Operações com Números Reais

Conjuntos: A noção de conjunto em Matemática é praticamente a mesma utilizada na linguagem cotidiana: agrupamento, classe, coleção. Por exemplo: Conjunto das letras maiúsculas do alfabeto.

b) **Elemento:** Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto. Assim:

- V, I, C, H, E são elementos do primeiro conjunto acima.

c) **Pertinência entre elemento e conjunto:** Por exemplo, V é um elemento do conjunto das letras maiúsculas do alfabeto, ou seja, V pertence àquele conjunto. Enquanto que v não pertence. Como se vê são conceitos intuitivos e que se supõe sejam entendidos (evidentes) por todos.

Notação: Conjunto: Representado, de forma geral, por uma letra maiúscula A, B, C,…
Elemento: Por uma letra minúscula a, b, c, x, y, z,…
Pertinência: Sejam A um conjunto e x um elemento. Se x é um elemento de A (ou x pertence a A) indicamos por: $x \in A$. Caso contrário, ou seja, se x não é um elemento de A escrevemos: $x \notin A$.

Representações de Conjuntos

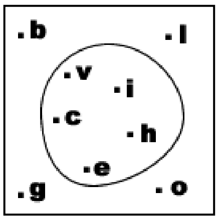
a) **Extensão ou Enumeração:** Quando o conjunto é representado por uma listagem ou enumeração de seus elementos. Devem ser escritos entre chaves e separados por vírgula ou ponto-e-vírgula.

Exemplos: Conjunto dos nomes de meus filhos: {Larissa, Júnior, Thiago, Juliana, Fabiana}.

b) **Propriedade dos Elementos:** Representação em que o conjunto é descrito por uma propriedade característica comum a todos os seus elementos. Simbolicamente: A = {x | x tem a Propriedade P} e lê-se:
A é o conjunto dos elementos x tal que (|) x tem a propriedade P.

Exemplos: A = {x | x é um time de futebol do Campeonato Brasileiro de 2006}.

c) **Diagrama de Euler-Venn:** Um conjunto pode ser representado por meio de uma linha fechada e não entrelaçada, como mostrado na figura abaixo. Os pontos dentro da linha fechada indicam os elementos do conjunto.



Conjunto Unitário e Conjunto Vazio: Embora o conceito intuitivo de conjunto nos remeta à idéia de pluralidade (coleção de objetos), devemos considerar a existência de conjunto com apenas um elemento, chamados de *conjuntos unitários*, e o conjunto sem qualquer elemento, chamado de *conjunto vazio* (Ø). O conjunto vazio é obtido quando descrevemos um conjunto onde a propriedade P é logicamente falsa.

Exemplo de Conjuntos Unitários: Conjunto dos meses do ano com menos de 30 dias: {fevereiro};

Exemplos de Conjuntos Vazios: {x | x > 0 e x < 0} = Ø;

Conjunto Universo: É o conjunto ao qual pertencem todos os elementos envolvidos em um determinado assunto ou estudo, e é simbolizado pela letra **U**. Assim, se procuramos determinar as soluções reais de uma equação do segundo grau, nosso conjunto Universo **U** é R (conjunto dos números reais).
Portanto, é essencial, que ao descrever um conjunto através de uma propriedade P, fixemos o conjunto universo em que estamos trabalhando, escrevendo:

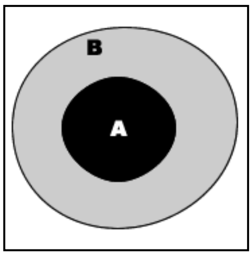
$A = \{x \in U \ / \ x \text{ tem a propriedad e } P\}$ ou $A = \{x \ / \ x \in U \text{ e } x \text{ tem a propriedad e } P\}$.

Igualdade de Conjuntos: Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.
Observações:

1. A título de ilustração: O A invertido na expressão acima significa "para todo";

2. {a, b, c, d} = {d, b, a, c}. O que demonstra que a noção de ordem não interfere na igualdade de conjuntos;

3. É evidente que para A ser diferente de B é suficiente que um elemento de A não pertença a B ou vice-versa: A = {a, b, c} é diferente de B = {a, b, c, d}.
Subconjunto: Um conjunto A é um subconjunto de (está contido em) B se, e somente se, todo elemento **x** pertencente a A também pertence a B: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, onde a notação $A \subset B$ significa "A é subconjunto de B" ou "A está contido em B" ou "A é parte de B". A leitura da notação no sentido inverso é feita como "B contém A". Observe que a abertura do sinal de inclusão fica sempre direcionada para o conjunto "maior". Na forma de diagrama é representado como na figura.



