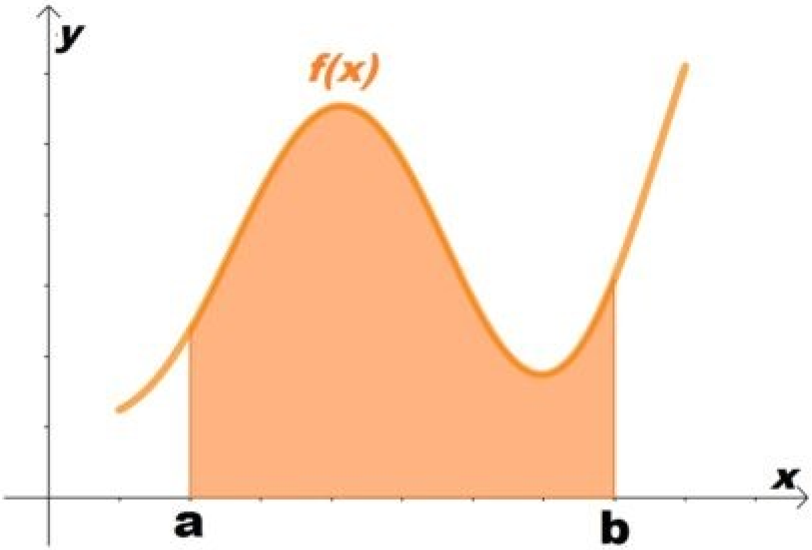
Cálculo da área entre curvas

Possivelmente o **Cálculo da área entre curvas** seja a aplicação mais comum das integrais. Esta aplicação decorre da própria ideia de integral, que é a área de uma região plana sob uma curva. Assim, partiremos do conceito de integral como área e expandiremos para área entre curvas.

Área sob uma curva

Seja A a região de um plano delimitada pela curva contínua $f(x)$, o eixo das abscissas ($y=0$) e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.



Como já vimos, esta área A é dada pela integral

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

.

Calculo da área entre curvas

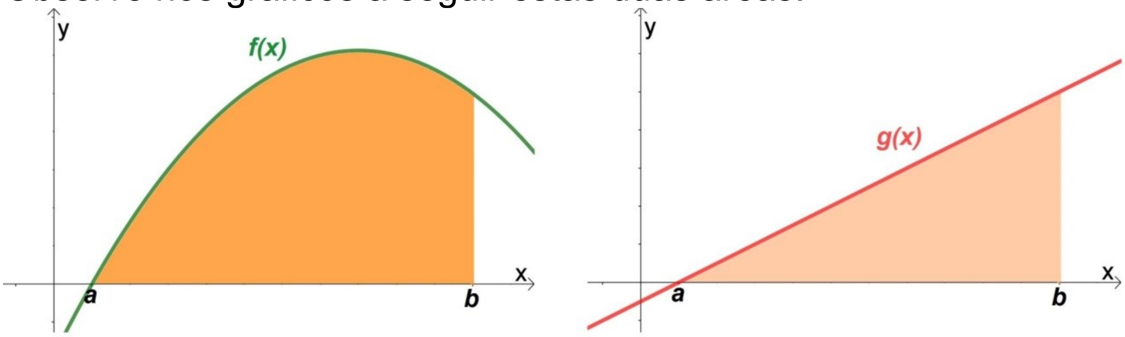
Seguindo a mesma lógica da área sob uma curva, podemos construir a fórmula para calcular a área entre curvas. Assim, definimos duas curvas continuas $f(x)$ e $g(x)$, onde $f(x)$ seja maior ou igual de $g(x)$ em todo intervalo $[a,b]$. Ao calcular a área sob cada uma das curvas temos

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx$$

e

$$A_2 = \int_a^b g(x)dx.$$

Observe nos gráficos a seguir estas duas áreas.

