4

Conjuntos Enumeráveis e Conjuntos Não Enumeráveis

A definição de Dedekind, de conjunto infinito, é usada ma discussão de propriedades de conjuntos infinitos e de conjuntos finitos. É demonstrado, dentre outras coisas, que conjuntos enumeráveis são os menores, em tamanho, dentre os conjuntos infinitos. Propriedades e exemplos, de conjuntos enumeráveis e de conjuntos não enumeráveis, são dadas.

4.1 Conjuntos finitos e infinitos

Na Seção 2.1, Capítulo 1, mencionamos informalmente que um *conjunto finito* é um conjunto que contém apenas uma quantidade finita de elementos; embora este conceito possa ser transformado em uma definição matemática mais precisa, daremos preferência a uma definição alternativa (Definição 4.1), formulada por Dedekind.

Foi enfatizado, na Seção 2.1, do Capítulo 2, que o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, é um *conjunto infinito*. Seja $\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, \dots\}$ o conjunto de todos os números naturais pares. Como foi mostrado ao leitor, no Problema 8, Exercícios 3.6.1, existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto $\mathbb{N}$ e seu subconjunto próprio $\mathbb{N}_p$.

Em outras palavras,

> *Uma parte é tão numerosa quanto o todo.*[1]

Esta propriedade estranha (de um conjunto infinito) incomodou muitos matemáticos, inclusive Georg Cantor. Foi Richard Dedekind (1831–1916)[2] que tornou esta

[1] Uma diferença notável em relação ao axioma de Euclides: "O todo é maior que qualquer de suas partes." (325 a.C.).

[2] Richard Dedekind, um dos maiores matemáticos, nasceu em 6 de outubro de 1831, em Brunswick, Alemanha. De início, os interesses de Dedekind estavam na Física e na Química; ele considerava a Matemática meramente como uma serva das ciências. Mas isto não durou muito; aos dezessete anos,

propriedade a característica definidora de um conjunto infinito. A seguinte definição foi dada por Dedekind em 1888.

Definição 4.1 *Um conjunto X é* infinito *quando possui um subconjunto próprio Y, tal que existe uma correspondência um-a-um entre X e Y. Um conjunto é* finito *se não for infinito.*

Em outras palavras, um conjunto X é infinito se e somente se existe uma injeção $f: X \to X$ tal que $f(X)$ é um subconjunto próprio de X. Logo, o conjunto $\mathbb{N}$ de numeros naturais é um conjunto infinito.

Exemplo 4.1 *O conjunto $\emptyset$ e os conjuntos unitários*[3] *são finitos.*

Solução. *(a) Como o conjunto vazio não possui nenhum subconjunto próprio, o conjunto vazio é finito. (b) Seja $\{a\}$ um conjunto unitário qualquer. Como o único subconjunto próprio de $\{a\}$ é o conjunto vazio, e não há nenhuma correspondência biunívoca entre $\{a\}$ e $\emptyset$, $\{a\}$ é necessariamente finito.*

Teorema 4.1

(a) Todo superconjunto, de um conjunto infinito, é infinito.

(b) Todo subconjunto, de um conjunto finito, é finito.

Demonstração.

(a) Seja X um conjunto infinito é e seja Y um superconjunto de X, i.e., $X \subset Y$. Então, pela Definição 4.1, existe uma injeção $f: X \to X$ tal que $f(X) \neq X$.

Defina uma função $g: Y \to Y$ por

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in X \\ y & \text{se } y \in Y - X \end{cases}$$

Deixamos ao leitor verificar que a função $g: Y \to Y$ é injetora e que $g(Y) \neq Y$. Segue então, pela Definição 4.1, que Y é infinito.

(b) Seja Y um conjunto finito e seja X um subconjunto de Y, i.e., $X \subset Y$. Para demonstrar que X é finito, supomos o contrário, que X é infinito. Então, por (a), o conjunto Y deve ser infinito. Isto é uma contradição. Portanto, o conjunto X é finito.

