2º Período

Matemática Discreta

Conjuntos

Conjunto é uma coleção de objetos. Em alguns casos, podemos dizer que elementos dos conjuntos possuem alguma propriedade em comum, além de pertencerem ao mesmo conjunto; assim qualquer objeto que possua esta propriedade pertence ao conjunto específico e todo objeto que não possui a mesma propriedade não pertence a tal conjunto.

- **NOTAÇÃO**

Usaremos letras maiúsculas para denotar conjuntos e o símbolo $,\in,$ para denotar pertinência em um conjunto. Assim, $a\in A$ significa que o objeto a pertence ao conjunto A, ou também que a é um elemento de A; e $b\notin A$ significa que o objeto b não pertence ao conjunto A (ou simplesmente que b não é um elemento de A).

Se $A=\{violeta, verde, castanho\}\Rightarrow \square\, verde\in A\ e\ roxo\notin A$

Os elementos em um conjunto não têm nenhuma ordem, de modo que {violeta, verde, castanho} é o mesmo que {violeta, castanho, verde}. Além disso, cada elemento do conjunto é listado apenas uma vez. Dois conjuntos são iguais se contêm os mesmos elementos.

$A=B$ significa $(\forall x)[(x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in A)]$

Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio, e é representado por $\emptyset$ ou simplesmente por { }.

Os conjuntos podem ser representados de diversas maneiras analíticas e gráficas. Em geral a representação de um conjunto é suficiente para identificar quais elementos pertencem ou não pertencem ao conjunto em questão.

- **Representação por Descrição**

A representação por descrição é uma representação baseada em linguagem natural, por exemplo: “O conjunto A possui todos os números pares maiores que 5 e menores que 10”, assim sabemos que o conjunto A possui os elementos 6 e 8.

- **Representação por Lista**

A representação por listagem consiste em elencar todos os elementos, por exemplo: $A=\{6,8\}$.

- **Representação por Predicados**

A representação por predicados consiste em descrever através de propriedades predicativas, por exemplo: P(x) é um predicado verdadeiro sempre que x é um número ímpar positivo, então $B=\{x/P(x)\}$ é o conjunto que contém os números ímpares, $B=\{1,3,5,7,...\}$.

Podemos entender que o a formulação por predicados é uma forma de representação por uma fórmula lógica, sempre que o predicado for verdadeiro para algum elemento, então aquele elemento pertence ao conjunto.

Ex.:

a) P(x): x é um número ímpar;

b) Q(x): x é um número par;

c) R(x): x é um número positivo;

d) S(x): x é um número negativo.

$C=\{x/P(x)\wedge R(x)\}$, também pode ser representado por C = {1, 3, 5, 7, …}

$D=\{x/P(x)\wedge R(x)\}$, também pode ser representado por D = { } = $\emptyset$.

- **Representação por Recorrência**

A representação por recorrência consiste em estabelecer regras de formação para o conjunto. Essas regras são divididas em dois grupos:

1) Regras bases, que estabelecem quais os elementos que pertencem diretamente ao conjunto;

2) Regras de formação, estabelece iterações sobre os elementos do conjunto para encontrar novos elementos.

Ex.:

1) $2\in E$;

2) Se $n\in E$, então $(n+2)\in E$.

Portanto: E = {2, 4, 6, …}.

■ CARDINALIDADE

Dado um conjunto S a cardinalidade, representada por $|S|$, de um conjunto refere-se a quantidade de elementos que o conjunto possui, nesse contexto dizemos que o conjunto pode ser finito ou infinito. O conjunto ser´a finito quando a sua cardinalidade for um número natural, ou seja, se $|S|\in\mathbb{N}$, por outro lado, dizemos que S é um conjunto infinito quando ele for tão grande quanto se queira (o conjunto E é um exemplo de conjunto infinito). O conjunto vazio possui cardinalidade zero: $|\emptyset|$ = 0.

■ SUBCONJUNTOS

Sejam F = { 2; 3; 5; 12 } e G = { 2; 3; 4; 5; 9; 12} dois conjuntos, podemos perceber que todo elemento que está em F também está em G, portanto dizemos que F é um subconjunto de G.

