

A 3D surface plot with a grid mesh, colored with a gradient from dark blue at the bottom to red at the top. A black line with an arrow at the end starts from a point on the upper right and curves down towards a local minimum on the left side of the plot. The word "Optimització" is written in white across the center of the surface.

Optimització

Definició

- Fins ara hem plantejat els problemes com a la **cerca d'un camí en un espai d'estats**.
- A vegades aquesta cerca no és possible, o no és el que volem.
 - Podem voler trobar un estat que satisfaci unes **restriccions** o que **maximitzi** o **minimitzi** una funció
 - **Pot no ser possible representar el camí** en l'espai d'estats.
 - O que no ens interressi el camí, sinó **només l'estat final**.
- En aquests casos, pot ser fàcil **trobar una solució**, encara que no sigui la millor.
- Aquesta solució es pot **refinar amb tècniques de cerca local**.

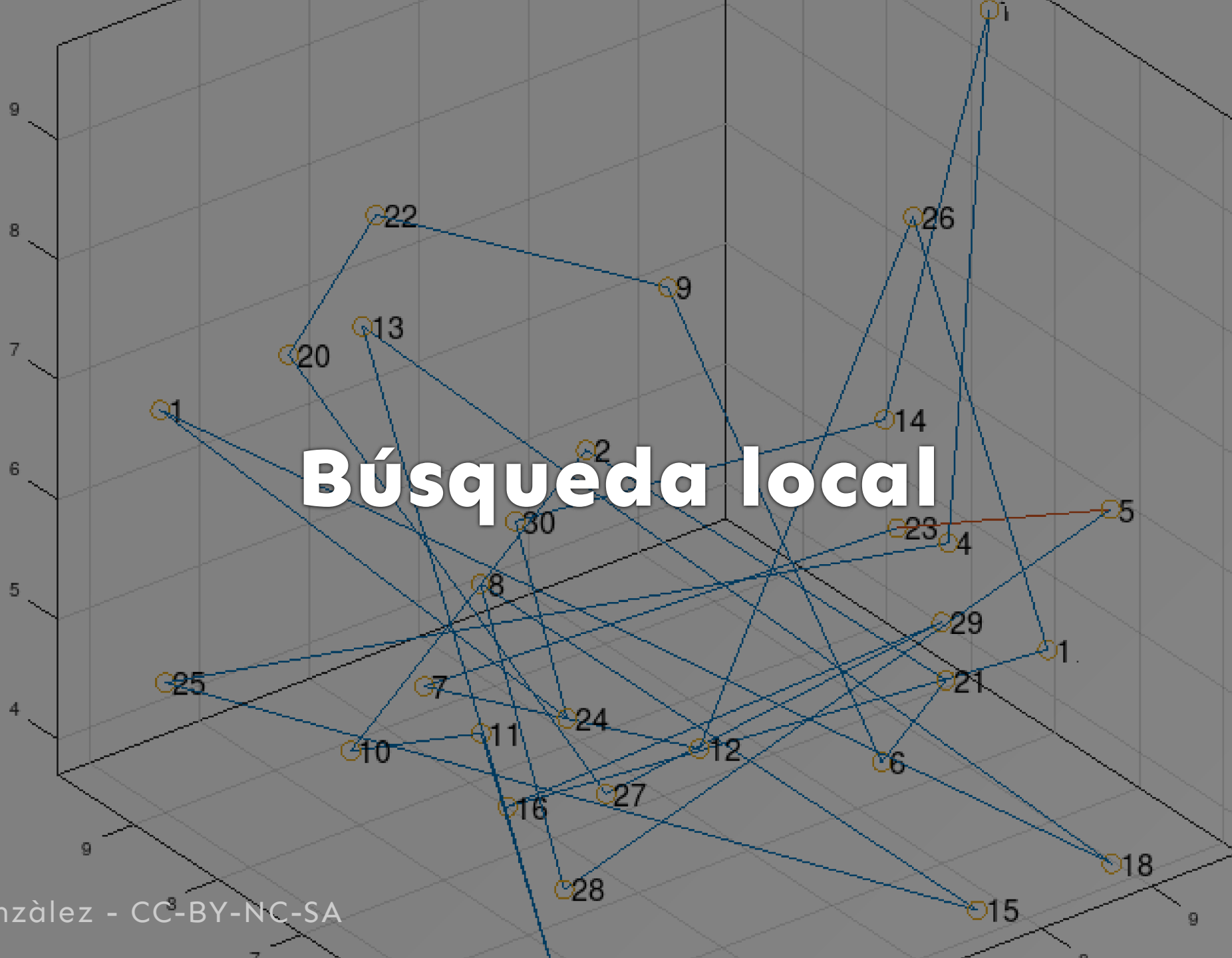
Usos reals

- Els algorismes d'optimització són molt utilitzats en problemes reals.
- Alguns exemples:
 - Optimització de xarxes neuronals
 - Optimització de circuits electrònics
 - Optimització de problemes de planificació
 - Optimització de problemes de logística
 - Optimització de problemes de disseny
 - Optimització de problemes de fabricació

Problemes NP-complets

- Els problemes que no es poden resoldre amb una **complexitat polinòmica** s'anomenen **problemes NP-complets**.
- Aquests problemes són **intractables**, ja que no es coneix cap algorisme que els resolga en un temps raonable.
- Frequentment, els problemes d'optimització són problemes NP-complets, perquè cal **explorar tot l'espai d'estats** per a trobar la solució òptima.
- Aixó fa que **no siga possible** trobar la solució òptima en un temps raonable.

Búsqueda local



Característiques (I)

- La **búsqueda local** no manté una **estructura de dades** que representi l'espai d'estats.
 - En lloc d'això, **genera un estat inicial** i **genera estats successors** a partir d'aquest.
 - Aquests estats successors es generen **modificant l'estat actual**.
 - Les tècniques de búsqueda local també s'anomenen **metaheurístiques**.

Característiques (II)

- Utilitzarem una **funció d'avaluació** que **maximitzirà** un valor. Representa la **qualitat** de l'estat, no el cost. Podem ponderar els valors de les variables segons les característiques de l'estat que volem potenciar.
- Avantatges:
 - Utilitza **poca memòria** i **poca CPU**.
 - Permeten trobar solucions **raonables** en espais d'estats **molt grans**.

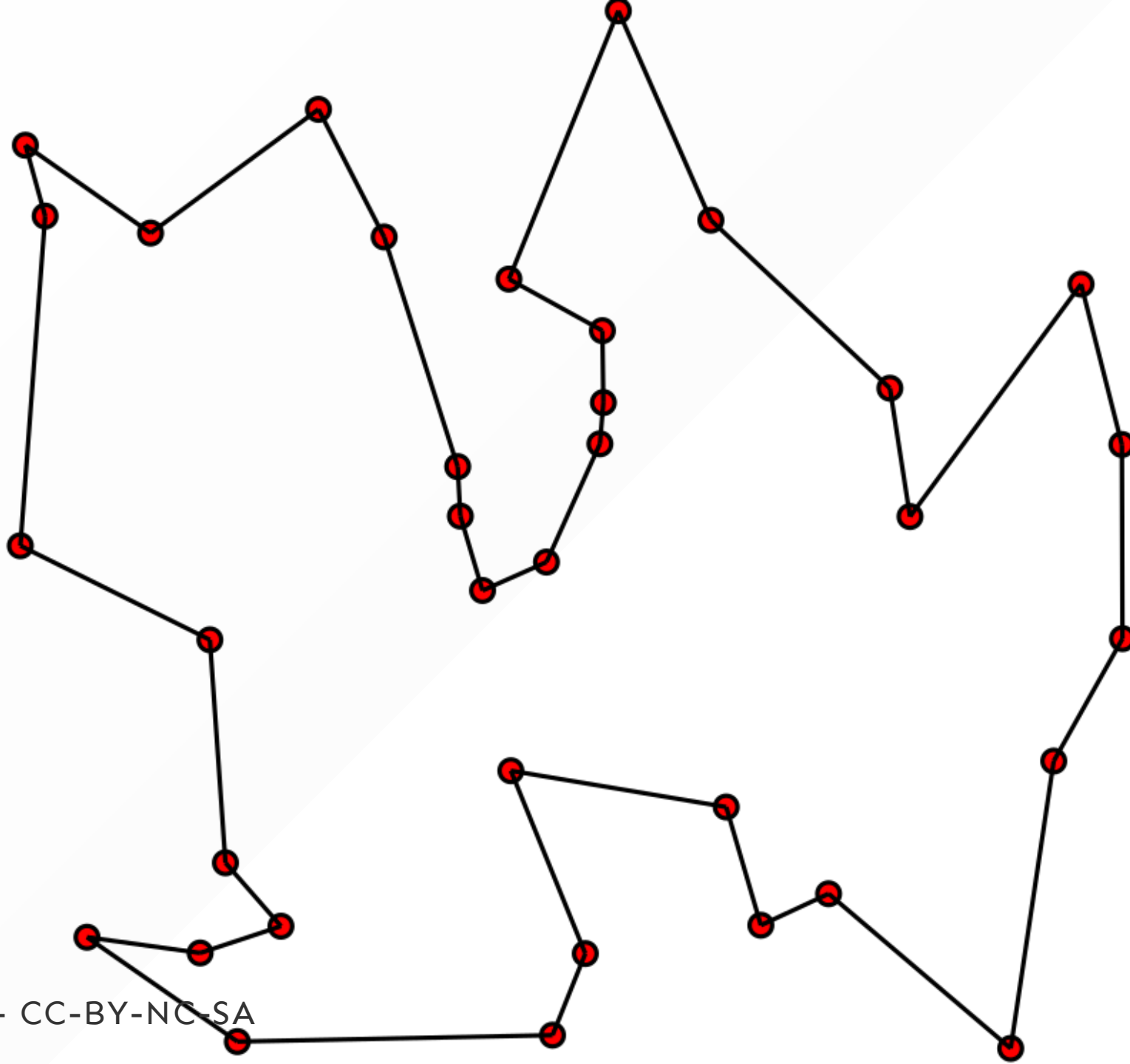
Definició del problema

```
class ProblemaBusquedaLocal(object):  
    def __init__(self, inicial=None, **kwargs):  
        self.__dict__.update(inicial=inicial, **kwargs)  
  
    def stats_successors(self, estat):      raise NotImplementedError  
  
    def es_solucio(self, estat):           raise NotImplementedError  
  
    def funcio_avaluacio(self, state):     return NotImplementedError  
  
    def __repr__(self):  
        return '{}({!r})'.format(  
            type(self).__name__, self.inicial)
```

Definició del problema

Exemple: Viajant de comerç (I)

- Tenim un **mapa** amb **ciutats** i volem trobar el **camí més curt** que passi per **totes les ciutats**, per tornar a la **ciutat inicial**.
- Les **variables** són les **ciutats** i els **dominis** són les **posicions**.
- Les **restriccions** són que **no hi puguí haver dues ciutats en la mateixa posició**.
- Les **solucions** són les **permutacions de les ciutats** que satisfan les restriccions.



