Vários pares de processo aqui estão relacionados uns aos outros por uma relação de "pré-requisito". Esse é um caso particular de uma relação binária, uma relação entre pares de elementos pertencentes a um conjunto. Estudaremos as propriedades de relações binárias na Seção 4.1. Um tipo de relação binária é chamada de ordem parcial; elementos relacionados por uma ordem parcial podem ser representados graficamente. Um outro tipo de relação binária é uma relação de equivalência; elementos relacionados por uma relação de equivalência podem ser agrupados em classes.

Uma ordenação topológica estende uma ordem parcial a uma ordem total. Para uma ordem parcial de tarefas relacionadas por pré-requisitos, uma ordem total correspondente identifica a ordem seqüencial em que as tarefas deveriam ser executadas, que é a solução do problema de conversão do processamento paralelo. A ordenação topológica é apresentada na Seção 4.2.

Uma generalização de uma relação binária forma a base para um banco de dados relacionais, considerados na Seção 4.3. Usando as operações de restrição, projeção e união nas relações de um banco de dados, podemos fazer diversas perguntas.

Uma função é um tipo particular de relação binária. Funções, assim como relações, descrevem diversas situações reais. Funções também têm propriedades especiais, como veremos na Seção 4.4.

Na Seção 4.5, vamos considerar matrizes e desenvolver uma aritmética para manipulá-las. Usaremos matrizes mais tarde para representar relações e grafos.

Seção 4.1 Relaç

Relações Binárias

Se descobrirmos que duas pessoas, Henriqueta e Horácio, estão relacionadas, entenderemos que existe alguma conexão familiar entre elas — que o par (Henriqueta, Horácio) se diferencia de outros pares ordenados de pessoas porque existe uma relação (são primos, irmãos etc.) que Henriqueta e Horácio satisfazem. O análogo matemático é distinguir determinados pares ordenados de objetos de outros pares ordenados porque as componentes dos pares diferenciados satisfazem alguma relação que os outros não satisfazem.

EXEMPLO 1

Lembre-se (Seção 3.1) que o produto cartesiano de um conjunto S com ele mesmo, $S \times S$ ou S^2, é o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de S. Seja $S = \{1, 2, 3\}$; então,

$$S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Se tivéssemos interessados na relação de igualdade, então (1, 2), (2, 2) e (3, 3) seriam os elementos de $S \times S$ que escolheríamos, isto é, os únicos pares ordenados cujas componentes são iguais. Se estivéssemos interessados na relação de um número ser menor do que o outro, escolheríamos os pares ordenados (1, 2), (1, 3) e (2, 3) em $S \times S$. ●

No Exemplo 1, poderíamos escolher os pares ordenados (x, y) dizendo que $x = y$ ou $x < y$. Analogamente, a notação $x \rho y$ indica que o par ordenado (x, y) satisfaz a relação ρ. A relação ρ pode ser definida por palavras ou, simplesmente, listando-se os pares ordenados que satisfazem ρ.

EXEMPLO 2

Seja $S = \{1, 2, 4\}$. No conjunto $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), 2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$, pode-se definir uma relação ρ por $x \rho y$ se, e somente se, $x = (1/2)y$, abreviada como $x \rho y \leftrightarrow x = (1/2)y$. Portanto, (1, 2) e (2, 4) satisfazem ρ. A mesma relação ρ poderia ser definida dizendo-se que $\{(1, 2), (2, 4)\}$ é o conjunto de pares ordenados que satisfazem ρ. ●

Como no Exemplo 2, um modo de definir uma relação binária ρ é especificar um subconjunto de $S \times S$. Formalmente, essa é a definição de uma relação binária.

Definição: Relação Binária em um Conjunto S
Dado um conjunto S, uma **relação binária em** S é um subconjunto de $S \times S$ (um conjunto de pares ordenados de elementos de S).

Agora que sabemos que uma relação binária ρ é um subconjunto, vemos que

$$x \rho y \leftrightarrow (x, y) \in \rho$$

Em geral, uma relação binária é definida por uma descrição da relação, em vez de lista dos pares ordenados. A descrição fornece uma caracterização dos elementos pertencentes à relação, isto é, é um predicado binário que é satisfeito por determinados pares ordenados.

Seja $S = \{1, 2\}$. Então, $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Seja ρ a relação em S dada pela descrição $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é ímpar. Então $(1, 2) \in \rho$ e $(2, 1) \in \rho$. ●

Seja $S = \{1, 2\}$. Então, $S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Se ρ é definida em S por $\rho = \{(1, 1), (2, 1)\}$, então $1 \rho 1$ e $2 \rho 1$ são verdadeiras, mas $1 \rho 2$ não é, por exemplo. Essa relação não parece ter uma descrição verbal óbvia. ●

Nesta seção estaremos preocupados esclusivamente com relações binárias em um único conjunto, mas, de modo mais geral, relações podem ser definidas entre conjuntos diferentes.

Definição: Relações entre Conjuntos Diferentes
Dados dois conjuntos S e T, uma **relação binária de S para T** é um subconjunto de $S \times T$. Dados n conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, $n > 2$, uma **relação n-ária em $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$** é um subconjunto de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Sejam $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{2, 4, 7\}$. O conjunto

$\{(1, 2), (2, 4), (2, 7)\}$

é formado por elementos de $S \times T$, logo é uma relação binária de S para T. ●

Para cada uma das relações binárias ρ definidas a seguir em $\mathbb{N}$, decida quais entre os pares ordenados dados pertencem a ρ.

a. $x \rho y \leftrightarrow x = y + 1$; (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)
b. $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y; (2, 4), (2, 5), (2, 6)
c. $x \rho y \leftrightarrow x$ é ímpar; (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)
d. $x \rho y \leftrightarrow x > y^2$; (1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3) ●

Se ρ é uma relação binária em S, então ρ consiste em um conjunto de pares ordenados da forma (s_1, s_2). Dada uma primeira componente s_1 ou uma segunda componente s_2, podem ser formados diversos pares pertencentes à relação. A relação é **injetora** ou **um para um** se cada primeira componente e cada segunda componente aparece apenas uma vez na relação. A relação é **um para muitos** se alguma primeira componente aparece mais de uma vez, isto é, se s_1 pode aparecer em mais de um par. Ela é dita **muitos para um** se alguma segunda componente s_2 aparece em mais de um par. Finalmente, ela é **muitos para muitos** se pelo menos um s_1 aparece em mais de um par e pelo menos um s_2 aparece em mais de um par. A Fig. 4.1 ilustra essas quatro possibilidades. Note que nem todos os valores em S precisam ser componentes de algum par ordenado em ρ.

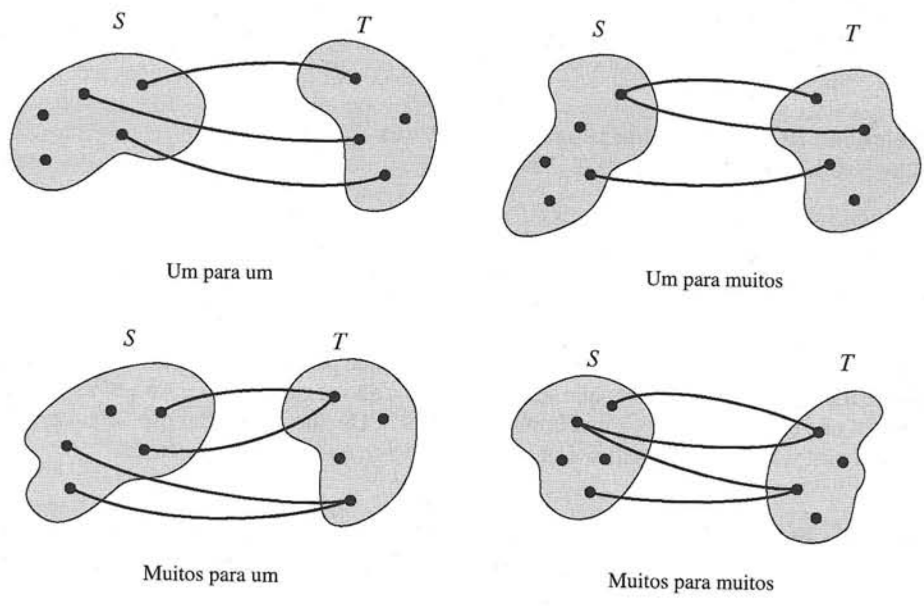

Fig. 4.1

Essas idéias podem ser estendidas a relações de um conjunto S em outro conjunto T. A relação do Exemplo 5 é um para muitos porque a primeira componente 2 aparece mais de uma vez; o 2 do conjunto S está associado a 4 e a 7 do conjunto T.