Uma definição mais formal seria: dados dois conjuntos S e T, dizemos que S é subconjunto de T se:

$$(\forall x)(x\in S\Rightarrow x\in T)$$

Se um conjunto S for subconjunto de um conjunto T, escreveremos $S \subseteq T$, mas se existe pelo menos um elemento de S que n˜ao está em T dizemos que S é um subconjunto próprio de T e podemos escrever como $S \subset T$.

Observe que com a definição de subconjuntos, podemos entender que dois conjuntos S e T são iguais se, e somente se, $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$.

- **CONJUNTO DAS PARTES**

Observe que inicialmente utilizamos os objetos como elementos básicos dentro do universo que estamos trabalhando. Porém esta ideia inicial ´e equivocada, pois podemos ter conjuntos como elementos de outros conjuntos e ´e onde costumamos encontrar alguns problemas de interpretação. Por exemplo, sejam H = { 1, 2 { 3 } } e I = { { 1, 2 }, 3 }, temos:

$$1 \in H, 1 \notin I$$

$$3 \notin H, 3 \in I$$

$$\{3\} \in H, \{3\} \subseteq I$$

$$\{1, 2\} \subset H, \{1, 2\} \in I$$

$$|H| = 3, |I| = 2$$

Dito isso, dado um conjunto S, o conjunto das partes de S (P(S)) é um conjunto formado por todos os subconjuntos de S.

Ex.: seja J = { 1, 2, 3 } então P(J)= { $\{\emptyset\}$, { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, {1, 3} { 2, 3}, {1, 2, 3}}

Uma maneira intuitiva de pensarmos o conjunto das partes ´e lembrar que ele contém todos os subconjuntos de cardinalidade zero (0), contém também os de cardinalidade 2, 3, assim por diante até o conjunto inteiro (que é subconjunto dele mesmo).

É importante perceber que para qualquer conjunto S, a cardinalidade do conjunto das partes de S é sempre maior que a cardinalidade do conjunto inicial.

$$|P(S)| > |S|$$

- **OPERAÇÕES EM CONJUNTOS**

Dado um conjunto U que possui todos objetos em que podemos trabalhar, chamaremos este conjunto de Universo.

- **União**

Sejam dois conjuntos S e T, o conjunto resultante V da união dos conjuntos S e T, denotada por $V = S \cup T$, contém todos os elementos de S e T.

$$V = S \cup T = \{x / x \in S \vee x \in T\}$$

- **Interseção**

Sejam dois conjuntos S e T, o conjunto resultante V da interseção dos conjuntos S e T, denotada por $V = S \cap T$, contém os elementos que estão em S e T ao mesmo tempo.

$$V = S \cap T = \{x / x \in S \wedge x \in T\}$$

- **Diferença**

Sejam dois conjuntos S e T, o conjunto resultante V da diferença dos conjuntos S e T, denotada por V = S – T, contém os elementos que estão em S e não estão T.

$$V=S-T=\{x/x\in S\wedge x\notin T\}$$

- **Complemento**

Seja um conjunto S o complemento de S, denotado por $\bar{S}$, contém todos os elementos de U que não estão em S.

$$\bar{S}=U-S=\{x/x\in U\wedge x\notin S\}$$

- **Produto Cartesiano**

Sejam a e b objetos do nosso universo, podemos formar um novo objeto (a, b), denominado par ordenado. Diferentemente dos conjuntos, a ordem dos elementos nos pares ordenados é importante e faz com que, a for diferente de b, então $(a,b)\neq(b,a)$.

Sejam dois conjuntos S e T, o produto cartesiano V = S x T consiste em todos os pares ordenados (x, y) tais que $x\in S$ e $y\in T$.

$$V=S\times T=\{(x,y)/x\in S\wedge y\in T\}$$

■ RELAÇÕES

Dado um conjunto S uma relação binária (ou simplesmente relação) em S é um subconjunto de S x S (um conjunto de pares ordenados de elementos de S).

