3

Relações e Funções

O capítulo inicia-se com uma discussão sobre pares ordenados e o produto cartesiano de dois conjuntos. O conceito de relação é então definido como sendo um conjunto de pares ordenados. A conexão íntima entre partições e relaçòes de equivalência, num conjunto, é cuidadosamente examinada. Como preparação para os leitores que pretendem seguir estudando mais matemática moderna, propriedades importantes de funções são estudadas. Uma grande quantidade de exemplos é construída.

3.1 Produto cartesiano de conjuntos

Dados dois objetos quaisquer a e b, podemos formar um novo objeto (a, b), chamado *par ordenado* a,b.[1] [2] O adjetivo "ordenado" enfatiza aqui que a ordem pela qual os objetos a e b aparecem entre parênteses é essencial. Note que o par ordenado (a, b) não é o mesmo que o conjunto $\{a, b\}$. Há um modo satisfatório, embora complicado, de definir o par ordenado (a, b) como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, de onde segue a propriedade "$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$" (Veja Problema 11, Exercícios 1.3.1).

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são considerados iguais $(=)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$. Por exemplo, $(x, y) = (7, 8)$ se e somente se $x = 7$ e $y = 8$.

Em geometria analítica, o plano cartesiano pode ser considerado como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Enunciaremos formalmente este conceito do seguinte modo:

Definição 3.1 *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, é chamado o* produto cartesiano *de A e B, e é*

[1] Infelizmente, a notação (a, b) para um par ordenado é a mesma para um intervalo aberto quando a e b são números reais. Entretanto, o leitor atento deverá ser sempre capaz de fazer a distinção a partir do contexto.

[2] Desde o Capítulo 2, já fizemos a opção por denotar o intervalo aberto de extremos a e b por $]a, b[$. (N. do T.)

denotado por $A \times B$. Simbolicamente,

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \wedge y \in B\}$$

Para o par ordenado (a, b), a é chamado a *primeira coordenada* e b é a *segunda coordenada*.

Exemplo 3.1 *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. Encontre os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$.*

Solução. *Pela Definição 3.1 acima, temos*

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Notamos que $A \times B \neq B \times A$. Podemos representar geometricamente o produto cartesiano $A \times B$ como o conjunto de pontos destacados na seguinte figura.

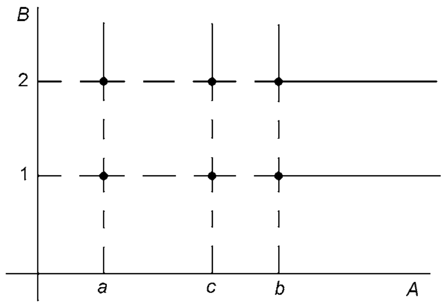


Figura 7.

Exemplo 3.2 *Seja A um conjunto qualquer. Encontre $A \times \emptyset$ e $\emptyset \times A$.*

Solução. *Como $A \times \emptyset$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tais que $a \in A$ e $b \in \emptyset$, e como o conjunto vazio $\emptyset$ não contém nenhum elemento, não há nenhum b em $\emptyset$; portanto $A \times \emptyset = \emptyset$. Analogamente, $\emptyset \times A = \emptyset$.*

Teorema 3.1 *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então*

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Demonstração.

(a) $(a,x) \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B \cap C)$	Def. 3.1
$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \in C)$	Def. de $\cap$
$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)$	Idemp., Assoc. (Cap. 1)
$\Leftrightarrow [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \in C)]$	Com., Assoc. (Cap. 1)
$\Leftrightarrow [(a,x) \in A \times B] \wedge [(a,x) \in A \times C]$	Def. 3.1
$\Leftrightarrow (a,x) \in (A \times B) \cap (A \times C)$	Def. de $\cap$

Portanto, pela Definição 2.1, do Capítulo 2, acabamos de demonstrar que

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Informalmente, esta igualdade pode ser enunciada: *O produto cartesiano distribui sobre a interseção.*

Deixaremos a demonstração da parte (b) ao leitor, como exercício.

Teorema 3.2 *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então*

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

Ou seja, o produto cartesiano distribui sobre a complementação.

Demonstração.

$(a,x) \in A \times (B - C)$

$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B - C)$	Def. 3.1
$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$	Def. 2.5 (Cap. 2)
$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)$	Idemp., Assoc. (Cap. 1)
$\Leftrightarrow [(a \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(a \in A) \wedge (x \notin C)]$	Com., Assoc. (Cap. 1)
$\Leftrightarrow [(a,x) \in A \times B] \wedge [(a,x) \notin A \times C]$	Def. 3.1
$\Leftrightarrow (a,x) \in (A \times B) - (A \times C)$	Def. 2.5 (Cap. 2)

Assim, acabamos de demonstrar que

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

3.1.1 Exercícios

1. Descreva cada um dos seguintes conjuntos, geometricamente, esboçando um gráfico no plano cartesiano.
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x = y\}$
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x > y\}$
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, |x + y| \leq 1\}$
2. Sob quais condições nos conjuntos A e B será verdade que $A \times B = B \times A$?
3. Demonstre o Teorema 3.1(b): $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4. Demonstre que $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$.
5. Demonstre que, se A, B e C são conjuntos e $A \subset B$, então $A \times C \subset B \times C$.
6. Se o conjunto A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, quantos elementos (pares ordenados) tem $A \times B$?
7. O produto cartesiano $A \times A$ tem 9 elementos, dentre os quais são encontrados $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Encontre os elementos restantes e o conjunto A.
8. Demonstre ou refute (dando um contra-exemplo) cada uma das seguintes afirmações.
(a) $A \times B \subset C \times D$ se e somente se $A \subset C$ e $B \subset D$.
(b) O conjunto das partes $\wp(A \times B)$ de $A \times B$ é o produto cartesiano $\wp(A) \times \wp(B)$ dos conjuntos das partes $\wp(A)$ e $\wp(B)$.
(c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.
9. Demonstre que, se A, B, C e D são quatro conjuntos quaisquer, então

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$$

10. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos quaisquer. Pode você generalizar a Definição 3.1 ao produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3$ de três conjuntos? Pode você generalizar isto ao produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de n conjuntos?
11. Defina o par ordenado (x, y) como sendo o conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Use esta definição para demonstrar que $(a, b) = (c, d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$.

3.2 Relações

Dados dois conjuntos A e B, não necessariamente distintos, quando dizemos que um elemento a de A está relacionado a outro elemento b de B,por uma relação $\mathcal{R}$, estamos fazendo uma afirmação sobre o par ordenado (a, b) no produto cartesiano $A \times B$. Portanto, uma definição matemática de uma relação pode ser dada precisamente em termos de pares ordenados no produto cartesiano de conjuntos.

Definição 3.2 *Uma* relação $\mathcal{R}$ de A para B *(ou de A em B) é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. É costume denotar $(a, b) \in \mathcal{R}$ por $a \,\mathcal{R}\, b$. O símbolo $a \,\mathcal{R}\, b$ é lido "a está $\mathcal{R}$-relacionado a b".*

Freqüentemente A e B são um mesmo conjunto, digamos X. Nesse caso, diremos que $\mathcal{R}$ é uma relação *em* X em vez de "de X para X". Por exemplo, em uma comunidade

X,[3] dizer que a (para Alberto) é o marido de b (para Beatriz), é considerar Alberto e Beatriz como um par (ordenado) (a, b) na relação $\mathcal{M}$ (de ser o marido de ...). O símbolo $a\,\mathcal{M}\,b$ ou $(a, b) \in \mathcal{M}$ pode ser lido "a é marido de b".

Não é necessário colocar Beatriz depois de Alberto no par ordenado (a, b). Podemos dizer que Beatriz é a esposa de Alberto, ou que o par ordenado (b, a) está na relação $\mathcal{E}$ (de ser a esposa de ...). O símbolo $b\,\mathcal{E}\,a$ ou $(b, a) \in \mathcal{E}$ pode ser lido: "b é a esposa de a". Neste exemplo, a relação $\mathcal{E}$ é chamada a relação inversa de $\mathcal{M}$.