---

ele havia se mudado, da Física e da Química, para a Matemática, cuja lógica achava mais satisfatória. Aos dezenove anos, matriculou-se na Universidade de Göttingen para estudar Matemática, e recebeu seu grau de doutor três anos depois, sob a orientação de Gauss. Sua contribuição fundamental à Matemática inclui o famoso “corte de Dedekind”, um conceito importante no estudo de números irracionais, que o leitor poderá ter a oportunidade de estudar em um curso de análise real.

[3] Um *conjunto unitário* é um conjunto que consiste de um único elemento.

Teorema 4.2 *Seja $g\colon X \to Y$ uma correspondência um-a-um. Se o conjunto X é infinito, então Y é infinito.*

Demonstração. Como X é infinito, pela Definição 4.1, existe uma injeção $f\colon X \to X$ tal que $f(X) \neq X$. Como $g\colon X \to Y$ é uma correspondência um-a-um, também o é $g^{-1}\colon Y \to X$ (Teorema 3.14, Capítulo 3). Temos agora o seguinte diagrama de injeções:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g^{-1}"'] & Y \\ X \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Conseqüentemente, a composição $h = g \circ f \circ g^{-1}\colon Y \to Y$ de injeções é uma injeção [Problema 7, Exercícios 3.7.1]. Finalmente, temos

$$\begin{aligned} h(Y) &= (g \circ f \circ g^{-1})(Y) = (g \circ f)(g^{-1}(Y)) \\ &= (g \circ f)(X) = g(f(X)) \end{aligned}$$

e $g(f(X)) \neq Y$, porque $f(X) \neq X$.

Logo, $h(Y)$ é um subconjunto próprio de Y, e portanto Y é infinito.

Corolário 4.1 *Seja $g\colon X \to Y$ uma correspondência um-a-um. Se o conjunto X é finito, então Y é finito.*

Demonstração. Exercício.

Teorema 4.3 *Seja X um conjunto infinito e seja $x_0 \in X$. Então $X - \{x_0\}$ é infinito.*

Demonstração. Pela Definição 4.1, existe uma injeção $f\colon X \to X$ tal que $f(X) \subsetneq X$. Há dois casos a serem considerados: (1) $x_0 \in f(X)$, ou (2) $x_0 \in X - f(X)$. Em cada caso, devemos construir uma injeção $gX - \{x_0\}\colon \to X - \{x_0\}$, tal que $g(X - \{x_0\}) \neq X - \{x_0\}$.

Caso 1. $x_0 \in f(X)$.

Existe um elemento x_1 em X tal que $f(x_1) = x_0$. Uma função

$$g\colon X - \{x_0\} \to X - \{x_0\}$$

pode agora ser definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_1 \\ x_2 & \text{se } x = x_1 \in X - \{x_0\} \end{cases}$$

em que x_2 é um elemento do conjunto não vazio $X-f(X)$, arbitrariamente fixado. Segue que $gX-\{x_0\}\colon\ \to X-\{x_0\}$ é injetora e que $g(X-\{x_0\}) = f(X-\{x_0,x_1\})\cup\{x_2\} \neq X-\{x_0\}$. Portanto, $X-\{x_0\}$ é infinito neste caso.

Caso 2. $x_0 \in X - f(X)$.

Defina uma função $g\colon X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$ por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X-\{x_0\}$. Como $f\colon X \to X$ é injetora, também o é $g\colon X-\{x_0\} \to X-\{x_0\}$. Finalmente,

$$g(X-\{x_0\}) = f(X) - \{f(x_0)\} \neq X - \{x_0\}$$

Portanto, em qualquer caso, $X-\{x_0\}$ é infinito.

No que segue, denotaremos por $\mathbb{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os números naturais de 1 até k; isto é, $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Como uma aplicação do Teorema 4.3, mostramos no seguinte exemplo que cada $\mathbb{N}_k$ é finito.

