- DERIVADA DE FUNÇÃO COMPOSTA (REGRA DA CADEIA)

Sejam as funções p(x) = 3x – 2, q(x) = $(3x-2)^2$ e s(x) = $(3x-2)^{54}$, vamos determinar as suas respectivas derivadas.
p(x) = 3x – 2
p`(x) = 3

q(x) = $(3x-2)^2$ = (3x – 2).(3x – 2)
q)x) = $9x^2 - 12x + 4$
q`(x) = 18x -12

s(x) = $(3x-2)^{54}$

Poderíamos aplicar o mesmo processo aplicado em q(x), contudo, verificamos que torna impraticável.

Até esse momento, as regras de derivação foram aplicadas em cima de funções simples. A partir de agora, vamos utilizar as regras de derivação quando a função for composta.

Observe que a função s(x) = $(3x-2)^{54}$ é constituída por duas funções simples f(x) = 3x – 2 (função polinomial) e g(x) = x^{54}(função potência).

$s(x) = g[f(x)] = [f(x)]^{54} = (3x-2)^{54}$

Regra da cadeia:

$s(x) = g[f(x)] \Rightarrow s`(x) = g`[f(x)].\ f`(x).$ *Escrevendo* $y = s(x) = g(u),$ *onde* $u = f(x),$

temos ou $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}.$

Derivada da Função Potência

$$\boxed{f(x) = u^n \text{ (u, função de x)} \rightarrow f'(x) = n.u^{n-1}.u'}$$

Exemplo

- Derivar cada função abaixo:

a) f(x) = $(6x-5)^3$, em x = 2

b) $y = \sqrt{4x - 2}$

c) $y = \sqrt[3]{(e^x + 3)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{(6x-2)^3}$

Solução

a) f(x) = $(6x-5)^3$ $\begin{cases} u = 6x - 5 \Rightarrow u' = 6 \\ n = 3 \Rightarrow n - 1 = 2 \end{cases}$

$$\boxed{f'(u) = n.u^{n-1}.u'}$$

$$f'(x) = 3.(6x-5)^2.6 = 18.(6x-5)^2$$

Substituindo o valor de x = 2, temos:

$$f'(2) = 18.(6.2-5)^2$$

$$\boxed{f'(2) = 18.7^2 = 882}$$

b) $y = \sqrt{4x-2} = (4x-2)^{\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} u = 4x-2 \Rightarrow u' = 4 \\ n = 1/2 \Rightarrow n-1 = -1/2 \end{cases}$ $\Rightarrow \sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}$

$f'(u) = n.u^{n-1}.u'$

$f'(x) = \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{-1}{2}}.4$

$\boxed{f'(x) = 2.(4x-2)^{\frac{-1}{2}} \quad ou \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}}}$

c) $y = \sqrt[3]{(e^x+3)^2} = (e^x+3)^{\frac{2}{3}}$ $\begin{cases} u = e^x+3 \Rightarrow u' = e^x \\ n = 2/3 \Rightarrow n-1 = -1/3 \end{cases}$

$\boxed{f'(u) = n.u^{n-1}.u'}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(e^x+3)^{\frac{-1}{3}}.e^x$

$\boxed{f'(x) = \frac{2.e^x}{3}.(e^x+3)^{\frac{-1}{3}} \quad ou \quad f'(x) = \frac{2.e^x}{3.\sqrt[3]{e^x+3}}}$

d) $f(x) = \frac{5}{(6x-2)^3} = 5.(6x-2)^{-3}$ $\begin{cases} u = 6x-2 \Rightarrow u' = 6 \\ n = -3 \Rightarrow n-1 = -4 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{a^n} = a^n$

$\boxed{f'(u) = n.u^{n-1}.u'}$

$f'(x) = -3.5.(6x-2)^{-4}.6$

$\boxed{f'(x) = -180\ .(6x-2)^{-4} \quad ou \quad f'(x) = \frac{-180}{(6x-2)^4}}$

02- Derivada da Função Exponencial

$$\begin{cases} f(x) = a^u \text{ (u, função de x)} \rightarrow f'(x) = u'.a^u.Lna \\ f(x) = e^u \rightarrow f'(x) = u'.e^u \end{cases}$$

Exemplo

- Derivar as funções:

a) f(x) = $2^{(3x)}$ b) y = $3.e^{(2-5x)}$ c) f(x)= $e^{\sqrt{x}}$ em x = 4 d) y = $2/e^{4x}$