PROBLEMA PRÁTICO 2

Identifique cada uma das relações em S como sendo um para um, um para muitos, muitos para um ou muitos para muitos, onde $S = \{2, 5, 7, 9\}$.

a. $\{(5, 2), (7, 5), (9, 2)\}$
b. $\{(2, 5), (5, 7), (7, 2)\}$
c. $\{(7, 9), (2, 5), (9, 9), (2, 7)\}$ ●

Suponha que B é o conjunto de todas as relaçõs binárias em um dado conjunto S. Se ρ e σ pertencem a B, então são subconjuntos de $S \times S$. Como tal, podemos efetuar operações como a união, a interseção e o complementar, que resultam em novos subconjuntos de $S \times S$, isto é, novas relações binárias, que denotaremos, respectivamente, por $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$ e ρ'. Então,

$$x(\rho \cup \sigma)y \leftrightarrow x\ \rho\ y \text{ ou } x\ \sigma\ y$$

$$x(\rho \cap \sigma)y \leftrightarrow x\ \rho\ y \text{ e } x\ \sigma\ y$$

$$x\ \rho'\ y \leftrightarrow \text{não } x\ \rho\ y$$

PROBLEMA PRÁTICO 3

Sejam ρ e σ duas relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por $x\ \rho\ y \leftrightarrow x = y$ e $x\ \sigma\ y \leftrightarrow x < y$. Dê descrições verbais para os itens (a), (b) e (c); descreva o conjunto do item (d).
a. Qual é a relação $\rho \cup \sigma$?
b. Qual é a relação ρ'?
c. Qual é a relação σ'?
d. Qual é a relação $\rho \cap \sigma$? ●

Os fatos a seguir sobre as operações $\cup$, $\cap$ e $'$ nas relações são conseqüência imediata das identidades básicas entre conjuntos na Seção 3.1. O conjunto S^2 (que é, afinal de contas, um subconjunto de S^2) está sendo considerado aqui como uma relação binária em S.

1a. $\rho \cup \sigma = \sigma \cup \rho$	1b. $\rho \cap \sigma = \sigma \cap \rho$
2a. $(\rho \cup \sigma) \cup \gamma = \rho \cup (\sigma \cup \gamma)$	2b. $(\rho \cap \sigma) \cap \gamma = \rho \cap (\sigma \cap \gamma)$
3a. $\rho \cup (\sigma \cap \gamma) = (\rho \cup \sigma) \cap (\rho \cup \gamma)$	3b. $\rho \cap (\sigma \cup \gamma) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \gamma)$
4a. $\rho \cup \varnothing = \rho$	4b. $\rho \cap S^2 = \rho$
5a. $\rho \cup \rho' = S^2$	5b. $\rho \cap \rho' = \varnothing$

Propriedades de Relações

Uma relação binária em um conjunto S pode ter determinadas propriedades. Por exemplo, a relação ρ de igualdade em S, $(x, y) \in \rho \leftrightarrow x = y$, tem três propriedades: (1) para qualquer $x \in S$, $x = x$ ou $(x, x) \in \rho$; (2) quaisquer que sejam $x, y \in S$, se $x = y$, então $y = x$, ou seja, $(x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \in \rho$; (3) quaisquer que sejam $x, y, z \in S$, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$, ou seja, $[(x, y) \in \rho \text{ e } (y, z) \in \rho] \rightarrow (x, z) \in \rho$. Essas três propriedades fazem com que a relação de igualdade seja reflexiva, simétrica e transitiva.

LEMBRETE: *Reflexiva*: Todo x está relacionado a si mesmo. *Simétrica*: Se x está relacionado a y, então y está relacionado a x. *Transitiva*: Se x está relacionado a y e y está relacionado a z, então x está relacionado a z.

Definição: Relações Reflexivas, Simétricas e Transitivas
Seja ρ uma relação binária em um conjunto S. Então,

ρ ser **reflexiva** significa $(\forall x)(x \in S \rightarrow (x, x) \in \rho)$
ρ ser **simétrica** significa $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho) \rightarrow (y, x) \in \rho)$
ρ ser **transitiva** significa $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \rightarrow (x, z) \in \rho)$

EXEMPLO 6

Considere a relação $\leq$ no conjunto $\mathbb{N}$. Essa relação é reflexiva porque para qualquer inteiro não negativo x, $x \leq x$. Ela é, também, transitiva pois quaisquer que sejam os inteiros não negativos x, y, z, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$. No entanto, $\leq$ não é simétrica; $3 \leq 4$ não implica que $4 \leq 3$. De fato, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. Essa característica é descrita dizendo-se que $\leq$ é anti-simétrica. ●

LEMBRETE: *Anti-simétrica*: Se x está relacionado a y e y está relacionado a x, então $x = y$.

Definição: Relação Anti-simétrica
Seja ρ uma relação binária em um conjunto S. Dizer que ρ é **anti-simétrica** significa que

$$(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \rightarrow x = y)$$

Seja $S = \wp(\mathbb{N})$. Defina uma relação binária ρ em S por $A \rho B \leftrightarrow A \subseteq B$. Então ρ é reflexiva, já que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo. Além disso, ρ é transitiva, pois se A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de C, então A é um subconjunto de C. Finalmente, ρ é anti-simétrica, porque se A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de A, então A e B são conjuntos iguais. ●

Todas as quatro propriedades de relações envolvem o conectivo condicional. Os quantificadores universais significam que os condicionais têm que ser verdadeiros para escolhas arbitrárias das variáveis. Lembre-se de que para provar que um condicional é verdadeiro, supomos que a proposição antecedente é verdadeira e provamos que a conseqüente também tem que ser verdadeira. Para a reflexividade, o antecedente escolhe um elemento arbitrário em S; o conseqüente diz que esse elemento tem que estar relacionado a si mesmo. Para que uma relação ρ em um conjunto S seja reflexiva, então, todo elemento no conjunto tem que estar relacionado a si mesmo, o que especifica que determinados pares ordenados têm que pertencer a ρ.

No entanto, para a simetria, a transitividade e a anti-simetria, o antecedente não diz apenas que os elementos estão em S. Para provar que uma relação é simétrica, por exemplo, precisamos mostrar que, se x e y são elementos arbitrários em S e se, além disso, x está relacionado a y, então y tem que estar relacionado a x. Isso diz que se determinados pares ordenados estão em ρ, então outros pares ordenados determinados também têm que estar em ρ para que ρ seja simétrica. Em outras palavras, conhecimento do conjunto S é fundamental para que se determine se a relação é ou não reflexiva, enquanto que, para as outras propriedades, é suficiente olhar apenas para os pares ordenados em ρ.