Definició del problema

Exemple: Viajant de comerç (II)

- El nombre d'estats que cal explorar és molt gran.
 - Per a 10 ciutats, el nombre d'estats és de $10! = 3.628.800$.
- El plantejarem com a búsqueda local.
- No ens cal una **estructura de dades** que representi l'espai d'estats.
- Solament ens cal un **estat inicial** i una **funció d'avaluació**.
- Anirem modificant l'estat inicial fins que no puguem millorar més.
- Utilitzarem una **funció d'avaluació** que **millorà quan menor siga el valor** del camí.
- A continuació podem veure una possible implementació.

Exemple: Viajant de comerç - Implementació (I)

```
class TSP(ProblemaBusquedaLocal):
    def estats_successors(self, estat):
        successors = []
        for i in range(len(estat)):
            for j in range(i + 1, len(estat)):
                successor = estat.copy()
                successor[i], successor[j] = successor[j], successor[i]
                successors.append(successor)
        return successors

    def distancia(self, ciutat1, ciutat2):
        # Formula de la distancia euclidiana
        return math.sqrt((ciutat1[0] - ciutat2[0]) ** 2 + (ciutat1[1] - ciutat2[1]) ** 2)
```

Exemple: Viajant de comerç - Implementació (II)

```
def funcio_avaluacio(self, estat):
    distancia = 0
    for i in range(len(estat)):
        distancia += self.distancia(estat[i], estat[(i + 1) % len(estat)])
    return 1/distancia

@classmethod
def genera_estat_inicial(cls, ciutats):
    return random.sample(ciutats, len(ciutats))

ciutats = [
    (random.randint(0, 1000), random.randint(0, 1000)) for _ in range(100)
]
tsp = TSP(inicial=TSP.genera_estat_inicial(ciutats), ciutats=ciutats)
```

Tornada enrere

- La **tècnica de tornada enrere** o **backtracking** és una tècnica de cerca local.
- Es basa en **explorar l'espai d'estats** fins a trobar una solució.
- Si no es troba una solució, es **torna enrere** i es **modifica l'últim estat**.
- Aquesta tècnica garanteix trobar la **solució òptima** però pot ser **molt lenta**.

Implementació

```
def backtracking(problema):  
    cua = [problema.inicial]  
    visitats = set()  
    millor_estat, millor_fitness = None, float('inf')  
    while cua:  
        estat = cua.pop(0)  
        if problema.es_solucio(estat) and problema.funcio_avaluacio(estat) < millor_fitness:  
            millor_estat = estat  
            millor_fitness = problema.funcio_avaluacio(estat)  
        if str(estat) not in visitats:  
            visitats.add(str(estat))  
            successors = problema.estats_successors(estat)  
            for successor in successors:  
                if es_compleixen_restriccions(successor):  
                    cua.append(successor)  
  
    return millor_estat
```


Execució

```
ciutats = [  
    (random.randint(0, 1000),  
     random.randint(0, 1000))  
    for _ in range(7)  
]  
tsp = TSP(  
    inicial=TSP.genera_estat_inicial(ciutats),  
    ciutats=ciutats  
)  
solucio = backtracking(tsp)
```

Millor fitness: 4030.1303415460707

...

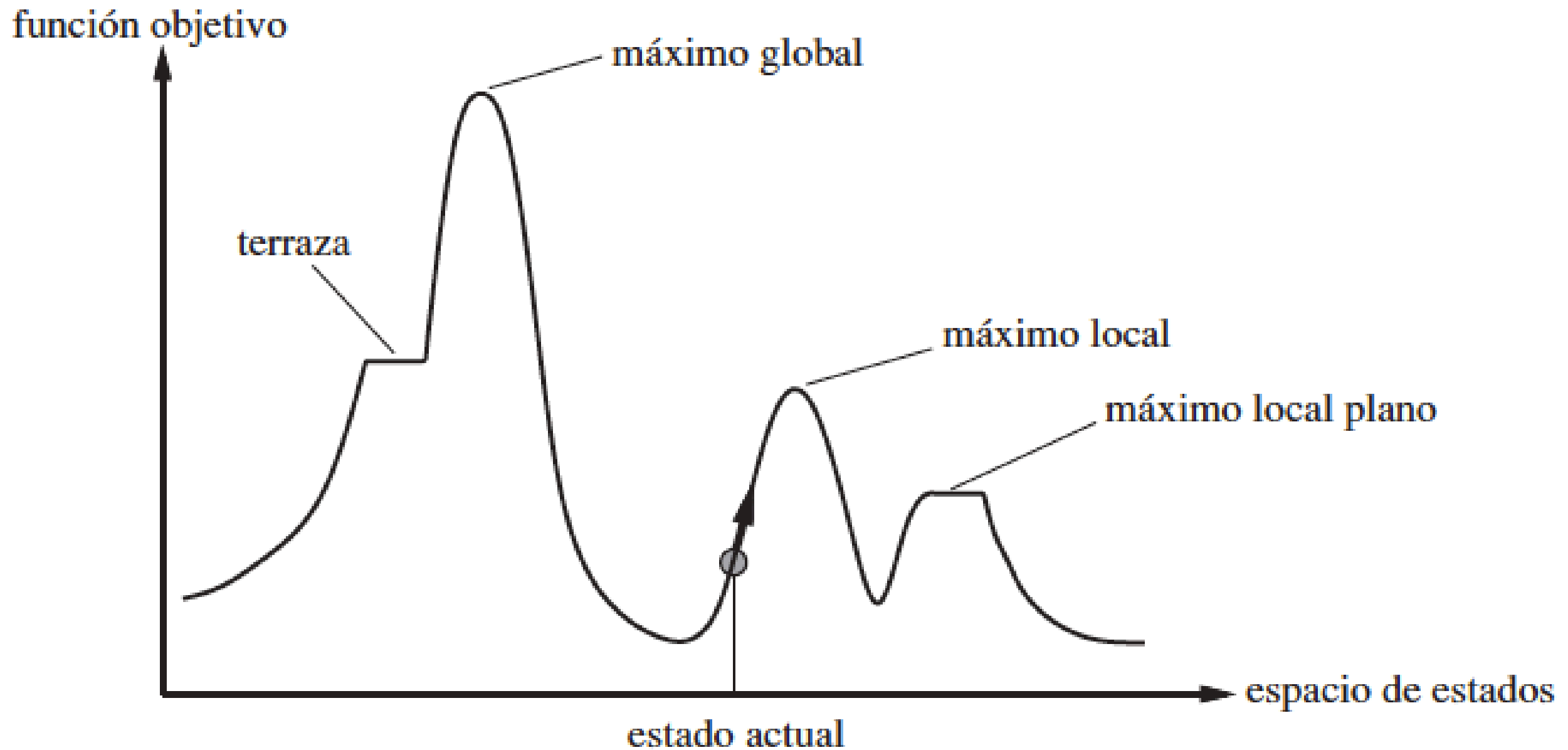
Millor fitness: 2718.3988057871697

3min 52s ± 24.7 s per loop

(mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)

Algorisme d'Escalada

- L'algorisme d'escalada o **Hill Climbing** és l'algorisme de cerca local més senzill.
- Si plantejem els estats com a **punts en un espai**,
 - Sent l'alçada de cada punt el valor de la funció a optimitzar,
 - l'algorisme consisteix a **moure'ns** cap a **punts més alts**.
 - Si deixem de pujar entendrem que hem arribat al **màxim global** i hem trobat la solució.



