Integrais definidas

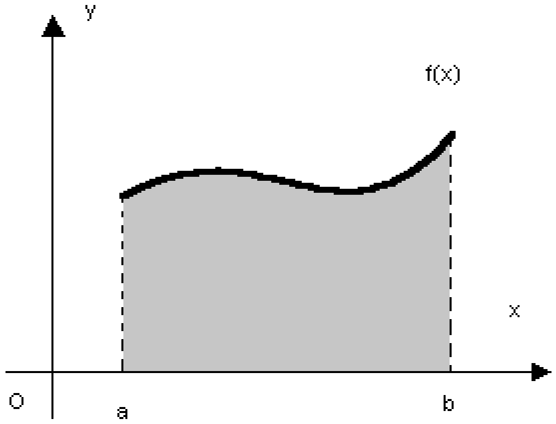
Seja uma função f(x) definida e contínua num intervalo real [a, b]. A integral definida de f(x), de **a** até **b**, é um número real, e é indicada pelo símbolo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

onde:

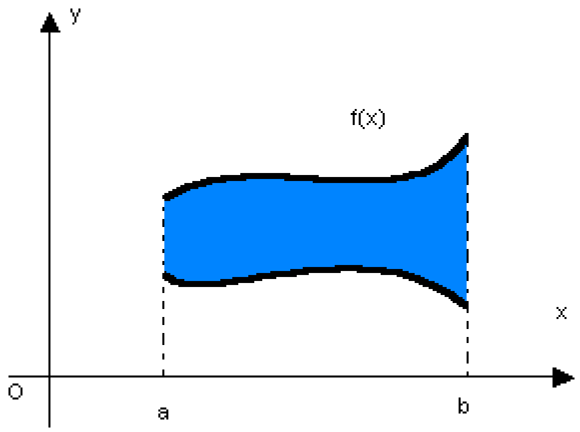
- **a** é o limite inferior de integração;
- **b** é o limite superior de integração;
- **f(x)** é o integrando.

Se $f(x) \geq 0, \int_a^b \mathrm{f(x)\ d(x)}$ representa a área entre o eixo **x** e a curva f(x), para $a \leq x \leq b$:



$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d(x)}}$$

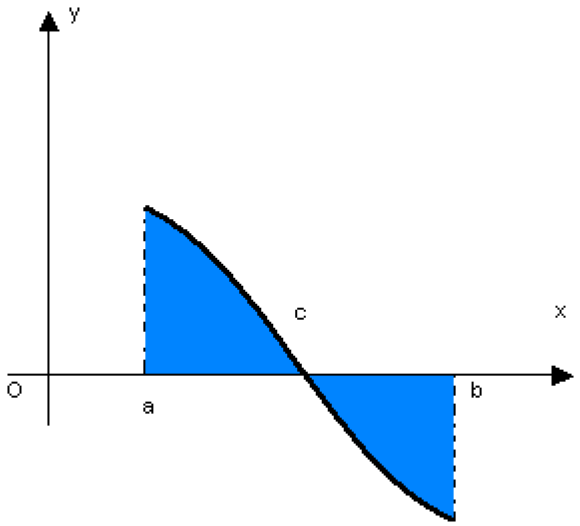
Se $f(x) \geq g(x), \int_a^b \left[\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}\right] \mathrm{d(x)}$ representa a área entre as curvas, para $a \leq x \leq b$:



$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, d(x)}$$

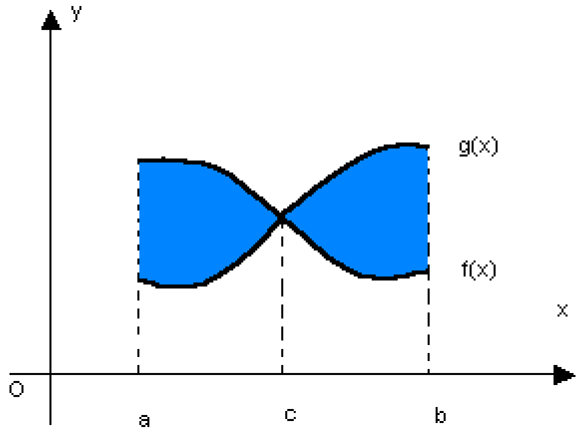
Integrais definidas (continuação)

Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq c$ e $f(x) \leq 0$ para $c \leq x \leq b$, então a área entre $f(x)$ e o eixo x, para $a \leq x \leq b$, é dada por:



$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\, d(x) + \int_a^b [-f(x)]\, d(x)}$$