Seja $S = \{1, 2, 3\}$.

a. Se uma relação ρ em S é reflexiva, que pares ordenados têm que pertencer a ρ?
b. Se uma relação ρ em S é simétrica, que pares ordenados têm que pertencer a ρ? (Essa pergunta é delicada; veja a resposta no final do livro.)
c. Se uma relação ρ em S é simétrica e se $(a, b) \in \rho$, que outro par ordenado tem que pertencer a ρ?
d. Se uma relação ρ em S é anti-simétrica e se (a, b) e (b, a) pertencem a ρ, o que tem que ser verdade?
e. A relação $\rho = \{(1, 2)\}$ em S é transitiva? (*Dica*: Lembre-se da tabela-verdade para o condicional.) ●

As propriedades de simetria e anti-simetria para relações binárias não são exatamente opostas. Anti-simétrica não significa "não simétrica". Uma relação não é simétrica se algum (x, y) pertence à relação, mas (y, x) não. Mais formalmente, não ser simétrica significa que

$$((\forall x)(\forall y)[x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \to (y, x) \in \rho])'$$
$$\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \to (y, x) \in \rho]'$$
$$\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho)' \vee (y, x) \in \rho]'$$
$$\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho) \wedge (y, x) \notin \rho]$$

Portanto, as relações podem ser simétricas e não anti-simétricas, anti-simétricas e não simétricas, podem ser ao mesmo tempo simétricas e anti-simétricas, ou podem não ser nem simétricas nem anti-simétricas.

A relação de igualdade em um conjunto S é, ao mesmo tempo, simétrica e anti-simétrica. No entanto, a relação de igualdade em S (ou um subconjunto dessa relação) é a única relação tendo essas duas propriedades. Para ilustrar, suponha que ρ é uma relação simétrica e anti-simétrica em S, e seja $(x, y) \in \rho$. Por simetria, temos que $(y, x) \in \rho$. Mas então, por anti-simetria, $x = y$. Portanto, apenas elementos iguais podem estar relacionados. A relação $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$ no conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ não é nem simétrica — $(1, 3)$ pertence, mas $(3, 1)$ não — nem anti-simétrica — $(1, 2)$ e $(2, 1)$ pertencem, mas $1 \neq 2$.

Teste cada relação binária no conjunto dado S para ver se é reflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.

a. $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par.
b. $S = \mathbb{Z}^+$ (inteiros positivos); $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y.
c. S = conjunto de todas as retas no plano; $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela a y ou coincide com y.
d. $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.
e. $S = \{0, 1\}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.
f. $S = \{x \mid x$ é uma pessoa que mora em Peória$\}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ é mais velho do que y.
g. $S = \{x \mid x$ é um aluno em sua turma$\}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ senta na mesma fileira que y.
h. $S = \{1, 2, 3\}$; $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. ●

A discussão sobre definições recorrentes em Prolog (Seção 1.5) observou que se deve usar uma definição recorrente quando o predicado a ser descrito é herdado de um objeto para o próximo. O predicado *na-cadeia-alimentar* usado lá tem essa propriedade, pois

na-cadeia-alimentar$(x, y) \wedge$ *na-cadeia-alimentar*$(y, z) \to$ *na-cadeia-alimentar*(x, z)

Vemos, agora, que isso é simplesmente transitividade.

Fechos de Relações

Se uma relação ρ em um conjunto S não tem determinada propriedade, podemos ser capazes de estender ρ a uma relação ρ^* em S que tenha essa propriedade. Por "estender" queremos dizer que a nova relação ρ^* vai conter todos os pares ordenados em ρ, além dos pares adicionais necessários para que a propriedade seja válida. Portanto, $\rho \subseteq \rho^*$. Se ρ^* é o menor conjunto com essa propriedade, então ρ^* é chamado de fecho de ρ em relação a essa propriedade.

Definição: Fecho de uma Relação
Uma relação binária ρ^* em um conjunto S é o **fecho de uma relação** ρ em S em relação à propriedade P se

1. ρ^* tem a propriedade P;
2. $\rho \subseteq \rho^*$;
3. ρ^* é subconjunto de qualquer outra relação em S que inclua ρ e tenha a propriedade P.

Podemos procurar o **fecho reflexivo**, o **fecho simétrico** e o **fecho transitivo** de uma relação em um conjunto. É claro que, se a relação já tem a propriedade em questão, ela é seu próprio fecho em relação a essa propriedade.

EXEMPLO 9

Sejam $S = \{1, 2, 3\}$ e $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$. Então ρ não é reflexiva, nem simétrica, nem transitiva. O fecho de ρ em relação à reflexividade é

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$$

Essa relação é reflexiva e contém ρ. Além disso, qualquer relação reflexiva em S tem que conter os novos pares ordenados que adicionamos — (2, 2) e (3, 3) — de modo que não pode existir nenhuma relação reflexiva menor; em outras palavras, qualquer relação reflexiva contendo ρ tem que ter a relação acima como subconjunto.

O fecho de ρ em relação à simetria é

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

Também aqui é claro que adicionamos apenas os novos pares necessários — (2, 1) e (3, 2) — para que a relação seja simétrica.

Tanto para o fecho reflexivo quanto para o simétrico, tivemos apenas que inspecionar os pares ordenados já pertencentes a ρ para descobrir que pares ordenados precisamos adicionar (supondo conhecido o conjunto S). O fecho reflexivo ou o simétrico de uma relação pode ser encontrado em apenas um passo. O fecho transitivo pode necessitar uma série de passos. Analisando os pares ordenados no nosso exemplo de ρ, vemos que precisamos adicionar (3, 2) (devido a (3, 1) e (1, 2)), (3, 3) (por causa de (3, 1) e (1, 3)) e (2, 1) (devido a (2, 3) e (3, 1)). Isso nos dá a relação

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1)\}$$

No entanto, essa relação ainda não é transitiva. Por causa do novo par (2, 1) e do velho par (1, 2), precisamos adicionar (2, 2). Isso nos dá a relação

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2)\}$$

que é transitiva e é a menor relação transitiva contendo ρ. Esse é o fecho transitivo de ρ.

Como no Exemplo 9, uma das maneiras de encontrar o fecho transitivo de uma relação é inspecionar os pares ordenados na relação original, adicionar novos pares se necessário, analisar a relação resultante, adicionar novos pares se necessário, e assim por diante, até se obter uma relação transitiva. Esse é um procedimento um tanto *ad hoc*. Daremos um algoritmo melhor no Cap. 6. Veremos, então, que o fecho transitivo de uma relação binária está relacionado à "acessibilidade em um grafo direcionado", que tem muitas aplicações.

PROBLEMA PRÁTICO 6

Faz sentido procurar pelo fecho anti-simétrico de uma relação em um conjunto? Por quê?

PROBLEMA PRÁTICO 7

Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo da relação

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$$

no conjunto $S = \{a, b, c, d\}$.

No resto desta seção vamos nos concentrar em dois tipos de relações binárias que são caracterizadas pelo tipo de propriedades que satisfazem (reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade).

Ordens Parciais

Definição: Ordem Parcial
Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva é chamada de uma **ordem parcial** em S.

Dos exemplos anteriores e do Problema Prático 5, temos os seguintes exemplos:

Em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x \leq y$.
Em $\wp(\mathbb{N})$, $A \rho B \leftrightarrow A \subseteq B$.
Em $\mathbb{Z}^+$, $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y.
Em $\{0, 1\}$, $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.

Se ρ é uma ordem parcial em S, então o par ordenado (S, ρ) é chamado um **conjunto parcialmente ordenado**. Denotaremos um conjunto parcialmente ordenado arbitrário por $(S, \preccurlyeq)$; em qualquer caso particular, $\preccurlyeq$ tem algum significado preciso, como "menor ou igual a", "é um subconjunto de", "divide" e assim por diante.