Implementació

```
def hill_climbing(problema, iteracions=10000):  
    estat = problema.inicial  
    fitness = problema.funcio_avaluacio(estat)  
  
    for _ in range(iteracions):  
        successors = problema.estats_successors(estat)  
        if not successors:  
            break  
        successor = min(successors, key=problema.funcio_avaluacio)  
        fitness_succ = problema.funcio_avaluacio(successor)  
        if fitness_succ > fitness:  
            print(f"{fitness_succ} > {fitness}")  
            estat = successor  
            fitness = fitness_succ  
        else:  
            break  
    return estat
```

Execució

```
ciutats = [  
    (random.randint(0, 1000),  
     random.randint(0, 1000))  
    for _ in range(100)  
]  
tsp = TSP(  
    inicial=TSP.genera_estat_inicial(ciutats),  
    ciutats=ciutats  
)  
solucio = hill_climbing(tsp)
```

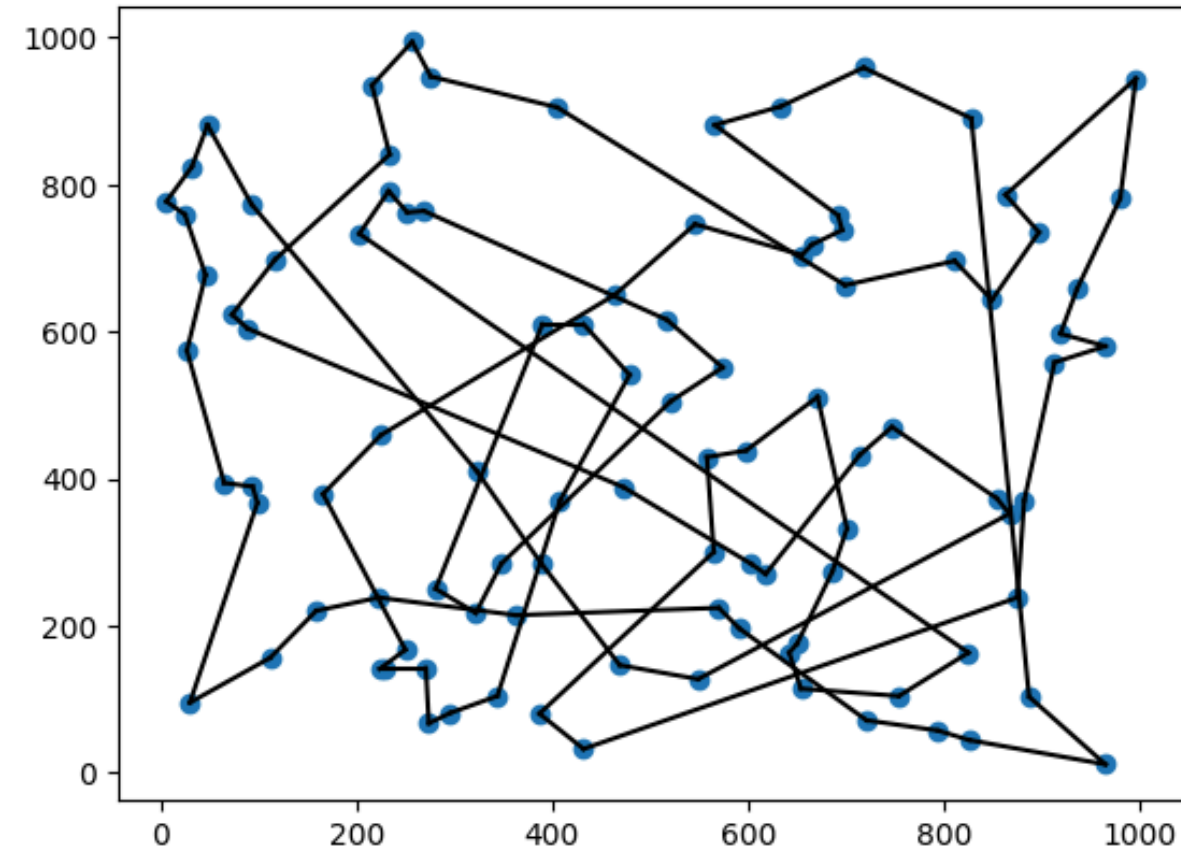
51442.77444568607 > 54092.0949691196

...

41.1 s \pm 6.22 s per loop
(mean \pm std. dev. of 7 runs, 1 loop each)

Inline:

2.13 s \pm 922 ms per loop
(mean \pm std. dev. of 7 runs, 1 loop each)



Consum de memòria

- Un dels problemes que tenen els algorismes de búsqueda local que s'utilitza molta **memòria**.
 - Cal **mantenir una estructura de dades** que representi els espais successors
 - Podem **millorar** l'eficiència del algorisme de recuit simulat **eliminant** aquesta estructura de dades.
 - Per això, **no** generarem **estats successors** nous.
 - En lloc d'això, **modificarem l'estat actual** (`inline`) per generar el successor i, si no millora, **desfarem els canvis**.

Implementació **inline**

```
def hill_climbing_inline(problema, iteracions=10000):  
    estat = problema.inicial  
    fitness = problema.funcio_avaluacio(estat)  
  
    for _ in range(iteracions):  
        millorat_iter = False  
        for i in range(len(estat)):  
            for j in range(len(estat)):  
                if i != j:  
                    estat[i], estat[j] = estat[j], estat[i]  
                    fitness_succ = problema.funcio_avaluacio(estat)  
                    if fitness_succ > fitness:  
                        print(f"{fitness} > {fitness_succ}")  
                        fitness = fitness_succ  
                        millorat_iter = True  
                    else:  
                        estat[i], estat[j] = estat[j], estat[i]  
            if not millorat_iter:  
                break  
    return estat
```

Problemes

- L'algorisme d'escalada **no** garanteix trobar el **màxim global**.
- Pot quedar atrapat en un **màxim local**.
 - Pic més alt que els seus veïns, però no el màxim global.
 - Dependrà **molt** de l'**estat inicial**.
- Per evitar-ho s'han desenvolupat diverses variants:
 - Escalada de primer millor
 - Escalada amb reinici aleatori
 - Escalada estocàstica

Escalada de primer millor

- L'algorisme d'escalada de primer millor **no** tria el **millor successor**.
 - En lloc d'això, tria el **primer successor** que **millora** l'estat actual.
 - Si no hi ha cap successor que millori l'estat actual, l'algorisme s'atura.
 - Pot també parar quan s'arribe a un nombre màxim d'iteracions.
- Pot ser molt útil quan el nombre de successors és molt gran.

Implementació

```
def first_choice_hill_climbing(espai_estats, funcio, max_iteracions):  
    estat_actual = espai_estats.estat_inicial()  
    for _ in range(max_iteracions):  
        successor = espai_estats.genera_successor(estat_actual)  
        if not successor:  
            return estat_actual  
        if funcio(successor) >= funcio(estat_actual):  
            estat_actual = successor  
  
    return estat_actual
```

Implementació **inline**

```
def first_choice_hill_climbing_inline(problema, iteracions=10000):  
    estat = problema.inicial  
    fitness = problema.funcio_avaluacio(estat)  
  
    for _ in range(iteracions):  
        millorat_iter = False  
        for i in range(len(estat)):  
            if not millorat_iter:  
                for j in range(len(estat)):  
                    if i != j:  
                        estat[i], estat[j] = estat[j], estat[i]  
                        fitness_succ = problema.funcio_avaluacio(estat)  
                        if fitness_succ > fitness:  
                            print(f"{fitness} > {fitness_succ}")  
                            fitness = fitness_succ  
                            millorat_iter = True  
                            break  
                else:  
                    estat[i], estat[j] = estat[j], estat[i]  
  
    return estat
```

Escalada amb reinici aleatori

- L'algorisme d'escalada amb reinici aleatori **reinicia l'algorisme** cada cert temps.
- Això permet **escapar dels màxims locals**.
- **No garanteix** trobar el **màxim global**, però **augmenta les possibilitats**.
- Aquest algorisme es pot **combinar amb altres tècniques** de cerca local.

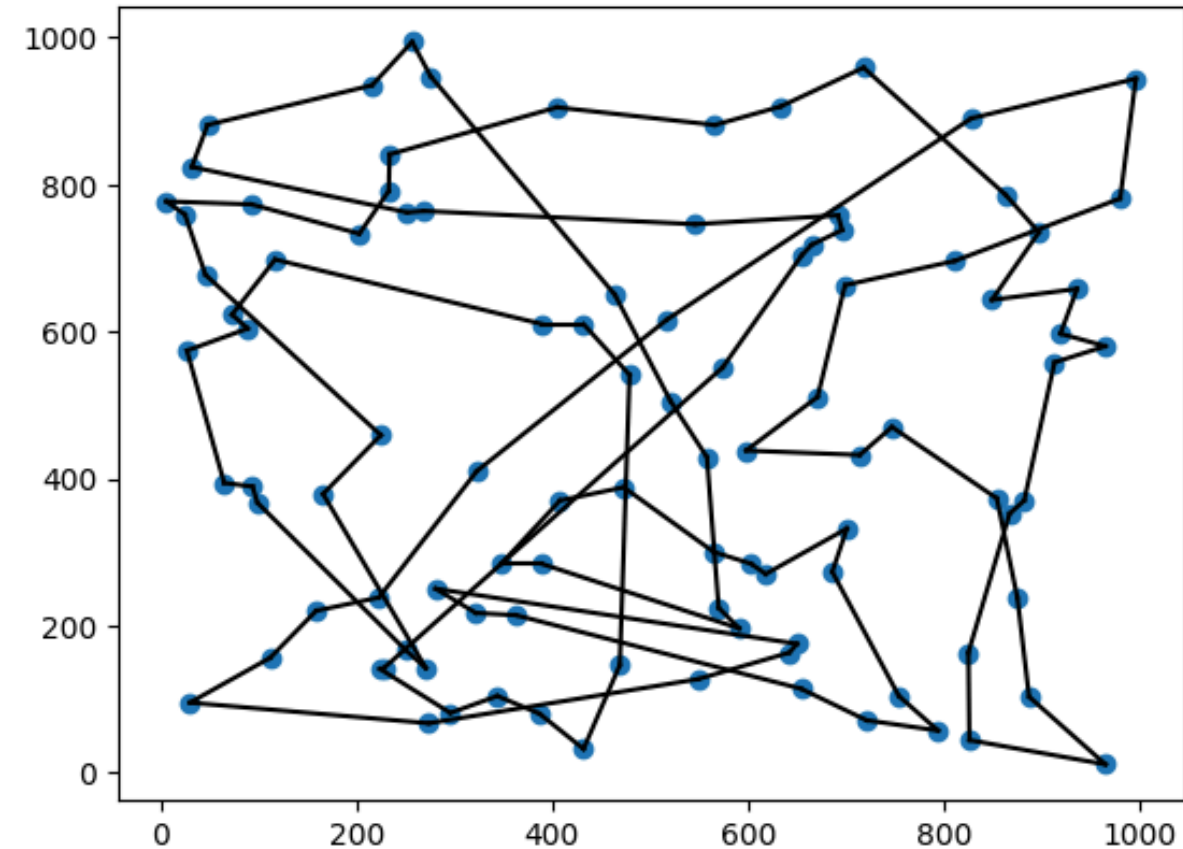
Implementació

```
def random_restart_hill_climbing(problema, ciutats, iteracions=1000, restarts=10):  
    millor_estat = None  
    millor_fitness = float('inf')  
    for _ in range(restarts):  
        inicial = TSP.genera_estat_inicial(ciutats)  
        problema.inicial = inicial  
        estat = hill_climbing(problema, iteracions=iteracions)  
        fitness = problema.funcio_avaluacio(estat)  
        if fitness < millor_fitness:  
            millor_estat = estat  
            millor_fitness = fitness  
            print(f"Millor fitness: {millor_fitness}")  
    return millor_estat
```