Da mesma maneira, uma relação entre dois conjuntos diferentes S e T, uma relação de S para T, é um subconjunto do produto cartesiano S x T.

Analogamente, podemos pensar em relações envolvendo muitos conjuntos (S_1, S_2, …, S_n), uma relação n-ária é um subconjunto do produto cartesiano S_1 x S_2 x … x S_n.

Assim, normalmente uma relação *p* de S em T (*p:* S → T) consiste em escolher pares ordenados que satisfazem alguma regra que relacionará elementos de S aos elementos de T.

Por exemplo, sejam A = { 1, 2, 3, 4, 5 } e B = { 6, 7, 8, 9, 10 }.

Uma relação R: A → B que relacione um número com o seu dobro, assim R = { (3, 6), (4, 8), (5, 10) }.

Uma relação S: A → B que relacione um número com todos os valores maiores que o seu triplo, assim R = { (1; 6); (1; 7); (1; 8); (1; 9); (1; 10); (2; 7); (2; 8); (2; 9); (2; 10); (3; 10) }.

As relações podem ser definidas como regras arbitrárias que relacionam os elementos dos dois conjuntos.

- **Propriedades**

Dado um conjunto S e uma relação binária *p* de S em S, de acordo com os elementos que estão em *p* dizemos que esta relação possui ou não possui alguma propriedade, abaixo relaciona-se algumas propriedades que as relações podem possuir.

- **Reflexiva**

A propriedade reflexiva estabelece que se o elemento x pertence ao conjunto S, então o par ordenado (x; x) está na relação *p*.

$$(\forall x)(x \in S \Rightarrow (x, x) \in p)$$

- **Simétrica**

A propriedade simétrica estabelece que se o par ordenado (x, y) está na relação *p*, então o par ordenado (y, x) também deve estar.

$$(\forall x)(\forall y)((x, y) \in p \Rightarrow (y, x) \in p)$$

- **Transitiva**

A propriedade transitiva estabelece que se os pares ordenados (x; y) e (y; z) pertencem a relação *p*, então o par ordenado (x; z) também deve estar.

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x, y) \in p \wedge (y, z) \Rightarrow (x, z) \in p)$$

- **Anti–Simétrica**

A propriedade anti-simétrica estabelece que se os pares ordenados (x; y) e (y; x) pertencem a relação *p*, então x deve ser igual a y.

$$(\forall x)(\forall y)((x, y) \in p \wedge (y, x) \in p \Rightarrow x = y)$$

- **Fecho de Relação**

Dado uma relação *rho* em um conjunto S, o fecho de uma relação (p^*) em relação a uma propriedade P é o conjunto minimal tal que $rho \subset .$ p^* e p^* possui a propriedade P.

- **Relação Inversa**

Dado uma relação *p* : S → T, uma relação inversa (p^{-1} : T → S) é tal que se (x; y) está em *p*, então (y; x) está em p^{-1}.

$$(\forall x)(\forall y)((x, y) \in \Rightarrow (x, y) \in p^{-1})$$

Função

Uma função é uma regra de correspondência que associa a cada elemento x de um certo conjunto(domínio) a um, e apenas um, elemento y de um outro conjunto (contradomínio).

Sejam X e Y conjuntos. Uma função de X em Y é um terno (*f:* X, Y), sendo *f* uma relação de X para Y satisfazendo:

- Domínio (*f*) = X;
- Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então y = z.

A imagem de uma função são os elementos $y \in Y$, tais que existe pelo menos um $x \in X$ e *f(x)* = y.

im(*f*) = { y | *f*(x) = y }

◆ **Injetora**

Uma função é dita injetora, se não existem dois valores x_1 e x_2 relacionados com o mesmo valor de y.

$$x_1, x_2 \in f \wedge f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

◆ **Sobrejetora**

Uma função é dita sobrejetora, se existe pelo menos um valor x do domínio relacionado a cada valor y do contra domínio.

Im (*f*) = CD (*f*)

◆ **Bijetora**

Uma função é dita bijetora, se é ao mesmo tempo injetora e bijetora.

