

The background of the slide is a complex network graph. It consists of numerous circular nodes connected by thin black lines. A specific region of this graph is highlighted with a semi-transparent purple fill and a dashed black border. Within this highlighted area, one node is distinguished by being a solid blue color, while all other nodes are light gray with black outlines. The text is centered over the graph.

Busqueda en espais d'estats

Models d'intel·ligència artificial

Busqueda

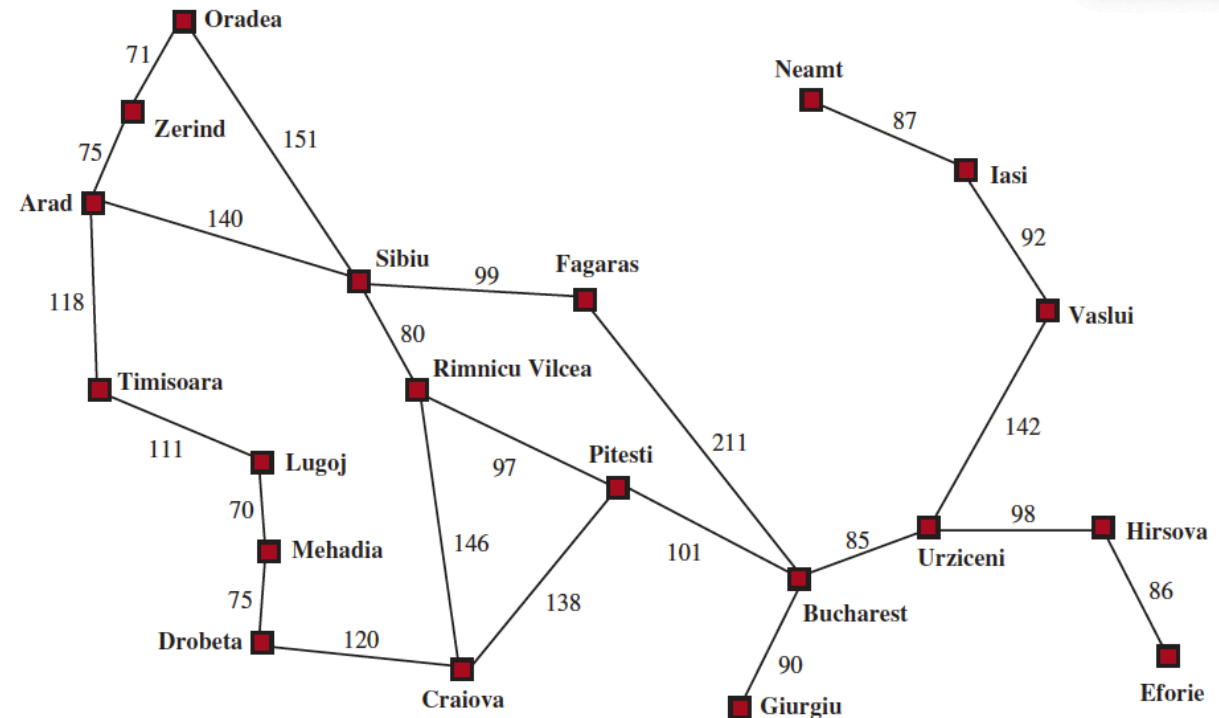
- Fonamental en molts dominis
 - Jocs, Planificació...
- Funciona molt bé en altres tipus de problemes
 - Diagnòstic, Control, Aprenentatge, ...
- És una tècnica molt general
 - Podem aplicar-la a problemes sense solució específica
 - Molt útil per aproximar
- Les tècniques de cerca són la base de molts sistemes intel·ligents

Busqueda en espais d'estats

- Els **problemes de búsqueda** tindran
 - Un estat inicial
 - Una funció de succesió
 - Defineix els estats successors d'un estat i el cost per arribar a aquests estats
 - Un estat final
- Una **solució** és una seqüència d'estats (un plà) que ens porten de l'estat inicial a l'estat final

Exemple: Viatjar per Romania

- **Espai d'estats:** Ciutats
- **Funcio de succesió:**
Carreteres. Cost: Distància
- **Estat inicial:** Arad
- **Comprovar si un estat és final:** Estat = Bucharest
- **Solució:** Seqüència de ciutats que ens porten d'Arad a Bucharest



Exemple: Botelles d'aigua (I)

“ Tenim dues botelles d'aigua, una de 4 litres i una altra de 3 litres. Volem obtenir 2 litres d'aigua. Podem omplir les botelles, buidar-les o trasvasar l'aigua d'una a l'altra. ”

- **Espai d'estats:** Estat de les botelles
- **Funcio de succesió:** Operacions de buidar, omplir i trasvasar
- **Estat inicial:** (0,0)
- **Comprovar si un estat és final:** Estat = (2,0)
- **Solució:** Seqüència d'operacions que ens porten de (0,0) a (2,0)

Exemple: Botelles d'aigua (II)

Observacions

- Tal com està formulat el problema, no poden haver-hi estats no enters.
- Alguns estats són impossibles d'aconseguir. Ex: (1, 2)
- Algunes accions no produeixen canvis.
 - Ex: $(0,0) + \text{buidar}(4) = (0,0)$

Exemple: Puzzle 8 (I)

“ Tenim un tauler de 3x3 amb 8 peces numerades del 1 al 8 i un espai buit. Volem moure les peces per aconseguir l'estat final.

”

- **Espai d'estats:** -
- **Funcio de sucesió:** -
- **Estat inicial:** -
- **Comprovar si un estat és final:** -
- **Solució:** -

7	2	4
5		6
8	3	1

Estat inicial

	1	2
3	4	5
6	7	8

Estat final

Exemple: Puzzle 8 (II)

- **Espai d'estats:** Les diferents posicions de les peces. *Quantes?*
- **Funcio de sucesió:** Podem moure la peça buida en les 4 direccions. *Podem sempre fer els 4?*
- **Estat inicial:** P.e. el de la figura anterior
- **Comprovar si un estat és final:** Verificar que les peces estan a la posició correcta.
- **Solució:** Seqüència de moviments que ens porten a l'estat final

7	2	4
5		6
8	3	1

Estat inicial

	1	2
3	4	5
6	7	8

Estat final

Exemple: Puzzle 8 (III)

Observacions

- El nombre d'estats és molt gran: $9! = 362.880$ estats
- Solament quan la peça buida està al centre del tauler podem fer els 4 moviments
- No tots els estats tenen solució
- Hi ha moltes solucions
 - Quina és la millor?

Situacions més complicades

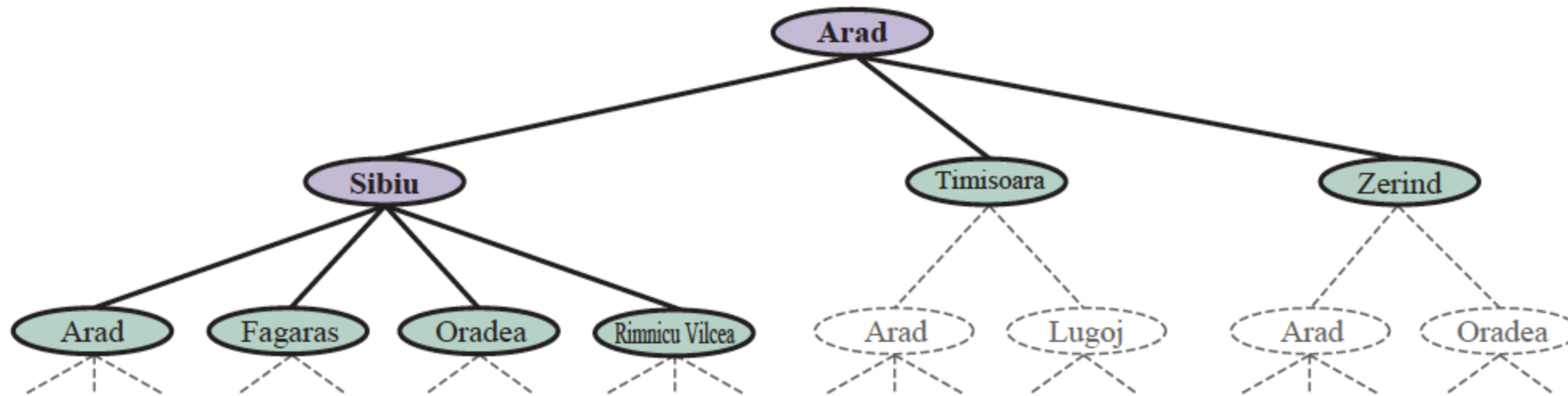
- En els exemples anteriors, de cada estat coneixíem
 - Els estats successors
 - El cost de cada estat successor
- En altres problemes el resultat de cada acció és incert
- Veurem tècniques per tractar algunes d'aquestes situacions
 - *Mètodes probabilístics*: assignar probabilitats als estats successors
 - *Mètodes de cerca adversarial*: els estats successors són determinats per un oponent

Representació dels problemes de cerca

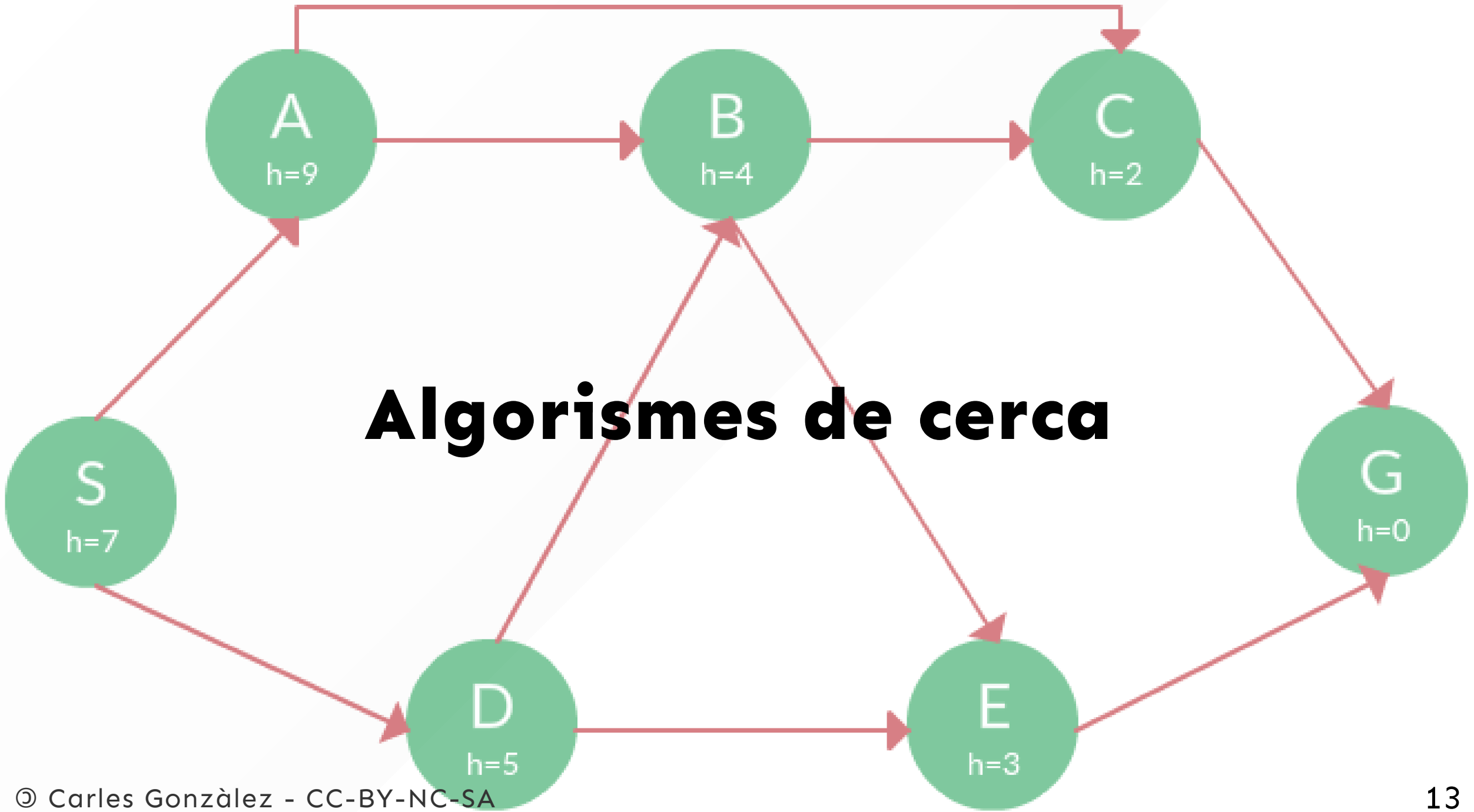
Arbres de cerca

- Els problemes de cerca es poden representar com un arbre
- Els nodes són els estats
- Les arestes són les accions
- Els costos són els pesos de les arestes
- Podem aplicar algorismes de cerca de camins mínims
- L'espai de cerca ha de ser finit

Exemple: Viatjar per Romania



- Els nodes ja visitats es mostren en gris
- Els oberts en blanc i els encara per visitar en linees discontinües.