Execució

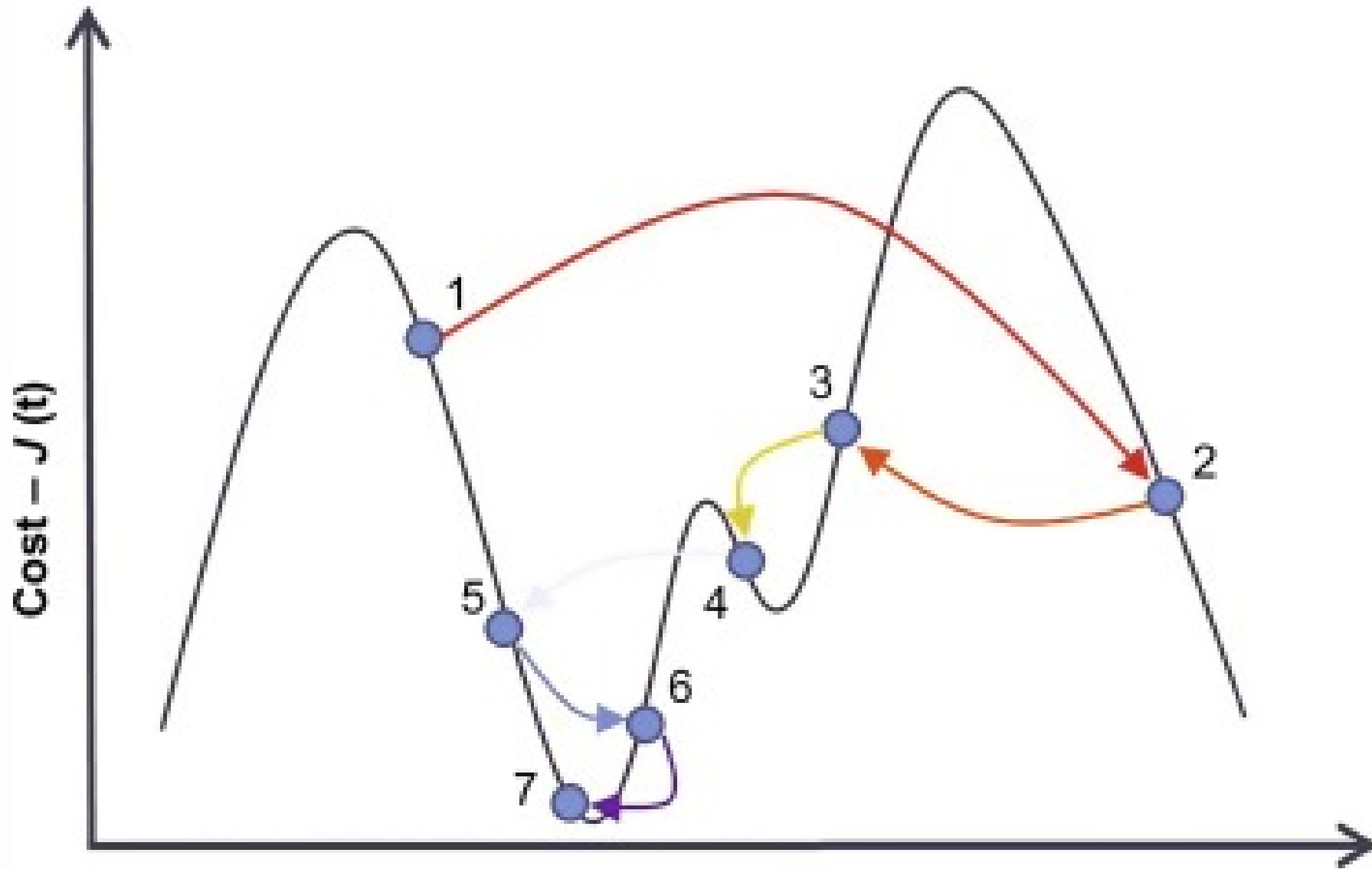
```
solucio = random_restart_hill_climbing(  
    tsp, ciutats, 1000, 10  
)
```

```
Millor fitness: 12936.962711620448  
Millor fitness: 12887.286272582816  
Millor fitness: 12798.50074780205
```



Algorisme de recuit simulat

- L'algorisme de recuit simulat o **simulated annealing** es basa en el procés de **recuit** de la metal·lúrgia.
 - Un metall es calenta fins a una temperatura molt alta.
 - Després es deixa refredar lentament.
 - Això permet que les molècules es **reorganicin i minimitzin l'energia**.
 - Permet acceptar estats que empitjoren l'actual, en certes condicions.
 - Incorpora l'aleatorietat a l'algorisme d'escalada.

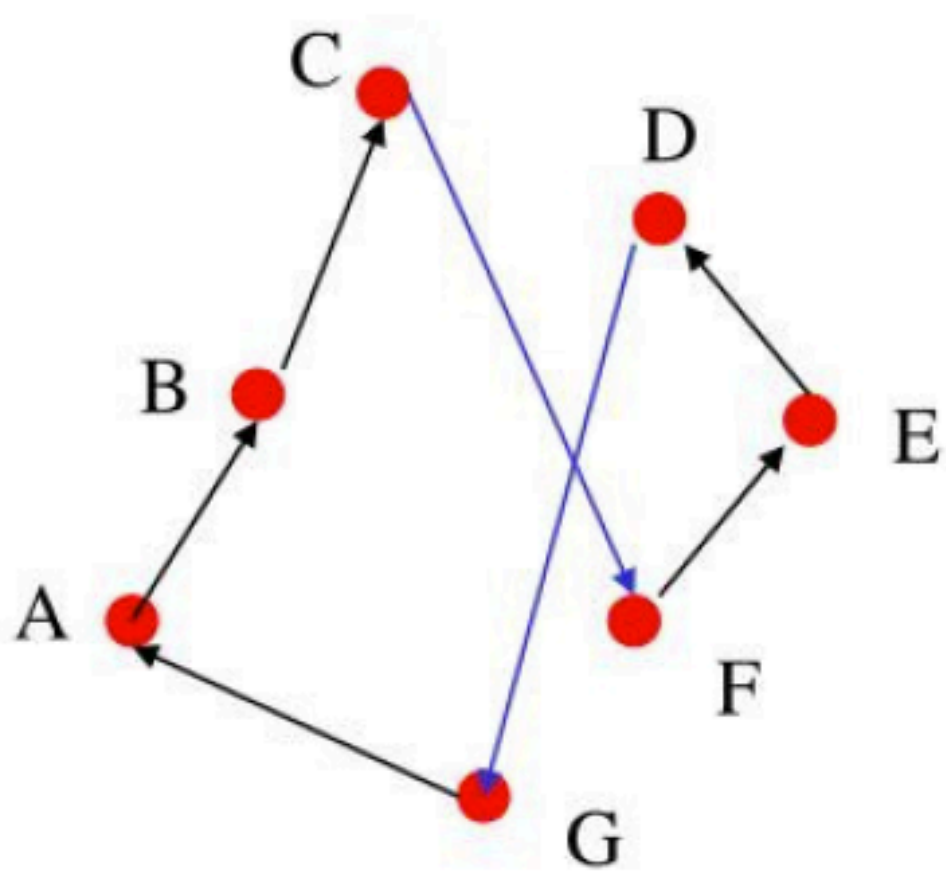


Probabilitat d'acceptació

- La probabilitat d'acceptar un estat empitjorant depèn de la **temperatura**.
 - A mesura que l'algorisme avança, la temperatura **disminueix** i fa que sigui **menys probable** acceptar un estat empitjorant.
 - La probabilitat d'acceptar un estat empitjorant es calcula amb la següent fórmula:
 - $P = e^{-\frac{\Delta E}{T}}$, on ΔE és la diferència entre el valor de l'estat actual i el valor de l'estat successor.

