Equações logarítmicas

Existem quatro tipos básicos de equações logarítmicas. Iremos resolver um exemplo de cada tipo.

Tipo 1. Equação que envolve a igualdade entre dois logaritmos de mesma base.

$$\log_a x = \log_a y$$

A solução é dada fazendo x = y > 0

Exemplo: Resolva a equação

$$\log_5 2x + 4 = \log_5 3x + 1.$$

Solução: temos que

2x + 4 = 3x + 1

2x – 3x = 1 – 4

– x = – 3

x = 3

Portanto, S = { 3 }

Tipo 2. Equação que envolve a igualdade entre um logaritmo e um número.

$$\log_a x = c$$

A solução é dada por $x = a^c$.

Exemplo: Encontre a solução da equação

$$\log_3 5x + 2 = 3.$$

Solução: Pela definição de logaritmo temos:

$5x + 2 = 3^3$

5x + 2 = 27

5x = 27 – 2

5x = 25

x = 5

Portanto S = {5}.

Tipo 3. Equação que é necessário fazer uma mudança de incógnita.

Exemplo: Resolva a equação

$$(\log_4 x)^2 - 3 \cdot \log_4 x = 4$$

Solução: Vamos fazer a seguinte mudança de incógnita

$$\log_4 x = y.$$

Substituindo na equação inicial, ficaremos com:

$$y^2 - 3y = 4$$

ou

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$y = 4 \; ou \; y = -1$$

Como $\log_4 x = y$, então:

$$\log_4 x = 4 \rightarrow x = 4^4 \rightarrow x = 256$$

Ou

$$\log_4 x = -1 \rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

Portanto, S = $\{\frac{1}{4}, 256\}$

Tipo 4. Equações que utilizam as propriedades do logaritmo ou de mudança de base.

Exemplo: Resolva a equação

$$\log(2x+3) + \log(x+2) = 2\log x$$

Solução: usando as propriedades do logaritmo, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\log[(2x+3)(x+2)] = \log x^2$$

Note que para isso utilizamos as seguintes propriedades:

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$
$$\log x^n = n \cdot \log x$$

Vamos retornar à equação:

$$\log[(2x+3)(x+2)] = \log x^2$$

Como ficamos com uma igualdade entre dois logaritmos, segue que:

$(2x + 3)(x + 2) = x^2$

ou

$2x^2 + 4x + 3x + 6 = x^2$

$2x^2 - x^2 + 7x + 6 = 0$

$x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

x = -1 ou x = - 6

Lembre-se que para o logaritmo existir o logaritmando e a base devem ser positivos. Com os valores encontrados para x, o logaritmando ficará negativo. Sendo assim, a equação não tem solução ou S = ø.

Aplicação dos logaritmos

Os logaritmos possuem várias aplicações na **Matemática** e em diversas áreas do conhecimento, como **Física**, **Biologia**, **Química**, **Medicina**, **Geografia**, entre outras. Por meio de exemplos, demonstraremos a utilização dessas **técnicas de logaritmos** na busca de resultados para as variadas situações em questão.

1º Exemplo – Matemática Financeira

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 em uma instituição bancária, que paga **juros** mensais de 3,5%, no regime de **juros compostos**. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

Resolução:

Nos casos envolvendo a determinação do tempo e juros compostos, a utilização das **técnicas de logaritmos** é imprescindível.

Fórmula para o cálculo dos juros compostos: $\mathbf{M = C \cdot (1 + i)^t}$. De acordo com a situação-problema, temos:

M (montante) = 3500

C (capital) = 500

i (taxa) = 3,5% = 0,035

t = ?

$M = C \cdot (1 + i)^t$

$3500 = 500 \cdot (1 + 0{,}035)^t$

$3500/500 = 1{,}035^t$

$1{,}035^t = 7$

Aplicando o **logaritmo**:

$\log 1{,}035^t = \log 7$

$t \cdot \log 1{,}035 = \log 7$ (utilize tecla log da calculadora científica)

$t \cdot 0{,}0149 = 0{,}8451$

$t = 0{,}8451 / 0{,}0149$

$t = 56{,}7$

O montante de R$ 3 500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

2º Exemplo – Geografia

Em uma determinada cidade, a **taxa de crescimento populacional** é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população dessa cidade dobrará, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base = P0

População após um ano = $P0 \cdot (1{,}03) = P1$

População após dois anos = $P0 \cdot (1{,}03)^2 = P2$

População após x anos = $P0 \cdot (1{,}03)^x = Px$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$Px = 2 \cdot P0$

$P0 \cdot (1{,}03)^x = 2 \cdot P0$

$1{,}03^x = 2$

Aplicando **logaritmo**:

$\log 1{,}03^x = \log 2$

$x \cdot \log 1{,}03 = \log 2$

$x \cdot 0{,}0128 = 0{,}3010$

$x = 0{,}3010 / 0{,}0128$

$x = 23{,}5$

A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

3º Exemplo – Química

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, reduza-se a 200 g. Utilize a seguinte expressão:

$\mathbf{Q = Q_0 \cdot e^{-rt}}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

$Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$

$200 = 1000 \cdot e^{-0{,}02t}$

$200/1000 = e^{-0{,}02t}$

$1/5 = e^{-0{,}02t}$ (aplicando definição)

$-0{,}02t = \log_e 1/5$

$-0{,}02t = \log_e 5^{-1}$

$-0{,}02t = -\log_e 5$

$-0{,}02t = -\ln 5$ *(–1)*

$0{,}02t = \ln 5$

$t = \ln 5 / 0{,}02$

$t = 1{,}6094 / 0{,}02$

$t = 80{,}47$

A substância levará 80,47 anos para reduzir-se a 200 g.