Definició

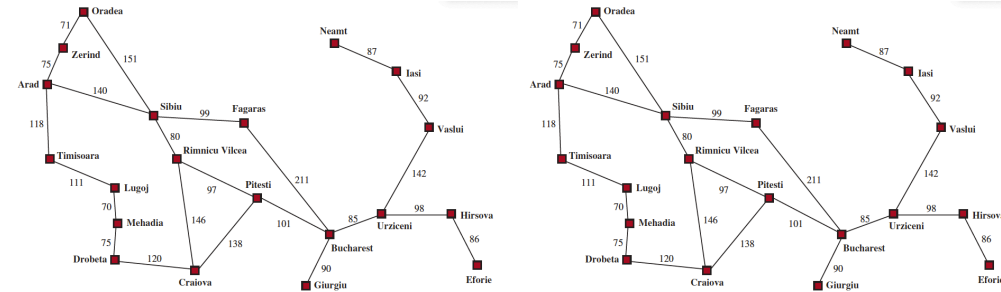
- Els algorismes de cerca són algorismes de propòsit general
 - Poden ser aplicats a qualsevol problema de cerca
 - Els problemes de cerca són un cas particular dels problemes de camins mínims
- Sortida:
 - Una serie d'accions que ens porten de l'estat inicial a l'estat final
 - El resultat pot ser una solució òptima en cost, òptima en temps o no tindre cap tipus de garantia d'optimalitat.

Funcionament general

- Tindrem una llista d'estats coneguts pero per visitar anomenada **frontera**. Inicialment la frontera conté l'estat inicial.
- En cada iteració, agafarem un estat de la frontera, aplicarem la funció de succesió i afegirem els nous estats a la frontera.
 - Si l'estat és final, hem acabat.
 - Si la frontera està buida, no hi ha solució.
 - Per cada estat anotarem el seu pare, per poder reconstruir la solució.
- En cada iteració, podem aplicar una estratègia per decidir quin estat de la frontera agafem.

Exemple de funcionament (Alternativa I)

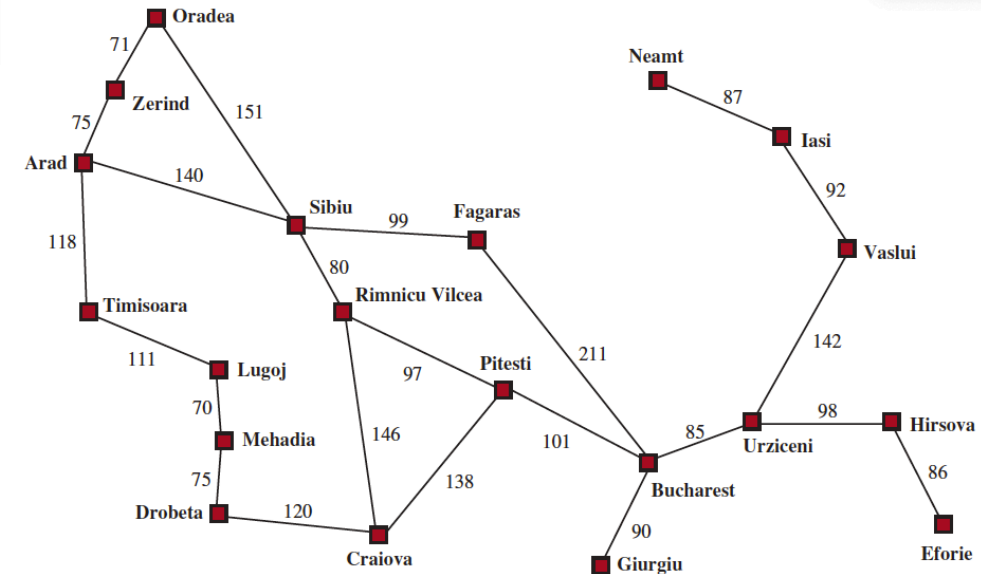
- Frontera: {**Arad**}. Objectiu: **Bucharest**
2. Obrim **Arad**: {Z<A>, T<A>, S<A>},
 3. Obrim **Sibiu**: {Z<A>, T<A>, A<S,A>, O<S,A>, F<S,A>, R<S,A>}
 4. Obrim **Fagaras**: {Z<A>, T<A>, A<S,A>, O<S,A>, R<S,A>, S<F,S,A>, B<F,S,A>}
 5. Tenim la solució en la frontera. Cost:
140+99+211 = **450**



{ font-size:26px; }</style>

Exemple de funcionament (Alternativa II)

1. Frontera: {**Arad**}. Objectiu: **Bucharest**
2. Obrim **Arad**: {Z<A>, T<A>, S<A>},
3. Obrim **Sibiu**: {Z<A>, T<A>, A<S,A>, O<S,A>, F<S,A>, R<S,A>}
4. Obrim **R.V**: {Z<A>, T<A>, A<S,A>, O<S,A>, R<S,A>, S<R,S,A>},



“ section { font-size:32px; }</style>

”

Exemple de funcionament

Observacions

- En aquest exemple, els estats són les ciutats
- Problemes:
 - Poden apareixer estats repetits en la frontera
 - També es poden produir cicles
- L'ordre de les ciutats en la frontera determinarà:
 - Si trobem o no la solució
 - El cost de la solució
 - El temps d'execució i l'espai de memòria necessari

Propietats dels algorismes de cerca

- **Criteris** per comparar algorismes de cerca
 - **Completitud:** Garantia de trobar una solució si existeix
 - **Optimalitat:** Garantia de trobar la solució òptima
 - **Complexitat temporal:** Temps d'execució
 - **Complexitat espacial:** Memòria necessària

7	2	4
5		6
8	3	1

Búsqueda no informada

L

7	2	4
	5	6
8	3	1

R

7	2	4
5	6	
8	3	1

U

7		4
5	2	6
8	3	1

D

7	2	4
5	3	6
8		1

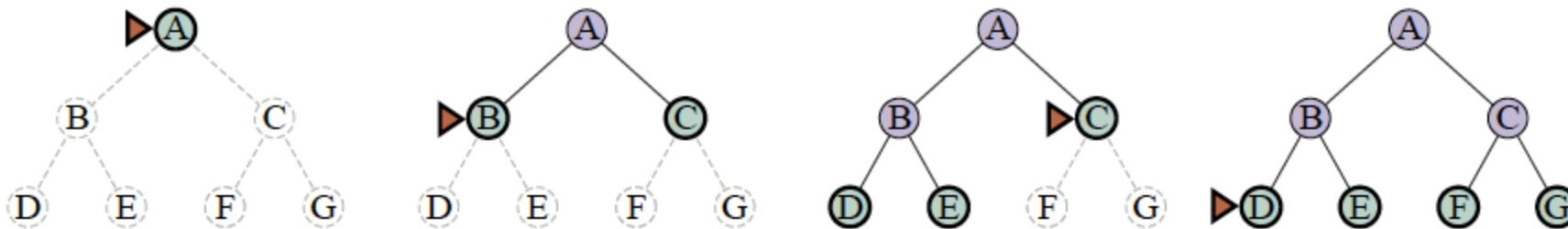
Búsqueda no informada

Característiques

- No utilitza cap informació sobre el problema
- Aplica una estratègia de cerca fins que troba la solució
- Aquesta estratègia determina l'ordre en què s'exploraran els estats
- L'estrategia serà fixa, no pot canviar en funció del problema
- Alguns algorismes de cerca no informada:
 - **Amplitud, Profunditat, Cost uniforme, Profunditat limitada, Profunditat iterativa**

Búsqueda en amplitud

- Estrategia utilitzable quan totes les accions tenen el mateix cost
- Explora tots els estats a una profunditat p abans d'explorar els estats a profunditat $p + 1$
- Garanteix trobar la solució òptima
- Definim la **frontera** com una **cua** (FIFO)
- Els estats ja visitats es guarden en una llista o conjunt (per evitar cicles)



Implementació

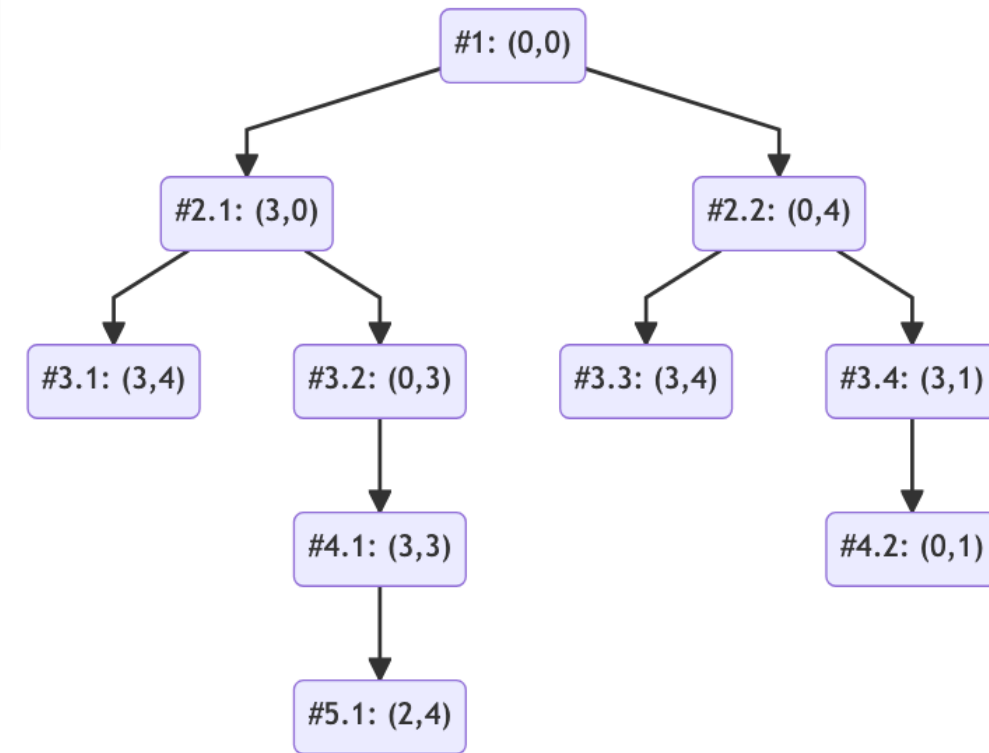
```
def cerca_amplada(estat_inicial):  
    """Cerca en amplada en un problema."""  
    frontera = collections.deque([estat_inicial])  
    visitats = set()  
  
    while frontera:  
        estat = frontera.popleft()  
        visitats.add(estat)  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for successor in sucesors(estat):  
            if successor not in visitats:  
                frontera.append(successor)
```

Exemple: Botelles d'aigua (I)

- **Estat inicial:** $(0,0)$ - **Estat final:** $(2,*)$ o $(*, 2)$
 - **Funcio de succesió:** Operacions de buidar, omplir i trasvasar
1. Frontera = $\{ \langle (0,0) \rangle \}$
 2. Frontera = $\{ \langle (0,0), (3,0) \rangle, \langle (0,0), (0,4) \rangle \}$
 3. Frontera = $\{ \langle (0,0), (0,4) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (0,0) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (3,4) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (0,3) \rangle \}$
 4. Frontera = $\{ \langle (0,0), (3,0), (0,0) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (3,4) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (0,3) \rangle, \langle (0,0), (0,4), (0,0) \rangle, \langle (0,0), (0,4), (3,4) \rangle, \langle (0,0), (0,4), (3,1) \rangle \}$
 5. ...