Solução

a) f(x) = $2^{(3x)}$ $\begin{cases} u = 3x \Rightarrow u' = 3 \\ a = 2 \end{cases}$

$f'(x) = u'.a^u.Lna$

f’(x) = 3.2^{3x}.Ln2 ou f’(x) = 2^{3x}.Ln8

b) y = 3.$e^{(2-5x)}$ $\begin{cases} u = 2 - 5x \Rightarrow u' = -5 \\ a = e \end{cases}$ $f'(x) = u'.e^u$

$f'(x) = -5.3.e^{(2-5x)}$

$\boxed{f'(x) = -15.e^{(2-5)}}$

c) f(x) = $e^{\sqrt{x}}$ $\begin{cases} u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ a = e \end{cases}$ $f'(x) = u'.e^u$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$$

d) $y = \dfrac{2}{e^{4x}} = 2.e^{-4x}$ $\begin{cases} u = -4x \Rightarrow u' = -4 \\ a = e \end{cases}$ $f'(x) = u'.e^u$

$f'(x) = -4.2.e^{-4x}$

$$\boxed{f'(x) = -8e^{-4x} \quad ou \quad f'(x) = \frac{-8}{e^{4x}}}$$

03- Derivada da Função Logarítmica

$$\begin{cases} f(x) = Log_a u \text{ (u, função de x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'}{u.Lna} \\ f(u) = Lnu \rightarrow f'(u) = \dfrac{u'}{u} \end{cases}$$

Exemplo

- Encontrar a derivada primeira de cada função abaixo:

a) y = Ln($3x^2$ - 4)

b) y = Log $_2$ (4$\sqrt{x}$)

c) y = Ln (x^2 – 3)^5 , em x = 2

d) y = $Ln\sqrt{\dfrac{3x-2}{x-4}}$

Solução

a) y = Ln($3x^2$ - 4) $\{u = 3x^2 - 4 \Rightarrow u' = 6x$

$$\boxed{\begin{gathered} f'(u) = \frac{u'}{u} \\ f'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 4} \end{gathered}}$$

b) y = Log $_2$ (4$\sqrt{x}$)

y = $Log_2 4 + Log_2 \sqrt{x}$ (Propriedade do produto: Log(a.b)=Log a + Log b)

y = $Log_2 4 + Log_2 x^{\frac{1}{2}}$

y = $= Log_2 4 + \frac{1}{2} Log_2 x$ (Propriedade da potência: Log a^n = n.Log a)

Aplicando a derivada da função constante e da função logaritmica, temos:

y' = $0 + \frac{1}{2} . \frac{1}{x.Ln\ 2}$

$\boxed{y' = \frac{1}{2x.Ln\ 2}}$

c) y = Ln $(x^2 - 3)^5$, em x = 2.

y = 5.Ln $(x^2 - 3)$ (Propriedade da potência)

Aplicando a derivada da função logarítmica, temos:

$y' = \frac{u'}{u}$

y' = $\frac{(x^2 - 3)'}{x^2 - 3}$

$\boxed{y' = \frac{2x}{x^2 - 3}}$

y'(2) = $\frac{2.2}{2^2 - 3} = 4$

d) y = $Ln \sqrt{\frac{3x - 2}{x - 4}} = Ln \left(\frac{3x - 2}{x - 4} \right)^{\frac{1}{2}}$

y = $\frac{1}{2} .Ln \left(\frac{3x - 2}{x - 4} \right)$ (Propriedade da potência)

y = $\frac{1}{2} . [Ln (3x - 2) - Ln (x - 4)]$ (Propriedade do quociente)

Aplicando a derivada da função logarítmica, temos:

y' = $\frac{1}{2} . \left[\frac{(3x - 2)'}{3x - 2} - \frac{(x - 4)'}{x - 4} \right]$

y' = $\frac{1}{2} . \left[\frac{3}{3x - 2} - \frac{1}{x - 4} \right]$ [m.m.c. = (3x-2).(x-4)]

y' = $\frac{1}{2} . \left[\frac{3(x - 4) - 1.(3x - 2)}{(3x - 2).(x - 4)} \right]$

y' = $\frac{1}{2} . \left[\frac{3x - 12 - 3x + 2}{(3x - 2).(x - 4)} \right] = \frac{1}{2} . \frac{-10}{(3x - 2).(x - 4)}$

$$\boxed{y' = \frac{-5}{(3x-2).(x-4)}}$$

04- Derivada das Funções Trigonométricas

4-1) Derivada da Função Seno: A derivada da função seno é a função cosseno.