Definição 3.3 *Sejam A e B dois conjuntos, não necessariamente distintos, e seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Então a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ da relação $\mathcal{R}$ é a relação de B para A tal que $b\,\mathcal{R}^{-1}\,a$ se e somente se $a\,\mathcal{R}\,b$. Ou seja,*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

Exemplo 3.3 *(a) Sejam $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, e seja $\mathcal{R} \subset A \times B$ dada por $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$. Então $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\} \subset B \times A$.*

(b) Seja

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ divide } y\}$$

Então

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$$

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. O *domínio* da relação $\mathcal{R}$, denotado por $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos aqueles $a \in A$ tais que $a\,\mathcal{R}\,b$ para algum $b \in B$; e a *imagem* de $\mathcal{R}$, denotada por $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$, é o conjunto de todos aqueles $b \in B$, tais que $a\,\mathcal{R}\,b$ para algum $a \in A$. Simbolicamente,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathcal{R} \text{ para algum } b \in B\}$$

e

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathcal{R} \text{ para algum } a \in A\}$$

No exemplo das relações $\mathcal{M}$ (ser o marido de ...) e $\mathcal{E}$ (ser a esposa de ...) na comunidade X, o domínio de $\mathcal{M}$ é o conjunto de todos os homens em X que são casados, enquanto que o domínio de $\mathcal{E}$ é o conjunto das esposas em X, e a imagem de $\mathcal{E}$ é o conjunto de todos os maridos em X, Isto é,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{E}) = \mathrm{Im}(\mathcal{M})$$

e

$$\mathrm{Im}(\mathcal{E}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{M})$$

Pode você tirar uma conclusão geral? (Veja Problema 3 ao final desta seção).

[3] Aqui, X é o conjunto de todos os membros da comunidade.

Exemplo 3.4 *No Exemplo 3.3(a),* $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a, b\}$ *e* $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{x, y\}$. *No Exemplo 3.3(b),* $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \mathbb{N} = \mathrm{Im}(\mathcal{R})$.

Definição 3.4 *Seja* $\mathcal{R}$ *uma relação em um conjunto* X. *Então dizemos que*

(a) $\mathcal{R}$ *é* reflexiva *se e somente se* $\forall x \in X, x\,\mathcal{R}\,x$.

(b) $\mathcal{R}$ *é* simétrica *se e somente se* $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow y\,\mathcal{R}\,x$.

(c) $\mathcal{R}$ *é* transitiva *se e somente se* $x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$.

(d) $\mathcal{R}$ *é uma* relação de equivalência *se e somente se* $\mathcal{R}$ *é reflexiva, simétrica e transitiva.*

A relação de igualdade, $=$, no conjunto $\mathbb{R}$ de números reais é claramente uma relação de equivalência. Seja X um conjunto de bolas coloridas e sejam duas bolas a e b relacionadas por $\mathcal{R}$ se e somente se a e b tem a mesma cor. Então a relação $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

Relações de equivalência são particularmente importantes na matemática moderna. Por exemplo, grupos quocientes na álgebra, espaços quocientes na topologia, e sistemas numéricos modulares na teoria dos números, todos envolvem certos tipos de relações de equivalência.

Dado um conjunto não vazio X, existem sempre pelo menos duas relações de equivalência em X; uma destas é a *relação diagonal* Δ_X (também chamada *relação identidade*) definida por

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

que relaciona cada elemento com ele mesmo. Geometricamente, se X é representado como um intervalo linear, então $X \times X$ é um quadrado e Δ_X é a diagonal "principal" do quadrado.

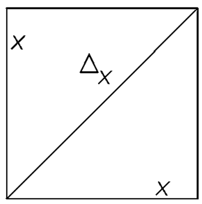


Figura 8.

Há, no outro extremo, sempre outra relação de equivalência $\mathcal{R} = X \times X$ em X. A relação Δ_X é a menor de todas as relações de equivalência em X, enquanto que $X \times X$ é a maior.

Exemplo 3.5 *Seja* m *um inteiro positivo qualquer fixado. A* relação de congruência $\equiv$ módulo m, *no conjunto* $\mathbb{Z}$ *dos números inteiro é definida por* $x \equiv y \pmod{m}$ *se e somente se* $x - y = km$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$. *A relação de congruência é uma relação de equivalência em* $\mathbb{Z}$.

Demonstração.

(a) Para cada x em $\mathbb{Z}$, como $x - x = 0 \cdot m$, temos $x \equiv x \pmod{m}$. Portanto, a relação é reflexiva.

(b) Se $x \equiv y \pmod{m}$, então $x - y = km$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Conseqüentemente, $y - x = (-k)m$ e $-k \in \mathbb{Z}$, ou $y \equiv x \pmod{m}$. Portanto, a relação é simétrica.

(c) Se $x \equiv y \pmod{m}$ e $y \equiv z \pmod{m}$, então $x - y = k_1 m$ e $y - z = k_2 m$ para alguns k_1 e k_2 em $\mathbb{Z}$. Portanto, $x - z = (x - y) + (y - z) = (k_1 + k_2)m$ e $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $x \equiv z \pmod{m}$. Portanto, a relação é transitiva.

Portanto, acabamos de demonstrar que a relação de congruência (módulo m) é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Como um caso expecial para o Exemplo 3.5, seja $m = 2$. Então, $x \equiv y \pmod{2}$ se e somente se $x - y$ é um inteiro par. Conseqüentemente, $x \equiv y \pmod{2}$ se e somente se x e y são ambos pares ou ambos ímpares.

3.2.1 Exercícios

1. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Demonstre que $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.
2. Seja $A = \{a, b, c\}$ e seja $\mathcal{R} = \{(a, c), (c, b), (a, b)\}$. Encontre o domínio de $\mathcal{R}$ e a imagem de $\mathcal{R}$.
3. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Demonstre que
   (a) $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Im}(\mathcal{R})$
   (b) $\mathrm{Im}(\mathcal{R}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$
4. Seja $A = \{a, b, c\}$ e seja

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$$

Demonstre que $\mathcal{R}$ é reflexiva e transitiva, mas não é simétrica.
5. Dê um exemplo de uma relação que é reflexiva e transitiva, mas não é simétrica.
6. Dê um exemplo de uma relação que é simétrica e transitiva, mas não é reflexiva.
7. Seja $\mathcal{R}$ uma relação em um conjunto X. Demonstre que
   (a) $\mathcal{R}$ é reflexiva se e somente se $\mathcal{R} \supset \Delta_X$;
   (b) $\mathcal{R}$ é simétrica se e somente se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$;
   (c) $\mathcal{R}$ é reflexiva se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é reflexiva;
   (d) $\mathcal{R}$ é simétriva se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é simétrica;
   (e) $\mathcal{R}$ é transitiva se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é transitiva;
   (f) $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de equivalência.
8. Seja $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Defina uma relação $\sim$ em X declarando que $(a, b) \sim (c, d)$ se e somente se $ad = bc$. Demonstre que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

3.3 Partições e relações de equivalência

Definição 3.5 *Seja X um conjunto não vazio. Por uma* partição $\mathcal{P}$ *de X queremos dizer um conjunto de subconjuntos não vazios de X, tal que*

(a) Se $A, B \in \mathcal{P}$ e $A \neq B$, então $A \cap B = \emptyset$.

(b) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = X$.

Intuitivamente, uma partição de X é uma subdivisão de X em "pedaços" não vazios e mutuamente disjuntos.

Exemplo 3.6 *Seja m um inteiro positivo qualquer. Para cada inteiro j, $0 \leq j < m$, seja $\mathbf{Z}_j = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x - j = km$ para algum $k \in \mathbb{Z}\}$. Então o conjunto*

$$\{\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_{m-1}\}$$

forma uma partição de $\mathbb{Z}$. Em particular, seja $m = 2$. Então o conjunto de conjuntos $\{\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1\}$, em que

$$\mathbf{Z}_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$$

e

$$\mathbf{Z}_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$$

forma uma partição de $\mathbb{Z}$. (Veja também Problema 4, Exercícios 3.3.1.)

Existe uma conexão íntima entre partições de um conjunto não vazio e relações de equivalência nesse conjunto. Para compreender essa conexão, precisaremos da seguinte definição.