◆ **Função Inversa**

Dada uma função *f* : S → T, dizemos que a relação inversa f^{1} : T → S é uma função inversa de *f* se satisfaz as propriedades de função.

Uma função *f* admite função inversa se, e somente se, for uma função bijetora.

◆ **Conjuntos Contáveis**

Trabalho

■ **INDUÇÃO MATEMÁTICA**

A indução matemática é uma técnica muito importante para provar resultados que envolvem números naturais e estruturas recursivas. Por exemplo, provar que:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

A ideia intuitiva da indução matemática deriva da dependência da ocorrência de um fato a ocorrência de um fato anterior. Por exemplo, uma fila de domínios alinhados. Se o primeiro dominío cair, ele vai derrubar o segundo, o segundo vai derrubar o terceiro e assim por diante, então o *k* – ésimo domínio vai derrubar o (k + 1) - ésimo domínio.

Matematicamente, devemos provar que dada uma afirmação P(*k*), para uma função P(n); $n \in \mathbb{N}$, essa afirmação implica em P(k + 1). Assim, quando mostramos que P(1) vale, logo P(2) também vale, pois P(k) → P(k + 1). Portanto P(j) vale para todo $j \in \mathbb{N}$.

Formalização: Seja P(n) uma função, para $n \in \mathbb{N}$.

- Se P(1) é uma afirmação verdadeira
- $P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$

Ex.:

Seja P(n) = 1 + 2 + 3 + … + n, vamos provar que $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

■ RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

◆ Objetivo

Apresentar técnica recursiva que permite reduzir um problema envolvendo n objetos a outro problema semelhante com n^{I} ($n^{I} < n$) objetos, que por sua vez pode ser reduzido para um problema com n^{II} ($n^{II} < n^{I}$) objetos e assim por diante até que o problema seja suficientemente pequeno e fácil de resolver.

Uma relação de recorrência é uma fórmula que relaciona a_n aos seus predecessores: a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_1.

Ex.:

Seja S_n a soma dos primeiros n números naturais. Determine a relação de recorrência em termos de S_{n-1}.

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$$

$$S_n = S_{n-1} + n$$

Porém, é necessário que se estabeleça uma condição de parada para a recursão, neste caso: $S_1 = 1$.

Ex.:

Problema dos coelhos:

O problema dos coelhos foi proposto em 1202 por Leonardo de Pisa e consiste em determinar o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

a) Inicialmente tem-se um único par de coelhos recém-nascidos;

b) Todo mês, cada par de coelhos com pelo menos 2 meses produz um novo casal de coelhos; e

c) Nenhum coelho morre durante o processo.

A figura 1 ilustra a evolução da quantidade de pares de coelhos em função do tempo. Que pode ser representada na fórmula a seguir:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_1 = 1$$

$$F_0 = 1$$

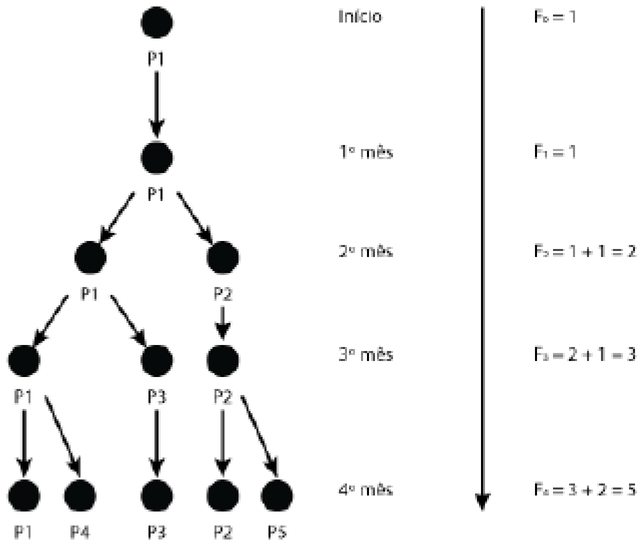

Figura 1. Evolução dos pares de coelhos.