Exemplo 4.2 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{N}_k$ é finito.*

Demonstração. *Demonstraremos isto pelo princípio de indução matemática. Pelo Exemplo 4.1, a afirmação é verdadeira para $k=1$. Agora, suponha que o conjunto $\mathbb{N}_k$ é finito para algum número natural k. Considere o conjunto $N_{k+1} = \mathbb{N}_k \cup \{k+1\}$. Se N_{k+1} for infinito, então, pelo Teorema 4.3, $N_{k+1} - \{k+1\} = \mathbb{N}_k$ será um conjunto infinito, o que contradiz a hipótese de indução. Logo, se N_k é finito, então N_{k+1} é finito. Portanto, pelo princípio de indução matemática, o conjunto N_k é finito para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Na verdade, existe uma conexão íntima entre um conjunto finito não vazio e um conjunto N_k.

Teorema 4.4 *Um conjunto X é finito se e somente se $X = \emptyset$ ou X está em correspondência um-a-um com algum N_k.*

Demonstração. Se X é vazio ou está em correspondência um-a-um com algum $\mathbb{N}_k$, então, pelo Corolário do Teorema 4.2, e Exemplos 4.1 e 4.2, o conjunto X é finito.

Para mostrar a recíproca, mostramos, equivalentemente, sua contrapositiva: Se $X \neq \emptyset$ e X não está em correspondência um-a-um com nenhum $\mathbb{N}_k$, então X é infinito.

Podemos tomar um elemento x_1 de X, e ter novamente $X-\{x_1\}$ não vazio; pois, caso contrário, teríamos $X = \{x_1\}$ em correspondência com $\mathbb{N}_1$, uma contradição com a hipótese sobre X.

Continuando desta maneira, suponhamos que escolhemos elementos x_1, x_2, ..., x_k de X. Então $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é não vazio; caso contrário, teremos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ em correspondência um-a-um com $\mathbb{N}_k$, uma contradição com nossa hipótese sobre X. Logo, podemos sempre escolher um elemento x_{k+1} de $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Então, por indução matemática, para *todo* número natural n, existe um subconjunto próprio $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de X. Denotemos o conjunto dos x_n's escolhidos por Y.[4] Então a função $f\colon Y \to Y - \{x_1\}$, definida por $f(x_k) = x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, estabelece uma correspondência um-a-um entre Y e seu subconjunto próprio $Y - \{x_1\}$. Portanto, pela Definição 4.1, Y é infinito e portanto, pelo Teorema 4.1, X é infinito.

Mencionaremos aqui que o Teorema 4.4 sugere uma definição alternativa de conjuntos finitos e infinitos. Podemos definir um conjunto como sendo finito se e somente se ele é vazio ou está em correspondência um-a-um com algum $\mathbb{N}_k$, e sendo infinito se e somente se não é finito. Desta definição alternativa, nossa Definição 4.1 pode ser demonstrada como um teorema. Entretanto, isto requereria mais ou menos o mesmo montante de trabalho requerido pela nossa presente abordagem.

4.1.1 Exercícios

1. Complete a demonstração do Teorema 1.
2. Seja $g\colon X \to Y$ uma correspondência um-a-um. Demonstre que se X é finito, então Y é finito.
3. Demonstre que os conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são infinitos.
4. Demonstre que se A é um conjunto infinito, então $A \times A$ também o é.
5. Demonstre que se A e B são conjuntos infinitos, então $A \cup B$ é um conjunto infinito.
6. Demonstre que a reunião de um número finito de conjuntos finitos é um conjunto finito.
7. Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \cup B$ é infinito. Demonstre que ao menos um dos dois conjuntos A e B é infinito.
8. Demonstre a seguinte generalização do Teorema 4.3: Se Y é um subconjunto finito de um conjunto infinito X, então $X - Y$ é infinito.