Propietats

- L'algorisme de recuit simulat **pot trobar el màxim global**.
 - **No** ho garanteix, però la probabilitat de trobar-lo augmenta amb el nombre d'iteracions.
- Es un dels algorismes de cerca local més utilitzats.
- Usos reals:
 - Optimització de xarxes neuronals
 - Optimització de circuits electrònics
 - Optimització de problemes de planificació



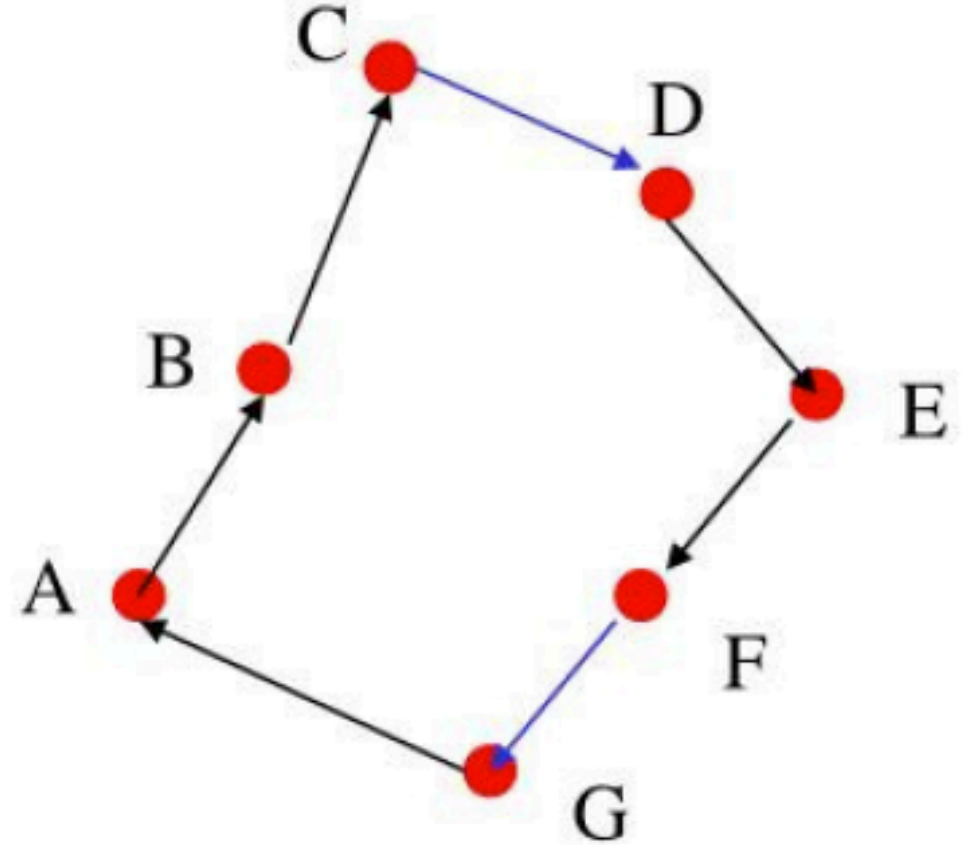
ABCFEDG



ABC**FED**G



ABC**DEFG**



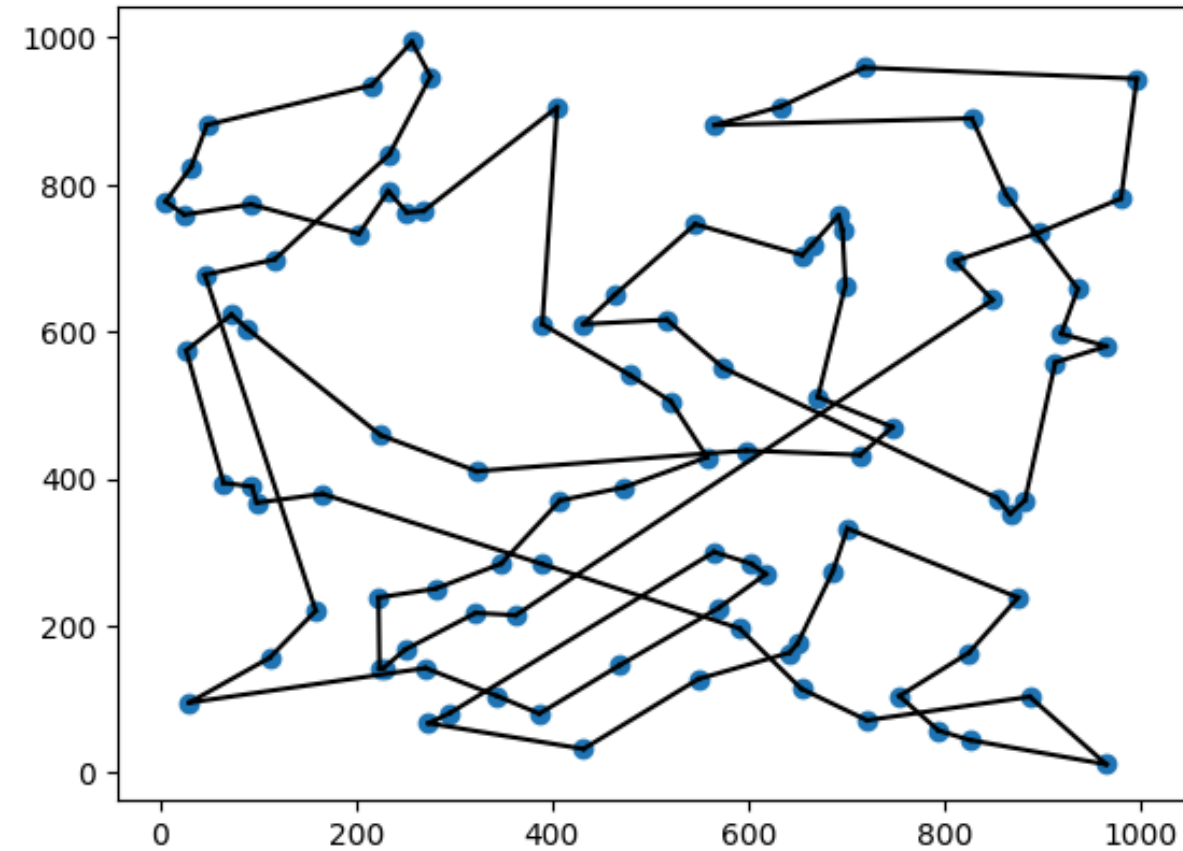
Implementació

```
def simulated_annealing(espai_estats, funcio, temperatura=100, refredament=0.9):  
    estat_actual = espai_estats.estat_inicial()  
    while True:  
        successors = espai_estats.estats_successors(estat_actual)  
        successors_ordenats = sorted(successors, key=funcio)  
  
        if funcio(successors_ordenats[0]) <= funcio(estat_actual):  
            estat_actual = successors_ordenats[0]  
        else:  
            delta = funcio(successors_ordenats[0]) - funcio(estat_actual)  
            probabilitat = math.exp(-delta / temperatura)  
            if random.random() < probabilitat:  
                estat_actual = successors_ordenats[0]  
  
        temperatura *= refredament  
        if temperatura < 0.00001:  
            return estat_actual
```

Execució

```
solucio = hill_climbing(tsp)
plot_tsp(tsp, solucio)
```

```
Cost:      50976.93306917217
Cost:      51376.91701004807
...
Cost:      11354.397010378212
Cost:      11350.41254307539
Cost final: 11350.41254307539
```



Implementació **inline** (I)

```
def simulated_annealing(problema, temp=100000, refredament=0.9999, iteracions=10000):  
    estat = problema.inicial  
    cost = problema.funcio_avaluacio(estat)  
  
    while temp > 0.1:  
        i = random.randint(1, len(estat) - 1)  
        j = random.randint(1, len(estat) - 1)  
  
        while i == j:  
            j = random.randint(1, len(estat) - 1)  
  
        estat[i], estat[j] = estat[j], estat[i]  
        cost_nou = problema.funcio_avaluacio(estat)  
        ...
```

Implementació **inline** (II)

```
...
delta = cost_nou - cost
if delta < 0 or math.exp(-delta / temp) > random.uniform(0, 1):
    cost = cost_nou
    print("Cost: ", cost)
else:
    estat[i], estat[j] = estat[j], estat[i]

temp = temp * refredament

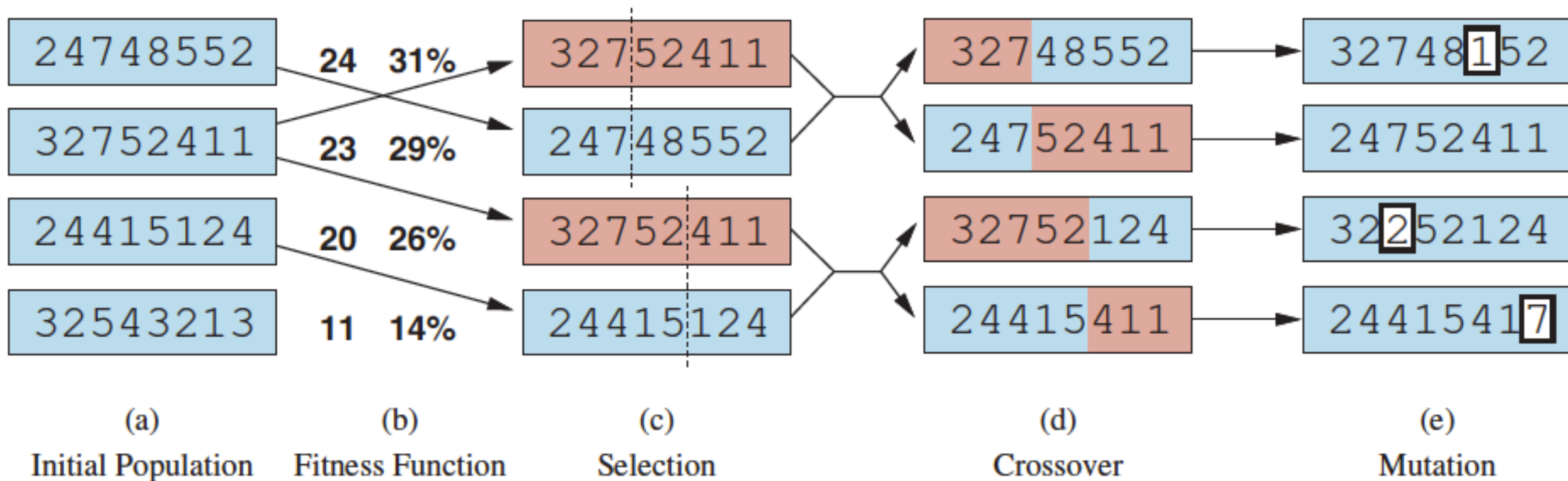
print("Cost final: ", cost)
print("Estat final: ", estat)

return estat
```

Algorismes genètics

Algorismes genètics

- Els **algorismes genètics** són una tècnica d'optimització inspirada en la **evolució biològica**.
 - Es pot veure com una **tècnica de cerca local en paral·lel**.
 - Cada **individu** de la població representa un **estat**.
 - Cada **gen** de l'individu representa una **variable** de l'estat.
 - Els **valors** dels gens representen els **valors** de les **variables**.
 - Els **individus** evolucionen **generant nous individus**.



