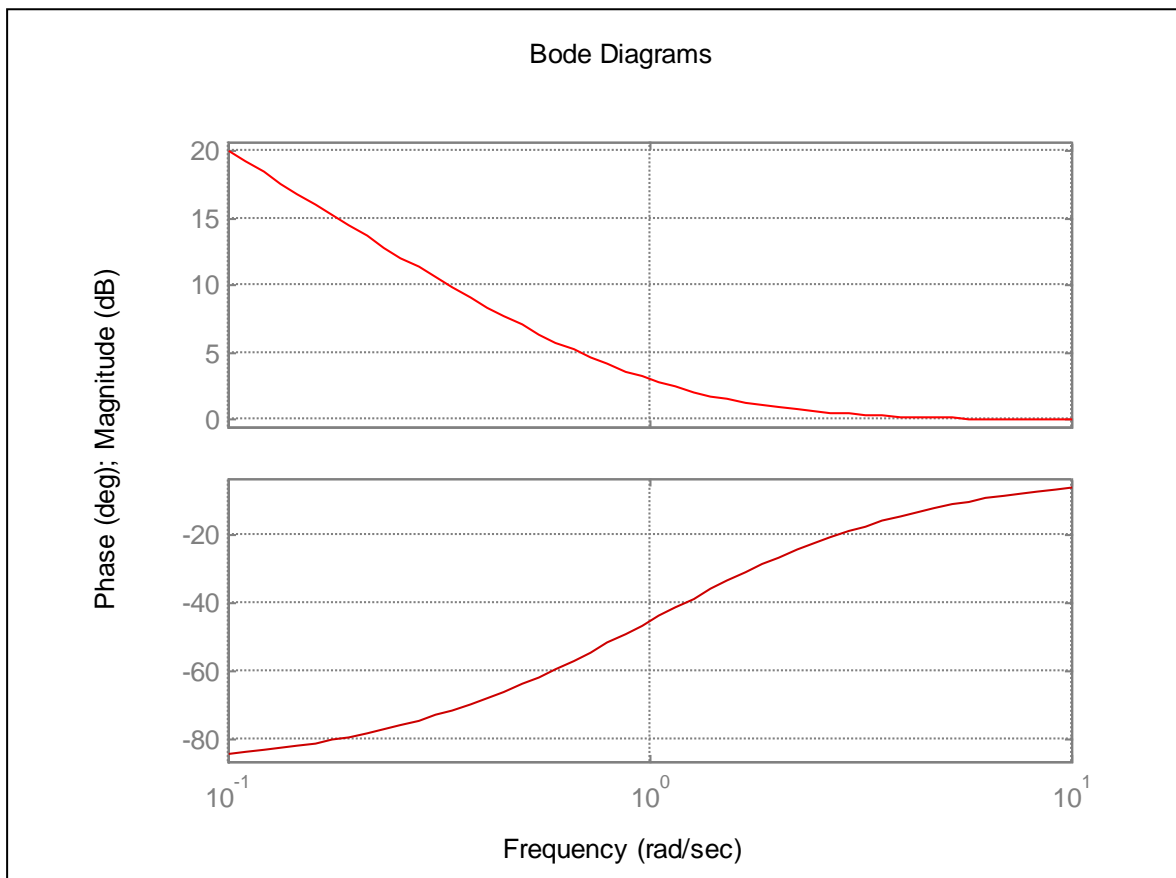
$$G_{PI}(s) = \left( \frac{s-z}{s} \right) \quad \text{RePh version simple}$$

- Dans la version générale du PI, le gain  $K_p$  est utilisé comme degré de liberté additionnel pour rencontrer d'autres spécifications, selon différents cas à être présentés plus loin :

$$G_{PI}(s) = K_p \left( \frac{s-z}{s} \right) \quad \text{RePh version générale}$$

### Effet du PI sur le diagramme de Bode

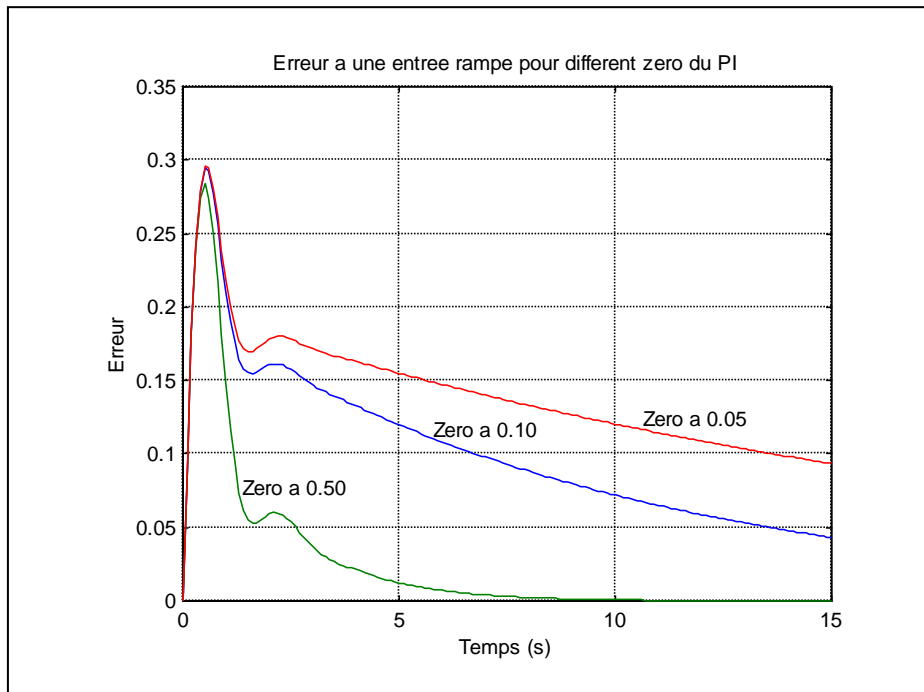
- Le diagramme de Bode démontre que la commande PI est un filtre passe-bas avec une pente de -20 dB/décade aux basses fréquences.