4.2 Equipotência de conjuntos

Dois conjuntos finitos X tem o mesmo número de elementos se e somente se existe uma correspondência um-a-um $f\colon X \to Y$. Embora a frase "mesmo número de elementos" não se aplique aqui se X e Y são infinitos, parece natural pensar que dois conjunto infinitos, que estejam em correspondência um-a-um, tem o mesmo tamanho. Formalizaremos esta intuição como segue:

Definição 4.2 *Dois conjuntos X e Y dizem-se* equipotentes, *fato denotado por $X \sim Y$, quando existe uma correspondência um-a-um $f\colon X \to Y$.*

[4] Aqui os autores usaram implicitamente o "axioma da escolha", um axioma importante a ser discutido no Capítulo 6. Uma forma do axioma da escolha pode ser enunciada como: "Seja $\mathcal{P}$ um conjunto não vazio, de subconjuntos não vazios de um conjunto dado X. Então existe um conjunto $R \subset X$ tal que para todo $C \in \mathcal{P}$, $C \cap R$ é um conjunto unitário". Este axioma será usado em todas as partes deste livro, sem ser explicitamente mencionado.

Obviamente, todo conjunto é equipotente a si mesmo. Como a inversa de uma correspondência um-a-um é uma correspondência um-a-um (Teorema 3.14), $X \sim Y$ se e somente se $Y \sim X$. *Convencionaremos que o símbolo* $f\colon X \sim Y$ *significará* "$f\colon X \to Y$ é uma correspondência um-a-um e portanto $X \sim Y$". Usando esta notação conveniente, a primeira metade do Problema 9, Exercícios 3.7.1 pode ser re-enunciado como: Se $f\colon X \sim Y$ e $g\colon Y \sim Z$, então $g \circ f\colon X \sim Z$. Acabamos de demonstrar então o seguinte teorema.

Teorema 4.5 *Seja* $\mathcal{I}$ *um conjunto de conjuntos e seja* $\mathcal{R}$ *uma relação em* $\mathcal{I}$ *dada por:* $X \,\mathcal{R}\, Y$ *se e somente se* X *e* Y *são membros de* $\mathcal{I}$ *e* $X \sim Y$*. Então* $\mathcal{R}$ *é uma relação de equivalência em* $\mathcal{I}$*.*

No seguinte exemplo, os símbolos $]0,1[$ e $]-1,1[$ denotam intervalos de números reais.

Exemplo 4.3

(a) $]0,1[\sim]-1,1[$.
(b) $]-1,1[\sim \mathbb{R}$, *e* $\mathbb{R} \sim]0,1[$.

Solução. *(a) A função* $f\colon\ ]0,1[\to]-1,1[$*, dada por* $f(x) = 2x - 1$*, é uma correspondência um-a-um. Portanto,* $]0,1[\sim]-1,1[$*.*

(b) A função trigonométrica $g\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$*, dada por* $g(x) = \mathrm{tg}(\pi x/2)$*, é uma correspondência um-a-um; portanto* $]-1,1[\sim \mathbb{R}$*. O leitor deveria verificar esta asserção esboçando um gráfico de* $g(x) = \mathrm{tg}(\pi x/2)$*. Uma demonstração rigorosa pode ser obtida verificando-se as seguintes duas observações:*
(1) $g\colon\ ]-1,1[\to \mathbb{R}$ *é contínua, e ilimitada, tanto superiormente como inferiormente.*
(2) $g'(x) = (\pi/2)\sec^2(\pi x/2) > 0$*,* $\forall x$*,* $\Rightarrow$ g *é estritamente crescente.*

Como a "relação" de equipotência é transitiva,[5] $]0,1[\sim]-1,1[$ *e* $]-1,1[\sim \mathbb{R}$ *implicam* $]0,1[\sim \mathbb{R}$*.*

Teorema 4.6 *Sejam* X*,* Y*,* Z *e* W *conjuntos com* $X \cap Z = \emptyset = Y \cap W$*, e sejam* $f\colon X \sim Y$ *e* $g\colon Z \sim W$*. Então* $f \cup g\colon (X \cup Z) \sim (Y \cup W)$*.*

Demonstração. Como $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ são funções com $X \cap Z = \emptyset$, pelo Teorema 3.8, do Capítulo 3, $f \cup g\colon X \cup Z \to Y \cup W$ é uma função. Deixaremos ao leitor a demonstração de que esta última função é uma correspondência um-a-um.