Seja $(S, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado e seja $A \subseteq S$. Então $\preccurlyeq$ é um conjunto de pares ordenados de elementos de S, alguns dos quais podem ser pares ordenados de elementos de A. Se selecionarmos, entre os pares ordenados em $\preccurlyeq$, os que têm elementos de A, esse novo conjunto é a **restrição** de $\preccurlyeq$ a A, e é uma ordem parcial em A. (Percebe por que as propriedades necessárias continuam válidas?) Por exemplo, uma vez que sabemos que a relação "x divide y" é uma ordem parcial em $\mathbb{Z}^+$, sabemos, automaticamente, que "x divide y" é uma ordem parcial em $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

Vamos ver a terminologia usada em conjuntos parcialmente ordenados. Seja $(S, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $x \preccurlyeq y$, então ou $x = y$ ou $x \neq y$. Se $x \preccurlyeq y$ mas $x \neq y$, escrevemos $x \prec y$ e dizemos que x é um **predecessor** de y ou que y é um **sucessor** de x. Um dado y pode ter muitos predecessores mas se $x \prec y$ e se não existe nenhum z com $x \prec z \prec y$, então x é um **predecessor imediato** de y.

...A 8

Considere a relação "x divide y" em $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

a. Escreva os pares ordenados pertencentes a essa relação.
b. Escreva todos os predecessores de 6.
c. Escreva todos os predecessores imediatos de 6. ●

Se S for finito, podemos representar visualmente um conjunto parcialmente ordenado $(S, \preccurlyeq)$ por um **diagrama de Hasse**. Cada elemento de S é representado por um ponto, denominado **nó** ou **vértice** do diagrama. Se x é um predecessor imediato de y, o nó que representa y é colocado acima do nó que representa x e os dois nós são conectados por um segmento de reta.

...10

Considere $\wp(\{1, 2\})$ com a relação de inclusão de conjuntos. Esse é um conjunto parcialmente ordenado. (Já sabemos que $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.) Os elementos de $\wp(\{1, 2\})$ são $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$. A relação binária $\subseteq$ consiste nos seguintes pares ordenados:

$$(\varnothing, \varnothing), (\{1\}, \{1\}), (\{2\}, \{2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\}), (\varnothing, \{1\}), (\varnothing, \{2\}),$$
$$(\varnothing, \{1, 2\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{1, 2\})$$

O diagrama de Hasse desse conjunto parcialmente ordenado aparece na Fig. 4.2. Note que, embora $\varnothing$ não seja um predecessor imediato de $\{1, 2\}$, é um predecessor (isso está ilustrado pela cadeia de segmentos de reta "subindo" que conectam $\varnothing$ a $\{1, 2\}$). ●

...TE:
...em um
...de Hasse
...em estar
...s por um
...de reta

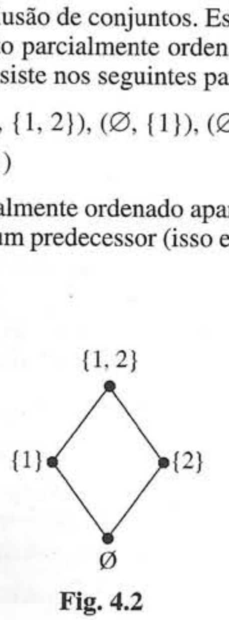

Fig. 4.2

PROBLEMA PRÁTICO 9

Desenhe o diagrama de Hasse para a relação "x divide y" em $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

O diagrama de Hasse de um conjunto parcialmente ordenado contém toda a informação sobre a ordem parcial. Podemos reconstruir o conjunto de pares ordenados analisando o diagrama. Os segmentos de reta no diagrama nos dão, imediatamente, os pares (predecessor, sucessor). Podemos completar o resto usando a reflexividade e a transitividade. Assim, dado o diagrama de Hasse na Fig. 4.3 de uma ordem parcial $\preccurlyeq$ em um conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$, podemos concluir que $\preccurlyeq$ é o conjunto

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b)\ (a, c), (a, d), (a, e), (d, e)\}$$

Dois elementos em S podem não estar relacionados em uma ordem parcial em S. No Exemplo 10, $\{1\}$ e $\{2\}$ não estão relacionados; da mesma forma, tanto 2 e 3, quanto 12 e 18, não estão relacionados no Problema Prático 9. Na Fig. 4.3, vemos que f não está relacionado a nenhum outro elemento. Uma ordem parcial onde todo elemento do conjunto está relacionado a todos os outros elementos é chamada de uma **ordem total** ou uma **cadeia**. O diagrama de Hasse para uma ordem total é da forma ilustrada na Fig. 4.4. A relação $\leq$ em $\mathbb{N}$ é uma ordem total.

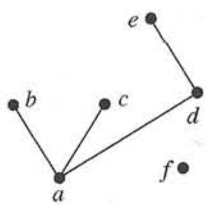

Fig. 4.3

Fig. 4.4

Vamos considerar, novamente, um conjunto parcialmente ordenado $(S, \preccurlyeq)$. Se existe um $y \in S$ tal que $y \preccurlyeq x$ para todo $x \in S$, então y é um **elemento mínimo** (ou o **menor elemento**) do conjunto parcialmente ordenado. Se existir um elemento mínimo, ele é único. Para mostrar isso, suponha que y e z são, ambos, elementos mínimos. Então $y \preccurlyeq z$, já que y é mínimo, e $z \preccurlyeq y$, pois z é mínimo; por anti-simetria, $y = z$. Um elemento $y \in S$ é dito **minimal** se não existe $x \in S$ com $x \prec y$. Em um diagrama de Hasse, o elemento mínimo está abaixo de todos os outros, enquanto que um elemento minimal não tem elementos abaixo dele. Definições análogas podem ser feitas para o elemento máximo (ou maior elemento) e para os elementos maximais.

PROBLEMA PRÁTICO 10

Defina **elemento máximo** (ou **maior elemento**) e **elemento maximal** em um conjunto parcialmente ordenado $(S, \preccurlyeq)$.

EXEMPLO 11

No conjunto parcialmente ordenado do Problema Prático 9, 1 é, ao mesmo tempo, mínimo e minimal; 12 e 18 são maximais, mas não existe elemento máximo.

O menor elemento é sempre minimal e o maior elemento é sempre maximal, mas a recíproca não é verdadeira (veja o Exemplo 11). Em um conjunto totalmente ordenado, no entanto, um elemento minimal é o menor elemento e um elemento maximal é o maior elemento.

PROBLEMA PRÁTICO 11

Desenhe o diagrama de Hasse para um conjunto parcialmente ordenado com quatro elementos tal que existam dois elementos minimais, mas não exista mínimo, existam dois elementos maximais, mas não exista máximo, e cada elemento está relacionado a exatamente dois outros elementos.

LEMBRETE:
Uma ordem parcial é anti-simétrica; uma relação de equivalência é simétrica.

Ordens parciais são reflexivas, anti-simétricas e transitivas. Um outro tipo de relação binária, que estudaremos a seguir, satisfaz um conjunto diferente de propriedades.

Relações de Equivalência

Definição: Relações de Equivalência
Uma relação binária em um conjunto S que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada uma **relação de equivalência** em S.

Já encontramos os seguintes exemplos de relações de equivalência:

Em qualquer conjunto S, $x \, \rho \, y \leftrightarrow x = y$.
Em $\mathbb{N}$, $x \, \rho \, y \leftrightarrow x + y$ é par.
No conjunto de todas as retas no plano, $x \, \rho \, y \leftrightarrow x$ é paralela ou coincide com y.
Em $\{0, 1\}$, $x \, \rho \, y \leftrightarrow x = y^2$.
Em $\{x \mid x$ é um aluno em sua turma$\}$, $x \, \rho \, y \leftrightarrow x$ senta na mesma fileira que y.
Em $\{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

Podemos ilustrar uma característica importante de uma relação de equivalência em um conjunto analisando o exemplo $S = \{x \mid x$ é um aluno em sua turma$\}$, $x \, \rho \, y \leftrightarrow$ "x senta na mesma fileira que y". Ao agrupar todos os alunos no conjunto S que estão relacionados entre si, chegamos à Fig. 4.5. Dividimos o conjunto S em subconjuntos de tal maneira que todos na turma pertencem a um, e apenas um, subconjunto.

