18 秋 数分 1 杨家忠 期末

北京大学数学科学学院数学分析 I 期末考试试题

2019.1.17

共 八 道大题, 满分 100 分, 时间 120 分钟

一、（本题 $4\times 10=40$ 分）

（1）微积分中两个最重要的算子微分算子 d 和积分算子 $\int$ 遇到一起的时候，就产生了下面的运算。请计算不定积分

$$\int d\omega.$$

（2）考虑 $(0,1)$ 上定义的函数

$$R^3(x)=\begin{cases}\frac{1}{p^3}, & x=\frac{q}{p}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

已知该函数在某些点上可导，计算在这些点处的导数值。

（3）求四次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$ 为凸函数的条件。

（4）计算不定型极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x+\sin\frac{1}{x}}{\ln\frac{\ln(1-x)}{\ln x}-\sin\frac{1}{x}}.$$

二、（本题共 10 分）本学期期中考试有这么一道题：

设 $a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, a_3=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},\ldots, a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$，我们证明了此数列当 $n\to+\infty$ 时，极限存在。

现在我们也是学过导数的人了，作为期末试题，考虑该题的后半部分：

设 $a>0$, $a_1=a$, $a_2=a^a$, $a_3=a^{a^a},\ldots,$ $a_{n+1}=a^{a_n}$, $(n=1,2,3,\ldots)$.

记 $S=\{a:\{a_n\}\text{ 收敛}\}$.

证明: (1) 集合 S 是有界非空集；(2) 求 $\sup S$。

三、（本题10分）设 $y(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2019)$，计算并化简下式(请提供化简过程)

$$\sum_{k=1}^{2019}\frac{1}{y'(k)}.$$

四、（本题10分）在牛顿给出的 72 种平面三次曲线分类中，有一类双曲双曲线（不是打印错误，就是双曲双曲，还有抛物双曲……）。下面就是一条具体的双曲双曲线：

$$xy^2+2\sqrt{2}y=x^3-5x^2+9x-7.$$

问题：试求该曲线所有可能的渐近线。

五、(本题10分) 设 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)$ 定义如下：给定 $x\in(0,1)$，假设其十进制表示为 $x=0.x_1x_2\ldots$，则定义 $f(x)=0.x_10x_200x_3000x_4\ldots$

问：$f(x)$ 有可导的点吗？如果有，指出一点，并求该点的导数值。

(只回答诸如"有、没有、能、不能……"等结论，而没有任何论证，差评！)

六、(本题10分) 假设 A,B 两地相距 L（$L>0$），高铁在时间段 T（$T>0$）内需要从 A 地准点到达 B 地，设高铁的路程 $s=s(t)$ 是自变量 t 的 C^2 光滑函数，假设高铁出 A 站和进 B 站时速度均为0，即：$s(0)=0,\ s(T)=L,\ s'(0)=0.\ s'(T)=0,\ s(t)\in C^2[0,T]$.

常识告诉我们，高铁的加（减）速度不能太小，因为不然的话，速度提不上去，是不可能按时到达目的地的。即：必至少存在一点 $\xi\in(0,T)$ 使得 $|s''(\xi)|\geq M$.

问题：请给出 M 最大可能的值，并予以证明。

七、(本题5分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$。证明或否定下面的结论：对任意的 $\varepsilon>0$，都存在自然数 N，以及两两互异的 $x_1,x_2,\ldots,x_N\in(0,1)$ 使得

$$\left|\frac{1}{2f'(x_1)}+\frac{1}{2^2f'(x_2)}+\frac{1}{2^3f'(x_3)}+\cdots+\frac{1}{2^Nf'(x_N)}-1\right|<\varepsilon.$$

八、(本题5分)

(1) 两个 C^1 函数 $f(x)$ 和 $\bar{f}(x)$ 满足：

$$f(x_1)=f(x_2)=0,\quad \bar{f}(\bar{x_1})=\bar{f}(\bar{x_2})=0$$

其中 $x_1<x_2$，而 $\bar{x}_i$ 是由 x_i 向右移动得到的，且满足 $\bar{x_1}<\bar{x_2}$. 根据 Rolle 微分中值定理，应该分别存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 和 $\bar{\xi}\in(\bar{x_1},\bar{x_2})$ 使得 $f'(\xi)=0$ 和 $\bar{f}'(\bar{\xi})=0$.

问：是否一定成立 $\xi<\bar{\xi}$? 如果成立，请证明，如果不成立，举个反例。

(2) 设 $P(x)$ 和 $\bar{P}(x)$ 均为 n 次的首一(即最高项的系数为1)多项式，且都有 n 个实单根，

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),\quad \bar{P}(x)=(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_2)\cdots(x-\bar{x}_n),$$

其中，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，而 $\bar{x}_i$ 是由x_i 向右移动得到的，且满足 $\bar{x}_1<\bar{x}_2<\cdots<\bar{x}_n$，记 $P'(x)$ 位于 (x_i,x_{i+1}) 之间的零点为 ξ_i；$\bar{P}'(x)$ 位于 $(\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1})$ 之间的零点为 $\bar{\xi}_i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$.

证明：$\bar{P}'(x)$ 的每个零点都分别位于 $P'(x)$ 的相应的零点右侧，即 $\xi_i<\bar{\xi}_i$。

(全卷完)