---

[5] Falando estritamente, "$\sim$" não é uma relação de equivalência, porque seu domínio não é um conjunto (veja Teorema 2.10 do Capítulo 2). Mas podemos chamá-la uma relação se considerarmo-la definida em qualquer conjunto de conjuntos $\mathcal{I}$ (Teorema 4.5).

Teorema 4.7 *Sejam X, Y, Z e W conjuntos tais que $X \sim Y$ e $Z \sim W$. Então $X \times Z \sim Y \times W$.*

Demonstração. Sejam $f\colon X \sim Y$ e $g\colon Z \sim W$. Definamos a função $f \times g\colon X \times Z \to Y \times W$, por $(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$ para todo $(x, z) \in X \times Z$. Pedimos ao leitor demonstrar que esta última função é uma correspondência um-a-um.

Examinando os vários conjuntos finitos $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, conforme k cresce, e notando que os conjuntos infinitos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ (veja Problema 3, Exercícios 4.1.1) são superconjuntos de $\mathbb{N}$, parece que o "menor" conjunto infinito é o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais, ou qualquer conjunto que seja equipotente a $\mathbb{N}$. Aprenderemos em breve, na Seção 4.4, que nem todos os conjuntos infinitos são equipotentes a $\mathbb{N}$.

Definição 4.3 *Um conjunto X é dito ser* enumerável *quando $X \sim \mathbb{N}$. Um conjunto* contável *é um conjunto finito ou enumerável.*

Seja X um conjunto enumerável. Então existe uma correspondência biunívoca $f\colon X \sim \mathbb{N}$. Se denotamos

$$f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \ldots, f(k) = x_k, \ldots$$

então X pode ser denotado alternativamente por $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots\}$; as reticências ($\ldots$) são usadas para indicar que os elementos são etiquetados em uma ordem definida, conforme indicado pelos índices. Uma explicação para o termo "contável" está agora em pauta. Para um conjunto finito, é teoricamente possível contar seus elementos e o termo é adequado. Muito embora a contagem de fato de todos os elementos de um conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots,\}$ seja impossível, o conjunto X está em correspondência biunívoca com os números de contagem, os números naturais.

Teorema 4.8 *Todo subconjunto infinito, de um conjunto enumerável, é enumerável.*

Demonstração. Seja Y um subconjunto infinito de um conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Seja n_1 o menor índice para o qual $x_{n_1} \in Y$, e seja n_2 o menor índice para o qual $x_{n_2} \in Y - x_{n_1}$. Tendo definido $x_{n_{k-1}}$, seja n_k o menor índice tal que $x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}\}$. Um tal n_k sempre existe pois Y é infinito, o que garante que $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}\} \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Deste modo, construímos uma correspondência um-a-um $f\colon Y \sim \mathbb{N}$, sendo $f(k) = x_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, Y é enumerável.

Uma demonstração mais curta, porém menos intuitiva, do Teorema 4.8, é indicada no Problema 10 ao final desta seção. O seguinte corolário é uma conseqüência imediata da Definição 4.3 e do Teorema 4.8.

Corolário 4.2 *Todo subconjunto de um conjunto contável é contável.*

Mais exemplos e propriedades de conjuntos enumeráveis são dados na próxima seção.