- Le compensateur PI augmente la classe du système et permet donc de réduire à zéro une erreur en régime permanent qui était constante avant la compensation.
- Dans le lieu des racines comme dans le lieu de Bode, la technique de compensation avec un PI est de mettre le zéro (la fréquence de coupure) le plus près du pôle (de l'origine) possible pour minimiser la perte de phase sur la réponse transitoire du système. Le lieu des racines et la réponse en fréquence (au-delà de la fréquence de coupure) ne seront ainsi presque pas altérés.



- Comme démontré à l'Exemple 7.5 de la Section 7.6.3, plus le zéro est éloigné de l'origine, plus la convergence en régime permanent est rapide mais plus la réponse transitoire (le lieu des racines) est perturbée par le compensateur.



## 7.9.2 Conception du PI par le lieu des racines

- Le but du compensateur proportionnel-intégral est de changer la classe du système en plaçant un pôle à l'origine (pur intégrateur) et en plaçant le zéro loin à droite des pôles dominants (facteur de 10 typiquement). De cette façon, le lieu des racines des pôles dominants n'est pas trop modifié, la perte de phase est minimisée et la réponse en régime transitoire est maintenue.
- On suppose ici aussi que les spécifications sur le régime transitoire ont déjà été rencontrées, soit que la FTBO originale les rencontrait déjà, soit qu'un AvPh a déjà été conçu et placé en cascade avec la FTBO originale. Dans les deux cas, il est supposé qu'on ne veut pas trop détruire le travail déjà fait.
- Dans le cas où un AvPh a déjà été mis en cascade, il faut faire le design du PI considérant l'AvPh déjà ajouté : on fait le design du PI en partant de  $G_a(s)G(s)$  ou de  $G_{PD}(s)G(s)$ .
- Il y a au moins 3 façons de faire la conception d'un PI :
  - la méthode classique équivalente à celle d'un RePh
  - la méthode du PD appliquée à  $G(s)/s$
  - la méthode qui contraint l'erreur en régime permanent de la nouvelle classe.
- **Procédure de conception d'un compensateur PI par le lieu des racines (classique)**

La procédure est parallèle à celle pour la conception du RePh de la Section 7.6.2 avec adaptations.

(1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer si cette spécification exige le changement de classe du système. Si oui, un PI est requis.

(2) Utiliser un compensateur PI :

$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \left( \frac{s + K_I/K_P}{s} \right) = K_P \left( \frac{s - z}{s} \right)$$

La FTBO compensée devient  $G_{PI}(s)G(s)$ . Le pôle est déjà placé à l'origine.

- (3) Comme règle du pouce, placer le zéro du PI à un facteur 10 de la partie réelle des pôles désirés (normalement obtenus avec un AvPh) :

$$z = \frac{\text{Re}(s^*)}{10}$$

Cela assure une séparation entre la paire pôle-zéro et les pôles désirés. Cela a pour conséquence que la perte de phase  $\Delta\phi$  causée par le RePh soit minimisée.

- (4) En ajoutant le compensateur PI, le lieu des racines original sera légèrement modifié. Dans certaines références, le gain  $K_r$  est calculé avec la condition d'amplitude pour que la position des pôles désirés soit réajustée suite à ce changement :

$$|G_{PI}(s^*)G(s^*)| = \left| K_P \left( \frac{s^* - z}{s^*} \right) G(s^*) \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_P = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^*} \right) G(s^*) \right|}$$

Vu que le lieu des racines est peu modifié, ce calcul donnera normalement  $K_P \approx 1$ . C'est pourquoi ce calcul est souvent omis pour donner la version simple du PI.

- (5) Redessiner le lieu des racines avec le système compensé. Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

• **Exemple 7.10: Amélioration de la performance en régime permanent de l'exemple 7.1**

- ♦ Exigence additionnelle de performance
  - Rendre l'erreur en régime permanent nulle pour une entrée rampe.
  - La FTBO compensée avec l'AvPh était (voir Exemple 7.1) :

$$G_a(s)G(s) = 4.731 \frac{(s + 2.928)}{(s + 5.464)} \frac{4}{s(s + 2)}$$

et les pôles désirés étaient à :  $s^* = -2.0 \pm j2\sqrt{3}$ .

- Étapes (1)-(3)  
Utiliser un compensateur PI :  $G_{PI}(s) = K_P \left( \frac{s - z}{s} \right)$  avec :

$$z = \frac{\text{Re}(s^*)}{10} = \frac{-2}{10} = -0.20$$

- Étapes (4)  
Calculer le gain  $K_P$  :

$$K_P = \frac{1}{\left| \left( \frac{s^* - z}{s^*} \right) G(s^*) \right|} = 1.0246$$

mais on le conserve à 1.