a) f(x) = senx $\Rightarrow$ f'(x) = cosx (função simples)

b) f(x) = senu $\Rightarrow$ f'(x) = u'.cosu (função composta)

4.2) Derivada da Função Cosseno: A derivada da função cosseno é a função seno negativa.

a) f(x) = cosx $\Rightarrow$ f'(x) = -senx

b) f(x) = cosu $\Rightarrow$ f1(x) = -u'.cosu

4.3) Derivada da Função Tangente: A derivada da Função Tangente é o quadrado da função secante.

a) f(x) = tgx $\Rightarrow$ f'(x) = sec^2x

b) f(x) = tgu $\Rightarrow$ f'(x) = u´.sec^2u

4.4) Derivada da Função Cotangente: A derivada da Função Cotangente é o quadrado da função cossecante acompanhado do sinal negativo.

a) f(x) = cotgx $\Rightarrow$ f'(x) = -$cossec^2x$

b) f(x) = cotgu $\Rightarrow$ f'(x) = -u'.$cossec^2u$

4.5) Derivada da Função Secante: A derivada da Função Secante é produto da Função secante pela Função Tangente.

a) f(x) = secx $\Rightarrow$ f'(x) = secx.tagx

b) f(x) = secu $\Rightarrow$ f'(x) = u'.secu.tagu

4.6) Derivada da Função Cossecante: A derivada da Função cossecante é produto da Função Cossecante pela Função Cotangente acompanhado do sinal negativo.

De posse dessas regras, vamos calcular a derivada das seguintes funções:

a) y = sen(4x), $em \quad x = \pi / 6$ b) y = cos(3x - 2) c) y = tag($5x^3$ – 4)

d) y = sec $\sqrt{x}$ e) y = $cotg^3x$

Solução

a) y = sen(4x) $\{u = 4x \Rightarrow u' = 4$

$$\begin{cases} y = senu \\ y' = u'\cos u \end{cases}$$

c) y = tag($5x^3$ – 4) $u = 5x^3 - 4 \Rightarrow u' = 15x^2$

$$\begin{cases} y = tagu \\ y' = u'\sec^2 u \end{cases} \quad y' = 15x^2 \sec^2(5x^3 - 4)$$

$$y' = 4\cos(4x)$$

$$y' = 4.\cos\left(4.\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y' = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y' = 4.\left(\frac{-1}{2}\right) = -2$$

b) y = cos(3x - 2) $\{u = 3x - 2 \Rightarrow u' = 3$

$$\begin{cases} y = \cos u \\ y' = -u'\,senu \end{cases}$$

$$y' = -3sen(3x - 2)$$

d) y = sec $\sqrt{x}$ $\begin{cases} u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \sec u \\ y' = u'\sec u.tagu \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\sec\sqrt{x}.tag\sqrt{x}$$

e) y = cotg^{3}x

Inicialmente é importante relembrar que cotg^{n}x = (cotagx)^n ≠ cotag x^n.

y = cotg^{3}x = (cotagx)^3 $\{u = \cot agx \Rightarrow u' = -\cos ec^2 x$

Aplicando a fórmula da potência, temos:

$$\begin{cases} y = u^n \\ y' = n.u^{n-1}u' \end{cases}$$

y'= 3.cotg^{2}x.(-cossec^{2}x)

y'= -3.cotg^{2}x.cossec^{2}x

05- Derivada da função y = u^v ou s(x) = [f(x)]$^{g(x)}$

- Deriva-se a função y = u^v, como se fosse uma função potência (y'= v.u^{v-1}.u') e, em seguida, como se fosse uma função exponencial (y'= v'.u^v.Lnu), adicionado os resultados.

y = u^v = v.u^{v-1}.u' + v'.u^v.Lnu

Exemplo:

- Calcular a derivada da função y = x^{4x}.

Solução

y = x^{4x} $\begin{cases} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v = 4x \Rightarrow v' = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = u^v \\ y' = v.u^{v-1}.u' + v'.u^v.Lnu \end{cases}$$

$$y' = 4x.x^{4x-1}.1 + 4.x^{4x}.Lnx$$

$$y' = 4x^{4x} + 4.x^{4x}.Lnx = 4x^{4x}(1 + Lnx) = 4x^{4x}(Lne + Lnx) = \boxed{4x^{4x}.Ln(e.x)}$$