Exemple: Botelles d'aigua (II)

- Representació de l'arbre de cerca
 - Cada node és un parell de valors (a,b) que representen l'estat de les botelles
 - La busca en amplitud explora l'arbre per nivells
 - Podem observar que solament s'explora un nombre molt reduït de tots els possibles estats



Propietats

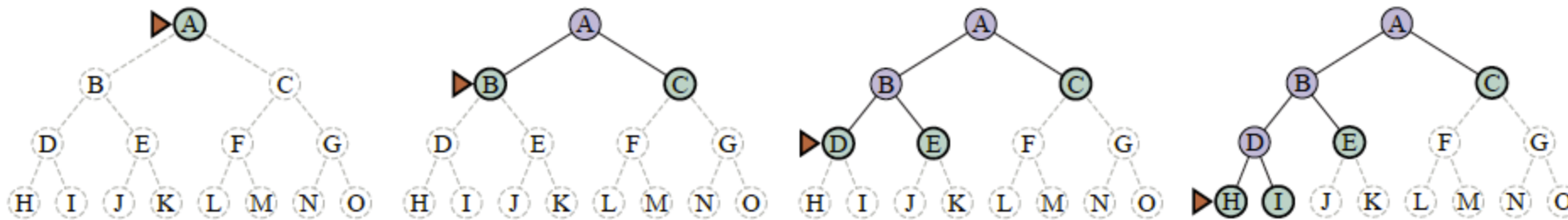
Propietat	Valor	Comentaris
Completitud	Sí	Si l'espai de cerca és de memòria, la solució es trobarà en algun moment.
Optimalitat	Sí	Si totes les accions tenen el mateix cost, la primera solució trobada serà òptima.s
Complexitat temporal	$O(b^d)$	On b és el factor de ramificació i d és la profunditat de la solució
Complexitat espacial	$O(b^d)$	On b és el factor de ramificació i d és la profunditat de la solució

Problemes

- La complexitat espacial és un problema real.
 - Per exemple, suposem que cada estat ocupa **1KB** i que el **factor de ramificació és 10**.
 - Si la solució es troba a una profunditat de **10**, necessitarem **10GB** de memòria.
 - Si es troba a una profunditat de **100**, necessitarem **10TB**.
 - Si es troba a una profunditat de **1000**, necessitarem **10PB**.
- Típicament, *ens quedarem sense espai abans de quedar-nos sense temps*.

Búsqueda en profundidad

- L'estratègia de cerca en profunditat és similar a la de cerca en amplitud
- Utilitza una **pila** (LIFO) en lloc d'una cua
- Aquesta estratègia **no** garanteix trobar la solució òptima
- L'algorisme arriba fins a una profunditat màxima m i després retrocedeix fins a trobar un camí alternatiu



Implementació

```
def cerca_profunditat(estat_inicial):  
    """Cerca en profunditat en un problema."""  
    frontera = collections.deque([estat_inicial])  
  
    while frontera:  
        estat = frontera.pop()  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for sucesor in sucesors(estat):  
            if not cicle(problema, sucesor):  
                frontera.append(sucesor)
```

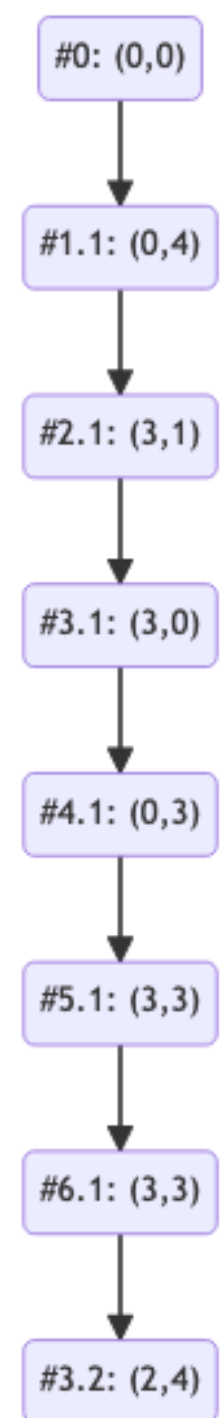
Exemple: Botelles d'aigua (I)

- **Estat inicial:** $(0,0)$ - **Estat final:** $(2,*)$ o $(*, 2)$
- **Funcio de succesió:** Operacions de buidar, omplir i trasvasar

1. Frontera = $\{ \langle (0,0) \rangle \}$
2. Frontera = $\{ \langle (0,0), (3,0) \rangle, \langle (0,0), (0,4) \rangle \}$
3. Frontera = $\{ \langle (0,0), (3,0), (0,0) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (3,4) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (0,3) \rangle, \langle (0,0), (0,4) \rangle \}$
4. Frontera = $\{ \langle (0,0), (3,0), (0,0), (3,0) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (0,0), (0,4) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (3,4) \rangle, \langle (0,0), (3,0), (0,3) \rangle, \langle (0,0), (0,4) \rangle \}$
5. ...

Exemple: Botelles d'aigua (II)

- Representació de l'arbre de cerca
 - Cada node és un parell de valors (a,b) que representen l'estat de les botelles
 - La busca en profunditat explora l'arbre fins a trobar una solució
 - Si no troba una solució, torna enrere fins a trobar un camí alternatiu
 - Si les solucions son infinites, l'algorisme pot no acabar mai



Propietats

Propietat	Valor	Comentaris
Completitud	No	Si l'espai de cerca és finit, la solució es trobarà en algun moment
Optimalitat	No	La primera solució trobada no té perquè ser òptima
Complexitat temporal	$O(b^m)$	On b és el factor de ramificació i m és la profunditat màxima de l'arbre. En valors d' m molt grans, pot ser molt alta
Complexitat espacial	$O(bm)$	On b és el factor de ramificació i m és la profunditat màxima de l'arbre. És molt millor que la de la cerca en amplitud si no hi ha cicles; si hi ha cicles, és la mateixa que la de la cerca en amplitud

Quan utilitzar-la?

- En la pràctica, la cerca en profunditat és molt més ràpida que la cerca en amplitud
- La cerca en profunditat no necessita tant espai com la cerca en amplitud
- La cerca en profunditat és molt útil quan:
 - El factor de ramificació és molt gran
 - La solució es troba a una profunditat molt baixa
 - No ens importa trobar la solució òptima
 - Verifiquem que no es creen cicles

Búsqueda en profundidad limitada

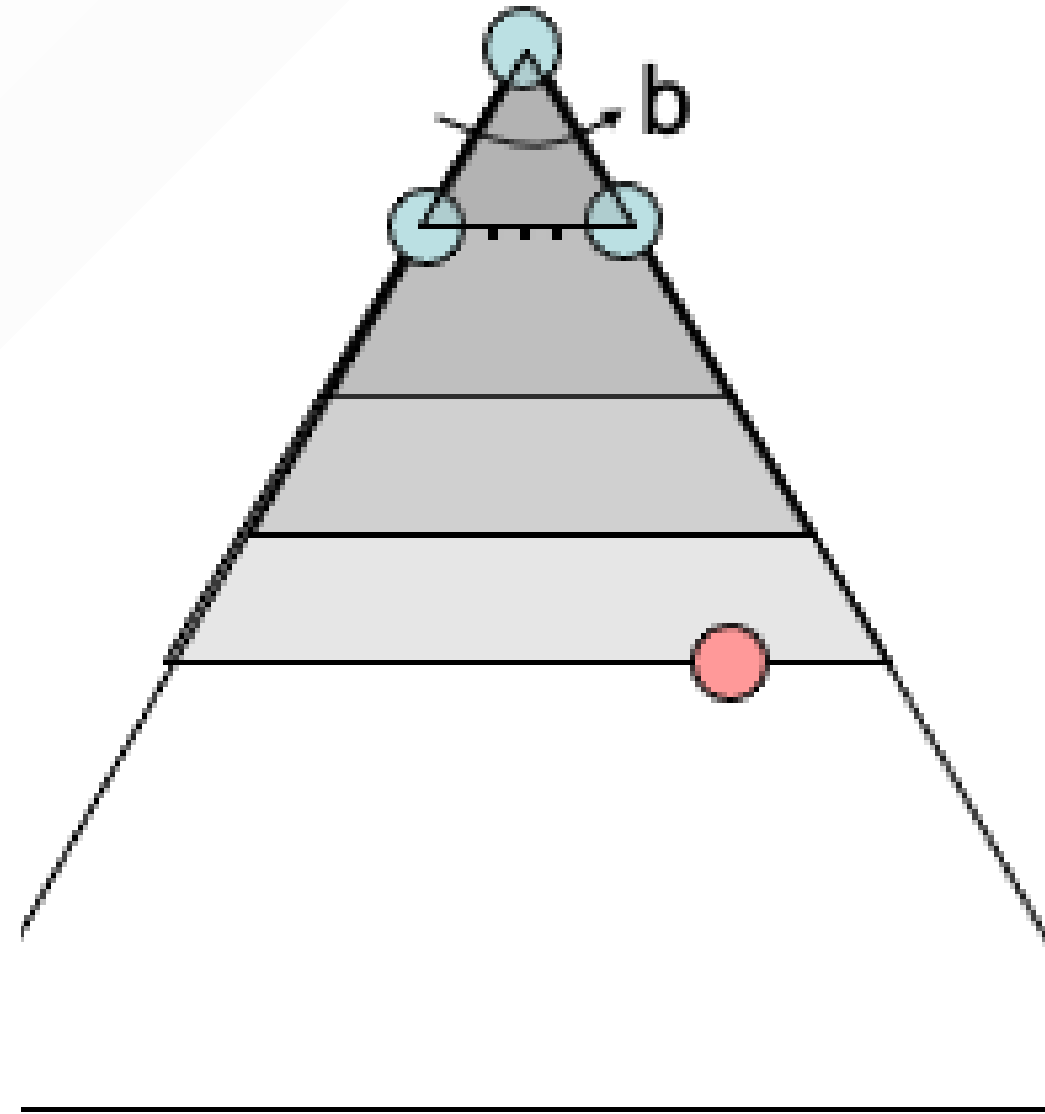
- La cerca en profunditat limitada és una variant de la cerca en profunditat
- En aquest cas, la cerca s'atura quan s'arriba a una profunditat màxima l
- Si la solució es troba a una profunditat $d > l$, no es trobarà
- La cerca en profunditat limitada és completa si l és suficientment gran
- Ens permet evitar el problema de la cerca en profunditat quan les solucions son infinites

Implementació

```
def cerca_profunditat_limitada(estat_inicial, l):  
    """Cerca en profunditat limitada en un problema."""  
    frontera = collections.deque([estat_inicial])  
  
    while frontera:  
        estat = frontera.pop()  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for sucesor in sucesors(estat):  
            if not cicle(problema, sucesor) and profunditat(sucesor) < l:  
                frontera.append(sucesor)
```

Búsqueda en profundidad iterativa

- Solució al problema de la cerca en amplitud y la cerca en profunditat utilitzant una única estratègia
- La cerca en profunditat iterativa és una cerca en profunditat limitada amb l creixent
- Comença amb $l = 0$ i va incrementant l fins a trobar la solució