Exemplos: {1; 2; 3} C {1; 2; 3; 4; 5; 6}
{a, b, c} $\not\subset$ {a, c, d, e}, onde $\not\subset$ significa "não está contido", uma vez que o elemento **b** do primeiro conjunto não pertence ao segundo.

Observe que na definição de igualdade de conjuntos está explícito que <u>todo elemento de A é elemento de B</u> e vice-versa, ou seja, que <u>A está contido em B</u> e <u>B está contido em A</u>.

Propriedades da Inclusão: Sejam D, E e F três conjuntos quaisquer. Então valem as seguintes propriedades:

1. $\varnothing \subset D$: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto;
2. $D \subset D$: Todo conjunto é subconjunto de si próprio (propriedade Reflexiva);
3. $D \subset E$ e $E \subset D \Rightarrow D = E$: veja acima (propriedade Anti-Simétrica);
4. $D \subset E$ e $E \subset F \Rightarrow D \subset F$: Se um conjunto é subconjunto de um outro e este é subconjunto de um terceiro, então o primeiro é subconjunto do terceiro (propriedade Transitiva).

Conjunto das Partes: Chama-se Conjunto das Partes de um conjunto E, representado por P(E) o conjunto formado por todos os subconjuntos de E: $P(E) = \{X / X \subset E\}$.

<u>**Exemplo**</u>: Se A = {a, b, c}, então P(A) = {Ø, {a}, {b}, {c}. {a.b}, {a.c}. {b,c}, {a,b,c}}.

Observações:

1. Apesar de colocado na própria definição, os elementos de P(E) são conjuntos;
2. Assim, deve-se ter atenção quanto ao emprego dos símbolos pertence (não pertence) e contido (não contido);
3. No primeiro exemplo acima: {a} pertence a P(A) e {{a}} é um subconjunto de P(A);
4. Se definirmos n(E) como sendo o número de elementos do conjunto E, então $n(P(E)) = 2^{n(E)}$. A propriedade é válida para conjuntos finitos;
5. Exemplos: n(A) = 3 e $n(P(A)) = 8 = 2^3$, n(B) = 2 e $n(P(B)) = 4 = 2^2$ e n(C) = 1 e $n(P(C)) = 2 = 2^1$.

União de conjuntos: Dado dois conjuntos A = {**1, 2, 3, 4, 5**} e B = {**6, 7**}, a união deles seria pegar todos os elementos de A e de B e unir em apenas um conjunto (sem repetir os elementos comuns). O conjunto que irá representar essa união ficará assim: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

A representação da união de conjuntos é feita pelo símbolo U. Então, A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Intersecção de conjuntos: Quando queremos a intersecção de dois conjuntos é o mesmo que dizer que queremos os elementos que eles têm em comum.

Dado dois conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e B = {5, 6, 7}, a intersecção é representada pelo símbolo ∩, então A ∩ B = {5, 6, 7}, pois 5, 6 e 7 são elementos que pertencem aos dois conjuntos.

Se dois conjuntos não tem nenhum elemento comum a intersecção deles será um conjunto vazio.
Dentro da interseção de conjuntos há algumas propriedades:

1) A intersecção de um conjunto por ele mesmo é o próprio conjunto: $A \cap A = A$
2) A propriedade comutatividade na intersecção de dois conjuntos é: $A \cap B = B \cap A$.
3) A propriedade associativa na intersecção de conjuntos é: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Diferença de conjuntos: Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertence a B.

Exemplo: $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \} \Rightarrow A - B = \{ 2, 7, 8 \}$ e $B - A = \{ 0 ,1\}$.

Para quaisquer conjuntos A, B e C são válidas as propriedades:

$A - A = \varnothing$ $\quad A - \varnothing = A$ $\quad \varnothing - A = \varnothing$ $\quad B \subset A \Rightarrow B - A = \varnothing$

Complementar de conjuntos: Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A e indica-se por $C_A B$ ao conjunto $A - B$. **N**ote que $C_A B$ só é definido se B é subconjunto de A.

Exemplo. Considere os conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4\}$. Como $B \subset A \Rightarrow C_A B = A - B = \{1, 2\}$.

Obs. Dado um conjunto P contido no universo U, chama-se complementar de P, simplesmente o $U - P$ cuja representação simbólica pode ser feita por P' ou $\overline{P}$. Ou seja: $\overline{P} = C_U P = \{x / x \in U \text{ e } x \notin P\}$.

Para quaisquer conjuntos A e B, valem as propriedades:

$(A')' = A$; $\quad \varnothing' = U$; $\quad U' = \varnothing$; $\quad A' \cup A = U$; $\quad A' \cap A = \varnothing$; $\quad (A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$.