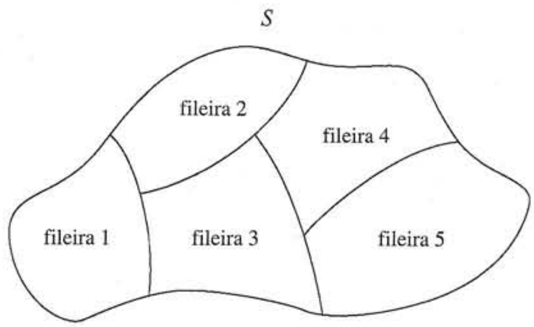

Fig. 4.5

Definição: Partição de um Conjunto
Uma **partição** de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios cuja união é igual a S.

Qualquer relação de equivalência, como veremos, divide o conjunto onde está definida em uma partição. Os subconjuntos que compõem a partição, chamados, algumas vezes, de **blocos** da partição, são formados agrupando-se os elementos relacionados, como no caso dos alunos em sua turma.

Se ρ é uma relação de equivalência em um conjunto S e se $x \in S$, denotamos por $[x]$ o conjunto de todos os elementos relacionados a x em S e chamamos esse conjunto de **classe de equivalência** de x. Logo,

$$[x] = \{y \mid y \in S \wedge x \, \rho \, y\}$$

PLO 12 No caso em que $x \, \rho \, y \leftrightarrow$ "x senta na mesma fileira que y", suponha que João, Carlinhos, José, Judite e Teo sentam todos na terceira fileira. Então [João] = {João, Carlinhos, José, Judite, Teo}. Além disso, [João] = [Teo] = [Judite], e assim por diante. Essas não são classes distintas, mas a mesma classe com diversos nomes. Uma classe de equivalência pode usar o nome de qualquer de seus elementos. ●

Vamos agora enunciar o resultado sobre relações de equivalência e partições. Para praticar teoremas e demonstrações formais, vamos dar esse resultado como um teorema formal, depois analisar a estrutura da demonstração e completar parte da demonstração.

Teorema sobre Relações de Equivalência e Partições
Uma relação de equivalência ρ em um conjunto S determina uma partição de S e uma partição de S determina uma relação de equivalência em S.

Demonstração Parcial: O teorema faz duas afirmações separadas:

a. Uma relação de equivalência em S determina uma partição de S.
b. Uma partição de S determina uma relação de equivalência em S.

Para provar a parte a, temos que mostrar que classes de equivalência distintas de elementos de S sob a relação de equivalência ρ satisfazem a definição de partição. Para satisfazer a definição de partição, temos que mostrar que

i. A união dessas classes distintas é igual a S.

ii. As classes distintas são disjuntas.

Para provar a parte a.i, precisamos mostrar alguma coisa sobre a união de classes de equivalência distintas formadas por ρ. As classes de equivalência são conjuntos formados por elementos de S, logo sua união é um conjunto; vamos denotar esse conjunto por U. Precisamos mostrar que $U = S$, que é uma igualdade entre conjuntos. Para provar essa igualdade entre conjuntos, vamos provar a inclusão em cada direção, isto é,

1. $U \subseteq S$
2. $S \subseteq U$

Para essa parte da demonstração, chegamos, finalmente, a duas proposições simples que são fáceis de provar da seguinte maneira:

a.i.1: Seja $x \in U$. Então x pertence a uma classe de equivalência. Todas as classes de equivalência são subconjuntos de S, logo $x \in S$.

a.i.2: Seja $x \in S$. Então $x \rho x$ (reflexividade de ρ), logo $x \in [x]$ e todo elemento de S pertence a uma classe de equivalência, portanto, à união U de todas as classes.

Isso completa a demonstração de a.i. Para a.ii, sejam $[x]$ e $[z]$ duas classes de equivalência. Queremos mostrar que duas classes distintas são disjuntas, ou

$[x] \neq [z] \rightarrow [x] \cap [z] = \varnothing$ a.ii

Se supusermos que $[x] \neq [z]$, temos que mostrar, então, que $[x] \cap [z]$ *não* contém nenhum elemento, o que pode ser difícil de fazer. Em vez disso, vamos provar a contrapositiva de a.ii:

$[x] \cap [z] \neq \varnothing \rightarrow [x] = [z]$ contrapositiva de a.ii

Vamos supor, portanto, que $[x] \cap [z] \neq \varnothing$ e que existe um $y \in S$ tal que $y \in [x] \cap [z]$. O que isso nos diz?

$y \in [x] \cap [z]$	(hipótese)
$y \in [x], y \in [z]$	(definição de $\cap$)
$x \rho y, z \rho y$	(definição de $[x]$ e $[z]$)
$x \rho y, y \rho z$	(simetria de ρ)
$x \rho z$	(transitividade de ρ)

Podemos mostrar, agora, que $[x] = [z]$ provando a inclusão em ambas as direções, isto é,

3. $[z] \subseteq [x]$
4. $[x] \subseteq [z]$

Para mostrar (3), $[z] \subseteq [x]$, seja $q \in [z]$ (sabemos que $[z] \neq \varnothing$ porque $y \in [z]$). Então,

$z \rho q$	(definição de $[z]$)
$x \rho z$	(como vimos acima)
$x \rho q$	(transitividade de ρ)
$q \in [x]$	(definição de $[x]$)
$[z] \subseteq [x]$	(definição de $\subseteq$)

O Problema Prático 12 pede uma demonstração de (4), $[x] \subseteq [z]$. Com essa demonstração, (3) e (4) ficam completas, o que nos leva à conclusão que $[x] = [z]$. Isso completa a demonstração da contrapositiva de a.ii, o que prova a.ii, o que, por sua vez, completa a demonstração da parte a. Nossa!

O Problema Prático 13 pede uma demonstração da parte b.

Fim da Demonstração Parcial

PROBLEMA PRÁTICO 12

Para o argumento acima, prove que $[x] \subseteq [z]$.

PROBLEMA PRÁTICO 13

Prove a parte b do teorema. Dada uma partição em um conjunto S, defina uma relação ρ em S por

$x \rho y \leftrightarrow x$ pertence ao mesmo subconjunto da partição que y

e mostre que ρ é uma relação de equivalência em S, isto é, mostre que ρ é reflexiva, simétrica e transitiva.

EXEMPLO 13

A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por

$x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par

divide $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência. Se x é um número par, então, para todo número par y, $x + y$ é par e $y \in [x]$. Todos os números pares formam uma classe. Se x é ímpar, então, para todo número ímpar y, $x + y$ é par e $y \in [x]$. Todos os número ímpares formam a segunda classe. A partição pode ser representada como na Fig. 4.6. Novamente, note que uma classe de equivalência pode ter mais de um nome, ou representante. Neste exemplo, [2] = [8] = [1048], e assim por diante; [1] = [17] = [947] etc. ●

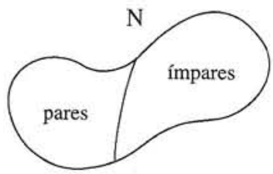

Fig. 4.6

MA 14

Para cada uma das relações de equivalência a seguir, descreva as classes de equivalência correspondentes.

a. No conjunto de todas as retas no plano, $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela a y ou coincide com y.
b. No conjunto $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x = y$.
c. Em $\{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$. ●

A participação de um conjunto em classes de equivalência é útil porque é quase sempre conveniente subir um nível de abstração e tratar as classes propriamente ditas como entidades. Concluiremos esta seção com dois exemplos onde isto acontece.