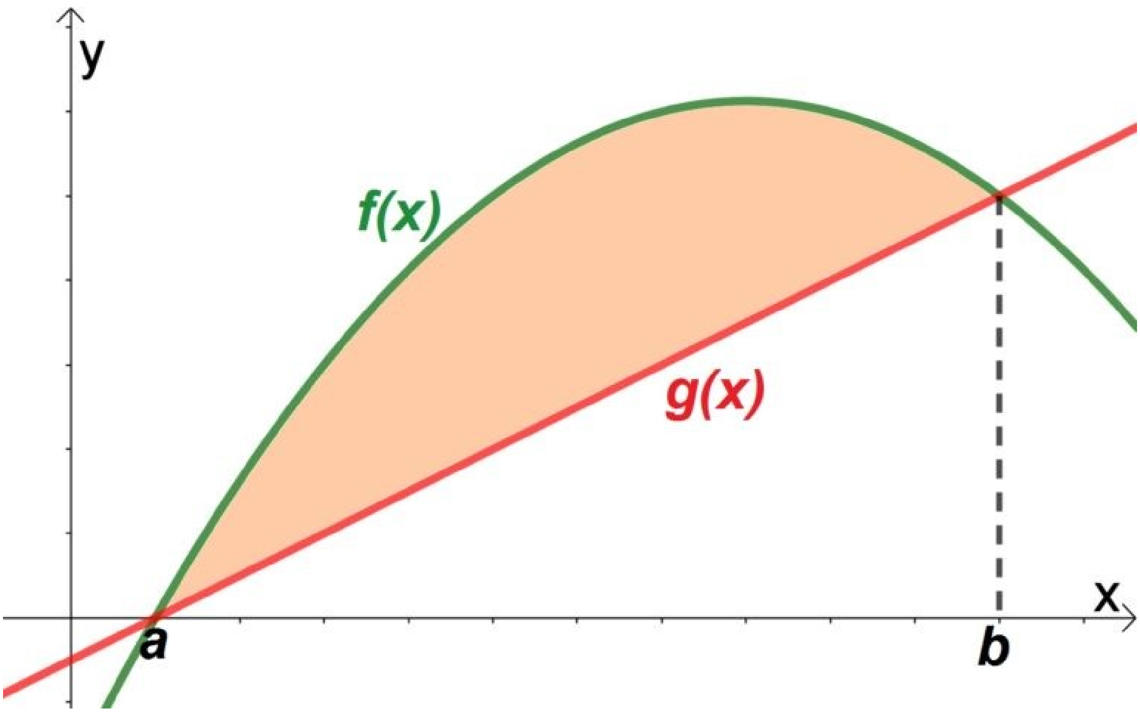


Assim, se queremos calcular a área entre a curva f(x) e a curva g(x), devemos subtrair de A_1 a área A_2. Dessa forma, temos

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Conforme as **propriedades das integrais**, a subtração de integrais definidas no mesmo intervalo é igual a integral da subtração, assim

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx.$$



Exemplo:

Calcule a área entre as curvas $f(x) = -\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17)$ **e** $g(x) = \frac{x+1}{2}$ **.**

O primeiro passo é encontrar os pontos de intersecção e avaliar onde f(x) é maior do que g(x) e vice-versa. Desse modo, os pontos de intersecção são onde f(x)=g(x). Logo,

$$-\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17) = \frac{x+1}{2}$$

assim,

$$x^2 - 13x + 22 = 0.$$

Desse modo, ao encontrar as raízes obtemos x=2 e x=11. Assim, concluímos que a região desejada fica entre estes dois valores de x. Em seguida, devemos identificar qual das funções é maior neste intervalo. Para isto avaliamos as duas funções em um ponto qualquer entre x=2 e x=11. Assim,

$$f(5) = -\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17) = \frac{24}{5}$$

$$g(5) = \frac{x+1}{2} = 3$$

Portanto, no intervalo indicado f(x) é maior do que g(x). Assim sendo, devemos apenas aplicar a integral

$$A = \int_2^{11} f(x) - g(x)dx = \int_2^{11} -\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17) - \frac{x+1}{2}dx =$$

$$\int_2^{11} -\frac{x^2}{10} + \frac{13x}{10} - \frac{22}{10}dx.$$

Resolvendo a integral,

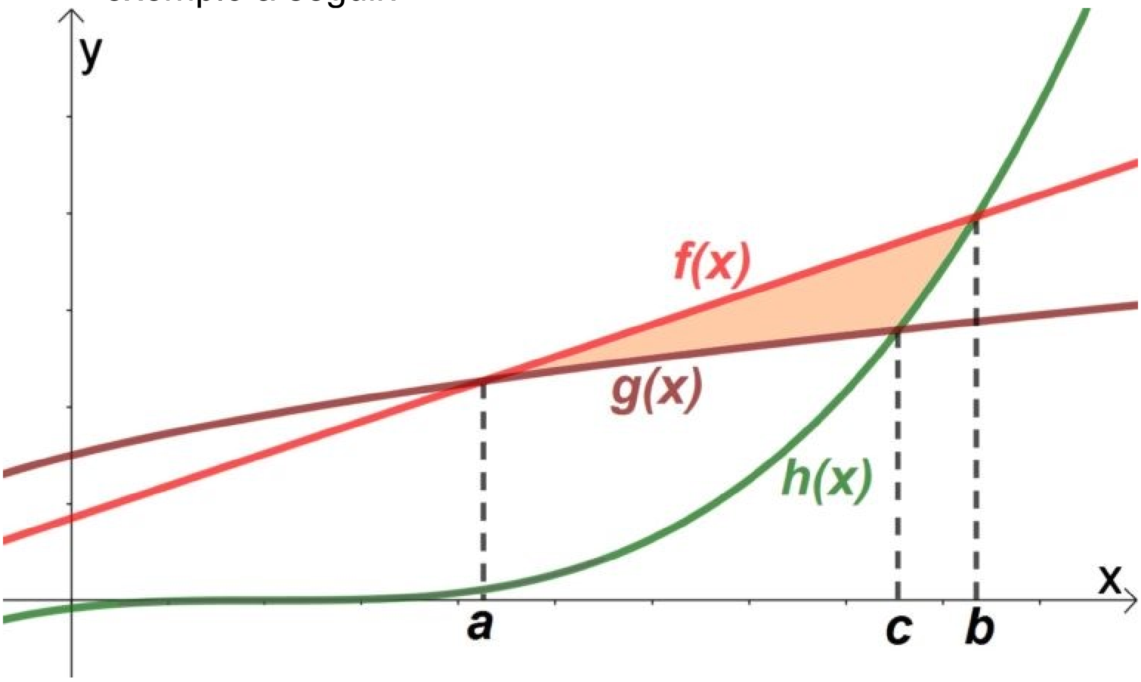
$$\left(-\frac{x^3}{30} + \frac{13x^2}{20} - \frac{22x}{10}\right)\Bigg|_2^{11} = \frac{243}{20}.$$

Algumas observações:

I. Não é necessário que ***f(a)=g(a)*** e ***f(b)=g(b)*** sejam iguais.

II. Caso ***f(x)*** não seja maior que ***g(x)*** em todo intervalo de integração, devemos separar os intervalos.

III. A área desejada pode estar entre mais do que duas curvas, assim devemos analisar os pontos de intersecção. Veja exemplo a seguir:



A área entre as curvas ***f(x), g(x)*** e ***h(x)*** é dada por

$$A = \int_a^c f(x) - g(x)dx + \int_c^b f(x) - h(x)dx$$