Procediment

- L'algorisme **genera una població inicial** d'estats.
- Després, **genera una nova població** a partir de la població actual.
- Aquesta nova població **hereta** els **gens** de la població actual.
- A més, **muta** alguns dels seus gens.
- L'algorisme **selecciona els millors** de la nova població i **descarta la resta**.
- L'algorisme **s'atura** quan s'arriba a un **nombre màxim d'iteracions**.

Definició del problema

- El primer pas és definir el problema com a un **espai d'estats**.
- Els **estats** són **individus**.
- Els **gens** són les **variables**.
- Els **valors dels gens** són els **valors de les variables**.
- Per simplificar, **representarem els gens com a enters**.
 - *Viatjant de comerç*: Seqüència de nombres que representen les ciutats en ordre
 - *Motxilla*: Sèrie de 0/1 que indica si un objecte està o no a la motxilla.



7

2

1

9



5

4

7

2

A

B

C

D

1

0

0

1

A picked

B and C not picked

C picked

Funció d'avaluació

- Haurem de definir una **funció d'avaluació**.
- Aquesta funció **assigna un valor** a cada **individu**.
- Aquest valor **representa la qualitat** de l'individu.
- Haurem de ponderar els valors de les variables, segons les característiques de l'individu que vullguem potenciar.

Creació de la població inicial

- El tercer pas és **crear una població inicial**.
- Aquesta població s'ha de crear **aleatòriament**, dins dels **dominis** de les variables.
- El nombre d'individus de la població inicial **ha de ser suficientment gran i divers**, sense fer-lo massa gran.
- Opcionalment, ordenarem els individus segons la seva funció d'avaluació.

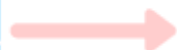
0	1	0	0	4
0	1	0	1	6
1	1	1	1	0
0	0	1	0	7
1	0	0	0	5
1	0	1	0	12

Selecció

- Per evolucionar la població s'han de **seleccionar els millors individus** i serán els que **passaran els seus gens a la següent generació**.
- Hi ha diverses tècniques de selecció:
 - **Per torneig**: Es trien k **individus aleatoris** i es **selecciona el millor**.
 - **Per ruleta**: S'**assigna una probabilitat** a cada individu, proporcional a la seva funció d'avaluació.
 - **Per rang**: La **probabilitat** serà proporcional a la seva posició.

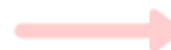
0	1	0	0	4
0	1	0	1	6
1	1	1	1	0
0	0	1	0	7
1	0	0	0	5
1	0	1	0	12

Initial Population



0	1	0	0	4
1	1	1	1	0
1	0	0	0	5
0	0	1	0	7

Random Mini Tournament

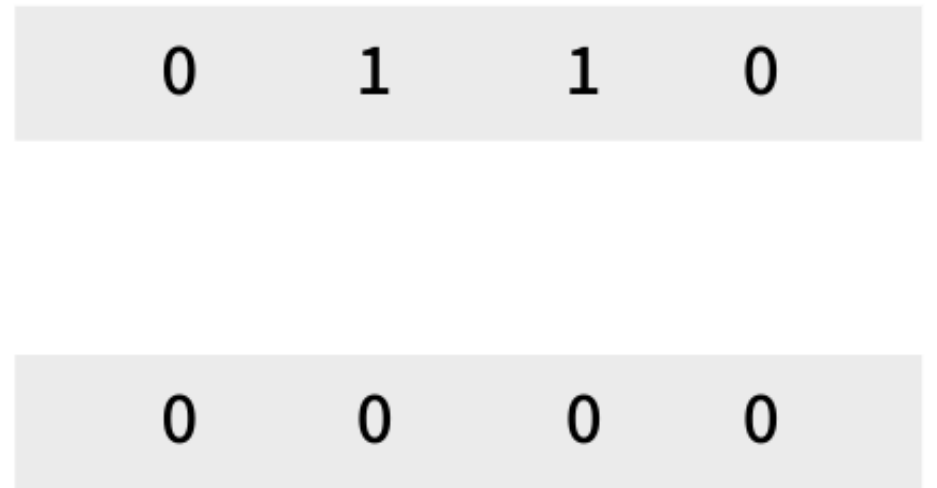
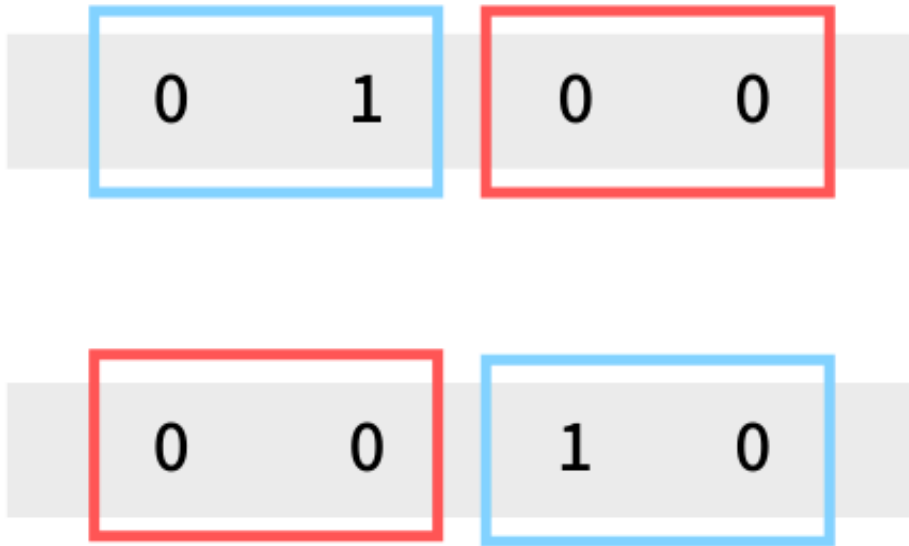


0	1	0	0	4
0	0	1	0	7

Winners become parents of the next generation

Creuament

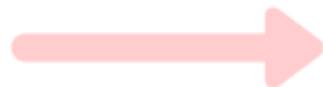
- El **creuament** és el procés pel qual es **genera un nou individu** (en certa probabilitat) a partir de dos individus.
- Els **fills** hereten els **gens** dels seus pares, barrejats.
- Hi ha diverses tècniques de creuament:
 - **Creuament per un punt:** Es tria un **punt aleatori** i es **barregen** els gens a partir d'aquest punt.
 - **Creuament per dos punts:** Es trien **dos punts aleatoris** i es **barregen** els gens entre aquests punts.
 - **Creuament uniforme:** Es tria **aleatòriament** per a cada gen si es **hereta del pare o de la mare**.
 - **Altres tècniques:** recombinació ordenada, màscara, etc.



Mutació

- La **mutació** és el procés pel qual es **modifica un gen** d'un individu.
- La mutació **pot ser necessària** per a **evitar que l'algorisme quede atrapat en un màxim local**.
- Al igual que en la selecció, la mutació **s'aplica amb una certa probabilitat** (normalment molt baixa).
- Hi ha diverses tècniques de mutació:
 - **Mutació aleatòria**: Es tria un **gen aleatori** i es **modifica**.
 - **Mutació dirigida**: Es tria un **gen aleatori** i es **modifica** en una **direcció concreta**.

1 1 1 0



1 0 1 0

Implementació (I)

```
def genetic_algorithm(espai_estats, funcio, num_individus=100, num_iteracions=100):  
    poblacio = [espai_estats.estat_inicial() for _ in range(num_individus)]  
    for _ in range(num_iteracions):  
        seleccionats = sorted(poblacio, key=funcio)[:num_individus]  
        nova_poblacio = []  
        for i in range(num_individus):  
            pare = random.choice(seleccionats)  
            mare = random.choice(seleccionats)  
            fill = creuament(pare, mare)  
            if random.random() < 0.1:  
                fill = espai_estats.mutacio(fill)  
            poblacio.append(fill)  
  
        poblacio = nova_poblacio  
  
    return poblacio[0]
```

Implementació (II)

```
def creuament(pare, mare):  
    punt = random.randint(0, len(pare))  
    fill = pare[:punt] + mare[punt:]  
    return fill  
  
def mutacio(individu):  
    punt = random.randint(0, len(individu))  
    nou_valor = random.randint(0, 100)  
    individu[punt] = nou_valor  
    return individu
```

Conclusions i problemes

- Els algorismes genètics poden ser difícils de **representar**.
- Funcionen millor amb els problemes que es poden representar com a un conjunt de **variables binàries**.
- Solen ser més lents que altres tècniques de cerca local.
- Per molts problemes els operadors de creuament i mutació són difícils de definir.
- La seva capacitat d'entrenar xarxes neuronals els fa molt útils en aquest camp.

Satisfacció de restriccions



Definicions (I)

- Alguns problemes es poden modelar millor com a problemes de satisfacció de restriccions **CSP (Constraint Satisfaction Problems)**
 - Tipus específic de problemes de búsqueda, pero difícils de tractar pel seu tamany.
- Alguns d'aquestos problemes podem solucionar-los amb les tècniques de **cerca local** que ja hem vist.
 - El resultat, però, pot no ser una solució **optima**.
 - Per això, s'han desenvolupat tècniques específiques per a aquests problemes.
 - Veurem també com podem **millorar** els resultats de les tècniques de cerca local.