0 14

Seja $S = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Portanto, S é o conjunto de todas as frações. Duas frações como 1/2 e 2/4 são ditas equivalentes. Formalmente, a/b é equivalente a c/d, denotado por $a/b \sim c/d$ se, e somente se, $ad = bc$. Vamos mostrar que a relação binária $\sim$ em S é uma relação de equivalência. Primeiro, $a/b \sim a/b$, já que $ab = ba$. Além disso, se $a/b \sim c/d$, então $ad = bc$, ou $cb = da$ e $c/d \sim a/b$. Logo, $\sim$ é reflexiva e simétrica. Para mostrar que $\sim$ é transitiva, suponha que $a/b \sim c/d$ e que $c/d \sim e/f$. Então, $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando a primeira equação por f e a segunda por b, obtemos $adf = bcf$ e $bcf = bde$. Logo, $adf = bde$, ou $af = be$ (por que podemos dividir por d aqui?). Portanto, $a/b \sim e/f$ e $\sim$ é transitiva. Algumas amostras de classes de equivalência de S por essa relação de equivalência são

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\dots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\right\}$$
$$\left[\frac{3}{10}\right] = \left\{\dots, \frac{-9}{-30}, \frac{-6}{-20}, \frac{-3}{-10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \frac{9}{30}, \dots\right\}$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais pode ser considerado como sendo o conjunto de todas as classes de equivalência de S. Um único número racional, como [1/2], pode ser representado por muitas frações, embora seja usual usar a representação sem fatores comuns no numerador e no denominador. Quando somamos dois números racionais, como [1/2] + [3/10], procuramos por representantes das classes que tenham o mesmo denominador e somamos esses representantes. Nossa resposta é a classe à qual a soma resultante pertence e, normalmente, nomeamos a classe usando uma fração sem fatores comuns no numerador e no denominador. Então, para somar [1/2] + [3/10], representamos [1/2] por 5/10 e [3/10] por 3/10. A soma de 5/10 com 3/10 é 8/10 e, normalmente escreve-se [8/10] como [4/5]. Esse procedimento é tão familiar que, em geral, escreve-se 1/2 + 3/10 = 4/5; de qualquer forma, as classes de frações estão sendo manipuladas através de seus representantes. ●

15

Vamos definir uma relação binária de **congruência módulo 4** no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Um inteiro x é congruente módulo 4 a y, simbolizado por $x \equiv_4 y$ ou $x \equiv y \pmod 4$, se $x - y$ é um múltiplo inteiro de 4. A congruência módulo 4 é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. (Você pode provar isso?) Para construir as classes de equivalência, note que [0], por exemplo, vai conter todos os inteiros que diferem de 0 por um múltiplo de 4, como 4, 8, −12 etc. As classes de equivalência distintas são

$[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$
$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$
$[2] = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$
$[3] = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$ ●

relações de congruência derivam de homomorfismos $h(s_1 \cdot s_2) = h(s_1) \circ h(s_2)$
$h: S \to T$, onde S é um semigrupo em $\cdot$ e T é um semigrupo em $\square$
ref: Ross, K. A. (Discrete Mathematics, 1985)

Não existe nada de especial na escolha de 4 no Exemplo 15; podemos definir a **congruência módulo *n*** para qualquer inteiro positivo n. Essa relação binária é sempre uma relação de equivalência. Essa relação de equivalência e as classes de equivalência resultantes podem ser usadas para a aritmética inteira em um computador. Um inteiro é armazenado como uma seqüência de *bits* (0 e 1) em um único local de memória. Cada computador aloca um número fixo de *bits* para um único local de memória (esse número varia dependendo da arquitetura do computador, isto é, de como a memória é projetada). Quanto maior o inteiro, mais *bits* são necessários para representá-lo. Cada máquina, portanto, tem uma limitação sobre o tamanho dos inteiros que pode armazenar. Suponha que $n - 1$ é o tamanho máximo e que x e y são valores inteiros com $0 \leq x \leq n - 1, 0 \leq y \leq n - 1$. Se a soma $x + y$ é maior do que o tamanho máximo, ela não pode ser armazenada. Como alternativa, o computador pode efetuar uma **soma módulo *n*** e encontrar o resto r quando $x + y$ é dividido por n.

A equação

$$x + y = qn + r, 0 \leq r < n$$

simboliza essa divisão, onde q é o quociente e r, o resto. Essa equação pode ser escrita como

$$(x + y) - r = qn$$

que mostra que $(x + y) - r$ é um múltiplo inteiro de n, ou que $(x + y) \equiv r \pmod n$. O inteiro r pode não ser $x + y$, mas está na classe de equivalência $[x + y]$ e, como $0 \leq r < n$, também pertence ao conjunto de inteiros que podem ser armazenados. (O sistema pode dar ou não uma mensagem do tipo *integer overflow* se $x + y$ for grande demais para ser armazenado, e é necessário usar a soma módulo n.) A situação é análoga à do odômetro de um carro, que mostra a quilometragem módulo 100.000; quando a quilometragem chega a 102.758, por exemplo, aparece no odômetro como 2.758.

PROBLEMA PRÁTICO 15

Quais são as classes de equivalência correspondentes à relação de congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$?

PROBLEMA PRÁTICO 16

Se 4 é o maior inteiro que pode ser armazenado em um (micromicro) computador, que valor será armazenado para 3 + 4 se é utilizada a soma módulo 5?

A Tabela 4.1 resume características importantes de ordens parciais e de relações de equivalência.

Ordens Parciais e Relações de Equivalência

Tipo de Relação Binária	Reflexiva	Simétrica	Anti-simétrica	Transitiva	Característica Importante
Ordem Parcial	Sim	Não	Sim	Sim	Predecessores e sucessores
Relação de equivalência	Sim	Sim	Não	Sim	Determina uma partição

Tabela 4.1

Seção 4.1 Revisão

Técnicas

- Testar se um par ordenado pertence a uma relação binária.
- Testar se uma relação binária é reflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.
- Encontrar os fechos reflexivo, simétrico e transitivo de uma relação binária.
- Desenhar os diagramas de Hasse para um conjunto parcialmente ordenado.
- Encontrar os elementos mínimo, minimal, máximo e maximal em um conjunto parcialmente ordenado.
- Encontrar as classes de equivalência associadas a uma relação de equivalência.

Idéias Principais

Uma relação binária em um conjunto S é, formalmente, um subconjunto de $S \times S$; a relação satisfeita pelos pares tem, muitas vezes, uma descrição verbal também.

As operações em relações binárias em um conjunto incluem união, interseção e complementar.

Relações binárias podem ser reflexivas, simétricas, transitivas ou anti-simétricas.

Conjuntos parcialmente ordenados finitos podem ser representados graficamente.

Uma relação de equivalência em um conjunto define classes de equivalência, que podem ser tratadas como entidades. Uma relação de equivalência em um conjunto S determina uma partição de S e reciprocamente.

★**5.** Diga se cada uma das relações em $\mathbb{N}$ a seguir é um para um, um para muitos, muitos para um ou muitos para muitos.

a. $\rho = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (4, 3)\}$
b. $\rho = \{(9, 7), (6, 5), (3, 6), (8, 5)\}$
c. $\rho = \{(12, 5), (8, 4), (6, 3), (7, 12)\}$
d. $\rho = \{(2, 7), (8, 4), (2, 5), (7, 6), (10, 1)\}$

6. Diga se cada uma das relações em S a seguir é um para um, um para muitos, muitos para um ou muitos para muitos.

a. $S = \mathbb{N}, x \rho y \leftrightarrow x = y + 1$.
b. S = conjunto de todas as mulheres em Xarópolis, $x \rho y \leftrightarrow x$ é filha de y.
c. $S = \wp(\{1, 2, 3\}), A \rho B \leftrightarrow |A| = |B|$.
d. $S = \mathbb{R}, x \rho y \leftrightarrow x = 5$.