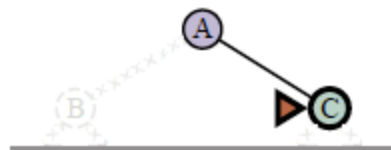


Traçat de l'algorisme (I)

limit: 0

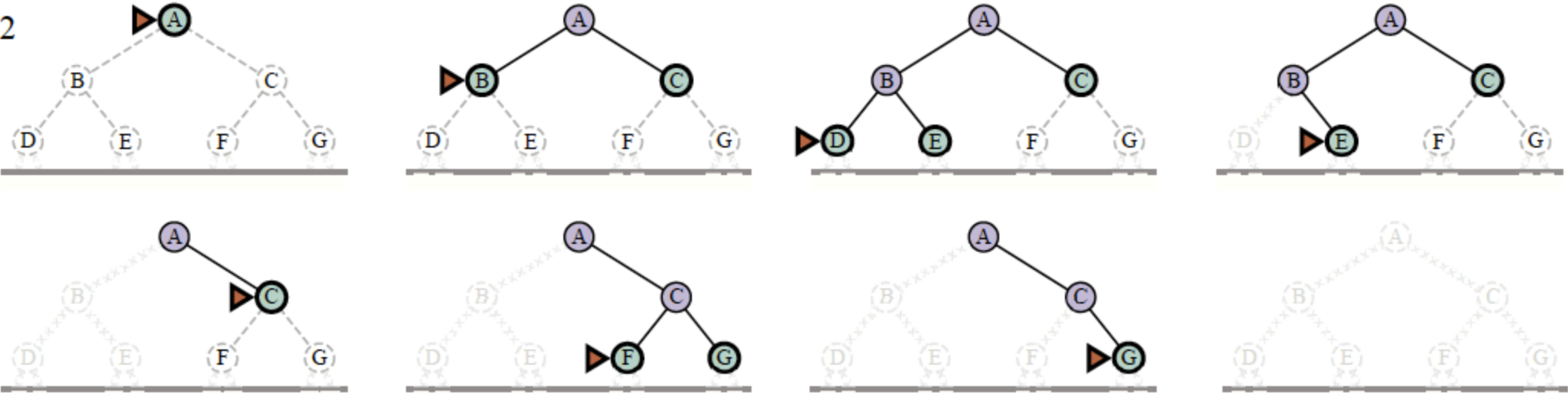


limit: 1



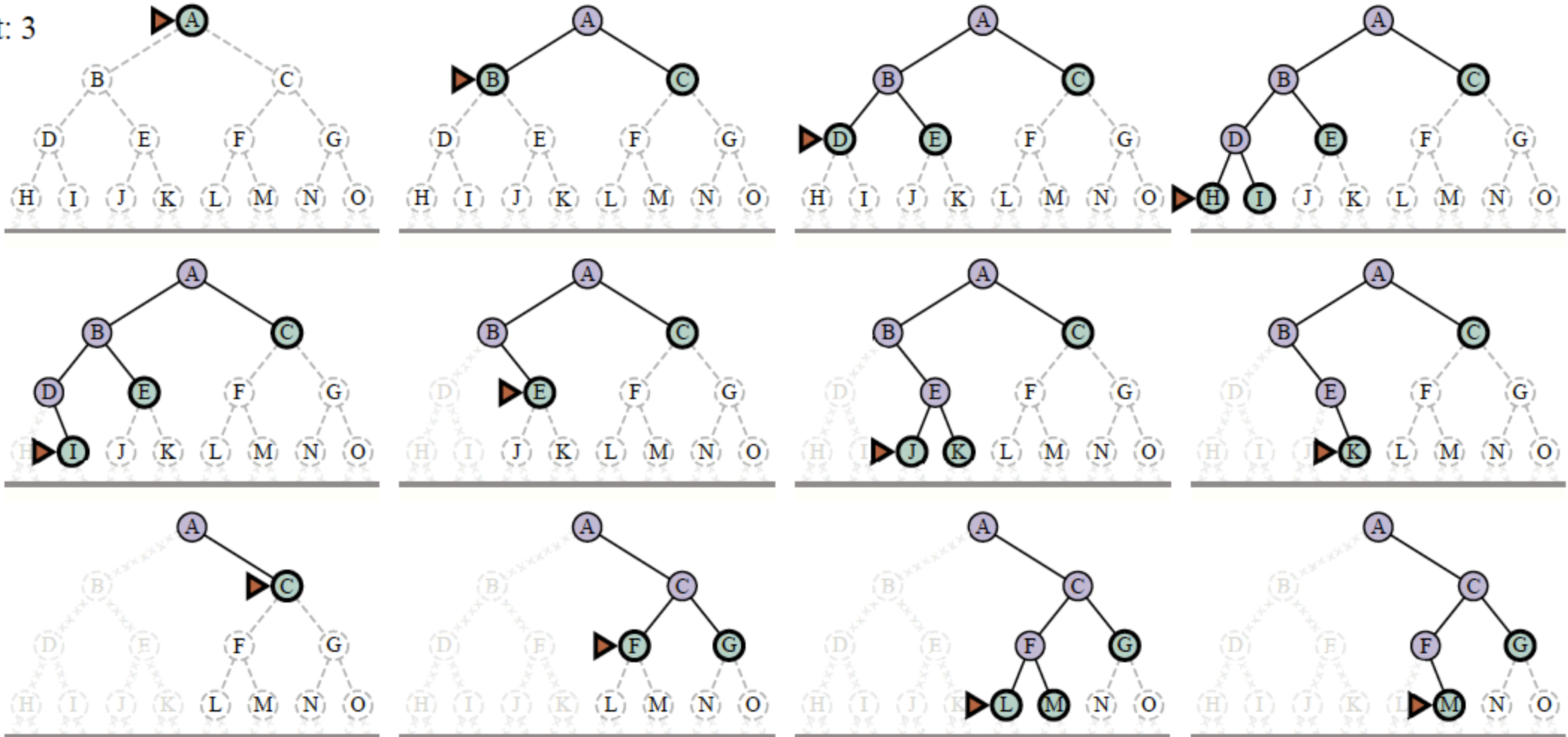
Traçat de l'algorisme (II)

limit: 2



Traçat de l'algorisme (III)

limit: 3



Implementació

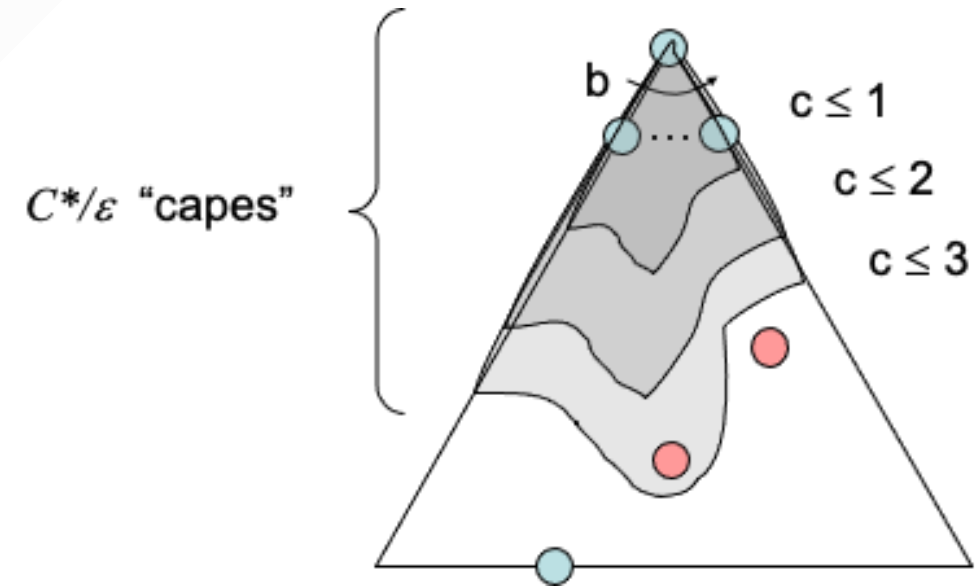
```
def cerca_profunditat_iterativa(estat_inicial):  
    """Cerca en profunditat iterativa en un problema."""  
    l = 0  
    while True:  
        solucio = cerca_profunditat_limitada(estat_inicial, l)  
        if solucio is not None:  
            return solucio  
        l += 1
```


Propietats

Propietat	Valor	Comentaris
Completitud	Sí	Si l'espai de cerca és finit, la solució es trobarà en algun moment
Optimalitat	Sí	La primera solució trobada serà òptima
Complexitat temporal i espacial	Com la de la cerca en profunditat	(com a màxim)

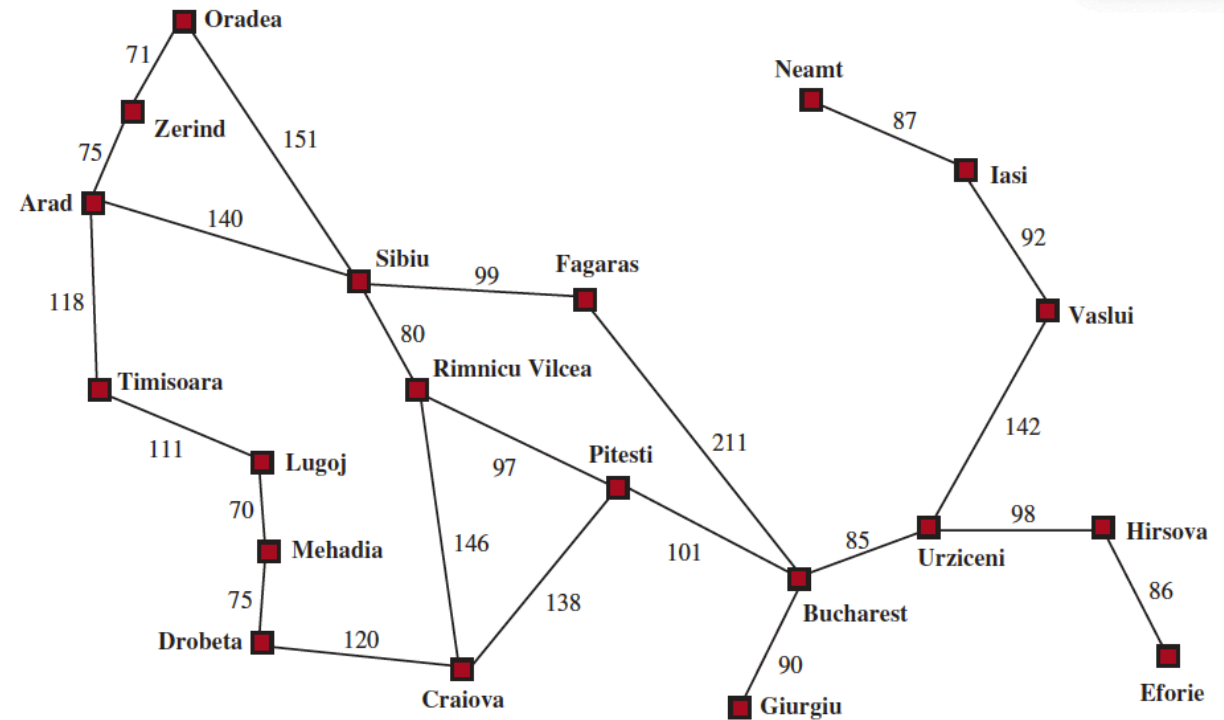
Búsqueda de cost uniforme

- La cerca de cost uniforme és una variant de la cerca en amplitud
- En aquest cas, la frontera s'ordena segons el cost del camí a cada estat (**cua de prioritat**)
- Estats visitats: de manera iterativa, es van visitant tots els que tenen un cost menor que l'actual
- Sí totes les accions tenen el mateix cost, la cerca de cost uniforme és equivalent a la cerca en amplitud



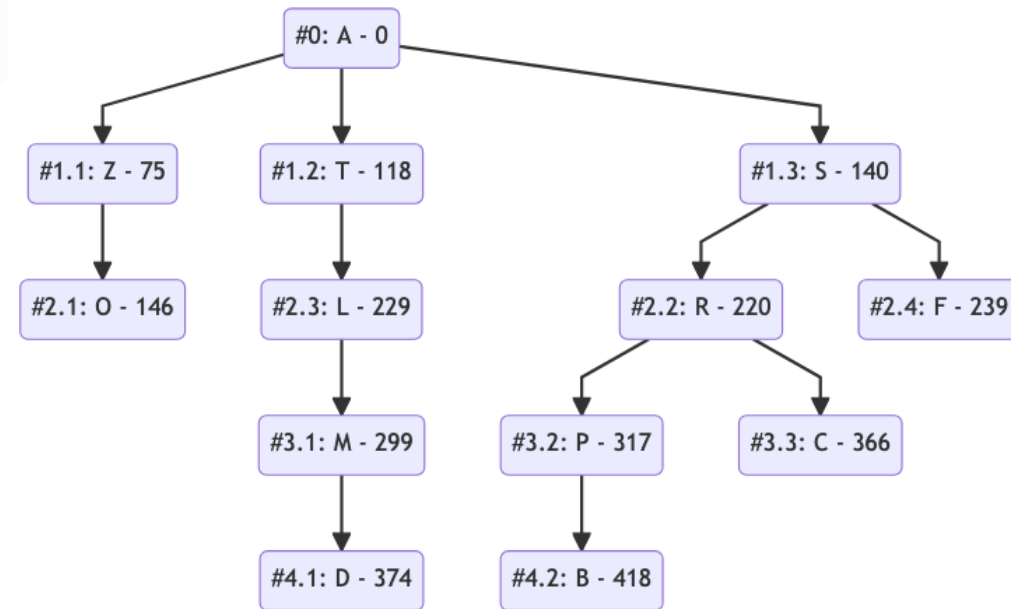
Exemple: Viatjar per Romania (I)