Definicions (II)

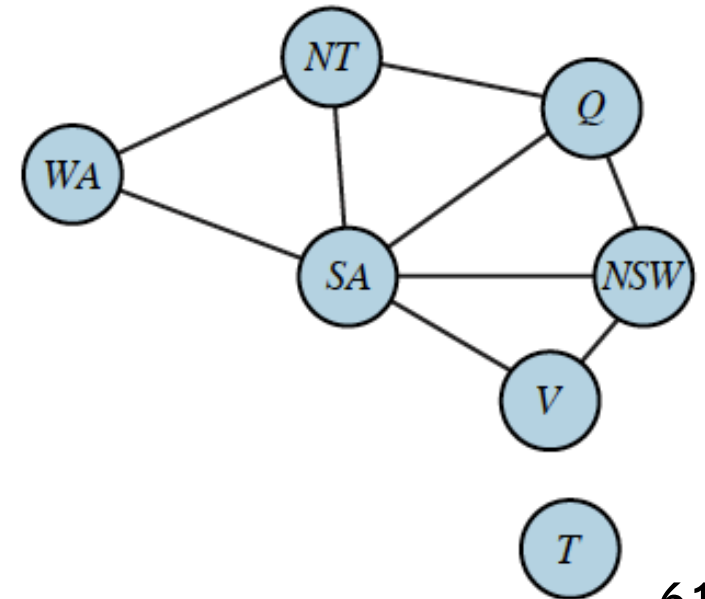
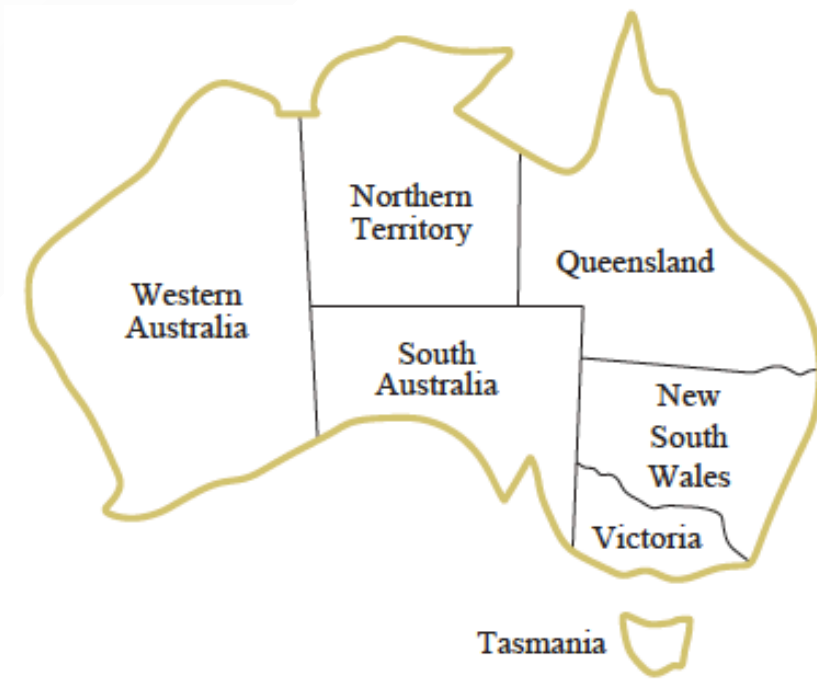
- En aquests problemes, l'**estat** és un **conjunt de variables**.
- Cada variable té un **domini** de valors possibles.
- Les **restriccions** són les **relacions** entre les variables.
- Els **estats** que satisfan les **restriccions** són les **solucions**.
- Els **estats** que no satisfan les **restriccions** són **incompatibles**.
- Els **estats** que no són ni solucions ni incompatibles són **parcials**.

Exemple: Mapa de colors (I)

- Tenim un mapa amb **països**.
- Volem **pintar** cada país amb un **color**.
 - No volem que dos països **adjacents** tinguin el **mateix color**.
 - Les **variables** són els **països**.
 - Els **dominis** són els **colors**.
 - Les **restriccions** són que **dos països adjacents no poden tenir el mateix color**.
 - Els **estats** són les **combinacions de colors** per a cada país.
 - Les **solucions** són les **combinacions de colors que satisfan les restriccions**.

Exemple: Mapa de colors (II)

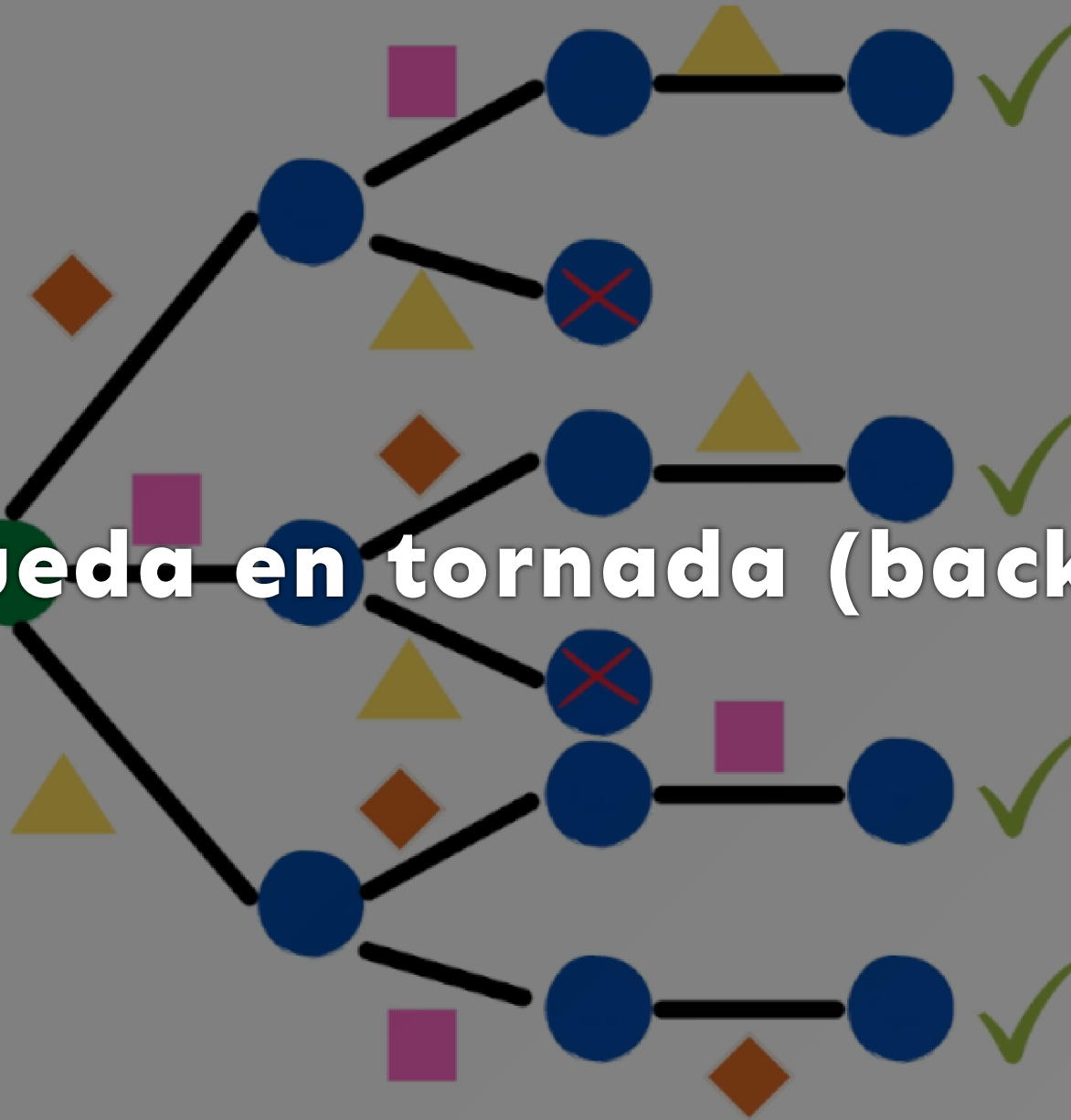
- Els algorismes que veurem es basen en representar les restriccions com a **grafs**.
 - Grafs de restriccions o **constraint graphs**.
- Els nodes del graf són les **variables**.
- Les **arestes** del graf són les **restriccions**.
- Les **solucions** són els **nodes del graf** que **no tenen cap aresta** que els connecte.



Força bruta

- Una forma de solucionar aquest problema és **provar totes les combinacions**.
- Aquesta solució és **poc eficient**.
 - El nombre de combinacions és **molt gran**.
 - Si tenim 10 països i 4 colors, el nombre de combinacions és de $4^{10} = 1.048.576$.
- Aquesta solució **no és tractable**.
 - El nombre de combinacions creix **exponencialment** amb el nombre de variables.
 - Aquest problema és **NP-complet**.

Búsqueda en tornada (backtracking)



Descripció

- L'algorisme de **búsqueda en tornada** o **backtracking** és un algorisme de búsqueda no informada.
- Partint d'una serie de variables
 - L'algorisme **assigna un valor** a una **variable**.
 - Després, **comprova** si aquesta assignació **viola alguna restricció**.
 - Si no la viola, **assigna un valor** a la **següent variable**.
 - Si la viola, **desfà l'assignació** i **cambia el valor** de la **variable anterior**.
 - L'algorisme **s'atura** quan ha **assignat un valor a totes les variables**.

Implementació

```
def backtrack():  
    return _backtrack([], 0)  
  
def _backtrack(estat, posicio):  
    if posicio==len_solucio and es_solucio(estat):  
        return estat  
  
    for i in range(len_solucio):  
        estat.append(i)  
        if es_valid(estat) == 0:  
            solu = _backtrack(estat, posicio + 1)  
            if solu is not None:  
                return solu  
        estat.pop()  
  
    return None
```

Problemes

- L'algorisme de búsqueda en tornada **garanteix** trobar la **solució**.
- El seu **cost** és molt **alt**.
- El **nombre d'estats** que cal **explorar** és molt **gran**.
 - Serà menor que el nombre d'estats de l'espai d'estats, però pot ser no molt menor.
- Veurem algunes de les optimitzacions que podem aplicar

Ordenació de variables

- L'**ordre** de selecció les variables afecta al **nombre d'estats** que cal **explorar**.
- Algunes estratègies d'ordenació:
 - **Variable més restringida (MRV)**: La variable amb menys valors possibles.
 - Pot **detectar incompatibilitats** abans.
 - **Variable menys restringida (LRV)**: La variable amb més valors possibles.
 - Pot donar més **flexibilitat** al principi.
 - **Grau (degree)**: La variable amb més restriccions.
 - Pot **resoldre incompatibilitats crítiques** abans.