★**7.** Sejam ρ e σ relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por $x \rho y \leftrightarrow$ "x divide y", $x \sigma y \leftrightarrow 5x \leq y$. Decida quais dos pares ordenados dados satisfazem as relações correspondentes:

a. $\rho \cup \sigma$; (2, 6), (3, 17), (2, 1), (0, 0)
b. $\rho \cap \sigma$; (3, 6), (1, 2), (2, 12)
c. ρ'; (1, 5), (2, 8), (3, 15)
d. σ'; (1, 1), (2, 10), (4, 8)

8. Seja $S = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. Teste se as relações binárias em S dadas a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

a. $\rho = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$
b. $\rho = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$
c. $\rho = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
d. $\rho = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\}$
e. $\rho = \emptyset$

9. Seja S o conjunto de pessoas no Brasil. Teste se as relações binárias em S dadas a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.
a. $x \rho y \leftrightarrow x$ é, pelo menos, tão alto quanto y.
b. $x \rho y \leftrightarrow x$ é mais alto que y.
c. $x \rho y \leftrightarrow x$ tem a mesma altura que y.
d. $x \rho y \leftrightarrow x$ é filho ou filha de y.
e. $x \rho y \leftrightarrow x$ é marido de y.
f. $x \rho y \leftrightarrow x$ é cônjuge de y.
g. $x \rho y \leftrightarrow x$ tem os mesmos pais que y.
h. $x \rho y \leftrightarrow x$ é o irmão de y.

10. Teste se as relações binárias em S dadas a seguir são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

★**a.** $S = \mathbb{Q}$
$x \rho y \leftrightarrow |x| \leq |y|$

★**b.** $S = \mathbb{Z}$
$x \rho y \leftrightarrow x - y$ é um múltiplo inteiro de 3

★**c.** $S = \mathbb{N}$
$x \rho y \leftrightarrow x \cdot y$ é par

d. $S = \mathbb{N}$
$x \rho y \leftrightarrow x$ é ímpar

e. S = conjunto de quadrados no plano, $S_1 \rho S_2 \leftrightarrow$ comprimento do lado de S_1 = comprimento do lado de S_2.
f. S = conjunto de todas as cadeias de caracteres com comprimento finito, $x \rho y \leftrightarrow$ número de caracteres em x = número de caracteres em y.
g. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$x \rho y \leftrightarrow x + y = 5$
h. $S = \wp(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$
$A \rho B \leftrightarrow |A| = |B|$
i. $S = \wp(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$
$A \rho B \leftrightarrow |A| \neq |B|$
j. $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$(x_1, y_1) \rho (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 \leq x_2$ e $y_1 \geq y_2$

11. Quais das relações binárias do Exercício 10 são relações de equivalência? Para cada relação de equivalência, descreva as classes de equivalência associadas.

12. Em cada caso, dê um exemplo de um conjunto S e uma relação binária ρ em S (diferente de todas as dadas nos exemplos e problemas) que satisfaça as condições indicadas.
a. ρ é reflexiva e simétrica, mas não é transitiva.
b. ρ é reflexiva e transitiva, mas não simétrica.
c. ρ não é reflexiva nem simétrica, mas é transitiva.
d. ρ é reflexiva, mas não é simétrica nem transitiva.

13. Sejam ρ e σ relações binárias em um conjunto S.
a. Se ρ e σ são reflexivas, $\rho \cup \sigma$ é reflexiva? E $\rho \cap \sigma$?
b. Se ρ e σ são simétricas, $\rho \cup \sigma$ é simétrica? E $\rho \cap \sigma$?
c. Se ρ e σ são anti-simétricas, $\rho \cup \sigma$ é anti-simétrica? E $\rho \cap \sigma$?
d. Se ρ e σ são transitivas, $\rho \cup \sigma$ é transitiva? E $\rho \cap \sigma$?

14. Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo de cada uma das relações no Exercício 8.

★15. Para cada uma das relações a seguir, descreva em palavras qual deveria ser seu fecho transitivo.
a. S = conjunto de prédios em uma cidade, $x \rho y \leftrightarrow x$ é um ano mais velho do que y.
b. S = conjunto de todos os homens na Bulgária, $x \rho y \leftrightarrow x$ é o pai de y.
c. S = conjunto de todas as cidades nos Estados Unidos, $x \rho y \leftrightarrow$ você pode dirigir de x para y em um dia.

16. Duas propriedades adicionais de uma relação binária ρ são definidas da seguinte maneira:
ρ é *irreflexiva* se, e somente se, $(\forall x)(x \in S \rightarrow (x, x) \notin \rho)$
ρ é *assimétrica* se, e somente se, $(\forall x)(\forall y)(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \rightarrow (y, x) \notin \rho)$
★a. Dê um exemplo de uma relação binária ρ no conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ que não é reflexiva nem irreflexiva.
b. Dê um exemplo de uma relação binária ρ no conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ que não é simétrica nem assimétrica.
c. Prove que, se ρ é uma relação assimétrica em um conjunto S, então ρ é irreflexiva.
d. Prove que, se ρ é uma relação irreflexiva e transitiva em um conjunto S, então ρ é assimétrica.
e. Prove que, se ρ é uma relação não vazia, simétrica e transitiva em um conjunto S, então ρ não é irreflexiva.

17. Faz sentido procurar cada um dos fechos de uma relação indicados a seguir? Por quê?
a. fecho irreflexivo
b. fecho simétrico

18. Seja S um conjunto com n elementos. Quantas relações binárias diferentes podem ser definidas em S? (*Dica*: Lembre-se da definição formal de uma relação binária.)

19. Seja ρ uma relação binária em um conjunto S. Para $A \subseteq S$, defina

$$\#A = \{x \mid x \in S \wedge (\forall y)(y \in A \rightarrow x \rho y)\}$$
$$A\# = \{x \mid x \in S \wedge (\forall y)(y \in A \rightarrow y \rho x)\}$$

a. Prove que, se ρ é simétrica, então $\#A = A\#$.
b. Prove que, se $A \subseteq B$, então $\#B \subseteq \#A$ e $B\# \subseteq A\#$.
c. Prove que $A \subseteq (\#A)\#$
d. Prove que $A \subseteq \#(A\#)$.

20. Desenhe o diagrama de Hasse para as seguintes ordens parciais:
a. $S = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$
★b. $S = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c)\}$
c. $S = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b\}\}$
$A \rho B \leftrightarrow A \subseteq B$

21. Para o Exercício 20, encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimal, máximo e maximal.

22. Seja $(S, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado e seja $A \subseteq S$. Prove que a restrição de $\preccurlyeq$ a A é uma ordem parcial em A.

23. a. Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial "x divide y" no conjunto $\{2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210\}$. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre um subconjunto totalmente ordenado com quatro elementos.
b. Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial "x divide y" no conjunto $\{3, 6, 9, 18, 54, 72, 108, 162\}$. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre os pares de elementos que não estão relacionados.

precedem palavras como "*b*" ou "*aaaaaaab*". Essa lista, portanto, não mostra que A^* é enumerável, já que não podemos chegar, contando dessa forma, a qualquer palavra contendo qualquer caractere diferente de a. No entanto, o conjunto A^* é enumerável. Prove isso ordenando A^* pelo comprimento das palavras (todas as palavras de comprimento 1 precedem as de comprimento 2, e assim por diante) e depois colocando as palavras de mesmo comprimento em ordem alfabética.

