REGRAS DE DERIVAÇÃO

Como, derivar uma função utilizando o conceito de derivada torna-se um processo longo, introduziu-se algumas regras para agilizar as soluções das mesmas. Então, a partir de agora, utilizaremos as seguintes regras práticas para calcular derivadas de funções.

1ª) Derivada de uma Função Constante**:** a derivada de uma função constante é sempre igual a zero.

f(x) = k → f'(x) = 0 (k representa uma constate)

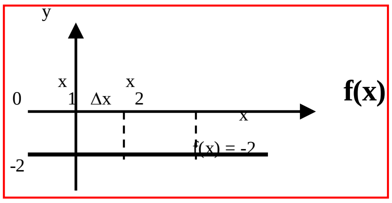
Exemplo

- Derivar as funções:

a) $f(x) = -2 \rightarrow f'(x) = 0$
b) $f(x) = 154 \rightarrow f'(x) = 0$
c) $f(x) = 2a^3 + 1 \rightarrow f'(x) = 0$
d) $f(p) = -4x \rightarrow f'(x) = 0$

Para entender o resultado (nulo), observemos no gráfico da função f(x) = -2 abaixo que, quando a variável independente **x** apresenta uma variação de x_1 para x_2, a variável dependente y, não apresenta modificação, isto é, $\Delta y = 0$, logo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{0}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$



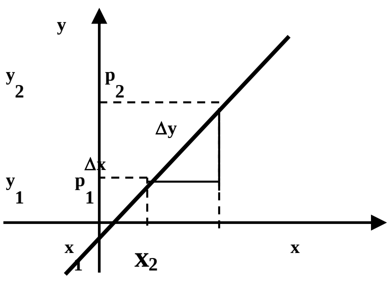
$$\boxed{\mathbf{f(x) = -2 \rightarrow f'(x) = 0}}$$

2ª) Derivada da Função Identidade: a derivada da função identidade é igual a 1 (um).

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

O gráfico abaixo mostra que, a variação dada a variável independente **x,** resulta em uma variação igual na variável dependente **y** ($\Delta x = \Delta y$), logo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$



f(x) = x → f'x = 1

3ª) Derivada de uma Função Potência f(x) = x^n.

Para chegarmos a essa fórmula, apliquemos a regra geral das derivadas, da seguinte maneira:

1º passo:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

2º passo:

$$y + \Delta y - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = [(x + \Delta x) - x].\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}.x + (x + \Delta x)^{n-3}.x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$\Delta y = \Delta x.\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}.x + (x + \Delta x)^{n-3}.x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

3º passo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x.\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}.x + (x + \Delta x)^{n-3}.x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}.x + (x + \Delta x)^{n-3}.x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

4º passo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}.x + (x + \Delta x)^{n-3}.x^2 + \ldots + x^{n-1}\right] =$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}.x + x^{n-3}.x^2 + \ldots + x^{n-1} = x^{n-1}.x^{n-1}.x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = n.x^{n-1}$$

Portanto: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$

Exemplo:

- Derivar as funções:

a) $f(x) = x^4$ b) $f(q) = 3q^6$ c) $f(x) = -5x$

d) $f(x) = \frac{5}{x^2}$ e) $y = \sqrt[3]{x^2}$, em x = 4

Solução

a) $f(x) = x^4$ b) $f(q) = 3q^6$ c) $f(x) = -5x$ d) $f(x) = \frac{5}{x^2} = 5x^{-2}$

$f'(x) = 4x^{4-1}$ $f'(q) = 6.3x^{6-1}$ $f'(x) = 1.(-5)x^{1-1}$ $f'(x) = -2.5x^{-2-1}$

$f'(x) = 4x^3$ $f'(p) = 18x^5$ $f'(x) = -5x^0 = -5$ $f'(x) = -10x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$

Obs.: As fórmulas seguintes também podem ser demonstradas através da regra geral.

4ª) Derivada de uma Função Exponencial.

$$\mathbf{f(x) = a^x \rightarrow} \begin{cases} f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x.Lna \\ f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x.Lne = e^x \end{cases} \quad (\text{Ln e} = \log_e e = 1)$$

Exemplo

- Calcular a derivada de cada função:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = (1/2)^x$, em x = 0 c) $f(x) = 3.e^x$ d) $y = -4.e^x$

Solução

a) $f(x) = 2^x$

$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x.Lna$$

$f'(x) = 2^x.Ln\,2$

b) $f(x) = (1/2)^x$

$f'(x) = (1/2)^x.Ln(1/2)$

$f'(0) = (1/2)^0.Ln(1/2$

$f'(0) = Ln\,(1/2)$

c) $f(x) = 3.e^x$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x.Lne = e^x$$

$f'(x) = 3.e^x.Ln\,e =$ **$3e^x$**

d) $y = -4.e^x$

$y' = -4.e^x.Lne =$ **$-4e^x$**

5ª) Derivada de uma Função Logarítmica.