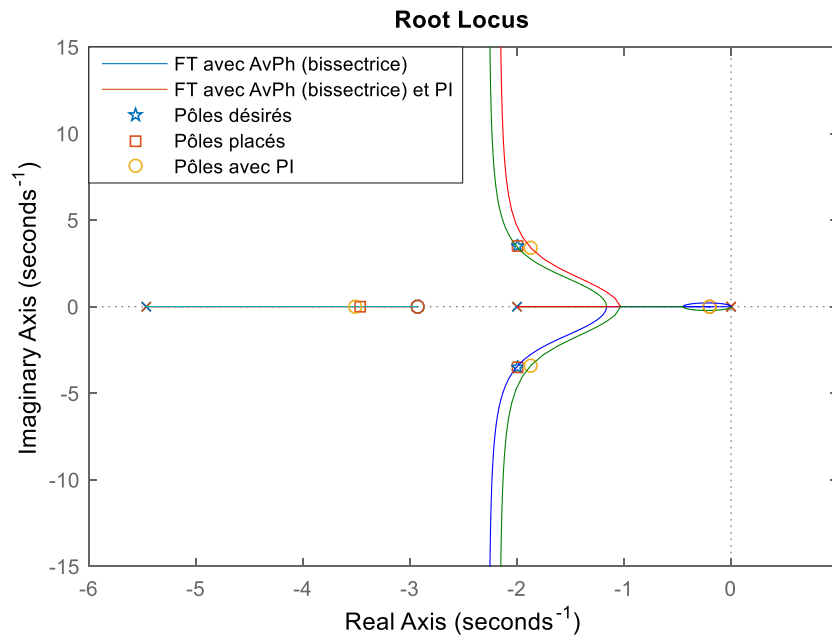
Le compensateur a la forme finale :

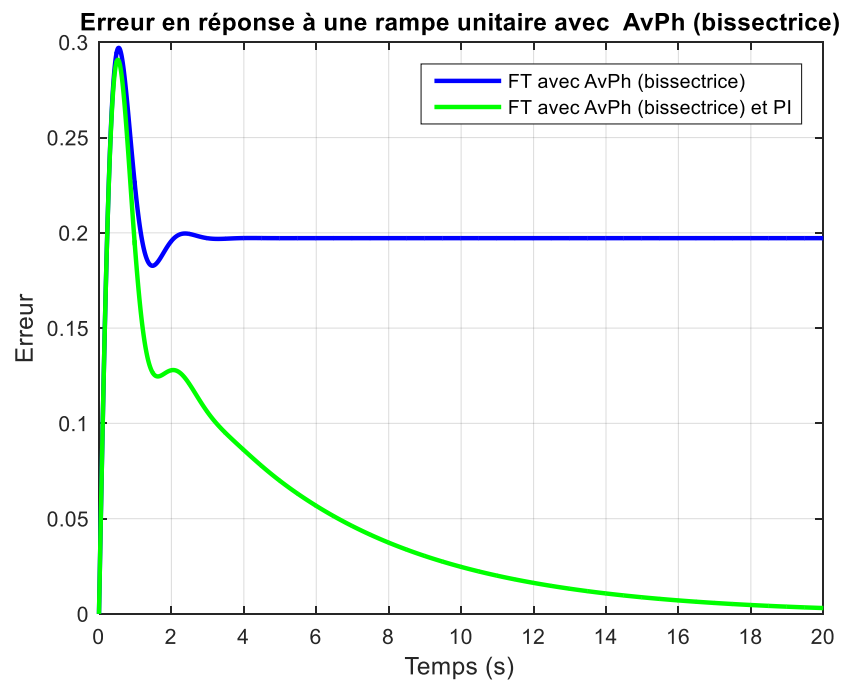
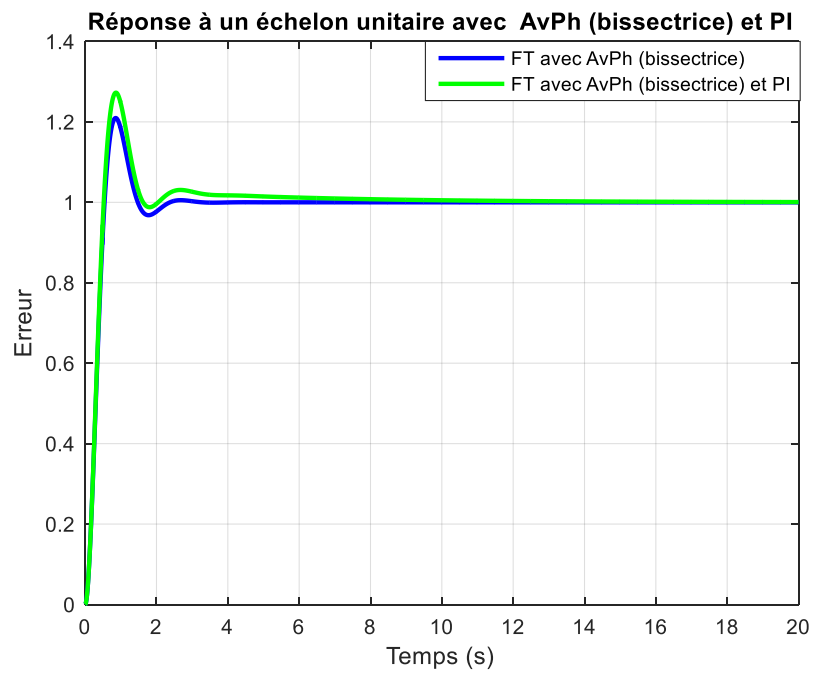
$$G_{PI}(s) = K_p \left( \frac{s - z}{s} \right) = \left( \frac{s + 0.2}{s} \right)$$