Definição 3.6 *Seja $\mathcal{E}$ uma relação de equivalência em um conjunto não vazio X. Para cada $x \in X$, definimos o conjunto*

$$x/\mathcal{E} = \{y \in Y \mid y \,\mathcal{E}\, x\}$$

que é chamado a classe de equivalência *determinada pelo elemento x. O conjunto de todas essas classes de equivalência em X é denotado por $X/\mathcal{E}$; ou seja, $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$.*[4] *O símbolo $X/\mathcal{E}$ é lido "X módulo $\mathcal{E}$", ou simplesmente "$X \bmod \mathcal{E}$".*[5]

Teorema 3.3 *Seja $\mathcal{E}$ uma relação de equivalência em um conjunto não vazio X. Então*

(a) Cada $x/\mathcal{E}$ é um subconjunto não vazio de X.

(b) $x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset$ se e somente se $x \,\mathcal{E}\, y$.

(c) $x \,\mathcal{E}\, y$ se e somente se $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$.

[4] $X/\mathcal{E}$ é chamado *conjunto quociente* de X pela relação de equivalência $\mathcal{E}$. (N. do T.)

[5] Analogamente, $x/\mathcal{E}$ é lido "x módulo $\mathcal{E}$" (N. do T.)

Demonstração.

(a) Como $\mathcal{E}$ é reflexiva, para cada $x \in X$, temos $x\mathcal{E}x$. Pela Definição 3.6, $x \in x/\mathcal{E}$ e portanto $x/\mathcal{E}$ é um subconjunto não vazio de X.

(b) Como $\mathcal{E}$ é uma relação de equivalência e $X \neq \emptyset$, temos

$$\begin{aligned}
x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset &\Leftrightarrow (\exists z)(z \in x/\mathcal{E} \ \wedge \ z \in y/\mathcal{E}) & \\
&\Leftrightarrow (z \, \mathcal{E} \, x) \wedge (z \, \mathcal{E} \, y) & \text{Def. 3.6} \\
&\Leftrightarrow (x \, \mathcal{E} \, z) \wedge (z \, \mathcal{E} \, y) & \mathcal{E} \text{ é simétrica} \\
&\Leftrightarrow x \, \mathcal{E} \, y & \mathcal{E} \text{ é transitiva}
\end{aligned}$$

(c) De (a) e (b) acima, segue imediatamente que $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \Rightarrow x \, \mathcal{E} \, y$. Precisamos agora provar que $x \, \mathcal{E} \, y \Rightarrow x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$. Suponhamos $x \, \mathcal{E} \, y$. Então

$$\begin{aligned}
z \in x/\mathcal{E} &\Rightarrow z \, \mathcal{E} \, x & \text{Def. 3.6} \\
(z \, \mathcal{E} \, x) \wedge (x \, \mathcal{E} \, y) &\Rightarrow (z \, \mathcal{E} \, y) & \mathcal{E} \text{ é transitiva} \\
&\Rightarrow z \in y/\mathcal{E} & \text{Def. 3.6}
\end{aligned}$$

Como z é qualquer, segue que $x/\mathcal{E} \subset y/\mathcal{E}$. Um argumento similar deduz $y/\mathcal{E} \subset x/\mathcal{E}$; portanto $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$.

Teorema 3.4 *Seja $\mathcal{E}$ uma relação de equivalência em um conjunto não vazio X. Então $X/\mathcal{E}$ é uma partição de X.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3(a) e pela Definição 3.6, $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} \mid x \in X\}$ é uma família de subconjuntos não vazios de X. Mostraremos então que

$$x/\mathcal{E} \neq y/\mathcal{E} \Rightarrow (x/\mathcal{E}) \cap (y/\mathcal{E}) = \emptyset$$

mostrando sua contrapositiva: $(x/\mathcal{E}) \cap (y/\mathcal{E}) \neq \emptyset \Rightarrow x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$. A última afirmação é uma conseqüência direta do Teorema 3.3(b) e (c). Finalmente, temos que mostrar que $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} = X$. Isto também é trivial, pois cada $x \in X$ pertence a $x/\mathcal{E}$. Isto completa a demonstração do teorema.

Acabamos de ver, no Teorema 3.4, que uma relação de equivalência no conjunto não vazio X dá origem a uma partição em X. Mostraremos a seguir que a recíproca do Teorema 3.4 é verdadeira; isto é, cada partição de X dá origem a uma relação de equivalência em X.

Definição 3.7 *Seja $\mathcal{P}$ uma partição de um conjunto não vazio X. Definimos uma relação $X/\mathcal{P}$ em X, por $x(X/\mathcal{P})y$ se e somente se existe um conjunto $A \in \mathcal{P}$ tal que $x \in A$* e *$y \in A$.*

Cautela! O leitor deveria ler e comparar cuidadosamente as definições 3.6 e 3.7, de modo a compreender as delicadas diferenças entre estas notações similares: $x/\mathcal{E}$, $X/\mathcal{E}$, e $X/\mathcal{P}$.

Teorema 3.5 *Seja $\mathcal{P}$ uma partição de um conjunto não vazio X. Então a relação $X/\mathcal{P}$ é uma relação de equivalência em X, e as classes de equivalência definidas pela relação de equivalência $X/\mathcal{P}$ são precisamente os conjuntos em $\mathcal{P}$. Simbolicamente, $X/(X/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.*

Demonstração. Como todo elemento de X está contido em algum $A \in \mathcal{P}$, $x(X/\mathcal{P})x$; isto é, $X/\mathcal{P}$ é reflexiva. A simetria de $X/\mathcal{P}$ é uma clara conseqüência da Definição 3.7. Para mostrar que a relação $X/\mathcal{P}$ é transitiva, sejam x, y, e z três elementos de X satisfazendo

$$x(X/\mathcal{P})y \text{ e } y(X/\mathcal{P})z$$

Então, pela Definição 3.7, existem A e B em $\mathcal{P}$ tais que, $x, y \in A$ e $y, z \in B$. Conseqüentemente, $y \in A \cap B \neq \emptyset$. Segue então, pela definição de partição, que $A = B$. Portanto, $x, z \in A$ e assim $x(X/\mathcal{P})z$. Logo, $X/\mathcal{P}$ é uma relação de equivalência em X.

Para demonstrar o resto do teorema, seja x um elemento qualquer de X. Existe um e somente um conjunto A em $\mathcal{P}$ tal que $x \in A$. (Porquê?)

Conseqüentemente, pela Definição 3.7, temos

$$x/(X/\mathcal{P}) = A$$

Acabamos de provar que cada classe de equivalência, módulo $X/\mathcal{P}$, é um conjunto da família $\mathcal{P}$. Reciprocamente, seja A um conjunto qualquer na partição $\mathcal{P}$. Como $A \neq \emptyset$, existe um elemento x em X que pertence a A. Pelo nosso argumento prévio, $x/(X/\mathcal{P}) = A$. Isto demonstra que $X/(X/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. A demonstração do teorema está completa.

Toda relação de equivalência $\mathcal{E}$ em um conjunto X dá origem a uma partição $X/\mathcal{E}$ (de X) (Teorema 3.4); esta partição, por sua vez, determina uma relação de equivalência $X/(X/\mathcal{E})$ (Teorema 3.5). O fato crucial é que $X/(X/\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ (veja Problema 6). Isto, juntamente com $X/(X/\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, estabelece a conexão íntima entre relações de equivalência e partições.

Ilustremos o Teorema 3.5 por um exemplo concreto. Sejam $\mathbf{Z}_0$ e $\mathbf{Z}_1$ o conjunto de inteiros pares e o conjunto de inteiros ímpares, respectivamente. Então $\mathcal{P} = \{\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1\}$ forma uma partição do conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Pela definição da relação $\mathbb{Z}/\mathcal{P}$, temos $a(\mathbb{Z}/\mathcal{P})b$ se e somente se ambos $a, b \in \mathbf{Z}_0$ ou $a, b \in \mathbf{Z}_1$. Isto é, $a(\mathbb{Z}/\mathcal{P})b$ se e somente se ambos a e b são pares ou ambos são ímpares. É fácil verificar que esta relação $\mathbb{Z}/\mathcal{P}$ é de fato uma relação de equivalência. Na verdade, $a(\mathbb{Z}/\mathcal{P})b$ se e somente se $a \equiv b \pmod 2$. Portanto, a relação $\mathbb{Z}/\mathcal{P}$ é a relação familiar $\equiv \pmod 2$. [Veja Exemplo 3.5.]

