Implementação e Análise de Estruturas para Matrizes Esparsas

Projetar e implementar estruturas de dados eficientes para representar e manipular matrizes esparsas, isto é, matrizes em que a maior parte dos elementos é zero. O projeto deve ser realizado em equipes de três alunos e incluir justificativas teóricas, análise experimental e documentação clara das decisões tomadas.

1 Contexto

Definição 1 *Uma matriz esparsa é uma matriz em que a maioria dos elementos é igual a zero. Mais formalmente, uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é considerada esparsa se o número de elementos não nulos k satisfaz:*

$$k << n \times m$$

Isto é, o número de elementos não nulos é muito menor que o número total de posições possíveis.

Motivação

Matrizes esparsas aparecem em diversas áreas da Computação, sempre que os dados ou relações entre entidades são predominantemente ausentes.Exemplos:

- **Ciência de dados e IA:** representações de dados de alta dimensionalidade.
- **Grafos:** a matriz de adjacência de um grafo com poucos vértices conectados é naturalmente esparsa.
- **Álgebra linear numérica:** métodos iterativos para resolver sistemas lineares ou autovalores aproveitam a estrutura esparsa.
- **Processamento de imagens e simulações físicas:** discretizações de malhas resultam em matrizes grandes, porém com poucos coeficientes não nulos.

Em todos esses contextos, usar uma estrutura densa desperdiça tempo e memória, tornando essencial o uso de estruturas adaptadas à esparsidade.

2 Requisitos obrigatórios

Deve escolher e implementar duas estruturas para representar a matriz esparsa, satisfazendo:

	Descrição	Complexidade esperada da estrutura 1	Complexidade garantida da estrutura 2
Memória	Uso de memória	$O(k)$	$O(k)$
$A[i,j]$	Acessar elemento	$O(1)$	$O(\log k)$
$A[i,j] = x$	Inserir/atualizar elemento	$O(1)$	$O(\log k)$
A^T	Retornar transposta	$O(1)$	$O(1)$
$C = A + B$	Soma de matrizes	$O(k_A + k_B)$	$O((k_A + k_B) \log k)$
$\alpha \cdot A$	Multiplicação por escalar	$O(k)$	$O(k)$
$C = A \times B$	Multiplicação de matrizes	$O(k_A \cdot d_B)$	$O(k_A \cdot d_B \log k_C)$

Onde k, k_A, k_B, K_C, representam o número de elementos não nulos de cada matriz. Enquanto d_B é o número número médio de elementos não nulos por linha/coluna relevante de de B. Uma linha/coluna é relevante se possuir ao menos um elemento não nulo.

3 Análise experimental

- Implementar um gerador de matrizes esparsas com diferentes graus de esparsidade (1%, 5%, 10%, 20% de elementos não nulos) e diferentes dimensões ($\{10^i \times 10^i\}_{i=2}^{6}$), para as matrizes de dimensões maiores ($i \geq 4$), considerar somente graus de esparsidade de $\frac{1}{10^{i+2}}\%$, $\frac{1}{10^{i+1}}\%$ e $\frac{1}{10^{i}}\%$.
- Comparar o desempenho (tempo e memória) entre as duas estruturas implementadas e a representação tradicional de matriz (arranjo bidimensional).
- Consolidar os resultados experimentais em tabelas e gráficos de desempenho.
- Interpretação crítica: quando e por que a versão esparsa é vantajosa.

4 Entrega

- Código-fonte documentado.
- Relatório que deve:
  - Ser digitado e entregue em formato .pdf.
  - Descrever as estruturas adotadas.
  - Analisar teoricamente as complexidades.
  - Apresentar os resultados experimentais e gráficos.
  - Discutir de forma crítica os resultados obtidos.

5 Avaliação

A avaliação considerará:

- Correção e clareza da implementação.
- Análise teórica e justificativas.
- Experimentos e interpretação crítica.
- Discussão/apresentação/diálogo com o professor sobre a entrega.