Le lieu des racines avec le PI est illustré. Le lieu avant le PI (i.e. la FTBO originale + l'AvPh de l'Exemple 7.1) est aussi montré pour voir le changement.

La réponse à une entrée échelon unitaire avant et après l'ajout du PI est illustrée sur le graphique suivant. On voit que la réponse transitoire est peu affectée.

L'erreur en régime permanent pour une entrée rampe unitaire est aussi illustrée au graphique suivant. Le FTBO compensés avec l'AvPh était de classe 1. Avec le PI, la FTBO est devenue de classe 2. L'erreur en régime permanent à la rampe est donc zéro.





- **Procédure de conception d'un compensateur PI par le lieu des racines (PD à  $G(s)/s$ )**

- Cette procédure permet de changer la FTBO de classe pour rendre nulle une erreur en régime permanent qui était constante tout en gérant des critères en régime transitoire, par exemple, des spécifications qui imposent des pôles désirés en boucle fermée  $p^*$ .
- La FTBO compensée avec un PI devient  $G_{PI}(s)G(s)$  qui peut s'écrire :

$$G_{PI}(s)G(s) = K_P \left( \frac{s-z}{s} \right) G(s) = K_P(s-z) \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$$

- Le facteur à gauche a la même structure qu'un PD si on considère le gain  $K_P$  du PI comme étant le gain  $K_D$  du PD. Le facteur à droite est une nouvelle « FTBO originale » de la forme  $\frac{G(s)}{s}$ . Donc, une autre façon de concevoir un PI est la suivante :

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer si cette spécification exige le changement de classe du système. Si oui, un PI est requis.

- (2) Ajouter un intégrateur pur à la FTBO originale pour obtenir une nouvelle FTBO  $\frac{G(s)}{s}$ .

- (3) Faire la conception d'un compensateur PD de la forme  $K_P(s-z)$  appliquée à la FTBO  $\frac{G(s)}{s}$  pour rencontrer des critères en régime transitoire. Noter que le  $K_D(s-z)$  d'un PD devient  $K_P(s-z)$  ici. Noter aussi que l'ajout du pôle à l'origine fait perdre beaucoup de phase à la FTBO originale et, habituellement, l'avance de phase nécessaire requiert un double PD.

- **Procédure de conception d'un compensateur PI par le lieu des racines (nouvelle classe)**

- Cette procédure permet de changer la FTBO de classe pour rendre nulle une erreur en régime permanent qui était constante tout en rencontrant des spécifications sur l'erreur en régime permanent dans la nouvelle classe.
- Par exemple : le PI appliqué à une FTBO de classe 0 rend nulle l'erreur à un échelon et permet d'atteindre une erreur en régime permanent spécifiée pour une rampe.
- Autre exemple : le PI appliqué à une FTBO de classe 1 rend nulle l'erreur à une rampe et permet d'atteindre une erreur en régime permanent spécifiée pour une parabole.

**(a) Classe 0 à classe 1**

Une fonction de transfert en boucle ouverte de **Classe 0** dénotée  $G(s)$  a un coefficient d'erreur statique  $K_{pos} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$ . On ajoute en cascade un compensateur PI de la forme  $G_{PI}(s) = K_P + K_I/s = (K_P s + K_I)/s$  dans un asservissement avec un retour unitaire. Le  $K_{vel}$  du nouveau système de classe 1 devient :

$$K_{vel} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{PI}(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_P s + K_I}{s} G(s) = K_I G(0) = K_I K_{pos}$$

L'erreur en régime permanent à une entrée rampe unitaire sera donnée par  $e_{RP} = 1/(K_{pos} K_I)$ . En choisissant le paramètre  $K_I$  pour satisfaire cette relation, on peut rencontrer une spécification d'erreur à une rampe.

**(b) Classe 1 à classe 2**

Une fonction de transfert en boucle ouverte de **Classe 1** dénotée  $G(s) = G_1(s)/s$  a un coefficient d'erreur statique  $K_{vel} = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = G_1(0)$ . On ajoute en cascade un compensateur PI de la forme  $G_{PI}(s) = K_p + K_I/s = (K_p s + K_I)/s$  dans un asservissement avec un retour unitaire. Le  $K_{acc}$  du nouveau système de classe 2 devient :

$$K_{acc} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{PI}(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_p s + K_I}{s} \frac{G_1(s)}{s} = K_I G_1(0) = K_I K_{vel}$$

L'erreur en régime permanent à une entrée parabole unitaire sera donnée par  $e_{RP} = 1/(K_{vel} K_I)$ . En choisissant le paramètre  $K_I$  pour satisfaire cette relation, on peut rencontrer une spécification d'erreur à une parabole.