Reciprocamente, dado o conjunto $\mathbb{Z}$, juntamente com a relação $\mathcal{E}$ tal que $x \,\mathcal{E}\, y$ se e somente se $x \equiv y \pmod 2$, temos

$$a/\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod 2\} = \begin{cases} \mathbf{Z}_0 & \text{se } a \text{ é par} \\ \mathbf{Z}_1 & \text{se } a \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Portanto, $Z/\mathcal{E} = \{\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1\}$, que é claramente uma partição de $\mathbb{Z}$.

3.3.1 Exercícios

1. Seja $\mathcal{P}$ uma partição do conjunto não vazio X. Demonstre que a relação de equivalência $X/\mathcal{P}$, como conjunto de pares ordenados, é igual a $\bigcup_{A\in\mathcal{P}} A \times A$.
2. No problema 1, seja X um conjunto finito e seja

$$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$$

com o conjunto A_j contendo n_j elementos, para $j = 1, 2, \ldots, k$. Demonstre que o número de pares ordenados da relação de equivalência $X/\mathcal{P}$ é exatamente $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2$.
3. Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$ e seja $\mathcal{P} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$.
   (a) Mostre que $\mathcal{P}$ é uma partição de X.
   (b) Encontre a relação de equivalência $X/\mathcal{P}$ em X, explicitamente como um conjunto de pares ordenados.
   (c) Denote $\mathcal{E} = X/\mathcal{P}$ e encontre $a/\mathcal{E}$, $b/\mathcal{E}$, $c/\mathcal{E}$, $d/\mathcal{E}$ e $e/\mathcal{E}$ explicitamente.
4. Verifique o Exemplo 3.6 para $m = 3$.
5. Seja X o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros e seja $\mathcal{E}$ uma relação em X definida por $x\,\mathcal{E}\,y$ se e semente se $x - y = 5k$ para algum inteiro k.
   (a) Demonstre que a relação $\mathcal{E}$ é uma relação de equivalência em X.
   (b) Encontre a partição $X/\mathcal{E}$ de X.
   (c) Verifique que a relação de equivalência $X/(X/\mathcal{E})$ é de fato a relação de equivalência $\mathcal{E}$.
6. Seja $\mathcal{E}$ uma relação de equivalência no conjunto não vazio X. Demonstre que $X/(X/\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

3.4 Funções

Inquestionavelmente, o conceito de função é uma das idéias mais básicas em todos os ramos da Matemática. O leitor pode ter já aprendido a seguinte definição: uma função é uma *regra* de correspondência que associa a cada elemento x de um certo conjunto (chamado o *domínio* da função) um e apenas um elemento y de um outro conjunto (chamado o *contra-domínio* da função). Esta definição é nebulosa. O que se quer dizer precisamente por uma "regra"? De modo a evitar ambigüidades, matemáticos criaram uma definição precisa de função, usando a linguagem de conjuntos.

Definição 3.8 *Sejam X e Y conjuntos. Uma* função de X em Y *é um terno* (f, X, Y), *sendo f uma relação de X para Y satisfazendo*
(a) $\mathrm{Dom}(f) = X$.
(b) Se $(x, y) \in f$ *e* $(x, z) \in f$ *então* $y = z$.

Seja (f, X, Y) uma função de X em Y. No que segue, adotaremos o costume de escrever $f\colon X \to Y$ em lugar de (f, X, Y), e $y = f(x)$ em vez de $(x, y) \in f$. A razão pela qual "$y = f(x)$" é um substituto inteligível para $(x, y) \in f$ é que

Todo elemento $x \in X$ tem um elemento $y \in Y$, determinado de forma única, tal que $(x, y) \in f$.

Para ver que esta asserção é verdadeira, seja $x \in X$. Então, pela condição (a) da Definição 3.8, existe um elemento $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$; se exister um outro elemento $z \in Y$ com $(x, z) \in f$, então de acordo com a condição (b), $z = y$. Isto mostra que y é determinado de forma única por x.

Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Se $y = f(x)$, dizemos que y é a *imagem* de x sob f e que x é *pré-imagem* (ou *imagem inversa*) de y sob f. O leitor pode interpretar isto geometricamente, conforme ilustrado nas Figuras 9 e 10.

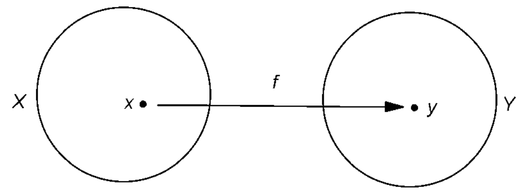


Figura 9.

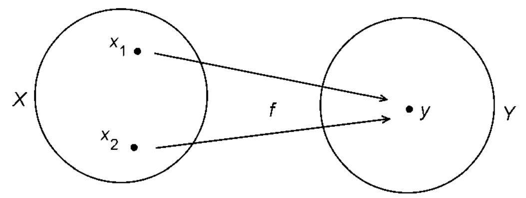


Figura 10.

Chamaremos o conjunto Y, em $f\colon X \to Y$, de *contra-domínio* da função. Note o leitor que o contra-domínio de uma função não precisa coincidir com a imagem da função[6] (veja Exemplo 3.7, abaixo). Chamamos a atenção do leitor para o fato de que alguns autores usam o termo "contra-domínio" como sinônimo de "imagem", mas por uma razão técnica, que será aparente na Seção 3.6, faremos distinção entre "imagem" e "contra-domínio" de uma função. De um modo geral, a imagem de uma função é um subconjunto do contra-domínio dessa função.

[6]A imagem da função $f\colon X \to Y$ é a imagem $\mathrm{Im}(f)$, da relação f. Conseqüentemente, $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Exemplo 3.7 *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = [x]$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, em que* $[x]$ *denota o maior inteiro* $\leq x$*, e.g.,* $[\sqrt{2}\,] = 1$*,* $[-\frac{1}{2}] = -1$.[7] *Aqui, o contra-domínio de* f *é* $\mathbb{R}$*, enquanto que a imagem de* f *é* $\mathbb{Z}$*, um subconjunto próprio de* $\mathbb{R}$*.*

É possível alterar o contra-domínio de uma função sem alterar outros aspectos da função. Por exemplo, para a mesma relação f do Exemplo 3.7 acima, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ são funções, porque a Definição 3.8 é satisfeita. De um modo geral, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.6 *Seja* $f\colon X \to Y$ *uma função e seja* W *um conjunto contendo a imagem de* f*. Então* $f\colon X \to W$ *é uma função.*

Demonstração. Demonstraremos primeiramente que f é uma relação de X para W:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in f &\Rightarrow x \in X \;\wedge\; y \in \mathrm{Im}(f) && \text{Def. de Im}\\
&\Rightarrow x \in X \;\wedge\; y \in W && \mathrm{Im}(f) \subset W\\
&\Rightarrow (x,y) \in X \times W && \text{Def. 3.1}
\end{aligned}$$

Isto demonstra que $f \subset X \times W$; em outras palavras, f é uma relação de X em W. Como $f\colon X \to Y$ é uma função, $\mathrm{Dom}(f) = X$ e a condição (b) da Definição 3.8 está satisfeita. Portanto, $f\colon X \to W$ é uma função.

Teorema 3.7 *Sejam* $f\colon X \to Y$ *e* $g\colon X \to Y$ *funções. Então* $f = g$ *se e somente se* $f(x) = g(x), \forall x \in X$*.*

Demonstração.

(1) Suponha que $f = g$ e que x é um elemento qualquer de X. Então,

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\Leftrightarrow (x,y) \in f && \text{Notação}\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in g && f = g\\
&\Leftrightarrow g(x) = y && \text{Notação}
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = g(x)$.