4.2.1 Exercícios

1. Complete a demonstração do Teorema 6.
2. Complete a demonstração do Teorema 7.
3. Demonstre que se X e Y são dois conjuntos, então $X \times Y \sim Y \times X$.
4. Demonstre que se $(X - Y) \sim (Y - X)$ então $X \sim Y$.
5. Demonstre a seguinte generalização do Teorema 4.6: Seja $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ e $\{Y_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ duas famílias de conjuntos disjuntos, tal que $X_\gamma \sim Y_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Então $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \sim \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$.
6. Demonstre que se X é um conjunto enumerável e Y é um subconjunto finito de X, então $X - Y$ é enumerável. [Compare com o Problema 8, Exercícios 4.1.1.]
7. Demonstre que se X é um conjunto enumerável e Y é um conjunto finito, então $X \cup Y$ é enumerável.
8. Demonstre que o conjunto $\mathbb{N}_p$, de todos os números naturais pares, e o conjunto $\mathbb{N}_i$, de todos os números naturais ímpares, são enumeráveis.
9. Seja A um conjunto não vazio, e seja 2^A o conjunto das funções de A no conjunto $\{0, 1\}$. Demonstre que $\wp(A) \sim 2^A$.
10. Sejam X um conjunto enumerável e Y um subconjunto infinito de X. Seja $g\colon X \sim \mathbb{N}$, e seja $h\colon Y \to \mathbb{N}$ a função definida por

$$h(y) = \text{ número de elementos em } \{1, 2, 3, \ldots, g(y)\} \cap g(Y)$$

Demonstre que h é uma correspondência um-a-um e que portanto Y é enumerável.

4.3 Exemplos e propriedades de conjuntos enumeráveis

O conjunto $\mathbb{N}_p$ de todos os números naturais pares e o conjunto $\mathbb{N}_i$ de todos os números naturais ímpares são enumeráveis (Problema 8, Exercícios 4.2.1). Como a reunião $\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i (= \mathbb{N})$ destes dois conjuntos enumeráveis é enumerável, o próximo teorema deveria ser previsível.

Teorema 4.9 *A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis. Mostraremos que $A \cup B$ é enumerável nos dois casos seguintes:

Caso 1. $A \cap B = \emptyset$.

Como $A \sim \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_p$, temos $A \sim \mathbb{N}_p$. De modo semelhante, temos $B \sim \mathbb{N}_i$.

Conseqüentemente, pelo Teorema 4.6, temos $(A \cup B) \sim (\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_i) = \mathbb{N}$, o que demonstra que $A \cup B$ é enumerável.

Caso 2. $A \cap B \neq \emptyset$.

Seja $C = B - A$. Então $A \cup C = A \cup B$ e $A \cap C = \emptyset$; o conjunto $C \subset B$ é ou finito ou enumerável [Corolário 4.2 do Teorema 4.8]. Se C é finito, pelo Problema 7 dos Exercícios 4.2.1, $A \cup C$ é enumerável, e se C é enumerável, então $A \cup C$ é enumerável, pelo caso 1 acima.

Portanto, o conjunto $A \cup B$ é enumerável.

Corolário 4.3 *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ é enumerável.*

Demonstração. A demonstração é deixada ao leitor, como um exercício.

Pedimos ao leitor verificar o próximo exemplo.

Exemplo 4.4 *O conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os inteiros é enumerável.*

Teorema 4.10 *O conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Considere a função $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(j,k) = 2^j 3^k$$

para todo $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Esta função é injetora, de modo que

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}.$$

Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é infinito, $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ também o é. Pelo Teorema 4.8, $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ é enumerável e portanto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Corolário 4.4 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja A_k um conjunto enumerável satisfazendo $A_j \cap A_k = \emptyset$ para todo $j \neq k$. Então $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ é enumerável.*[6]

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $f_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{k\}$ uma função dada por $f_k(j) = (j,k)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Claramente, cada $f_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{k\}$ é uma correspondência um-a-um. Ou seja, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$. Como $A_k \sim \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \{k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos $A_k \sim \mathbb{N} \times \{k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue então, do Problema 5 dos Exercícios 4.2.1, que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \sim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$. Mas o conjunto $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{k\}$ é igual ao conjunto enumerável $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Portanto, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ é enumerável.

