Newton-Raphson Verfahren

Das Newton-Raphson* Verfahren ist eine Methode zur numerischen Bestimmung von Nullstellen gegebener, stetig differenzierbarer Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Abbildung 1 illustriert die dazugehörige Iterationsvorschrift.

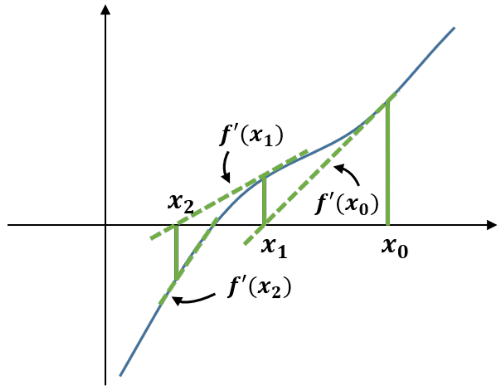

Abbildung 1: Visualisierung des Newton-Raphson Verfahrens

Das Verfahren

1. Wähle einen Startwert x_0, berechne $f(x_0)$.
2. Berechne die Tangente $t_0(x)$ an $f(x_0)$.
   Die Tangente ergibt sich aus dem linearen Anteil der Taylorentwicklung an $f(x_0)$:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{linearer Summand}} + \underbrace{{}^1\!/\!_2 f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots}_{\text{Terme höherer Ordnung}} \tag{1}$$

$$t(x) = t_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

3. Berechne die Nullstelle x_1 der Tangente.

$$\begin{aligned} t_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &\overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow f'(x_0)(x - x_0) &= -f(x_0) \\ \Leftrightarrow (x - x_0) &= -{}^{f(x_0)}\!/\!_{f'(x_0)} \\ \Leftrightarrow x &= x_0 - {}^{f(x_0)}\!/\!_{f'(x_0)} \coloneqq x_1 \end{aligned} \tag{3}$$

4. Wähle x_1 als neuen Startwert, beginne bei 1.

*Isaac Newton und Joseph Raphson

Die allgemeine Iterationsvorschrift ergibt sich aus

$$t_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \overset{!}{=} 0$$

zu:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{4}$$

Beispiel Im Folgenden sei ein einfaches Zahlenbeispiel angegeben. Mit dem Startwert $x_0 = 5$ und der Ableitung $f'(x) = 2(x-3)$ wird die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x-3)^2$ numerisch angenähert.

$f(x) = (x-3)^2$	$f'(x) = 2(x-3)$	x
4	4	5
1	2	4
0.25	1	3.5
0.0625	0.5	3.25
0.015625	0.25	3.125
0.0039063	0.125	3.0625
$\downarrow$	...	$\downarrow$
0.0	...	3.0

Konvergenz Auf eine detaillierte Analyse der Konvergenzgeschwindigkeit wird im Folgenden verzichtet. Es sei jedoch erwähnt, dass die Konvergenz des Verfahrens nicht uneingeschränkt sichergestellt ist. Als Gegenbeispiel sei

$$h(x) = x^3 - 2x + 2, \quad x_0 = 0 \tag{5}$$

gegeben. Es kann leicht überprüft werden, dass das Verfahren auf der Funktion h mit Startwert $x_0 = 0$ in einer Oszillation zwischen 0 und 1 resultiert.

Abbruchkriterien Neben der Vorgabe einer maximalen Anzahl an Iterationen kann bei der Implementierung auf zwei weitere Abbruchkriterien abgestellt werden.

1. Maximale Anzahl an Iterationen erreicht
2. $||f(x_n)|| < \varepsilon_1$
3. $||x_{n+1} - x_n|| < \varepsilon_2$

Dabei bestimmen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ die Qualität der Nullstelle.