Ordenació de valors

- L'**ordre** de selecció els valors també determina el **nombre d'estats** que cal **explorar**.
- Algunes estratègies d'ordenació:
 - **Menys restriccions (LCV)**: El valor que deixa més opcions a les variables restants.
 - Intenta minimitzar els conflictes futurs.
 - **Més restriccions (MCV)**: El valor que deixa menys opcions a les variables restants.
 - Pot permetre accelerar cap a solucions viables.
 - **Aleatori**: El valor es tria aleatòriament.
 - Pot **donar més flexibilitat** al principi.

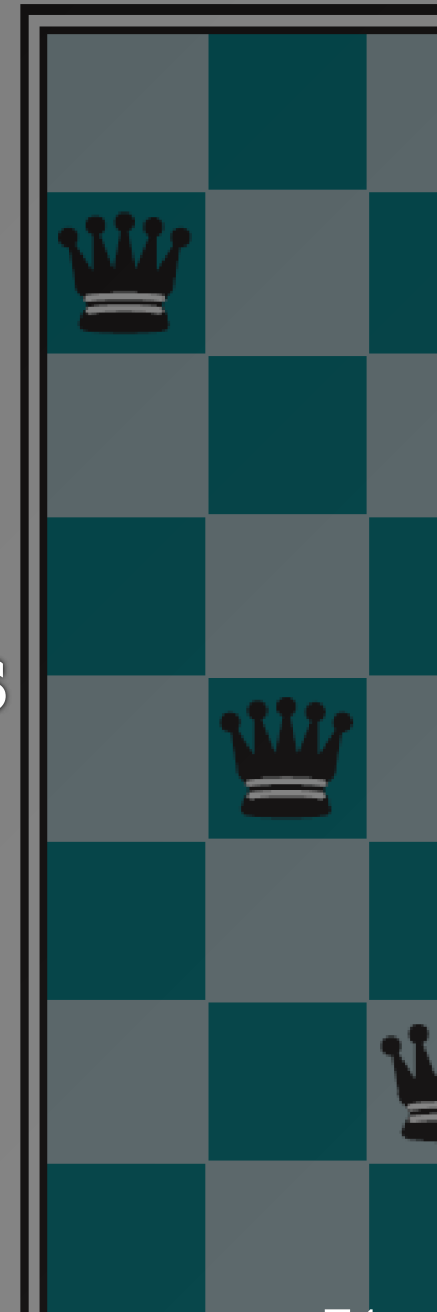
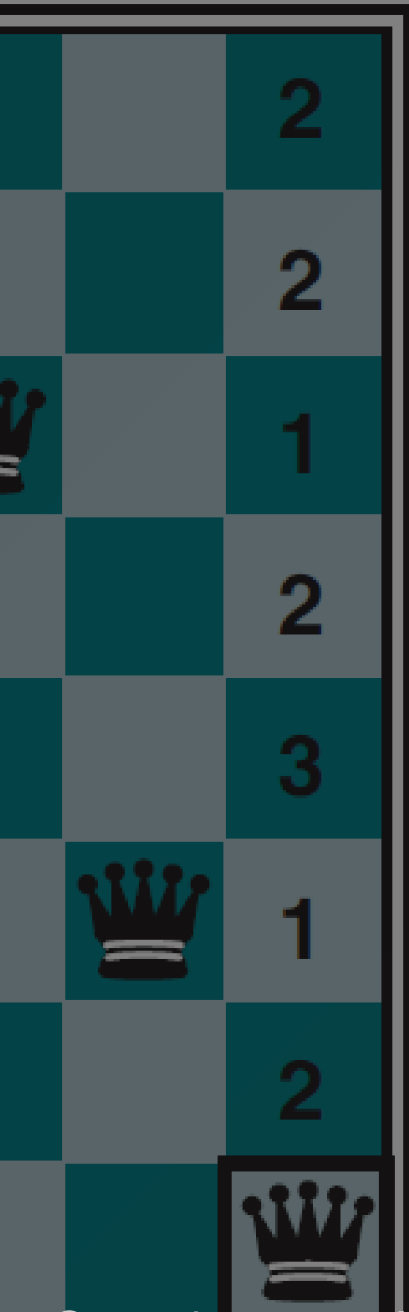
Implementació de les optimitzacions (I)

```
def backtrack():  
    estat = [-1]*len_solucio  
    variables = list(range(len_solucio))  
  
    return _backtrack(estat, variables)
```

Implementació de les optimitzacions (II)

```
def _backtrack(estat, variables):  
    if es_solucio(estat):  
        return estat  
    var = selecciona_variable(variables)  
    for i in ordena_valors(var):  
        estat[var] = i  
        if es_valid(estat) == 0:  
            variables.remove(var)  
        solu = _backtrack(estat, variables)  
        if solu is not None:  
            return solu  
        variables.append(var)  
        estat[var] = -1
```

Algorithme de mínims conflictes

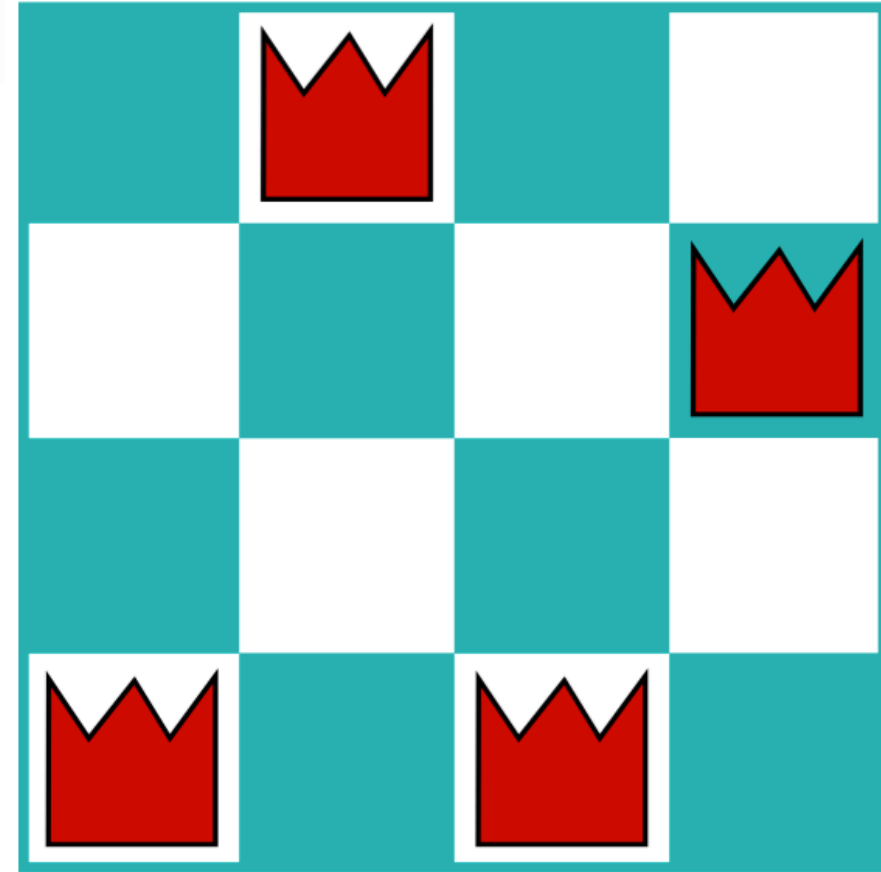


Descripció

- L'algorisme de mínims conflictes o **minimum conflicts** és un algorisme de búsqueda local **específic per a CSP**.
- Tria una variable aleatoriament i li assigna un valor que **minimitzi el nombre de restriccions violades**.
- Repeteix aquest procés fins que **totes les restriccions estiguin satisfetes**
 - o s'arriba a un **nombre màxim d'iteracions**.
- Molt eficient si l'**assignació inicial** és bona.
 - Pot ser recomanable utilitzar un **algorisme voraç** per a trobar una bona assignació inicial.

Exemple: N Reines (I)

- Tenim un tauler d'escacs de $N \times N$.
- Volem **col·locar N reines** en el tauler.
- No volem que **cap reina pugui matar a una altra**.
- Les **variables** són les **files**.
- Els **dominis** són les **columnes**.
- Les **restriccions** són que no hi pugui haver dues reines en posició d'atac.



Exemple: N Reines (II)

- Per al problema de les N reines i una $N = 8$, tindrem fins a $8^8 = 16.777.216$ estats.
- L'algorisme de mínims conflictes **no** genera **estats successors**, **modifica l'estat actual**.
- **No** necessitem una **estructura de dades** que representi l'espai d'estats.
 - Aixó fa que l'algorisme de mínims conflictes siga **més eficient que la búsqueda en tornada**.
- L'algorisme de mínims conflictes **no** garanteix trobar la **solució** però **en la gran majoria dels casos** la troba.

Example: N Reines (III) - Implementació

```
def minims_conflictes(espai_estats, funcio, max_iteracions):  
    inicial = espai_estats.estat_inicial()  
  
    actual = inicial  
    for _ in range(max_iteracions):  
        if espai_estats.es_solucio(actual):  
            return actual  
  
        i = random.randint(0, len(actual.tauler) - 1)  
        act_conflicts = funcio(actual)  
  
        for j in range(len(actual.tauler)):  
            if j != i:  
                actual[i], actual[j] = actual[j], actual[i]  
                new_conflicts = funcio(actual)  
                if new_conflicts <= act_conflicts:  
                    act_conflicts = new_conflicts  
            else:  
                actual[i], actual[j] = actual[j], actual[i]  
  
    return actual
```