★**33.** **a.** Para a relação de equivalência $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$, qual é o conjunto $[a]$? Esse conjunto tem outros nomes?
b. Para a relação de equivalência $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$, qual é o conjunto $[3]$? E o conjunto $[4]$?
c. Para a relação de equivalência congruência módulo 2 no conjunto $\mathbb{Z}$, qual é o conjunto $[1]$?
d. Para a relação de equivalência congruência módulo 5 no conjunto $\mathbb{Z}$, qual é o conjunto $[-3]$?

34. **a.** Dada a partição $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ do conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$, liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência correspondente.
b. Dada a partição $\{a, b, c\}$ e $\{d, e\}$ do conjunto $S = \{a, b, c, d, e\}$, liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência correspondente.

35. Seja S o conjunto de todos os livros na biblioteca. Seja ρ uma relação binária em S definida por $x \rho y \leftrightarrow$ "a cor da capa de x é igual à cor da capa de y". Mostre que ρ é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

★**36.** Seja $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e seja ρ uma relação binária em S definida por $(x, y)\ \rho\ (z, w) \leftrightarrow y = w$. Mostre que ρ é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

37. Seja $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e seja ρ uma relação binária em S definida por $(x, y)\ \rho\ (z, w) \leftrightarrow x + y = z + w$. Mostre que ρ é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

38. Seja $S = \mathbb{N}$ e seja ρ uma relação binária em S definida por $x \rho y \leftrightarrow x^2 - y^2$ é par. Mostre que ρ é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas.

★**39.** Seja S o conjunto de todas as fbfs com n letras de proposição. Seja ρ uma relação binária em S definida por $P \rho Q \leftrightarrow$ "$P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia". Mostre que ρ é uma relação de equivalência em S e descreva as classes de equivalência associadas. (Usamos a notação $P \Leftrightarrow Q$ para $P \rho Q$.)

40. Dadas duas partições π_1 e π_2 em um conjunto S, π_1 é um *refinamento* de π_2 se cada bloco de π_1 é um subconjunto de um bloco de π_2. Mostre que o refinamento é uma ordem parcial no conjunto de todas as partições de S.

Os Exercícios 41 a 50 tratam de partições de um conjunto.

41. Denote por P_n o número total de partições de um conjunto com n elementos, $n \geq 1$.
a. Encontre P_1.
b. Encontre P_3.
c. Encontre P_4.

★**42.** Denote por $S(n, k)$ o número de maneiras de dividir um conjunto com n elementos em uma partição com k blocos.
a. Encontre $S(3, 2)$.
b. Encontre $S(4, 2)$.

43. Prove que

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$$

44. Prove que, para todo $n \geq 1$, $S(n, k)$ satisfaz a relação de recorrência

$$S(n, 1) = 1$$
$$S(n, n) = 1$$
$$S(n + 1, k + 1) = S(n, k) + (k + 1)S(n, k + 1) \text{ para } 1 \leq k \leq n$$

(*Dica*: Use uma demonstração combinatória em vez de uma demonstração por indução. Seja x um elemento fixo, mas arbitrário, de um conjunto com $n + 1$ elementos e separe x. Divida o conjunto dos n elementos restantes. Uma partição do conjunto original pode ser obtida adicionando-se $\{x\}$ como um bloco separado ou colocando-se x em um dos blocos existentes.)

★**45.** Use a fórmula do Exercício 44 para refazer o Exercício 42.

46. Os números $S(n, k)$ são chamados de *números de Stirling*. A relação de recorrência do Exercício 44 é semelhante à fórmula de Pascal, equação (1) da Seção 3.5. Use essa relação para calcular os valores numéricos das cinco primeiras linhas do *triângulo de Stirling*, que começa

$$\begin{array}{ccccc} & & S(1,1) & & \\ & S(2,1) & & S(2,2) & \\ S(3,1) & & S(3,2) & & S(3,3) \\ & & \vdots & & \end{array}$$

★47. Encontre o número de maneiras de se distribuir 4 bolas de gude de cores diferentes em 3 potes de modo que nenhum dos potes fique vazio.

48. Encontre o número de maneiras de se atribuir 5 tarefas diferentes a 3 processadores idênticos de modo que cada processador receba pelo menos uma tarefa.

49. Dê a P_0 o valor 1. Prove que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} C(n-1, k)P_k$$

(*Dica*: Use uma demonstração combinatória em vez de uma demonstração por indução. Seja x um elemento fixo, mas arbitrário, de um conjunto com n elementos. Em cada parcela da soma, $n - k$ representa o tamanho do bloco da partição que contém x.)

50. **a.** Use a fórmula do Exercício 49 para calcular P_1, P_2, P_3 e P_4 e compare suas respostas com as do Exercício 41.

b. Use a fórmula do Exercício 43 e o triângulo de Stirling (Exercício 46) para calcular P_1, P_2, P_3 e P_4.

51. Relações binárias em um conjunto S são pares ordenados de elementos de S. Mais geralmente, uma *relação n-ária em um conjunto S* é um conjunto de n-uplas ordenadas de elementos de S. Decida quais das n-uplas a seguir satisfazem a relação correspondente.

a. ρ uma relação unária em $\mathbb{Z}$, $x \in \rho \leftrightarrow x$ é um quadrado perfeito.

25, 39, 49, 62

b. ρ uma relação ternária em $\mathbb{N}$, $(x, y, z) \in \rho \leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$.

(1, 1, 2), (3, 4, 5), (0, 5, 5), (8, 6, 10)

c. ρ uma relação quaternária em $\mathbb{Z}$, $(x, y, z, w) \in \rho \leftrightarrow y = |x|$ e $w \geq x + z^2$.

$(-4, 4, 2, 0), (5, 5, 1, 5), (6, -6, 6, 45), (-6, 6, 0, -2)$

Seção 4.2 Ordenação Topológica

Se ρ é uma ordem parcial em um conjunto S, então alguns elementos de S são predecessores de outros. Se S é um conjunto de tarefas a serem executadas, a idéia de x como predecessor de y pode ser interpretada literalmente, significando que a tarefa x tem que ser executada antes da tarefa y. Dessa forma, ordens parciais e diagramas de Hasse são maneiras naturais de se representar problemas na ordenação de tarefas.

EXEMPLO 16

Ernesto e seus irmãos têm uma marcenaria no Rio de Janeiro que fabrica cadeiras de balanço com assentos estofados. O processo pode ser dividido em uma série de tarefas, algumas delas tendo outras como pré-requisito. A tabela a seguir mostra as tarefas para se produzir uma cadeira de balanço, os pré-requisitos e o número de horas necessárias para se concluir cada tarefa.

Podemos definir uma ordem parcial no conjunto das tarefas por

$x \preccurlyeq y \leftrightarrow$ tarefa $x =$ tarefa y ou tarefa x é pré-requisito para tarefa y

É fácil ver que essa relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Além disso,

$x \prec y \leftrightarrow$ a tarefa x é pré-requisito para a tarefa y

No diagrama de Hasse para essa ordem parcial os nós são tarefas; adicionaremos a cada nó a informação sobre o tempo necessário para a conclusão da tarefa. Além disso, como é tradicional, orientaremos o diagrama de modo que, se $x \prec y$, então x está à esquerda de y, em vez de embaixo. Logo, o diagrama vai da esquerda para a direita, em vez de baixo para cima. Tais diagramas para a ordenação de tarefas são muitas vezes chamados de diagramas **PERT** (do inglês *program evaluation and review technique*, que significa **técnica para a análise e revisão do programa**). Esses diagramas foram desenvolvidos, inicialmente, para