(2) Suponha que $f(x) = g(x), \forall x \in X$. Então

$$\begin{aligned}
(x,y) \in f &\Leftrightarrow y = f(x) && \text{Notação}\\
&\Leftrightarrow y = g(x) && f(x) = g(x)\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in g && \text{Notação}
\end{aligned}$$

[7] Para cada $x \in \mathbb{R}$, define-se $[x] = n$ quando $x = n + \alpha$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \alpha < 1$. (N. do T.)

Isto demonstra que $f = g$.

Se o domínio e o contra-domínio de uma função são subconjuntos do conjunto dos números reais, então, como na geometria analítica, o gráfico da função pode ser esboçado no plano cartesiano.[8] Por exemplo, a função do Exemplo 3.7 tem o seguinte gráfico.

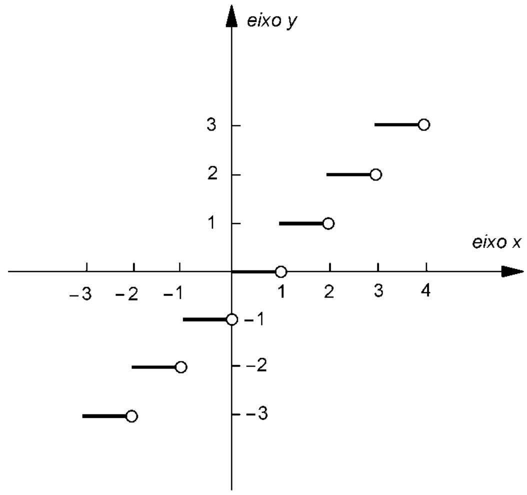


Figura 10.

Exemplo 3.8 *Seja A um subconjunto de um conjunto não vazio X. Então a relação*

$$\{(x, y) \in X \times \{0, 1\} \mid y = 1 \text{ se } x \in A, \text{ e } y = 0 \text{ se } x \notin A\}$$

dá origem a uma função de X em $\{0, 1\}$, conhecidada como função característica *de A em X. Esta função é habitualmente denotada pela letra grega qui, com um índice A, χ_A. Ou seja,*

$$\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$$

é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in X - A \end{cases}$$

Embora a função seja, por definição, escrita (f, X, Y) ou $f \colon X \to Y$, é freqüentemente um incômodo ter que escrever explicitamente o domínio e o contra-domínio de uma função, quando eles são implicitamente claros a partir do contexto. Portanto, *denotaremos uma função por f quando o domínio e o contra-domínio de f forem claramente compreendidos, sem dar explicitamente o domínio e o contra-domínio de f.*

[8]Pressupondo-se que a função seja "bem comportada".

Exemplo 3.9 *Seja X um conjunto. A relação diagonal Δ_X em X, definida na página 54, é uma função de X em X. Quando queremos enfatizar que a relação Δ_X é uma função, usamos a notação alternativa $1_X\colon X \to X$, em que $1_X(x) = x$ para todo x em X. A função 1_X é chamada* função identidade *em X.*

Exemplo 3.10 *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios e seja b um elemento fixado de Y. A relação*

$$C_b = \{(x, b) \mid x \in X\}$$

dá origem a uma função $C_b\colon X \to Y$, dada por $C_b(x) = b$ para todo x em X. A função C_b é chamada função constante.

No cálculo, vemos freqüentemente uma função definida por duas (ou mais) regras de correspondência: por exemplo, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Esta função pode ser considerada como a união das seguintes duas funções:

(1) $f\colon]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - 2x$, $\forall x \in]-\infty, 0]$
(2) $g\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in [0, \infty[$

O leitor deverá notar que aqui $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \{0\}$ e que $f(0) = g(0)$.

Os últimos exemplos motivam o seguinte teorema geral.

Teorema 3.8 *Sejam $f\colon A \to C$ e $g\colon B \to D$ duas funções tais que $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$. Então a* união *de f e g define uma função*

$$h = f \cup g\colon A \cup B \to C \cup D$$

em que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Demonstração.

Como f e g são relações, $f \subset A \times C$ e $g \subset B \times D$, e temos

$$\begin{aligned} h = f \cup g &\subset (A \times C) \cup (B \times D) \\ &\subset (A \cup B) \times (C \cup D) \end{aligned}$$

porque ambos $A \times C$ e $B \times D$ são subconjuntos de $(A \cup B) \times (C \cup D)$. Assim, h é uma relação de $A \cup B$ para $C \cup D$. Deixaremos ao leitor verificar que

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(h) &= \mathrm{Dom}(f) \cup \mathrm{Dom}(g) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

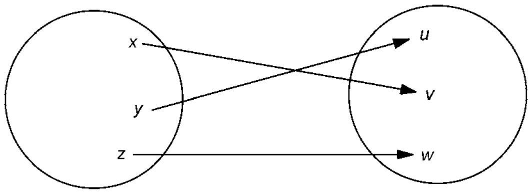
Isto mostra que a relação h satisfaz a Definição 3.8(a).

Para cada elemento $x \in A \cup B$, podemos considerar os seguintes três casos: (1) $x \in A - B$, (2) $x \in B - A$, e (3) $x \in A \cap B$. Como $f\colon A \to C$ e $g\colon B \to D$ satisfazem a Definição 3.8(b), e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$, temos que $h(x)$ é definido de modo único em cada um dos três casos. Logo, a relação h satisfaz a Definição 3.8(b) também. Portanto, $h\colon A \cup B \to C \cup D$ é de fato uma função.

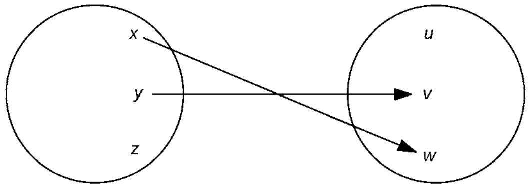
3.4.1 Exercícios

1. Teste se cada um dos seguintes diagramas define ou não uma função de $X = \{x, y, z\}$ em $Y = \{u, v, w\}$.

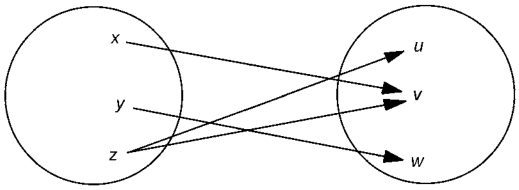
(a)



(b)



(c)



2. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \text{ é racional} \\ -3 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

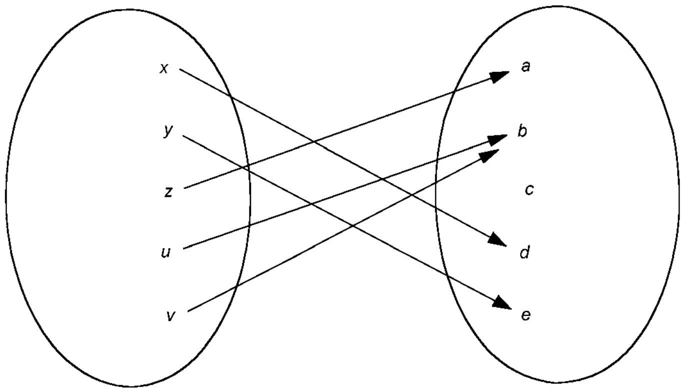
Encontre $f(1/3)$, $f(7)$, e $f(1,323232\ldots)$.

3. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{se } x > 5 \\ x^2 - 2 & \text{se } -6 \leq x \leq 5 \\ 4 - 5x & \text{se } x < -6 \end{cases}$$

Encontre $f(-7)$, $f(3)$ e $f(6)$.

4. Seja $f\colon X \to Y$ a função definida pelo diagrama



Qual é a imagem desta função?

5. Seja a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $f(x) = x^2 - 3$ para todo $x \in X$. Encontre a imagem da função f.

6. Cada uma das seguintes expressões define uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Encontre a imagem de cada função.

(a) $f(x) = 2x^2 + 5$
(b) $g(x) = \cos x$
(c) $h(x) = x^3 - 1$

7. Seja $X \subset Y$ e $f = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Demonstre que $f\colon X \to Y$ é uma função. [*Nota.* Esta função é chamada uma *função inclusão*, e pode ser denotada por $f\colon X \subset Y$.]