La procédure est parallèle à celle pour la conception du RePh de la Section 7.6.2 avec adaptations.

(1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer si cette spécification exige le changement de classe du système. Si oui, un PI est requis.

(2) Utiliser un compensateur PI :

$$G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s} = K_p \frac{(s + K_I/K_p)}{s} = K_p \frac{(s - z)}{s}$$

La FTBO compensée devient  $G_{PI}(s)G(s)$ . Le pôle est déjà placé à l'origine.

(3) Comme règle du pouce, placer le zéro du PI à un facteur 10 de la partie réelle des pôles désirés (normalement obtenus avec un AvPh) :

$$z = \frac{\text{Re}(s^*)}{10}$$

Cela assure une séparation entre la paire pôle-zéro et les pôles désirés. Cela a pour conséquence que la perte de phase  $\Delta\phi$  causée par le PI soit minimisée. Vu que :

$$z = -\frac{K_I}{K_p}$$

une relation entre les deux gains est obtenue.

(4) Comme démontré ci-dessus, une autre relation pour  $K_I$  est obtenue par la spécification d'une erreur en régime permanent  $e_{RP}^*$  pour la classe supérieure :

$$K_I = \frac{1}{K_{pos} e_{RP}^* (\text{rampe})} \quad \text{passage de classe 0 à classe 1}$$

où le  $K_{pos}$  est le coefficient d'erreur statique de la FTBO originale de classe 0

$$K_I = \frac{1}{K_{vel} e_{RP}^* (\text{parabole})} \quad \text{passage de classe 1 à classe 2}$$

où le  $K_{vel}$  est le coefficient d'erreur statique de la FTBO originale de classe 1.

On peut donc calculer  $K_I$  et, avec ce  $K_I$ , le  $K_P$  :

$$K_P = -\frac{K_I}{z}$$

Le PI est entièrement spécifié.

- (5) Redessiner le lieu des racines avec le système compensé. Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

### 7.9.3 Conception du PI par le diagramme de Bode

- Le but du compensateur PI est de changer la classe du système en plaçant un pôle à l'origine et en plaçant le zéro loin à gauche de la fréquence de traverse en gain (facteur de 10 typiquement). De cette façon, la perte de phase à la fréquence de traverse en gain est minimisée et les spécifications en régime transitoire ( $PM^*$ ,  $\omega_g^*$ ) sont maintenues.
- On suppose ici aussi que les spécifications sur le régime transitoire ont déjà été rencontrées, soit que la FTBO originale les rencontrait déjà, soit qu'un AvPh a déjà été conçu et placé en cascade avec la FTBO originale. Dans les deux cas, il est supposé qu'on ne veut pas trop détruire le travail déjà fait.
- Dans le cas où un AvPh a déjà été mis en cascade, il faut faire le design du PI considérant l'AvPh déjà ajouté : on fait le design du PI en partant de  $G_a(s)G(s)$  ou de  $G_{PD}(s)G(s)$ .
- Il y a au moins 3 façons de faire la conception d'un PI :
  - la méthode classique équivalente à celle d'un RePh
  - la méthode du PD appliqué à  $G(s)/s$
  - la méthode qui contraint l'erreur en régime permanent de la nouvelle classe.
- **Procédure de conception d'un compensateur PI par le diagramme de Bode (classique)**

La procédure est très semblable à celle pour la conception du RePh de la Section 7.6.3 avec adaptations.

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer si cette spécification exige le changement de classe du système. Si oui, un PI est requis.
- (2) Utiliser un compensateur PI :

$$G_{PI}(s) = K_P \left( \frac{s - z}{s} \right)$$

La FTBO compensée devient  $G_{PI}(s)G(s)$ . Le pôle est déjà placé à l'origine.

- (3) Comme règle du pouce, placer le zéro du PI à un facteur 10 de la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  (normalement obtenus avec un AvPh) :

$$z = -\frac{\omega_g^*}{10}$$

Cela assure une séparation entre la paire pôle-zéro et les pôles désirés. Cela a pour conséquence que la perte de phase causée par le RePh soit minimisée.

- (4) Le gain du compensateur doit être tel que le gain de  $G_{PI}(s)G(s)$  à  $\omega_g^*$  doit revenir à 1 pour que la marge de phase soit toujours mesurée à cet endroit:

$$|G_{PI}(s)G(s)|_{s=j\omega_g^*} = K_P \left| \left( \frac{s-z}{s} \right) G(s) \right|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

et le gain  $K_P$  est calculé avec :

$$K_P = \frac{1}{\left| \left( \frac{s-z}{s} \right) G(s) \right|_{s=j\omega_g^*}}$$

Dans le cas où le design d'un AvPh a déjà été fait en amont pour rencontrer cette exigence, on sait déjà que :

$$|G(s)|_{s=j\omega_g^*} = 1$$

et le gain  $K_P$  calculé avec la condition d'amplitude à  $\omega_g^*$  devient:

$$K_P = \frac{1}{\left| \left( \frac{s-z}{s} \right) \right|_{s=j\omega_g^*}}$$

Tout comme pour le lieu des racines, cela donne  $K_P \approx 1$  et on accepte  $K_P = 1$ . Dans ce cas ( $K_P = 1$ ), il faut réaliser que la fréquence de traverse en gain sera légèrement différente du  $\omega_g^*$  spécifié dans l'AvPh. Dans le cas où on utilise le calcul exact de  $K_P$  ci-dessus, le  $\omega_g^*$  spécifié sera exactement atteint mais l'erreur en régime permanent sera légèrement différente de celle spécifiée. Il y a un choix à faire.