- **Estat inicial:** Arad
- **Funcio de succesió:** Carreteres.
- **Cost:** Distància entre ciutats (en Km)
- **Comprovar si un estat és final:** Estat = Bucharest
- **Solució:** Seqüència de ciutats que ens porten d'Arad a Bucharest



Exemple: Viatjar per Romania (II)

- Representació de l'arbre de cerca
 - Cada node és un parell de valors (a,b) que representen l'estat de les botelles
 - La busca en amplitud explora l'arbre per nivells
 - Podem observar que solament s'explora un nombre molt reduït de tots els possibles estats



Implementació

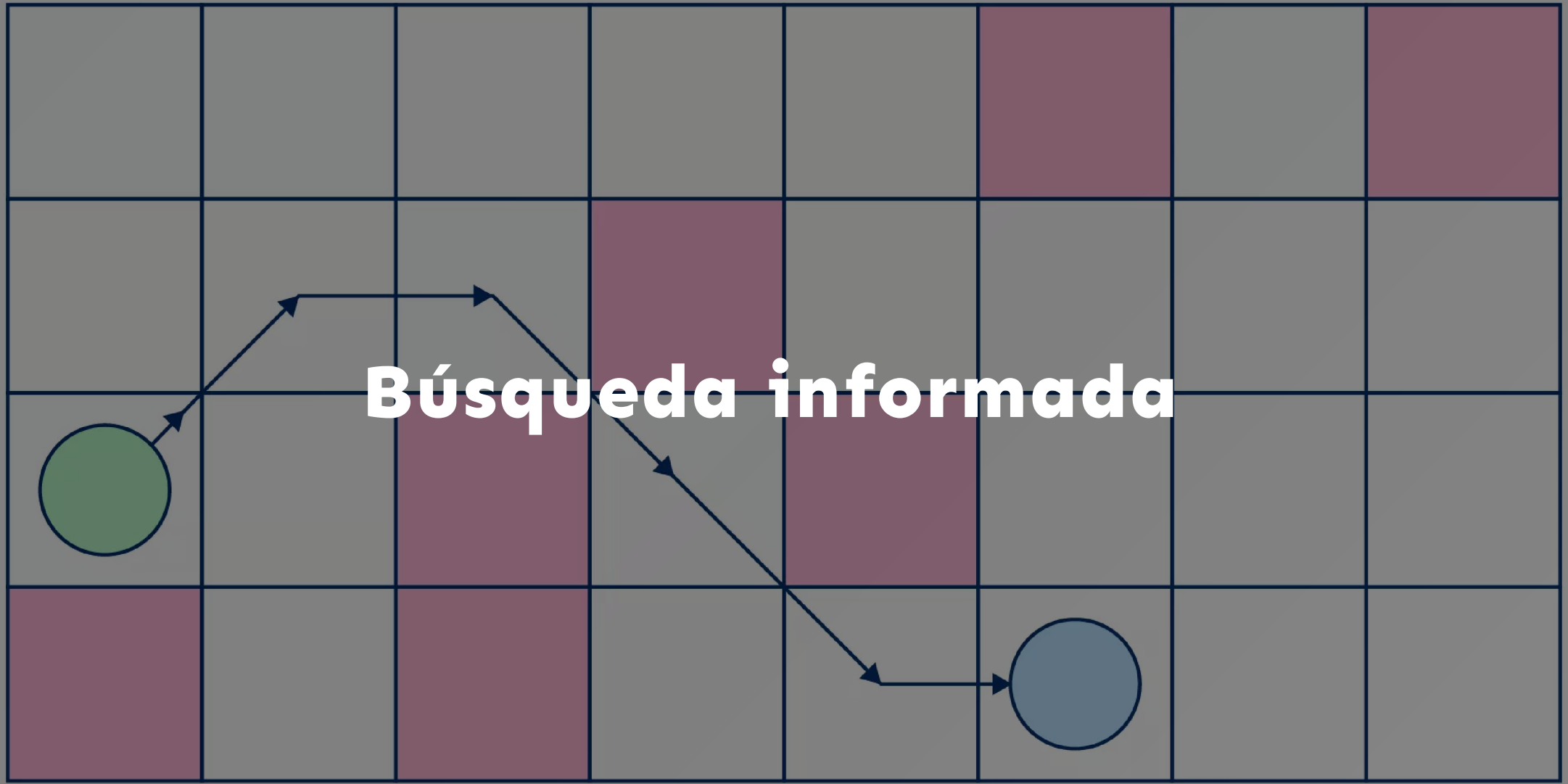
```
def cerca_cost_uniforme(estat_inicial):  
    """Cerca de cost uniforme en un problema."""  
    frontera = priority_queue([(0, estat_inicial)])  
    visitats = set()  
  
    while frontera:  
        cost_actual, estat = frontera.pop()  
        visitats.add(estat)  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for cost, successor in successors(estat):  
            if successor not in visitats:  
                frontera.append(cost + cost_actual, successor)
```

Propietats

Propietat	Valor	Comentaris
Completitud	Sí	Si l'espai de cerca és finit, la solució es trobarà en algun moment
Optimalitat	Sí	La primera solució trobada serà òptima
Complexitat temporal i espacial	$O(b^{1+C/\epsilon})$	On b és el factor de ramificació i C és el cost de la solució òptima

Gestió de fronteres

- La gestió de **fronteres** és un problema important en els algorismes de cerca
- Els algorismes que hem vist son tots molt semblants, la diferència està en com gestionen la frontera
 - Conceptualment sempre es tracta d'una **cua amb prioritat**
 - En la pràctica, per a les busquedes en profunditat i amplada **podem utilitzar una cua o una pila**
 - Per estalviar-nos el *sobrecost* d' $O(\log(n))$ de la cua de prioritat
 - Podriem, fins i tot, programar una implementació on pugam **variar l'objecte frontera**.



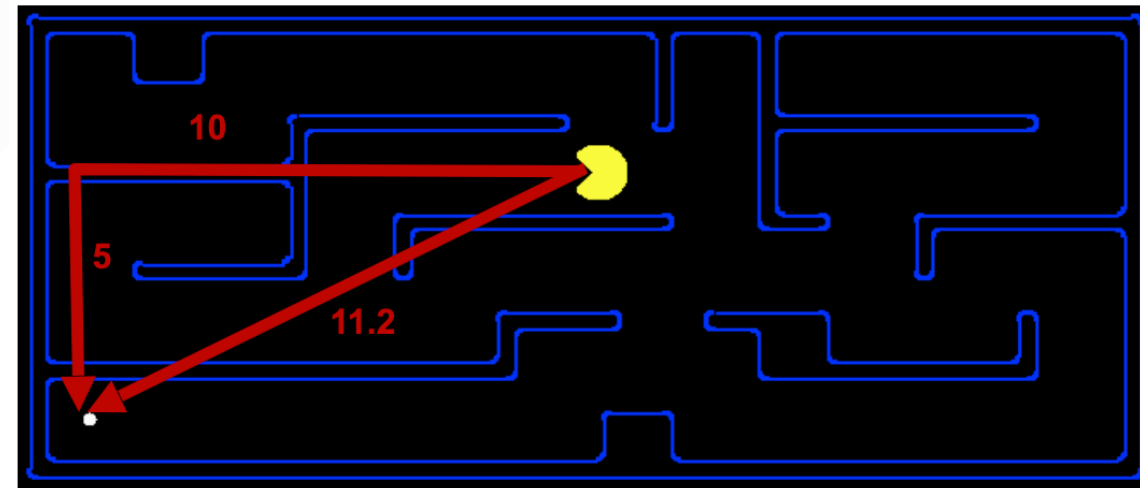
Búsqueda informada

Definició

- L'algorisme de búsqueda de cost uniforme és un algoritme molt eficient, té, però alguns problemes
 - Busca en totes les direccions, sense tenir en compte la direcció cap a la solució
 - Per tant, analitza més estats dels que seria estrictament necessari
- En aquesta part de la unitat veurem tècniques per solucionar aquests problemes

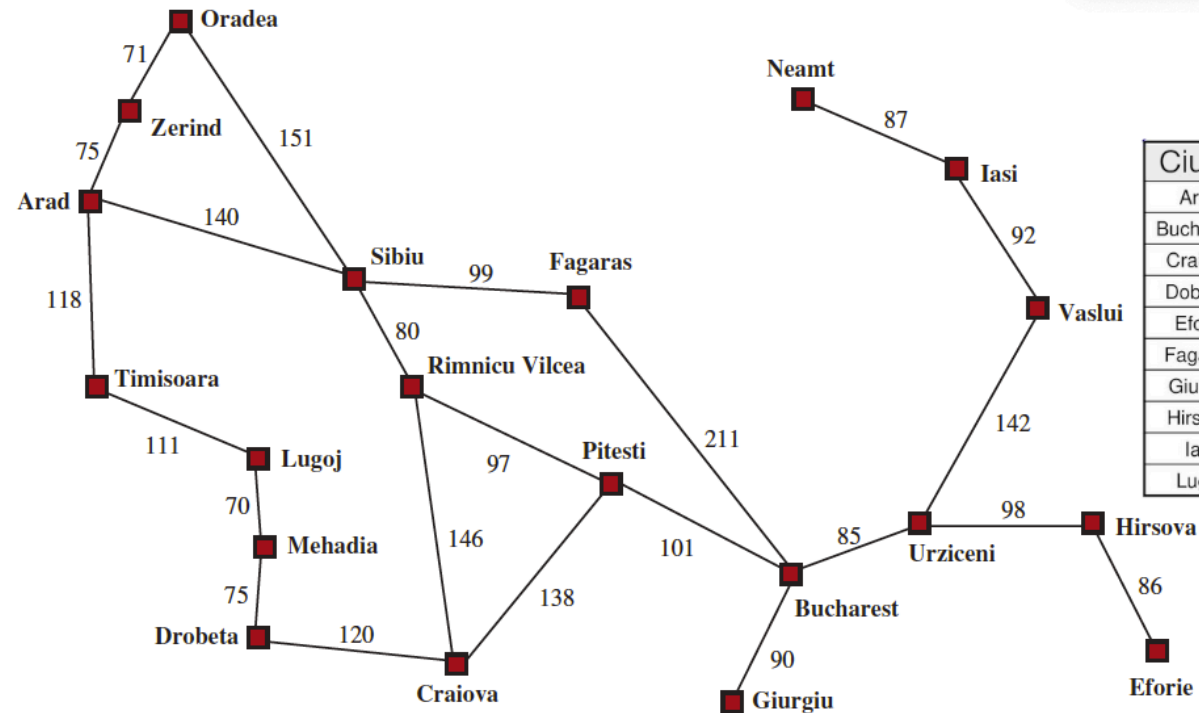
Heurístiques

- Una **heurística** és:
 - Una funció que ens permet *estimar* el cost d'arribar a la solució des d'un estat
 - Dissenyada per un problema concret
- Heurístiques per rutes:
 - Distància en línia recta (euclidiana)
 - Distància manhattan



Exemple: Viatjar per Romania

- **Heurística:**
Distància en
línia recta
(euclidiana)



Ciutat	DLR
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244

Ciutat	DLR
Mehadai	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Búsqueda voraç

- Si solament utilitzem la heurística per decidir quin estat de la frontera seguim:

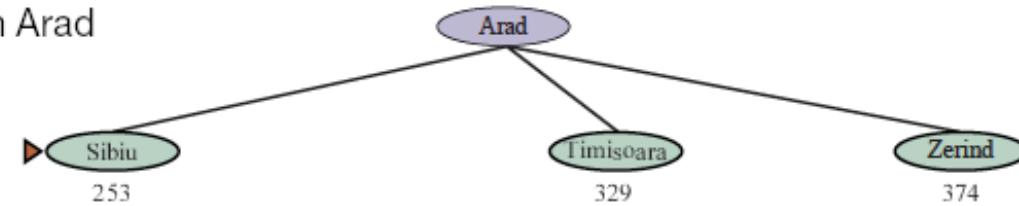
- **Búsqueda voraç**
- Més eficient que la búsqueda de cost uniforme
- No garanteix trobar la solució òptima

height:330px

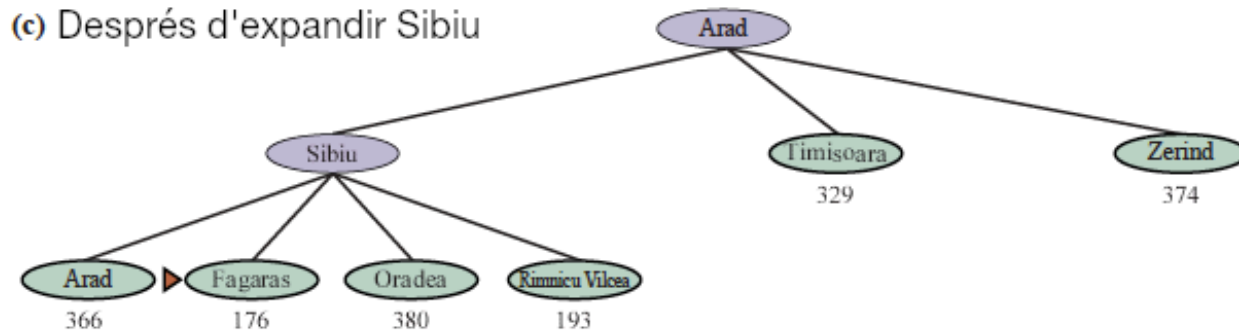
(a) Estat inicial



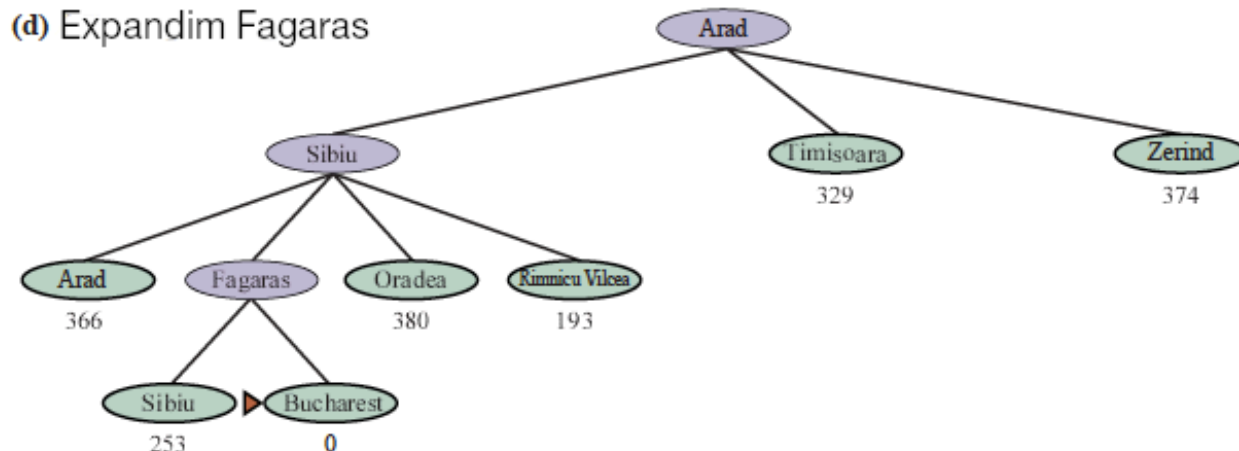
(b) Expandim Arad



(c) Després d'expandir Sibiu

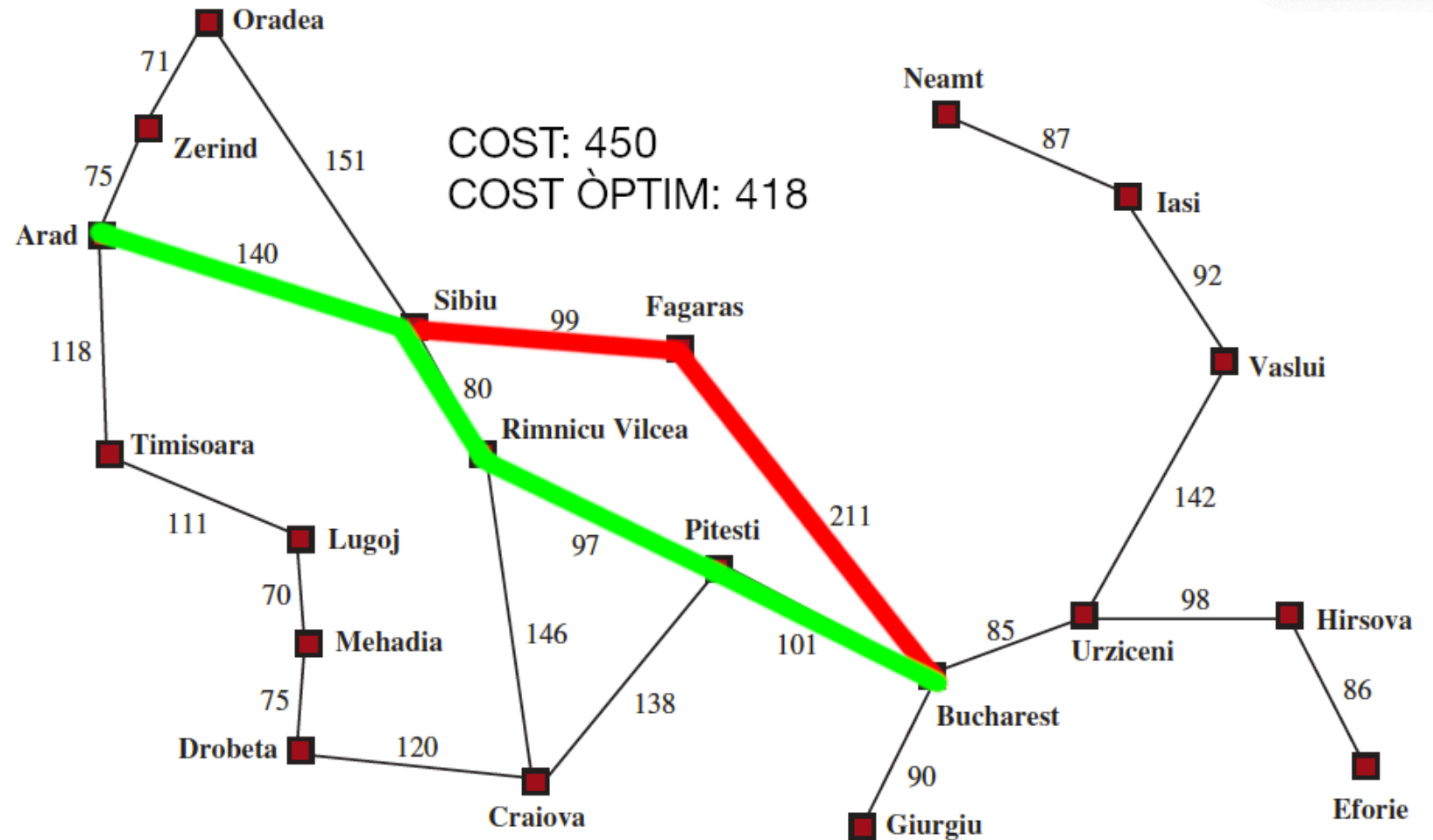


(d) Expandim Fagaras



Búsqueda voraç

- En verd la ruta correcta i en roig la nostra
- Que podem fer perquè el nostre algorisme trobi la solució correcta?



Implementació

```
def cerca_voraç(estat_inicial):  
    """Cerca voraç en un problema."""  
    frontera = priority_queue([(0, estat_inicial)])  
    visitats = set()  
  
    while frontera:  
        cost_actual, estat = frontera.pop()  
        visitats.add(estat)  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for cost, sucesor in sucesors(estat):  
            if sucesor not in visitats:  
                frontera.append(heuristica(sucesor), sucesor)
```

Propietats

Propietat	Valor	Comentaris
Completitud	Sí	Si l'espai de cerca és finit, trobarà una solució en algun moment
Optimalitat	No	La primera solució trobada no té perquè ser òptima
Complexitat temporal i espacial	$O(bm)$	On b és el factor de ramificació i m és la profunditat màxima de l'arbre

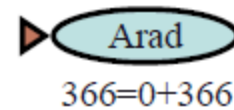
A*

- L'algorisme **A*** és una combinació de la búsqueda de cost uniforme i la búsqueda voraç
 - La búsqueda de cost uniforme ordena pel cost del camí o *cost cap enrere*: $g(n)$
 - La búsqueda voraç ordena pel cost de la heurística o *cost endavant*: $h(n)$
 - L'algorisme **A*** ordena per la suma dels dos:
 $f(n) = g(n) + h(n)$

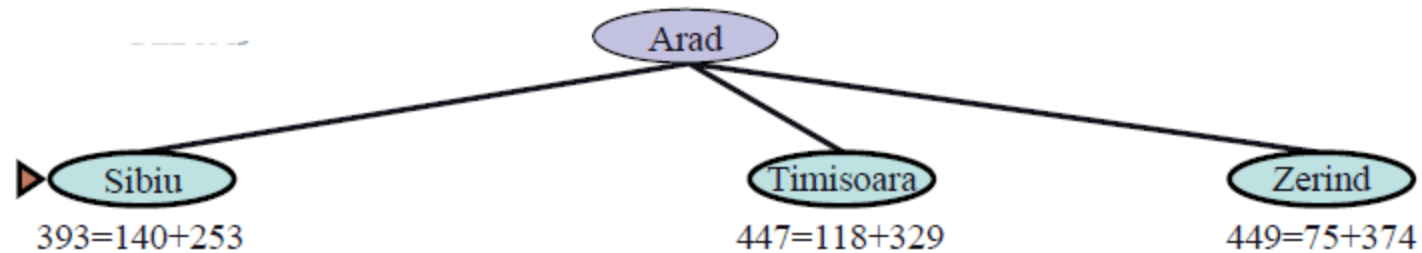
“ Garanteix trobar la solució òptima (si $h(n)$ és admissible) ”

Exemple: Viatjar per Romania (I)