8. Sejam $X = \{x, y, z\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$. Quais das seguintes é uma função de X em Y? Justifique.

(a) $f = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$
(b) $g = \{(x, 2), (y, 3), (z, 2)\}$
(c) $h = \{(x, 2), (y, 1)\}$
(d) $i = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

9. Se $X = \{x, y, z\}$ e $Y = \{1, 2\}$, quantas funções de X em Y existem? De modo geral, se o conjunto X tem m elementos e se Y tem n elementos, quantas funções de X e Y existem?

10. Quantas funções do problema 9 são constantes?

11. Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Demonstre que todo subconjunto g de f dá origem a uma função.

12. Seja $f\colon X \to X$ uma função de X em X, que também é uma relação reflexiva em X. Demonstre que f tem que ser a função identidade $1_X\colon X \to X$.

13. Seja X o intervalo unitário $[0, 1]$. Encontre uma função $f\colon X \to X$ que é uma relação simétrica em X.

14. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ duas funções com o mesmo domínio e o mesmo contra-domínio. Demonstre que se $f \subset g$ então $f = g$.

3.5 Imagens e imagens inversas de conjuntos

Recordemos que se $f\colon X \to Y$ é uma função e se x e y são elementos de X e Y, respectivamente, tais que $y = f(x)$, então y é a imagem de x, e x é uma pré-imagem ou uma imagem inversa de y. Este conceito pode ser estendido naturalmente de elementos a subconjuntos, como segue:

Definição 3.9 *Seja $f\colon X \to Y$ uma função, e sejam A e B subconjuntos de X e Y, respectivamente.*
(a) A imagem *de A sob f, que denotamos por $f(A)$, é o conjunto de todas as imagens $f(x)$ tais que $x \in A$.*
(b) A imagem inversa *de B sob f, que denotamos por $f^{-1}(B)$, é o conjunto de todas as pré-imagens dos elementos $y \in B$.*

Sob a notação de construção de um conjunto, temos as seguintes expressões:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

Teorema 3.9 *Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Então*
(a) $f(\emptyset) = \emptyset$.
(b) $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.
(c) Se $A \subset B \subset X$, então $f(A) \subset f(B)$.
(d) Se $C \subset D \subset Y$, então $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

O Teorema 3.9 segue facilmente da Definição 3.9; portanto, a demonstração é deixada para o leitor.

Teorema 3.10 *Seja $f\colon X \to Y$ uma função e seja $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ uma família de subconjuntos de X. Então*
(a) $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.
(b) $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

Demontração.

(a) Por uso repetido da Definição 3.9 e da Definição 2.6 do Capítulo 2, temos

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) &\Leftrightarrow y = f(x) \qquad \text{para algum } x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \\ &\Leftrightarrow y = f(x) \qquad \text{para algum } x \in A_\gamma, \quad \text{para algum } \gamma \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_\gamma) \qquad \text{para algum } \gamma \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) \end{aligned}$$

Portanto, $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

(b) Como $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \subset A_\gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, pelo Teorema 3.9(c), temos $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset f(A_\gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Segue então, da Definição 2.7, do Capítulo 2, que $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

Pode não ser possível trocar o símbolo de inclusão $\subset$, no Teorema 3.10(b), por um sinal de igualdade, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.11 *Sejam $X = \{a, b\}$, $Y = \{c\}$, $\Gamma = \{1, 2\}$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$, e seja $f\colon X \to Y$ a função constante $f(a) = f(b) = c$. Então $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, enquanto que $f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$. Isto mostre que nem sempre $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.*

Teorema 3.11 *Seja $f\colon X \to Y$ uma função e seja $\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ uma família de subconjuntos de Y. Então*
(a) $f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$
(b) $f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$

Demonstração.

(a) Aplicando-se repetidamente a Definição 3.9 e a Definição 2.6 do Capítulo 2, temos

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B_\gamma, && \text{para algum } \gamma \in \Gamma \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_\gamma), && \text{para algum } \gamma \in \Gamma \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)
\end{aligned}
$$

Assim, acabamos de demonstrar que $f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

(b) Trocando-se $\bigcup$ por $\bigcap$ e a frase "para algum" por "para todo", na demonstração da parte (a), temos uma demonstração da parte (b). O estudante deverá realizar as mudanças sugeridas, passo a passo, até estar claramente convencido.

Teorema 3.12 *Seja $f\colon X \to Y$ uma função e sejam B e C subconjuntos quaisquer de Y. Então*

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$

Demonstração.

Examinemos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B - C) &\Leftrightarrow f(x) \in B - C && \text{Def. 3.9} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \notin C && \text{Def. 2.5 (Cap. 2)} \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C) && \text{Def. 3.9} \\ &\Leftrightarrow x \in [f^{-1}(B) - f^{-1}(C)] && \text{Def. 2.5 (Cap. 2)} \end{aligned}$$

Isto demonstra que $f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$.

3.5.1 Exercícios

1. No Problema 2, Exercícios 3.4.1, encontre
   (a) $f(\{-1, 0, 1\})$, $f(\{\sqrt{2}, \pi\})$, e $f(\{2, \log 2\})$
   (b) $f^{-1}(\{0, 1\})$, $f^{-1}(\{-3, 3\})$, $f^{-1}(\{4, 5\})$, e $f^{-1}(\{-3, 4, 5\})$.
2. No Problema 3, Exercícios 3.4.1, encontre
   (a) $f(\{-7, 3, 6\})$, $f(\{-8, 2, 7\})$, e $f(\{-9, 1, 8\})$
   (b) $f^{-1}(\{0, 1\})$, $f^{-1}(\{-3, 3\})$, e $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$.
3. No Problema 4, Exercícios 3.4.1, encontre $f(\{v, w\})$, $f^{-1}(\{c\})$, e $f^{-1}(\{a, b\})$.
4. Seja $f\colon X \to Y$ uma função e sejam $A \subset X$, $B \subset Y$. Demonstre que
   (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$
   (b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
5. Seja $f\colon X \to Y$ uma função e sejam $A \subset X$, $B \subset Y$. Encontre exemplos que mostrem que as seguintes afirmações são falsas.
   (a) Se $B \neq \emptyset$, então $f(B) \neq \emptyset$
   (b) $f^{-1}(f(A)) = A$
   (c) $f(f^{-1}(B)) = B$
   (d) $f(X) = Y$
6. Mostre que a afirmação do Problema 5(c) é verdadeira quando $f(X) = Y$.
7. Seja $f\colon X \to Y$ uma função tal que $f(X) = Y$, e sejam B e C subconjuntos de Y. Demonstre que $B = C$ se $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$. Dê um exemplo mostrando que esta afirmação é falsa se $f(X) \neq Y$.
8. Sejam X e Y dois conjuntos, e sejam $p_X\colon X \times Y \to X$ e $p_Y\colon X \times Y \to Y$ duas funções, dadas respectivamente por $p_X(x, y) = x$ e $p_Y(x, y) = y$, para todo $(x, y) \in X \times Y$ (p_X e p_Y são chamadas *projeção em* X e *projeção em* Y, respectivamente). Demonstre que se $\mathcal{R}$ é uma relação de X para Y, isto é, se $\mathcal{R} \subset X \times Y$, então $p_X(\mathcal{R}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{R})$ e $p_Y(\mathcal{R}) = \mathrm{Im}(\mathcal{R})$.
9. Seja $f\colon X \to Y$ uma função, e sejam $A \subset X$, $B \subset Y$. Demonstre que
   (a) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$
   (b) $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$.
10. Seja $f\colon X \to Y$ uma função, e seja $B \subset Y$. Demonstre que

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

11. Seja $f\colon X \to Y$ uma função, e sejam A e B subconjuntos de X. Dê um exemplo que mostra que, em geral, não é verdadeiro afirmar que

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

12. Demonstre o Teorema 3.9.

3.6 Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

No estudo das funções, é conveniente dar nomes a três tipos importantes de funções.

