Regra de L'Hospital

Vamos estudar uma forma prática de resolver limites indeterminados utilizando derivadas, isto é através da Regra de L'Hospital.

Entretanto, para utilizar esta regras temos que ter as indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Seja as funções $f(x)$ e $g(x)$ diferenciáveis em um intervalo aberto que contém a e que:

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

ou

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ou se esse limite for $-\infty$ ou $+\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obs: Esta mesma afirmação vale para $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$

Este é um dos limites fundamentais, que com o uso Regra de L'Hospital torna-se bem fácil de ser encontrado. Como tem-se:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \frac{0}{0}$$

e as funções são diferenciáveis podemos usar a regra de L'Hopital, onde obtém-se:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$

Como temos uma indeterminação do tipo

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

e as funções são diferenciáveis, podemos usa a regra de L'Hopital, onde obtém-se:

$\mathbf{\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0}$