- (5) Redessiner le lieu des racines avec le système compensé. Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences

• **Procédure de conception d'un compensateur PI par le diagramme de Bode (PD à  $G(s)/s$ )**

- Cette procédure permet de changer la FTBO de classe pour rendre nulle une erreur en régime permanent qui était constante tout en gérant des critères en régime transitoire, par exemple, des spécifications qui imposent des pôles désirés en boucle fermée  $p^*$ .
- La FTBO compensée avec un PI devient  $G_{PI}(s)G(s)$  qui peut s'écrire :

$$G_{PI}(s)G(s) = K_P \left( \frac{s-z}{s} \right) G(s) = K_P (s-z) \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$$

- Le facteur à gauche a la même structure qu'un PD si on considère le gain  $K_P$  du PI comme étant le gain  $K_D$  du PD. Le facteur à droite est une nouvelle « FTBO originale » de la forme  $\frac{G(s)}{s}$ . Donc, une autre façon de concevoir un PI est la suivante :
- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer si cette spécification exige le changement de classe du système. Si oui, un PI est requis.
  - (2) Ajouter un intégrateur pur à la FTBO originale pour obtenir une nouvelle FTBO  $\frac{G(s)}{s}$ .
  - (3) Faire la conception d'un compensateur PD de la forme  $K_P(s-z)$  appliquée à la FTBO  $\frac{G(s)}{s}$  pour rencontrer des critères en régime transitoire. Noter que le  $K_D(s-z)$  d'un PD devient  $K_P(s-z)$  ici. Noter aussi que l'ajout du pôle à l'origine fait perdre beaucoup de phase à la FTBO originale et, habituellement, l'avance de phase nécessaire requiert un double PD.



- **Procédure de conception d'un compensateur PI par le diagramme de Bode (nouvelle classe)**

- Cette procédure permet de changer la FTBO de classe pour rendre nulle une erreur en régime permanent qui était constante tout en rencontrant des spécifications sur l'erreur en régime permanent dans la nouvelle classe.
- Par exemple : le PI appliqué à une FTBO de classe 0 rend nulle l'erreur à un échelon et permet d'atteindre une erreur en régime permanent spécifiée pour une rampe.
- Autre exemple : le PI appliqué à une FTBO de classe 1 rend nulle l'erreur à une rampe et permet d'atteindre une erreur en régime permanent spécifiée pour une parabole.
- Les équations développées à la Section 7.9.2 sont réutilisées ici.

**(a) Classe 0 à classe 1**

$$K_{vel} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{PI}(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_p s + K_I}{s} G(s) = K_I G(0) = K_I K_{pos}$$

**(b) Classe 1 à classe 2**

$$K_{acc} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{PI}(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_p s + K_I}{s} \frac{G_1(s)}{s} = K_I G_1(0) = K_I K_{vel}$$

La procédure est parallèle à celle pour la conception du RePh de la Section 7.6.2 avec adaptations.

- (1) À partir des exigences sur l'erreur en régime permanent, déterminer si cette spécification exige le changement de classe du système. Si oui, un PI est requis.
- (2) Utiliser un compensateur PI :

$$G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p s + K_I}{s} = K_p \frac{(s + K_I/K_p)}{s} = K_p \frac{(s - z)}{s}$$

La FTBO compensée devient  $G_{PI}(s)G(s)$ . Le pôle est déjà placé à l'origine.

- (3) Comme règle du pouce, placer le zéro du PI à un facteur 10 de la fréquence de traverse en gain  $\omega_g^*$  (normalement obtenus avec un AvPh) :

$$z = -\frac{\omega_g^*}{10}$$

Cela assurera une perte de phase maximum de 5 deg à  $\omega_g^*$ . Vu que :

$$z = -\frac{K_I}{K_p}$$

une relation entre les deux gains est obtenue.

- (4) Comme démontré ci-dessus, une autre relation pour  $K_I$  est obtenue par la spécification d'une erreur en régime permanent  $e_{RP}^*$  pour la classe supérieure :

$$K_I = \frac{1}{K_{pos} e_{RP}^*(rampe)} \quad \text{passage de classe 0 à classe 1}$$

où le  $K_{pos}$  est le coefficient d'erreur statique de la FTBO originale de classe 0, ou

$$K_I = \frac{1}{K_{vel} e_{RP}^* (\text{parabole})} \quad \text{passage de classe 1 à classe 2}$$

où le  $K_{vel}$  est le coefficient d'erreur statique de la FTBO originale de classe 1.

On peut donc calculer  $K_I$  et, avec ce  $K_I$ , le  $K_P$  :

$$K_P = -\frac{K_I}{z}$$

Le PI est entièrement spécifié.

- (5) Redessiner le lieu des racines avec le système compensé. Vérifier que les exigences de performance ont été rencontrées. Sinon, itérer sur le design jusqu'à la satisfaction des exigences.

