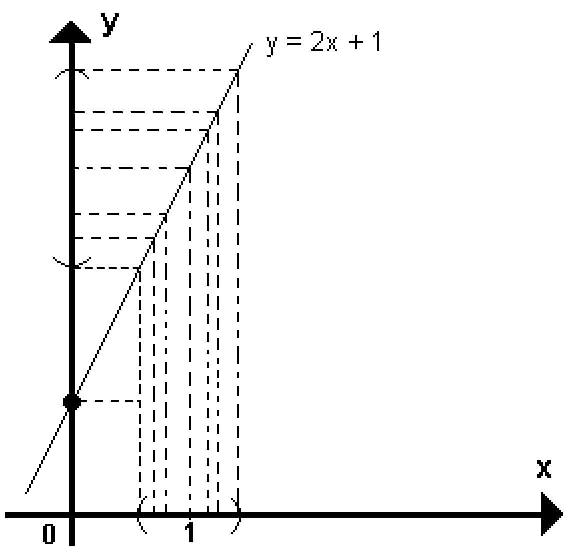
LIMITES

Noção intuitiva de limite

Seja a função f(x)=2x+1. Vamos dar valores a **x** que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de **y**:

x	***y* = 2*x* + 1**
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

x	***y* = 2*x* + 1**
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98



Notamos que à medida que x se aproxima de 1, y se aproxima de 3, ou seja, quando x tende para 1 ($x \to 1$), y tende para 3 ($y \to 3$), ou seja:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3}$$

Observamos que quando *x* tende para 1, *y* tende para 3 e o limite da função é 3.

Esse é o estudo do comportamento de f(*x*) quando *x* tende para 1 ($x \to 1$). Nem é preciso que *x* assuma o valor 1. Se f(*x*) tende para 3 ($f(x) \to 3$), dizemos que o limite de f(*x*) quando $x \to 1$ é 3, embora possam ocorrer casos em que para $x = 1$ o valor de f(*x*) não seja 3. De forma geral, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

se, quando *x* se aproxima de *a* ($x \to a$), f(*x*) se aproxima de *b* ($f(x) \to b$).

Seja, agora, a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \end{cases}$

Como $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, temos:

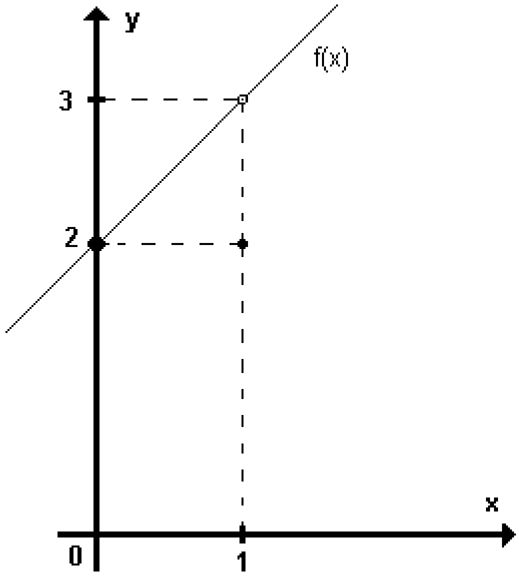
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

Podemos notar que quando *x* se aproxima de 1 ($x \to 1$), f(*x*) se aproxima de 3, embora para $x=1$ tenhamos $f(x) = 2$. o que ocorre é que procuramos o comportamento de y quando $x \to 1$. E, no caso, $y \to 3$. Logo, o limite de f(*x*) é 3.

Escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 1 + 2 = \boxed{3}$$

Se g: IR $\to$ IR e $g(x) = x + 2$, $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3$, embora $g(x) \neq f(x)$ em $x = 1$. No entanto, ambas têm o mesmo limite.



Propriedades dos limites

1ª) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

O limite da soma é a soma dos limites.
O limite da diferença é a diferença dos limites.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1}\left[x^2 \pm 3x^3\right] = \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 3x^3 = 1 + 3 = 4$$

2ª) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x).\ g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x)$

O limite do produto é o produto dos limites.

Exemplo:

$$\lim_{x \to \pi}\left[3x^3 . \cos x\right] = \lim_{x \to \pi} 3x^3 . \lim_{x \to \pi} \cos x = 3\pi^3 . \cos \pi = 3\pi^3 . (-1) = -3\pi^3$$

3ª) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

O limite do quociente é o quociente dos limites desde que o denominador não seja zero.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} x^2 + 1} = \frac{\cos 0}{0^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

4ª) $\lim_{x \to a} f(x)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 3)^2 = \left(\lim_{x \to 1} (x^2 + 3)\right)^2 = (1 + 3)^2 = 16$$

5ª) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } f(x) > 0. \text{ (Se } f(x) \leq 0, \text{ n é impar.)}$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = \sqrt{\lim_{x \to 2} x^3 + x^2 - 1} = \sqrt{2^3 + 2^2 - 1} = \sqrt{11}$$

6ª) $\lim_{x \to a} (\ln f(x)) = \ln\left[\lim_{x \to a} f(x)\right], \text{ se } \lim_{x \to a} f(x) > 0$

Exemplo:

$$\lim_{x \to e} (\ln x^2) = \ln\left[\lim_{x \to e} x^2\right] = \ln e^2 = 2.\ln e = 2.1 = 2$$

7ª) $\lim_{x \to a} \text{sen}(f(x)) = \text{sen}\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \text{sen}(x^2 + 3x) = \text{sen}\left[\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x)\right] = \text{sen } 4$$

8ª) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} e^{x^2+3x} = e^{\lim\limits_{x \to 1} x^2+3x} = e^4$$

Limites Laterais

Se *x* se aproxima de ***a*** através de valores maiores que ***a*** ou pela sua direita, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a+} f(x) = b}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à direita*** de ***a***.

Se *x* se aproxima de a através de valores menores que ***a*** ou pela sua esquerda, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a-} f(x) = c}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à esquerda*** de ***a***.

O limite de f(*x*) para $x \rightarrow a$ existe se, e somente se, os limites laterais à direita a esquerda são iguais, ou sejas:

- Se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
- Se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$, então $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Continuidade

Dizemos que uma função f(*x*) é contínua num ponto ***a*** do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

- $\exists f(a)$.
- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Propriedade das Funções contínuas

Se f(*x*) e g(*x*)são contínuas em *x* = *a*, então:

- f(*x*) $\pm$ g(*x*) é contínua em ***a***;
- f(*x*) . g(*x*) é contínua em ***a***;
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em ***a*** $(g(a) \neq 0)$.