$$\textbf{f(x) = Log}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{x} \rightarrow \begin{cases} f(x) = Log_a x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x.Lna} \\ f(x) = Lnx \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x.Lne} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Exemplo:

- Encontrar a derivada de cada função:

a) $y = Log_3\,x$, em $x = ½$

Solução

a) $y = Log_3\,x$

$$f(x) = Log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x.Lna}$$

$$y' = \frac{1}{x.Ln\,3}$$

$$\mathbf{y'(1/2) =} \frac{1}{\frac{1}{2}.Ln\,3} = \frac{2}{Ln\,3}$$

Solução:

- Devemos derivar um por um dos termos da soma algébrica.

a) $y = 3x – 7$

b) $f(x) = 4.Log_{1/3}\,x$

$$f'(x) = 4.\frac{1}{x.Ln\,(1/3)}$$

$$\mathbf{f'(x) =} \frac{4}{x.Ln\,(1/3)}$$

6ª) Derivada de uma Soma Algébrica.

$$\mathbf{y = f(x) + g(x) + h(x) + ... \rightarrow y' = f'(x) + g'(x) + h'(x) + ...}$$

Exemplo

Derivar as funções:

a) $y = 3x – 7$ b) $y = 4x^2 – 5x + 6$, em $x = -2$

$y´=3 - 0$

y' = 3

b) $y = 4x^2 - 5x + 6$
$y' = 8x - 5$
$y'(-2) = 8.(-2) + 6 =$ **-10**

7ª) Derivada do Produto de Funções.

$$\mathbf{f(x) = u(x).v(x) \rightarrow f'(x) = u(x).v'(x) + u'(x).v(x)}$$

Exemplo

- Derivar a função $f(x) = 2x^3.\ e^x$, em x = 1.

Solução

$$f(x) = 2x^3.\ e^x \Rightarrow \begin{cases} u(x) = 2x^3 \Rightarrow u'(x) = 6x^2 \\ v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\mathbf{f(x) = u(x).v(x) \rightarrow f'(x) = u(x).v'(x) + u'(x).v(x)}$$

Substituindo os valores encontrados em f'(x), temos:
$f'(x) = 2x^3.e^x + e^x.6x^2$
$\mathbf{f'(x) = 2x^2e^x(x + 3)}$

Substituindo o valor de x = 1, temos:
$f'(1) = 2.1^2.e^1(1 + 3)$
$\mathbf{f'(1) = 8e}$

Obs.: $\mathbf{F(x) = U(x).V(x).Z(x) \rightarrow F'(x) = U(x).V(x).Z'(x) + U(x).V'(x).Z(x) + U'(x).V(x).Z(x).}$

8ª) Derivada do Quociente de Funções

$$\mathbf{f(x) =} \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow \mathbf{f'(x) =} \frac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemplo

Derivar a função $f(x) = \frac{x^4}{e^x}$, em x = 1.

Solução

$$f(x) = \frac{x^4}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3 \\ v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \end{cases}$$

Substituindo em f'(x), os valores encontrados, temos:

$$\mathbf{f(x) =} \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow \mathbf{f'(x) =} \frac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\mathbf{f'(x) =} \frac{e^x.4x^3 - x^4.e^x}{(e^x)^2} \ (:e^x)$$

f'(x) = $\dfrac{4x^3 - x^4}{e^x}$

Substituindo o valor de x = 1, temos:

$$\boxed{\textbf{f'(x)} = \frac{4.1^3 - 1^4}{e^1} = \frac{3}{e}}$$

Exercícios

01- Calcule a derivada de cada função:

a) f(x) = 2 b) f(x) = -4 c) f(x) = 2a d) f(b) = x^2 e) f(x) = x

02- Encontre a derivada primeira das seguintes funções:

a) f(x) = x^3 b) f(p) = $4p^4$ c) f(q) = -5q d) f(x) = x/4 e) y = $\sqrt{x}$, em x = 9 f) $y = \dfrac{4}{x^3}$ g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ h) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}$, em x = 1

03- Determine a derivada primeira de cada função:

a) f(x) = 2^x b) f(x) = $(1/2)^x$ c) f(x) = $\text{Log}_2\, x$ d) $\text{Log}_{½}\, x$

04- Calcule a primeira derivada de cada função:

a) f(x) = 3x + 5 b) y = $\dfrac{75}{x} - 5$ c) f(x) = $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{12}{x^2}$

d) f(x) = $3x^2 - 5x + 6$, em x = -2 e) f(x) = $x^3 - 4x^2 - 6x + 8$, me x = -1

f) f(p) = $5p^2 - \dfrac{p}{4} - 5$, para p = 10 g) f(p) = $2p^5 - 4p^2 + \dfrac{6}{p^3} - 4.e^x + 2\text{Ln}\, x$

05- Derivar as funções:

a) f(x) = $e^x.\text{Ln}x$ b) f(x) = $\dfrac{e^x}{Lnx}$ c) f(x) = $x^3.3^x$, em x = 1