## 7.10 Conception d'un compensateur PID

### 7.10.1 Compensateur PID

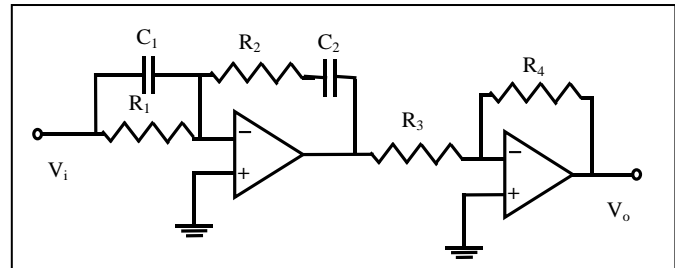
- Le compensateur PID est un cas particulier d'un compensateur avance-retard de phase. La commande à action PID combine les effets de la commande PD et ceux de la commande PI.

- Fonction de transfert : 
$$G_c(s) = K_p \left( 1 + T_D s + \frac{1/T_r}{s} \right) = K_p \left( \frac{T_D s^2 + s + 1/T_r}{s} \right)$$

- Autre forme :

$$G_{PID}(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}$$

- Le PID a 2 zéros et 1 pôle à l'origine.
- Les techniques les plus communes de conception d'un PID sont :
  - PD + PI
  - double PD à  $G(s)/s$
  - méthode empirique de Ziegler-Nichold
  - méthode analytique (compensation optimale ITAE)
  - essai et erreur.



### 7.10.2 PI + PD

- Une façon de faire la conception d'un PID est de faire un PD suivi d'un PI en cascade selon les techniques expliquées dans les sections précédentes:

$$G_{PID}(s) = G_{PI}(s)G_{PD}(s) = K_p \left( \frac{s - z_I}{s} \right) K_D (s - z_D)$$

- Cela se transforme en :

$$G_{PID}(s) = K_p K_D \left( \frac{s^2 - (z_I + z_D)s + z_I z_D}{s} \right)$$

et donc, de la même forme générale d'un PID.

### 7.10.3 Double PD à $G(s)/s$

- Une autre façon de faire la conception d'un PID est de faire un double PD appliqué à la fonction de transfert  $G(s)/s$ .
- En effet, une FTBO  $G(s)$  compensée par une PID peut prendre la forme :

$$G_{PID}(s)G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{s} G(s) = K(s - z_1)(s - z_2) \left[ \frac{G(s)}{s} \right]$$

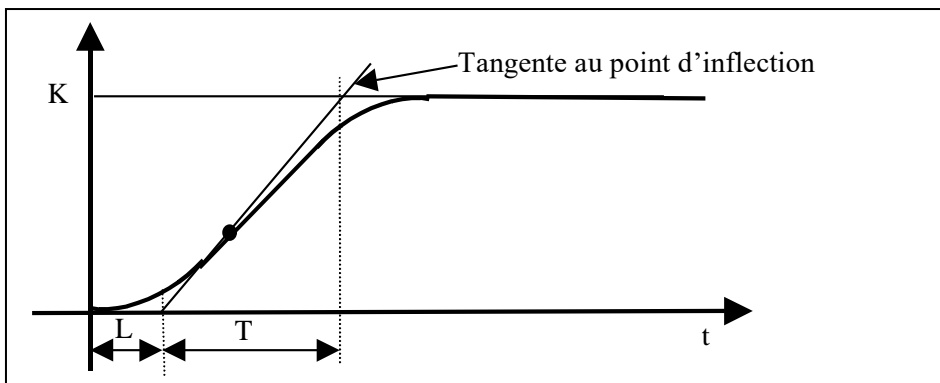
- Le terme  $\left[\frac{G(s)}{s}\right]$  est la FTBO originale à laquelle on a ajouté un pur intégrateur.
- Le terme  $K(s - z_1)(s - z_2)$  est un double PD. Les deux zéros peuvent être choisis pour rencontrer les spécifications en régime transitoire. Une façon simple est de faire des zéros répétés  $z_1 = z_2 = z$  :

$$K(s - z_1)(s - z_2) = K(s - z)^2$$

- Ainsi, l'avance de phase désirée  $\Delta\phi$  est divisée en deux, on trouve le zéro  $z$  d'un PD qui contribue une avance de phase de  $\Delta\phi/2$  deg et on calcule le gain  $K$  correspondant au compensateur  $(s - z)^2$ .

#### 7.10.4 Méthode empirique de Ziegler-Nichols

- Souvent utilisée quand le modèle mathématique du système n'est pas (ou est peu) connu mais que des mesure expérimentales ou numériques peuvent être obtenues (approche « boîte noire »).
- Le but de cette méthode est de déterminer les paramètres  $K_p$ ,  $T_D$  et  $T_r$  du compensateur pour obtenir un dépassement maximum de 25 %.
- **Technique de conception Ziegler-Nichols (1<sup>ère</sup> méthode de Z-N)**
  - (1) Obtenir la réponse du système à une entrée échelon. Si la réponse du système est semblable à celle illustrée ci-dessous (forme en « S », i.e. pas de pôles complexes dominants), la méthode peut s'appliquer.
  - (2) Déterminer les paramètres  $L$  (retard) et  $T$  (constante de temps) graphiquement à partir de la réponse obtenue en (1).
  - (3) Calculer les paramètres du P, PI ou PID selon le tableau ci-dessous.
  - (4) Modifier si nécessaire les paramètres pour obtenir la réponse désirée (essai et erreur).