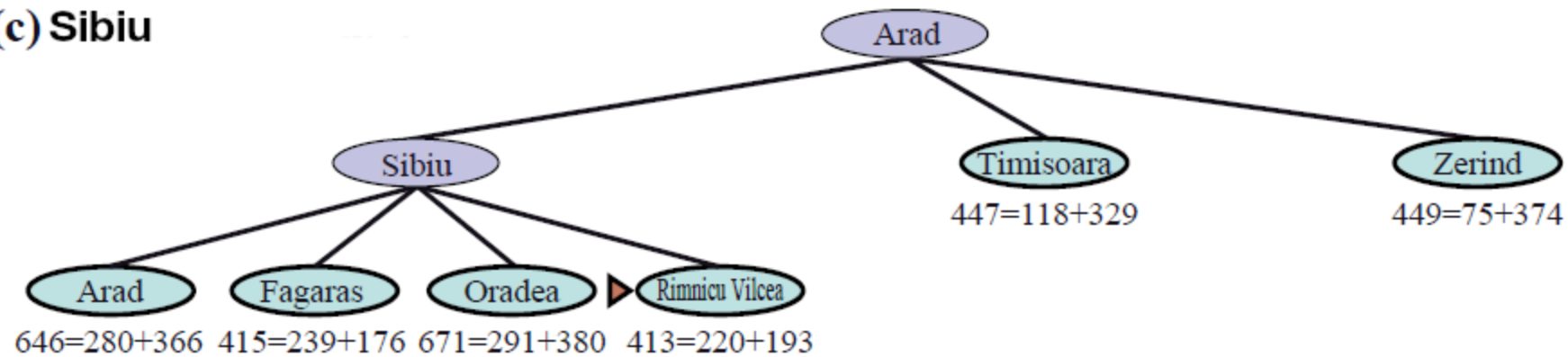
(a) Inicial



(b) Arad

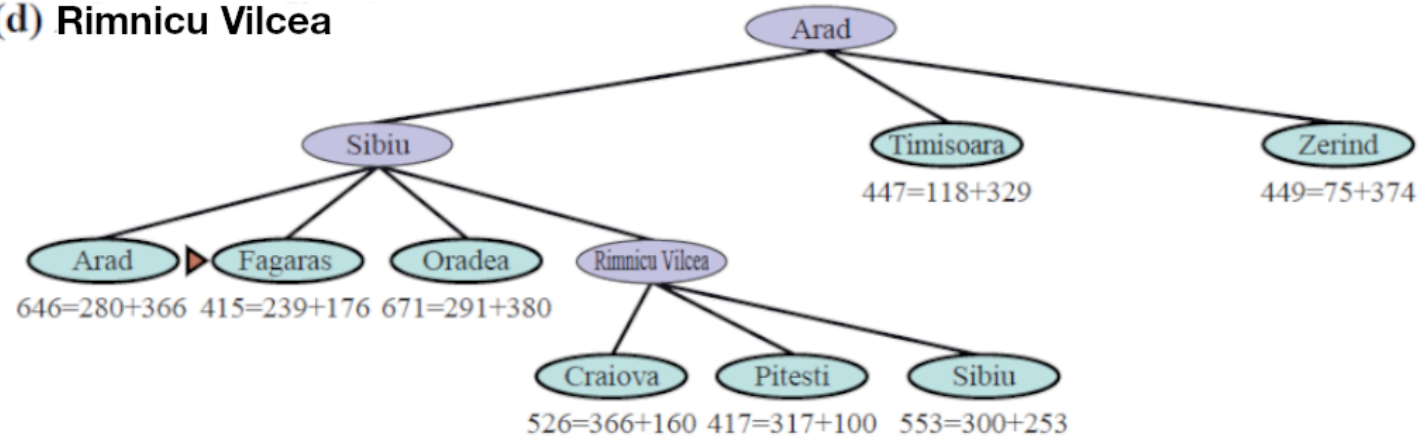


(c) Sibiu

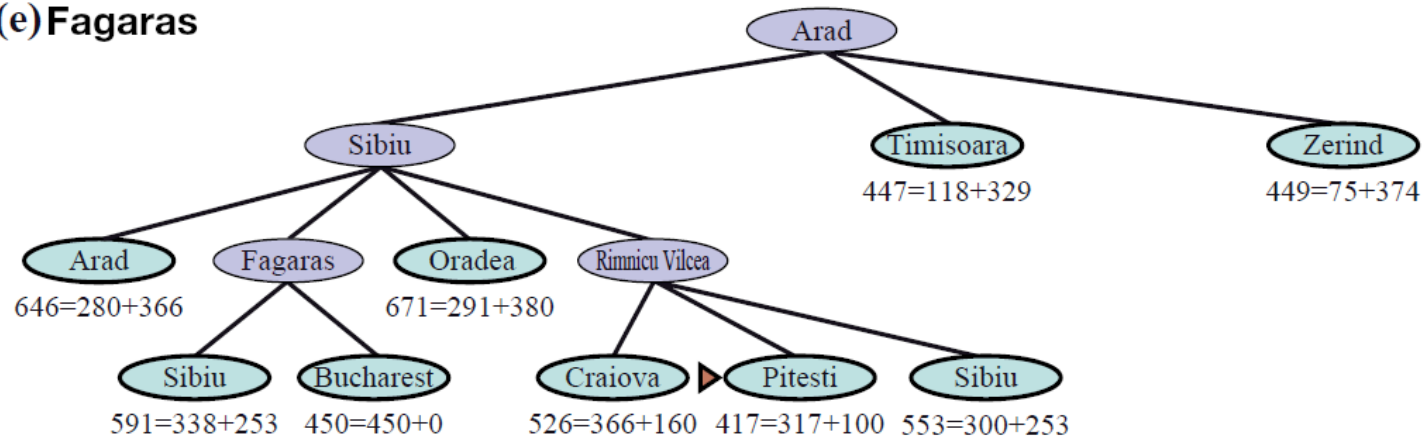


Example: Viatjar per Romania (II)

(d) Rimnicu Vilcea

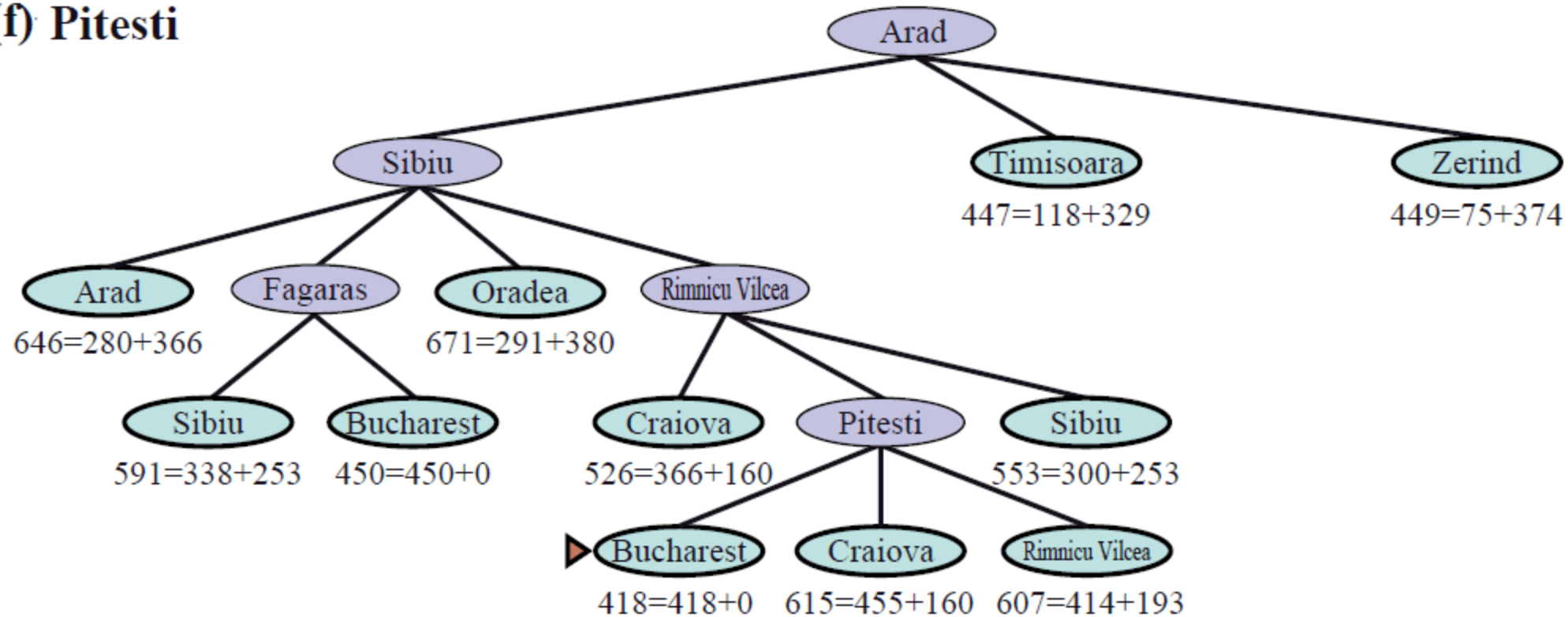


(e) Fagaras



Exemple: Viatjar per Romania (III)

(f) Pitesti



Implementació

```
def cerca_a_estrella(estat_inicial):  
    """Cerca A* en un problema."""  
    frontera = priority_queue([(0, estat_inicial)])  
    visitats = set()  
  
    while frontera:  
        cost_actual, estat = frontera.pop()  
        visitats.add(estat)  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
<style scoped>section { font-size:30px; }</style>  
<style scoped>section { font-size:30px; }</style>  
  
        for cost, sucesor in successors(estat):  
            if sucesor not in visitats:  
                frontera.append(cost + cost_actual, sucesor)
```

Propietats

Propietat	Valor	Comentaris
Completitud	Sí	
Optimalitat	Sí	
Complexitat temporal i espacial	$O(b^d)$	On b és el factor de ramificació i d és la profunditat de la solució

“ **Condició:** Aquestes propietats es compleixen si la heurística és *admissible* ”

Heurístiques admissibles (I)

- Una heurística és **admissible** si:
 - No sobreestima el cost de la solució
 - És a dir, si el cost real de la solució és C , la heurística és admissible si $h(n) \leq C$
- Si la heurística **NO** és admissible:
 - L'algorisme **A*** és equivalent a la **búsqueda voraç**
- Trobar una heurística admissible és un problema difícil.

Exemple: Puzzle 8 (I)

- Técnica útil reduir el problema a un problema més senzill
- **Relaxació de les regles del joc**
 1. Permetre que les peces s'intercanviïn entre elles
 2. Permetre que les peces es moguin a qualsevol posició, si està buida
 3. Permetre que les peces es moguin a qualsevol posició, sense restriccions (1+2)

7	2	4
5		6
8	3	1

Estat inicial

	1	2
3	4	5
6	7	8

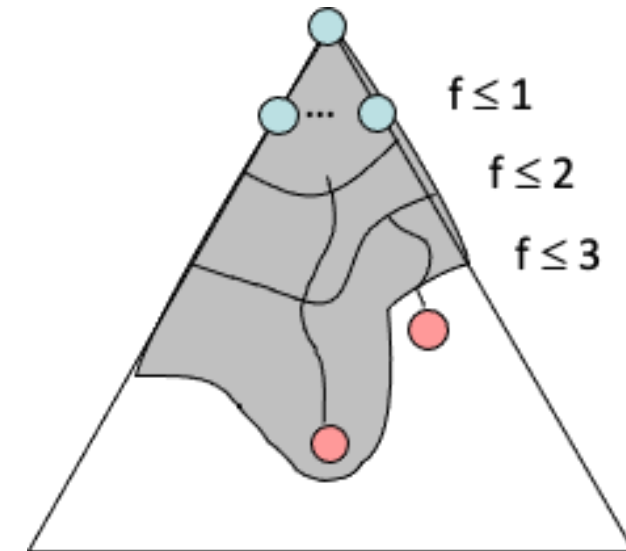
Estat final 63

Exemple: Puzzle 8 (II)

- La primera opció ens porta la heurística **distància manhattan**
 - Equival a un problema on hem de lliscar les peces fins a la seva posició.
 - Suma de les distàncies horitzontals i verticals de cada peça a la seva posició final
 - És admissible perquè no sobreestima el cost de la solució
- La tercera opció ens porta la heurística **nombre de peces fora de lloc**
 - Equival a un problema on hem de deixar directament en la seva posició.
 - Suma de les peces que no estan a la seva posició final
 - És admissible perquè no sobreestima el cost de la solució

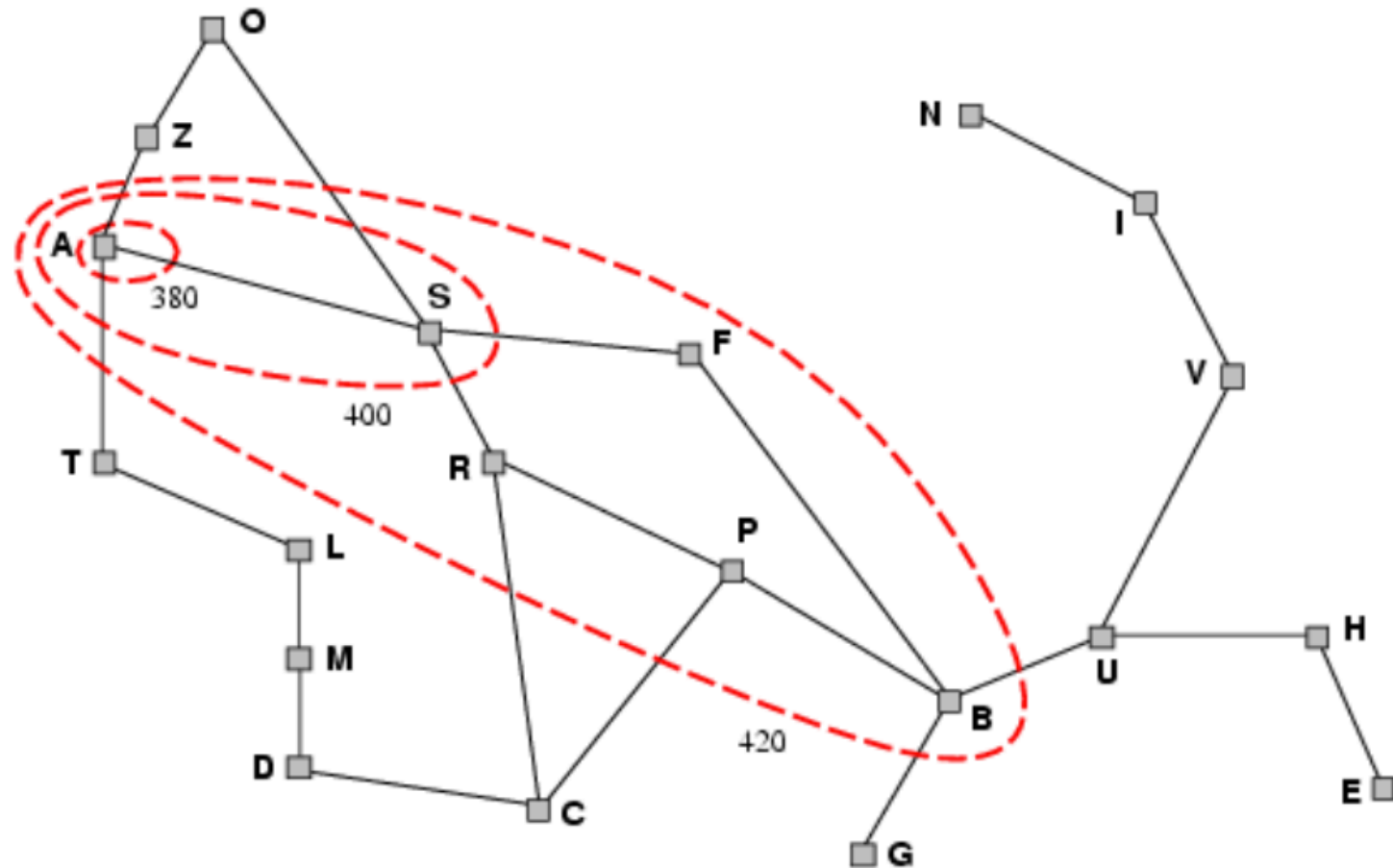
Propietat Óptima de les heurístiques admissibles (I)