---

[6] Este resultado é verdadeiro sem a hipótese "$A_k \cap A_j = \emptyset$ para todo $j \neq k$." Veja Problema 7.

Exemplo 4.5 *O conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais é enumerável.*

Demonstração. *Representaremos cada número racional de maneira única como p/q, sendo $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e o máximo divisor comum de p e q igual a 1. Seja $\mathbb{Q}_+$ o conjunto de tais elementos com $p/q > 0$, e seja $\mathbb{Q}_- = \{-p/q \mid p/q \in \mathbb{Q}_+\}$. Então $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$. É evidente que $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$. Portanto, para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável, é suficiente mostrar que $\mathbb{Q}_+$ é enumerável. Para este propósito, consideramos a função $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $f(p/q) = (p, q)$. Como esta função é injetora, temos $\mathbb{Q}_+ \sim f(\mathbb{Q}_+) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Como $\mathbb{Q}_+$, como um superconjunto de $\mathbb{N}$, é infinito, $f(\mathbb{Q}_+)$ é um subconjunto infinito do conjunto enumerável $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Portanto, $f(\mathbb{Q}_+)$ é enumerável e conseqüentemente $\mathbb{Q}_+$ é enumerável. A demonstração está agora completa.*

O próximo teorema indica que os conjunto enumeráveis são, em um certo sentido, os menores em "tamanho" dentre os conjuntos infinitos.

Teorema 4.11 *Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável.*

Demonstração. Seja X um conjunto infinito qualquer. Então $X \neq \emptyset$, de modo que podemos escolher um elemento, digamos x_1, no conjunto X. A seguir, seja x_2 um elemento em $X - \{x_1\}$. De modo semelhante, escolha um elemento x_3 do conjunto não vazio $X - \{x_1, x_2\}$. Tendo assim definido x_{k-1}, escolhemos um elemento x_k no conjunto $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$. Tal x_k existe para cada $k \in \mathbb{N}$, porque X é infinito, o que garante que $X - \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O conjunto $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto enumerável de X, e a demonstração está completa.

4.3.1 Exercícios

1. Demonstre a asserção do Exemplo 4.3: O conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os inteiros é enumerável.
2. Demonstre o Corolário 4.3 do Teorema 4.9.
3. Demonstre que a união de um número finito de conjuntos contáveis é contável.
4. Demonstre que se A e B são conjuntos enumeráveis, então também o é $A \times B$. Em particular, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ são enumeráveis.
5. Encontre uma função injetora $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ e dê uma demonstração alternativa para o Exemplo 4.5.
6. Demonstre que o conjunto dos círculos no plano cartesiano, tendo raios racionais e centros em pontos com ambas as coordenadas racionais, é enumerável.
7. Demonstre que se para cada $k \in \mathbb{N}$, B_k é um conjunto enumerável, então $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ é enumerável.

4.4 Conjuntos não enumeráveis

Todos os conjuntos infinitos que vimos até o momento são enumeráveis. Isto pode levar o leitor a indagar se todos os conjuntos infinitos são enumeráveis. É comumente pensado que Georg Cantor tentou demonstrar que todo conjunto infinito é enumerável, quando iniciou seu desenvolvimento da teoria dos conjuntos. Entretanto, êle surpreendeu-se demonstrando que existem conjuntos não enumeráveis.