Type de correcteur	$K_p$	$T_r$	$T_D$
P	$T/L$	$\infty$	0
PI	$0.9 T/L$	$L / 0.3$	0
PID	$1.2 T/L$	$2 L$	$0.5 L$

### 7.10.5 Compensation optimale ITAE

- Dans cette technique de conception, on détermine analytiquement la fonction de transfert en boucle fermée en fonction des paramètres  $K_p$ ,  $T_r$  et  $T_D$  du compensateur. On compare ensuite les coefficients du dénominateur avec ceux qui donnent la réponse optimale au sens de l'ITAE.
- Rappel : Indice **ITAE** = *integral of time multiplied by absolute error*

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

- Les coefficients  $a_k$   $k = 0, 1, \dots, n$  de la fonction de transfert d'ordre  $n$ :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

qui rendent la réponse optimale pour le critère ITAE sont donnés par :

Ordre	$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
1						1	$\omega_n$
2					1	$1.4 \omega_n$	$\omega_n^2$
3				1	$1.75 \omega_n$	$2.15 \omega_n^2$	$\omega_n^3$
4			1	$2.1 \omega_n$	$3.4 \omega_n^2$	$2.7 \omega_n^3$	$\omega_n^4$
5		1	$2.8 \omega_n$	$5.0 \omega_n^2$	$5.5 \omega_n^3$	$3.4 \omega_n^4$	$\omega_n^5$
6	1	$3.25 \omega_n$	$6.6 \omega_n^2$	$8.6 \omega_n^3$	$7.45 \omega_n^4$	$3.95 \omega_n^5$	$\omega_n^6$

- **Procédure pour compensation optimale au sens de l'ITAE**
  - (1) Développer analytiquement la fonction de transfert en boucle fermée avec les paramètres du compensateur comme inconnues.
  - (2) Comparer les coefficients de l'équation caractéristique avec les paramètres optimum pour le critère ITAE (tableau ci-dessus). Pour un système compensé d'ordre  $n$ , il y aura  $n$  équations.
  - (3) Choisir le paramètre standard  $\omega_n$  à partir de l'exigence en temps du premier pic ou à partir de celle du temps de stabilisation. Vu que ces critères dépendent non seulement de  $\omega_n$  mais aussi de l'amortissement  $\zeta$ , choisir  $\zeta = 0.7$ .
  - (4) Résoudre les équations pour obtenir la solution aux paramètres du compensateur PID.
- **Exemple 7.11 – Compensation optimale ITAE pour un système d'ordre 2**

♦ Fonction de transfert en boucle ouverte :  $G(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$ .

♦ Compensateur PID de la forme :  $G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D(s + z_1)(s + z_2)}{s}$ ,

$$\text{avec } z_1 z_2 = K_I/K_D \text{ et } (z_1 + z_2) = K_p/K_D.$$

- ♦ L'équation caractéristique  $1 + G_c(s)G(s)$  devient :

$$1 + G_c(s)G(s) = 1 + \frac{K_D(s + z_1)(s + z_2)}{s} \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = 0 \text{ ou}$$

$$s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + KK_D(s + z_1)(s + z_2) = 0.$$

- ♦ En faisant la multiplication des termes et en divisant par  $a_3 = \tau_1 \tau_2$ , on obtient :

$$s^3 + \frac{(\tau_1 + \tau_2 + KK_D)}{\tau_1 \tau_2} s^2 + \frac{[1 + (z_1 + z_2)KK_D]}{\tau_1 \tau_2} s + \frac{KK_D z_1 z_2}{\tau_1 \tau_2} = 0.$$

- ♦ En comparant avec les coefficients optimum, on obtient les équations:

$$1.75 \omega_n = \frac{(\tau_1 + \tau_2 + KK_D)}{\tau_1 \tau_2} \quad 2.15 \omega_n^2 = \frac{[1 + (z_1 + z_2)KK_D]}{\tau_1 \tau_2} \quad \omega_n^3 = \frac{KK_D z_1 z_2}{\tau_1 \tau_2}$$

dont la solution est:

$$\begin{aligned} KK_D &= 1.75 \omega_n \tau_1 \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2) & K_D &= (KK_D)/K \\ z_1 z_2 &= \omega_n^3 \tau_1 \tau_2 / KK_D & K_p &= K_D(z_1 + z_2) \\ (z_1 + z_2) &= (2.15 \omega_n^2 \tau_1 \tau_2 - 1)/KK_D & K_I &= K_D z_1 z_2 \end{aligned}$$

### 7.10.6 Essai et erreur

- Cette approche consiste à faire varier les 3 paramètres du compensateur utilisant une connaissance de leurs effets (P : vitesse de réponse, D : amortissement, I : erreur en R.P.).
- Une méthode consiste à choisir un petit gain  $K_p$  (la moitié de la valeur qui amène l'instabilité), d'augmenter le gain intégral pour obtenir la performance en R.P. désirée et finalement d'augmenter le gain dérivé et ajuster le gain  $K_p$  pour obtenir la réponse transitoire désirée.