Definição 3.10 *Uma função $f\colon X \to Y$ é* injetora *ou* um-a-um[9] *quando satisfaz: se $x_1, x_2 \in X$ e $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Uma função injetora é também chamada uma* injeção.

Pela Lei Contrapositiva da lógica, podemos dizer equivalentemente que a função $f\colon X \to Y$ é uma injeção se e somente se: $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por exemplo, a função inclusão do Problema 7, Exercícios 3.4.1, é uma injeção.

Definição 3.11 *Uma função $f\colon X \to Y$ é dita ser* sobrejetora *se satisfaz: se $y \in Y$, então existe ao menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Uma função sobrejetora é chamada uma* sobrejeção. *Em outras palavras, $f\colon X \to Y$ é uma sobrejeção se e somente se $f(X) = Y$.*

A função do Exemplo 3.7, Seção 3.4, por exemplo, não é sobrejetora.

Exemplo 3.12 *A função seno $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uma sobrejeção; mas se o contra-domínio $[-1, 1]$ for trocado por $\mathbb{R}$, então $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetora.*

Definição 3.12 *Uma função $f\colon X \to Y$ é chamada uma* bijeção *ou é dita ser* bijetora *se é simultaneamente injetora e sobrejetora. Uma bijeção é também chamada* correspondência um-a-um.[10]

Por exemplo, a função identidade no Exemplo 3.9, Seção 3.4, é uma bijeção. As definições 10, 11, e 12 são ilustradas nos três diagramas abaixo (Figuras 12, 13 e 14). Os conjuntos X e Y são representados como conjuntos de pontos dentro de círculos. Em cada ilustração, cada ponto em X é emparelhado com algum ponto em Y, por uma flecha desenhada entre ambos. O conjunto de pares assim obtido dá origem a uma função $f\colon X \to Y$.

Para funções injetoras, o resultado do Teorema 3.10(b) pode ser melhorado.

---

[9] Isto é denotado por f é 1–1. (N. do T.)

[10] Ou *correspondência biunívoca* (N. do T.)

Teorema 3.13 *Seja $f\colon X \to Y$ uma injeção e seja $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ uma família de subconjuntos de X. Então*

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$$

Demonstração. Pela Definição 3.9, e pela Definição 2.7 do Capítulo 2, temos

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) &\Leftrightarrow y \in f(A_\gamma), \forall \gamma \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow (\exists x_\gamma \in A_\gamma \ \text{ tal que } \ y = f(x_\gamma)) \ \forall \gamma \in \Gamma \end{aligned}$$

Como $f\colon X \to Y$ é injetora, todos esses x_γ's são o mesmo; denotaremos este elemento por x_0. Então temos

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma) &\Leftrightarrow \exists x_0 \in A_\gamma \ \text{ tal que } \ y = f(x_0), \forall \gamma \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow \exists x_0 \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \ \text{ tal que } \ y = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow y \in f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \end{aligned}$$

Portanto, $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$.

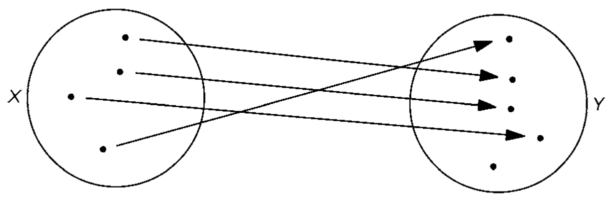


Figura 12. $f\colon X \to Y$ é injetora.

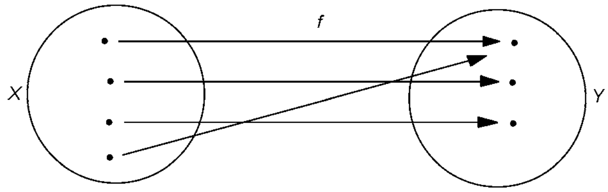


Figura 13. $f\colon X \to Y$ é sobrejetora.

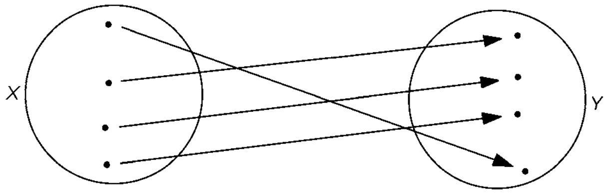


Figura 14. $f\colon X \to Y$ é bijetora.

Recordemos que se $\mathcal{R}$ é uma relação de X para Y, então a inversa

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{R}\}$$

é uma relação de Y para X. Como uma função $f\colon X \to Y$ é um tipo particular de relação de X para Y, f^{-1} é ao menos uma relação de Y para X. É natural querer saber quando f^{-1} torna-se uma função. Esta questão é considerada no seguinte teorema.

Teorema 3.14 *Seja $f\colon X \to Y$ uma bijeção. Então $f^{-1}\colon Y \to X$ é uma bijeção.*

Demonstração. Demonstraremos primeiramente que a relação f^{-1}, de Y para X, forma uma função. Como $f\colon X \to Y$ é sobrejetora, pelo Problema 3(a), Exercícios 3.2.1, temos $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = Y$. Assim, a condição (a) da Definição 3.8 está satisfeita. Para mostrar que f^{-1} satisfaz a outra condição, sejam $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Então temos $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$. Conseqüentemente, $f(x_1) = y = f(x_2)$. Agora, como $f\colon X \to Y$ é injetora, a última igualdade implica $x_1 = x_2$. Portanto, acabamos de estabelecer que $f^{-1}\colon Y \to X$ é uma função.

Para mostrar que a função $f^{-1}\colon Y \to X$ é injetora, sejam $y_1, y_2 \in Y$, com $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$ (digamos). Então temos $f(x) = y_1$ e $f(x) = y_2$, e portanto $y_1 = y_2$. Isto mostra que f^{-1} é injetora.

Finalmente, resta ser mostrado que $f^{-1}\colon Y \to X$ é sobrejetora. Pelo Problema 3(b) dos Exercícios 3.2.1, temos $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = X$, o que demonstra que f^{-1} é sobrejetora. Assim, a demonstração está completa.

Se $f\colon X \to Y$ é uma bijeção, a função $f^{-1}\colon Y \to X$ é chamada a *função inversa* de f (veja também Problema 14, Exercícios 3.6.1).

Em virtude do Teorema 3.14, se $f\colon X \to Y$ é uma bijeção (= correspondência um-a-um), diremos que f é uma correspondência um-a-um *entre* os conjuntos X e Y.

3.6.1 Exercícios

1. Quais das funções nos Problemas 2, 3 e 4, dos Exercícios 3.4.1 são injetoras? Sobrejetoras?
2. Quais das funções nos Problemas 5 e 6, dos Exercícios 3.4.1 são injetoras? Bijetoras?
3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3x - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Demonstre que a função f é uma bijeção.
   (b) Encontre a inversa f^{-1} de f.
4. Seja $g\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x) = \operatorname{tg} x$, para todo x tal que $-\pi/2 < x < \pi/2$. Esta função é bijetora? Em caso afirmativo, descreva sua função inversa.
5. Demonstre que a função característica $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$, do Exemplo 3.8, Seção 3.4, é sobrejetora se e somente se $\emptyset \neq A \subsetneq X$. Quando é que $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ torna-se uma injeção?
6. Demonstre que a função constante $C_b\colon X \to Y$ é sobrejetora se e somente se $Y = \{b\}$. Quando é que $C_b\colon X \to Y$ torna-se uma injeção?
7. Demonstre que a projeção em X, $p_X\colon X \times Y \to X$, e a projeção em Y, $p_Y\colon X \times Y \to Y$, do Problema 8, Exercícios 3.5.1, são sobrejetoras. Quando é que a projeção em X é uma injeção?
8. Demonstre que existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto de todos os números naturais pares.
9. Demonstre que existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjuntos de todos os inteiros ímpares.
10. Sejam X uma conjunto finito com m elementos e Y um conjunto finito com n elementos. Demonstre que
   (a) Se $m > n$, então não pode haver nenhuma injeção $f\colon X \to Y$.
   (b) Se $m \leq n$, então existem exatamente $n!/(n-m)!$ injeções de X em Y.
[Veja também o Problema 9, Exercícios 3.5.1.]
11. Seja X um conjunto finito com m elementos. Quantas bijeções de X em X existem? [Nota: Uma bijeção de um conjunto finito em si mesmo é chamada uma *permutação*.]
12. Seja $f\colon X \to Y$ uma função, e sejam $A \subset X$, $B \subset Y$. Demonstre que
   (a) Se f é injetora, então $f^{-1}(f(A)) = A$.
   (b) Se f é sobrejetora, então $f(f^{-1}(B)) = B$.
13. Seja $f\colon X \to Y$ uma injeção, e sejam A e B subconjuntos de X. Demonstre que $f(A - B) = f(A) - f(B)$. [Compare isto com o Problema 11, Exercícios 3.5.1.]
14. Demonstre a seguinte recíproca do Teorema 3.14: Seja $f\colon X \to Y$ uma função tal que f^{-1} é uma função de Y para X. Então $f\colon X \to Y$ é bijetora.