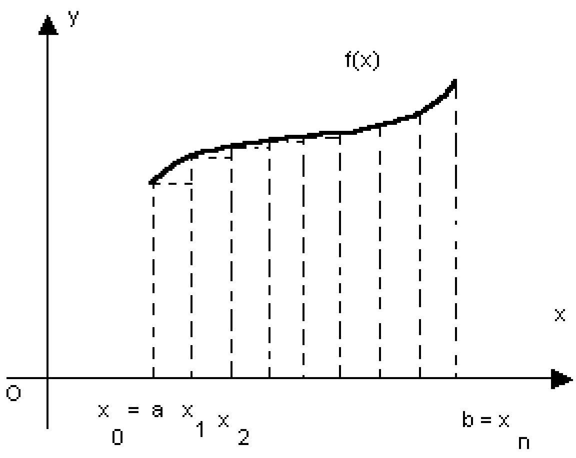
Se $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq c$, e $f(x) \leq g(x)$, $c \leq x \leq b$, então a área entre f e g, $a \leq x \leq b$, é dada por:



$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] d(x) + \int_h^b \left[g(x) - f(x) \right] d(x)$$

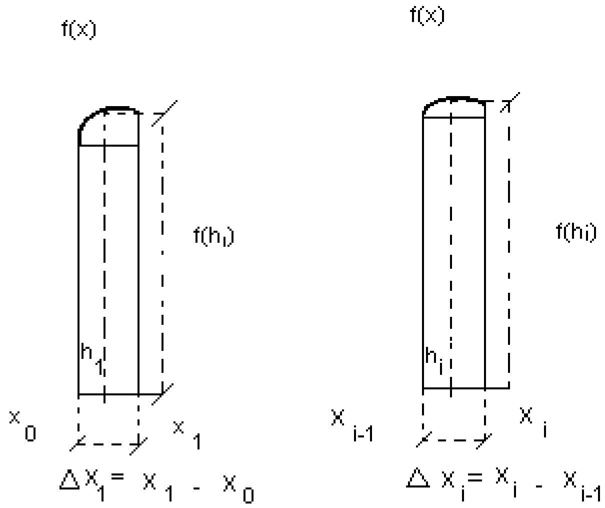
A integral definida, nos exemplos vistos, representa uma área, o que ocorre em muitos casos, e é uma das formas de se apresentar a integral definida.

De forma geral, para $f(x) \geq 0$, a área limitada por f(x) e o eixo x, $a \leq x \leq b$: é dada por $\int_a^b f(x)\, d(x)$, que pode representar a soma das áreas de infinitos retângulos de largura $\Delta x \to 0$ e cuja altura é o valor da função num ponto do intervalo da base:



Subdividindo o intervalo [a, b] em **n** subintervalos através das abscissas x_0=a, x_1, x_2,...,x_n=b, obtemos os intervalos (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b). Em cada intervalo (x_{i-1}, x_i) tomemos um ponto arbitrário $\mathbf{h_i}$.

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n$. De acordo com a figura, os retângulos formados têm área $f(h_1)\Delta x_1, f(h_2)\Delta x_2, \ldots, f(h_n)\Delta x_n$.



Então, a soma da áreas de todos os retângulos é:

$$f(h_1)\Delta x_1 + f(h_2)\Delta x_2 + \ldots + f(h_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(h_i)\Delta x_i$$

que nos fornece um valor aproximado da área considerada.

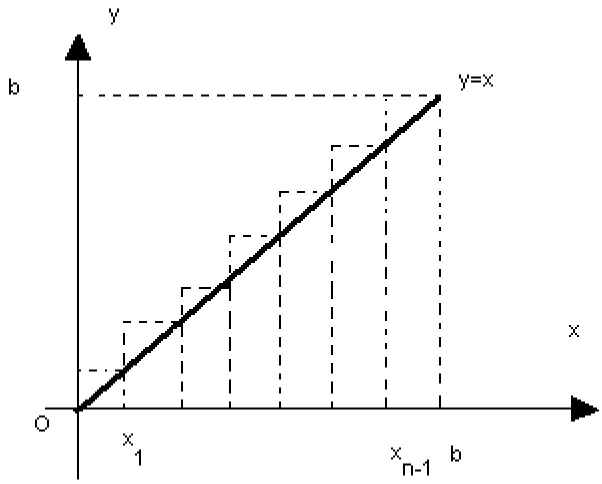
Aumentando o número **n** de subintervalos Δx_i, tal que Δx_i tenda a zero $(\Delta x_i \to 0)$ e o número **n** de subintervalos tenda a infinito $(n \to \infty)$, temos as bases superiores dos retângulos e a curva praticamente se confundindo e, portanto, temos a área considerada.