Teorema 4.12 *O intervalo aberto* $]0,1[$ *de números reais é um conjunto não enumerável.*

Demonstração. Expressemos primeiramente cada número x, $x < 0 < 1$, como uma expansão decimal na forma $0, x_1x_2x_3\ldots$, com $x_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ para cada n. Por exemplo, $1/3 = 0,333\ldots$, $\sqrt{2}/2 = 0,707106\ldots$. De modo a ter uma única expressão, para aqueles números com uma expansão decimal finita, tais como $1/4 = 0,25$, concordaremos em subtrair 1 do último dígito e acrescentar 9's, de modo que $1/4 = 0,24999\ldots$, e não $0,25000\ldots$. Sob este acordo, dois números no intervalo $]0,1[$ são iguais se e somente se os dígitos correspondentes, de suas expansões decimais, são idênticos. Assim, se dois tais números, $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$ e $y = 0, y_1y_2y_3\ldots$ tem uma casa decimal, digamos a k-ésima casa decimal, tal que $x_k \neq y_k$, então $x \neq y$. Este é um ponto crucial sobre o qual nossa demonstração se apoia.

Agora, suponha que o conjunto $]0,1[$ é enumerável. Então existe uma correspondência um-a-um $f\colon \mathbb{N} \sim]0,1[$. Então podemos listar todos os elementos de $]0,1[$ como segue:

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(1) &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ f(2) &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ f(3) &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\vdots \\ f(k) &= 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

em que cada $a_{jk} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Construiremos um número $z \in]0,1[$, que não pode ser encontrado na lista acima de $f(k)$'s. Esta contradição implicará que nossa suposição prévia de que $]0,1[$ é enumerável estava errada, e que portanto $]0,1[$ é não enumerável. Seja $z = 0, z_1z_2z_3\ldots$ definido por $z_k = 5$, se $a_{kk} \neq 5$, e $z_k = 1$ se $a_{kk} = 5$, para cada $k \in \mathbb{N}$. O número $z = 0, z_1z_2z_3\ldots$ claramente satisfaz $0 < z < 1$; mas $z \neq f(1)$ pois $z_1 \neq a_{11}$, $z \neq f(2)$ pois $z_2 \neq a_{22}$, $\ldots$, e de modo geral $z \neq f(k)$ pois $z_k \neq a_{kk}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $z \notin f(\mathbb{N}) =]0,1[$. Temos então a contradição prometida, e a demonstração está completa.

Corolário 4.5 *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Fizemos a demonstração, no Exemplo 4.3(b), de que $\mathbb{R} \sim]0,1[$. Agora, $]0,1[$ é não enumerável; portanto seu conjunto equipotente $\mathbb{R}$ também é não enumerável (veja Problema 1).

Exemplo 4.6 *O conjunto de todos os números irracionais é não enumerável.*

Demonstração. *Demonstramos, no Exemplo 4.5, que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável. O conjunto dos números irracionais é, por definição, o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. É fácil ver que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é um conjunto infinito. Para mostrar que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável, supomos o contrário, que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é enumerável. Segue então que a união $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ é enumerável (Teorema 4.9). Isto contradiz o corolário do Teorema 12. Portanto o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é não enumerável.*

Notas. (1) O método de demonstração usado no Teorema 4.12 é chamado método diagonal de Cantor, porque foi criado por Cantor e a construção do número chave $z = 0, z_1z_2z_3\ldots$, na demonstração, é baseada nos dígitos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ na diagonal principal da tabela $(*)$ de dígitos. Esta demonstração, embora possa não ser apreciada pelo iniciante, revela a engenhosidade de Cantor.

(2) A existência de conjuntos não enumeráveis mostra que existem classes de conjunto infinitos. Na verdade, como o leitor verá no próximo capítulo, existe uma abundância de "classes de equipotência" de conjunto infinitos.

4.4.1 Exercícios

1. Sejam A e B dois conjuntos equipotentes. Demonstre que se A é não enumerável, então B é não enumerável.
2. Demonstre que todo superconjunto de um conjunto não enumerável é não enumerável.
3. Usando o resultado do Problema 2, acima, dê uma demonstração alternativa do corolário do Teorema 4.12.
4. Demonstre que o conjunto dos números irracionais entre 0 e 1 é não enumerável.