- Si n és una ruta òptima fins a n_d amb cost $g(n_d)$.
 - n'_g serà una ruta subòptima fins a n_d amb cost $g(n'_d)$, sent $g(n'_d) > g(n_d)$.
 - n'' serà una subpart de la ruta òptima desde la frontera
- Es possible que agafem n'_g abans d' n_d ?.
 - **No**, perquè $f(n'_g) > f(n_d)$ i $f(n'_g) > f(n'')$, perquè la heurística és admissible
 - Així, $f(n'_g) > f(n'') > f(n_d)$
- Les subrutes en la ruta òptima sempre seran més barates que en la ruta subòptima



Propietat Óptima de les heurístiques admissibles (II)

- A* explora els nodes en ordre creixent de $f(n)$
- Va agregant, de forma gradual, corbes de nivell de grau f
- Cada corba de nivell representa un conjunt de nodes amb un valor d' $f(n)$ inferior a un valor concret



Propietat Óptima de les heurístiques admissibles (III)

- Si tenim dues heurístiques admissibles h_1 i h_2 , amb $h_1(n) \leq h_2(n)$ per a tots els estats n
- Llavors, h_2 és més informativa que h_1
- Per tant, h_2 serà més eficient que h_1
- Es per això que, preferirem l'heurística Manhattan a l'heurística de peces fora de lloc

7	2	4
5		6
8	3	1

Estat inicial

	1	2
3	4	5
6	7	8

Estat final

Limitacions de l'algorisme A^*

- L'algorisme A^* és òptim i una millora respecte a la búsqueda de cost uniforme
- Però, l'algorisme A^* té dues limitacions:
 - **Espai de memòria:** L'espai de memòria necessari pot ser molt gran
 - **Temps d'execució:** El temps d'execució pot ser molt gran
- Per això, s'han desenvolupat variants de l'algorisme A^* que intenten millorar aquestes limitacions
- En aquesta unitat veurem dues:
 - A^* de profunditat iterativa
 - A^* ponderat

A* de profunditat iterativa

- L'algorisme A* de profunditat iterativa és una variant de l'algorisme A*
- Molt semblant a l'algorisme de profunditat iterativa
 - Utilitza la funció $f(n)$ per tallar, en compte de la profunditat
- Ens permet reduir l'espai de memòria necessari
 - A costa de tindre que visitar alguns nodes més d'una vegada

Implementació (I)

```
def cerca_a_limitada(estat_inicial, l):  
    """Cerca A* limitada en un problema."""  
    frontera = priority_queue([(0, estat_inicial)])  
    visitats = set()  
  
    while frontera:  
        cost_actual, estat = frontera.pop()  
        visitats.add(estat)  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for cost, sucesor in successors(estat):  
            if sucesor not in visitats and cost_actual + cost < l:  
                frontera.append(cost_actual + cost, sucesor)
```

Implementació (II)

```
def cerca_a_iterativa(estat_inicial):  
    """Cerca A* iterativa en un problema."""  
    l = 0  
    while True:  
        solucio = cerca_a_limitada(estat_inicial, l)  
        if solucio is not None:  
            return solucio  
        l += 1
```

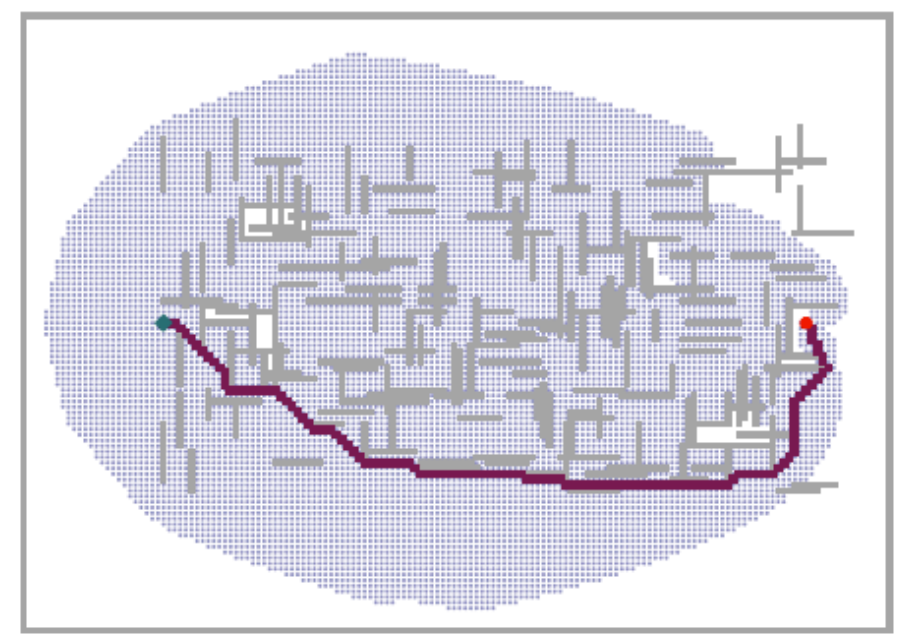
A* Ponderat

Definició

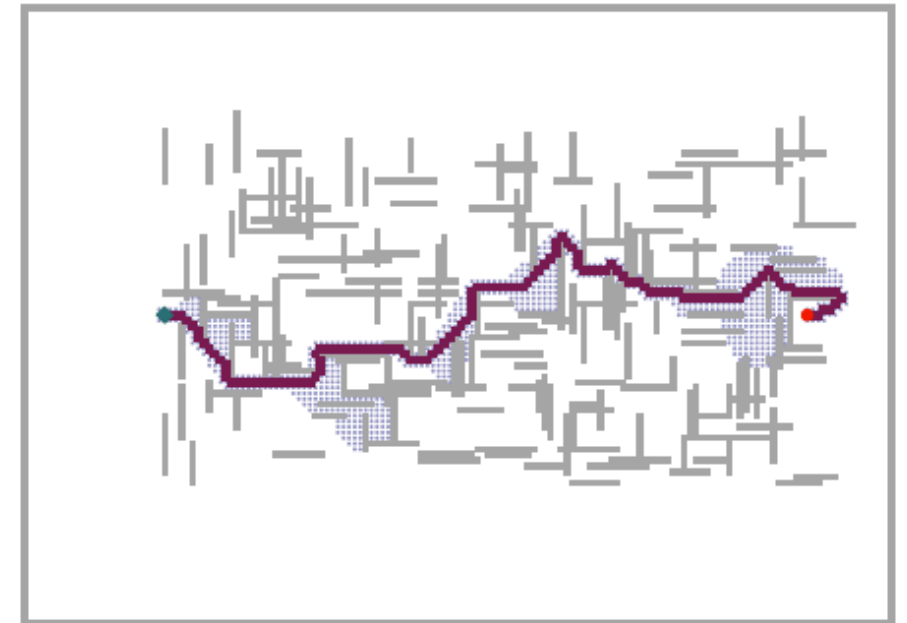
- L'algorisme **A*** ponderat és una variant de l'algorisme **A***
- Es defineix un factor de ponderació ϵ que determina el pes de la heurística
- L'algorisme **A*** ponderat ordena per $f(n) = g(n) + \epsilon h(n)$
- Si $\epsilon = 1$, l'algorisme **A*** ponderat és equivalent a l'algorisme **A***
- Si $\epsilon > 1$, l'algorisme **A*** ponderat és s'apropa a la búsqueda voraç

Utilitat

- L'algorisme A^* ponderat és útil per:
 - Reduir el cost de l'espai de memòria
 - Reduir el cost de l'espai de temps
 - A costa d'una solució no tan òptima
- En l'exemple de la dreta en una $W = 2$ (la b)
 - S'estudien 7 vegades menys estats
 - Per una solució un 5% menys eficient



(a)



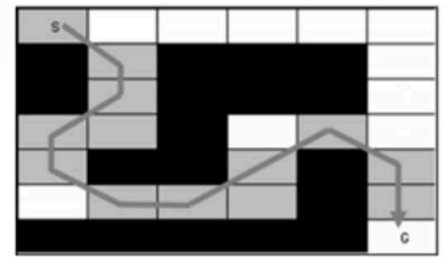
(b)

Implementació

```
def cerca_a_ponderat(estat_inicial, epsilon):  
    """Cerca A* ponderat en un problema."""  
    frontera = priority_queue([(0, estat_inicial)])  
    visitats = set()  
  
    while frontera:  
        cost_actual, estat = frontera.pop()  
        visitats.add(estat)  
  
        if es_solucio(estat):  
            return estat  
  
        for cost, sucesor in sucesors(estat):  
            if sucesor not in visitats:  
                frontera.append(cost_actual + epsilon * cost, sucesor)
```

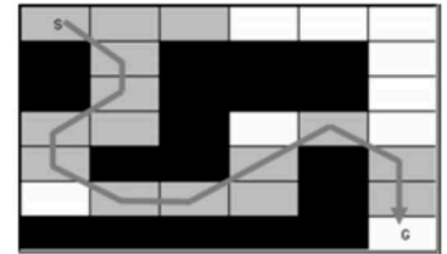
Anytime A*

- Podem aprofitar l'algorisme A* ponderat per construir un algorisme **Anytime A***
 - Busquem el camí òptim amb un ϵ gran
 - Anem reduint ϵ fins a que $\epsilon = 1$
 - Així, obtenim una bona solució en un temps raonable
 - Si tenim temps, podem seguir buscant una solució millor, fins arribar a la solució òptima



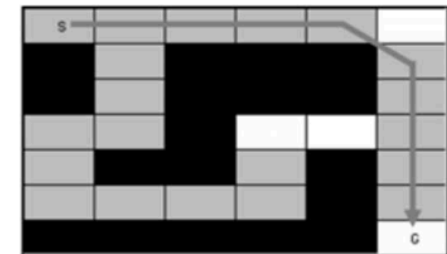
$\epsilon = 2$

13 node expansions
Solution length: 12



$\epsilon = 1.5$

15 node expansions
Solution length: 12



$\epsilon = 1$

20 node expansions
Solution length: 10

Implementació

```
def cerca_anytime_a(estat_inicial):  
    """Cerca Anytime A* en un problema."""  
    epsilon = 100  
    while epsilon > 1:  
        solucio = cerca_a_ponderat(estat_inicial, epsilon)  
        yield solucio  
        epsilon /= 2
```

Demostració de búsquedes

Pac-Man

<https://www.youtube.com/watch?v=2XjzjAfGWzY>



Voraç



Cost Uniforme



Cost Uniforme