Simbolicamente, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(hi)\Delta x_i = \int_a^b f(x)d(x)}$$

Integrais definidas (exemplo)

Seja a área entre y = x e o eixo **x**, para $0 \le x \le b$:



Esta área é dada por:

$$\frac{base\ .\ \text{altura}}{2} = \frac{b\,.\,\text{b}}{2} = \frac{b^2}{2}$$

Podemos notar que o processo do limite nos leva ao resultado procurado. Dividindo o intervalo [0, b] em **n** subintervalos, cada um terá largura $\frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$.

Sejam, então, os pontos:

$$x_1 = \frac{b}{n},\ \text{x}_2 = \frac{2\text{b}}{\text{n}},\ \text{x}_3 = \frac{3\text{b}}{\text{n}},\ldots,\ x_n = \frac{nb}{n} = b$$.

Como f(x) = x, então $f(x_1) = \frac{b}{n},\ f(x_2) = \frac{2b}{n},\ldots,\ f(x_n) = b$.

$$Mas,\ \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b}{n}.$$

$$Então,\ \text{a soma das áreas } f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n \text{ vale :}$$

$$\frac{b}{n}\cdot\frac{b}{n} + \frac{2b}{n}\cdot\frac{b}{n} + \frac{3b}{n}\cdot\frac{b}{n} + \ldots + \frac{nb}{n}\cdot\frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} + \frac{2b^2}{n^2} + \frac{3b^2}{n^2} + \ldots + \frac{nb^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2}.(1+2+3+\ldots+n)$$

$Logo:$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{n^2}.(1+2+3+\ldots+n)$$

$$Como\ 1+2+3+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2} \text{ é a soma de uma PA de razão 1, então :}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n.(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{n^2}\cdot\underbrace{\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)}_{1} = \frac{b^2}{2}$$

Portanto :

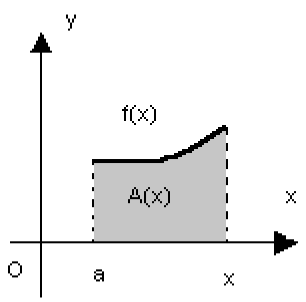
$$A = \int_0^b f(x)\ d(x) = \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

Cálculo da integral definida

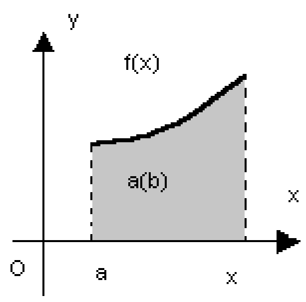
O método que temos para o cálculo da área ou da integral definida, no caso, é ainda muito complicado, conforme vimos no exemplo anterior, pois encontraremos somas bem piores.

Para tal, consideremos a área das figuras quando movemos a extremidade direita:

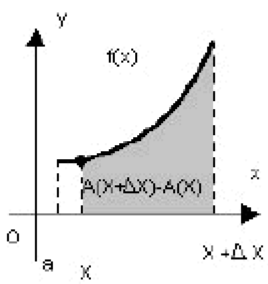
1)



2)



3)



Se a área é dada por A(x), então A(a) = 0, pois não há área alguma. Já A(x) dá a área da figura 1, A(b), a área entre x e $x + \Delta x$ é $A(x + \Delta x) - A(x)$, ou seja:

- $\int_a^a f(x)\, d(x) = A(a) = 0$
- $\int_a^b f(x)\, d(x) = A(b)$
- $\int_a^x f(x)\, d(x) = A(x)$
- $\int_x^{x+\Delta x} f(x)\, d(x) = A(x + \Delta x) - A(x)$

Mas:

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = A'(x),$$

ou seja, A(x) é uma das antiderivadas de f(x). Mas sabemos que se F(x) é antiderivada qualquer de f(x), então A(x) = F(x) + C. Fazendo x = a, temos: A(a) = F(a) + C = 0 (A(a) = 0)

Logo, C = - F(a) e A(x) = F(x) - F(a).

Portanto:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, d(x) = A(b) = F(b) - F(a)}$$

ou ainda,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, d(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemplos:

$$1)\ \int_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2)\ \int_0^b x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \frac{b^2}{2} - 0 = \frac{b^2}{2}$$

$$3)\ \int_1^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$4)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = \text{sen } x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \text{sen } \frac{\pi}{4} - \text{sen } 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que conseguimos uma forma de calcular integrais definidas e áreas sem calcular somas complicadas e usando apenas as antiderivadas.

Propriedades da integral definida

1ª) $\int_a^a f(x)\ d(x) = 0$, pois $\int_a^a f(x)\ d(x) = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) - 0.$

2ª) $\int_a^b f(x)\ d(x) = -\int_b^a f(x)\ dx$, pois $\int_b^a f(x)\ dx = F(a) - F(b).$

3ª) $\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$, como nas integrais indefinida s.

4ª) $\int^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + c\int_c^b f(x)\ dx$, $a \leq c \leq b.$