3.7 Composição de funções

A um leitor atento, uma função $f\colon X \to Y$ pode ser considerada como uma máquina que toma um objeto arbitrário x do conjunto X, opera sobre ele de um certo modo, e transforma-o em um novo objeto $f(x)$, um produto da máquina. Esta idéia é ilustrada na Figura 15.

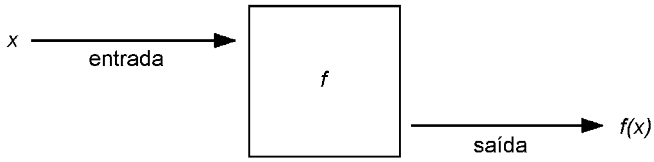


Figura 15.

Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ duas funções, sendo o domínio da segunda igual ao contra-domínio da primeira. Imagine estas duas funções como duas máquinas, tais quais uma lavadora e uma secadora. Não temos que ser inventores para imaginar a possibilidade de combinar estas duas máquinas em uma nova máquina; o resultado seria uma combinação lavadora-secadora, que pega uma uma roupa suja x, lava-a de modo a torná-la uma roupa limpa porém úmida $f(x)$, e então seca-a. O resultado é uma roupa limpa e seca $g(f(x))$. A idéia é ilustrada na Figura 16.

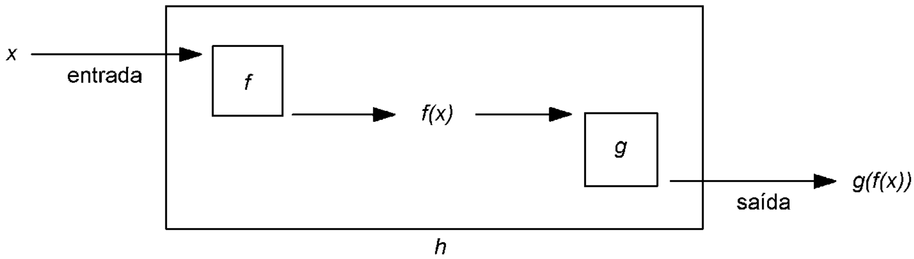


Figura 16.

A "combinação" das máquinas $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ resulta em uma nova máquina, denotada por $h\colon X \to Z$, que toma um objeto arbitrário x em X, e transforma-o no objeto $h(x) = g(f(x))$ em Z. A notação tradicional para h é $g \circ f$, e $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; o nome tradicional para o termo "combinação" é "composição".

Estamos agora prontos para a seguinte definição.

Definição 3.13 *Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ duas funções. A* composição[11] *destas duas funções é a função $g \circ f\colon X \to Z$, sendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo x em X. Em outra notação*

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \textit{ tal que } (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$

Exemplo 3.13 *Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções, dadas respectivamente por $f(x) = x + 1$, e $g(x) = x^2$, para todo x em $\mathbb{R}$. Encontre as composições $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.*

[11] ou *função composta* de g e f. (N. do T.)

Solução. *Usando a Definição 3.13, temos*

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+1) \\ &= (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= x^2 + 1\end{aligned}$$

O resultado do Exemplo 3.13 nos mostra que, em geral, $g \circ f \neq f \circ g$;[12] portanto, *a composição funcional não é comutativa.*

Teorema 3.15 *A composição funcional é associativa. Ou seja, tendo-se* $f\colon X \to Y$, *e* $g\colon Y \to Z$, *e* $h\colon Z \to W$, *então*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demonstração. Notemos primeiramente que ambas, $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$, são funções de X em W. Portanto, para mostrar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, pelo Teorema 3.7 da Seção 3.4, precisamos apenas mostrar que $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$, para todo x em X. Usamos a Definição 3.13 para obter o seguinte:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

e

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

para todo x em X. Isto mostra que $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$, para todo x em X. A demonstração está agora completa.

Teorema 3.16 *Seja* $f\colon X \to Y$ *uma função. Então*

(a) Se existe uma função $g\colon Y \to X$ *tal que* $g \circ f = 1_X$ *(sendo* $1_X\colon X \to X$ *a função identidade, definida no Exemplo 3.9, Seção 3.4), então* $f\colon X \to Y$ *é injetora.*

(b) Se existe uma função $h\colon X \to Y$ *tal que* $f \circ h = 1_Y$, *então* $f\colon X \to Y$ *é sobrejetora.*

Demonstração.

(a) Suponha que existe uma função $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$. Então para quaisquer x_1 e x_2 em X, com $f(x_1) = f(x_2)$, temos

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

[12] Muitas vezes, define-se $f \circ g$ mas não se define $g \circ f$ (N. do T.)

Isto demonstra que $f: X \to Y$ é injetora.

(b) Suponha que existe uma função $h: Y \to X$ tal que $f \circ h = 1_Y$. Então, para cada $y \in Y$, existe um elemento

$$x = h(y) \in X$$

tal que

$$f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = 1_Y(y) = y$$

Pela Definição 3.11, $f: X \to Y$ é sobrejetora.

3.7.1 Exercícios

1. Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por $f(x) = 2x^3 + 1$ e $g(x) = \cos x$, respectivamente, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(a) Encontre a composição $g \circ f$.
(b) Encontre a composição $f \circ g$.

2. Sejam $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ duas funções definidas por $f(x) = \log_{10} x$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$, e $g(x) = 10^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(a) Encontre a composição $g \circ f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
(b) Encontre a composição $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Sejam f, g e h as funções dadas no Problema 6, Exercícios 3.4.1.
(a) Encontre a composição $g \circ f$.
(b) Encontre a composição $h \circ g$.
(c) Encontre a composição $h \circ (g \circ f)$.
(d) Encontre a composição $(h \circ g) \circ f$.
(e) Compare suas respostas para $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$; são a mesma?

4. Seja $f: X \to Y$ uma função. Demonstre que $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$.

5. Seja $f: X \to Y$ uma bijeção e seja $f^{-1}: Y \to X$ a função inversa de f. Demonstre que $f^{-1} \circ f = 1_X$ e que $f \circ f^{-1} = 1_Y$.

6. Seja $f: X \to Y$ uma função. Se existem funções $g: Y \to X$ e $h: Y \to X$, tais que $g \circ f = 1_X$ e $f \circ h = 1_Y$, demonstre que $f: X \to Y$ é bijetora e que $g = h = f^{-1}$.

7. Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ funções. Demonstre que
(a) Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são injetoras, então também o é $g \circ f: X \to Z$.
(b) Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são sobrejetoras, então também o é $g \circ f: X \to Z$.

8. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de X para Y e seja $\mathcal{S}$ uma relação de Y para Z. Podemos, como na composição de funções, definir a *composição* destas relações por

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)[(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}]\}$$

que é uma relação de X para Z. Demonstre que
(a) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.
(b) Se $\mathcal{T}$ é uma relação de Z para W, então $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.

9. Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ duas bijeções. Demonstre que $g \circ f: X \to Z$ é uma bijeção, e que a função inversa $(g \circ f)^{-1}: Z \to X$, é o mesmo que a composição

$f^{-1} \circ g^{-1} \colon Z \to X$ das funções inversas $g^{1-} \colon Z \to Y$ e $f^{-1} \colon Y \to X$. Ou seja, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.