# Объяснение аномального смещения перигелия орбиты Меркурия в рамках общей теории относительности

Калашников Михаил, Б03-202

## 1. Обнаружение эффекта

В 1859 французский математик Урбен Жан Жозеф Леверье опубликовал работу «Новое определение орбиты Меркурия и ее возмущений», в которой предельно строго и подробно изучил движение ближайшей к Солнцу планеты. Главным результатом работы была аномальная прецессия линии апсид орбиты Меркурия, которая не могла быть объяснена в рамках ньютоновой механики.

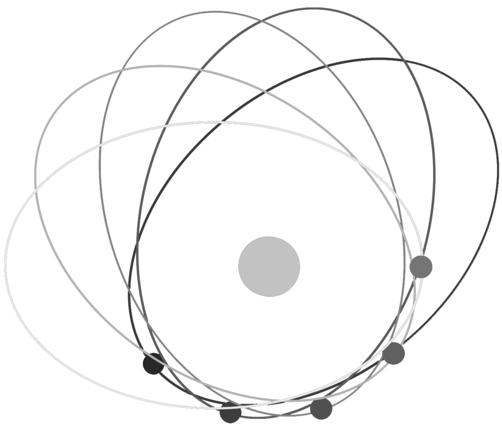

Рис. 1: Схематичное представление прецессии линии апсид орбиты в задаче Кеплера

Наблюдаемая прецессия за столетие составляла $570''$. Воздействие остальных планет Солнечной системы и несферичности Солнца могло объяснить только $526.7''$ прецессии. Таким образом, разница составила около $43''$ за столетие.

Для решения проблемы выдвигались различные теории, в основном относящиеся к одной из двух групп:

- гипотезы, объясняющие смещение некоторой необнаруженной материей внутри орбиты Меркурия;
- теории гравитационного тяготения, отличающиеся от ньютоновской.

Самое элегантное и точное объяснение было найдено Альбертом Эйнштейном 18 ноября 1915 года. В рамках общей теории относительности Эйнштейн приближенно рассчитал аномальное отклонение и смог получить практически точное совпадение с наблюдаемыми $43''$ за столетие.

## 2. Движение частицы в метрике Шварцшильда

В специальной теории относительности показано, что расстояние между двумя точками пространства-времени задается метрикой

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

в декартовых координатах. В сферических метрика может быть записана как

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

Эта формула справедлива в отсутствие кривизны пространства-времени. В общей теории относительности пространство времени искривлено. Согласно ей, пространство-время в гравитационном поле сферически-симметрично распределенной материи описывается метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

где $r_s = \frac{2\mu}{c^2}$ – радиус Шварцшильда, а $\mu = GM$ – гравитационный параметр, являющийся произведением гравитационной постоянной и массы тела. При отсутствии массы $M$ метрика Шварцшильда переходит в метрику неискривленного пространства.

В соответствии с общей теорией относительности, свободные частицы пренебрежимо малой массы движутся по геодезическим линиям пространства-времени.

Ввиду сферической симметричности можно ограничится рассмотрением движения в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\varphi^2$$

Данный вид метрики не зависит от координат $t$ и $\varphi$. Из этого следует, что существует два интеграла движения (доказательство представлено в конце работы)

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m}$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2}$$

где $L$ – момент импульса, $E$ – полная энергия пробного тела массой $m$.

Поделим метрику на квадрат дифференциала собственного времени $d\tau^2$, учитывая, что $ds \equiv cd\tau$, и подставим первые интегралы

$$c^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E}{m^2c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(c^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right)$$

Используя определение радиуса Шварцшильда, получим

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left[\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{1}{2}mc^2\right] + \frac{\mu m}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\mu L^2}{c^2 m r^3}$$

Это соответствует движению нерялетивистской частинцы с энергией $\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{1}{2}mc^2$ в радиально симметричном эффективном потенциальном поле

$$U_{\text{эфф}}(r) = -\frac{\mu m}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\mu L^2}{c^2 m r^3}$$

В классической механике движение в центральном поле описывается потенциалом

$$U_{\text{эфф}}(r) = -\frac{\mu m}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Таким образом, третий член, обратно пропорциональный кубу расстояния до гравитирующего тела, не имеет аналога в классической задаче Кеплера.

Введем обозначение $a = \frac{L}{mc}$. Тогда, используя определение радиуса Шварцшильда, потенциал можно записать в безразмерном виде

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{mc^2}{2}\left[-\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3}\right]$$

## 3. Круговые орбиты и их устойчивость

Рассмотрим круговые орбиты в рамках данного эффективного потенциала. Очевидно, что при движении по круговой орбите, эффективная радиальная сила, действующая на частицу, должна равняться нулю.

$$F = -\frac{dU_{\text{эфф}}}{dr} = -\frac{mc^2}{2r^4}\left[r_s r^2 - 2a^2 r + 3r_s a^2\right] = 0$$

Решением данного квадратного уравнения являются два радиуса

$$r_{\text{внешн}} = \frac{a^2}{r_s}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{a^2}}\right)$$

$$r_{\text{внутр}} = \frac{a^2}{r_s}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{a^2}}\right) = \frac{3a^2}{r_{\text{внешн}}}$$

Внутренний радиус $r_{\text{внутр}}$ является точкой максимума потенциала, и следовательно является неустойчивым положением при любых значениях параметра $a$. Внешний радиус $r_{\text{внешн}}$, наоборот, является радиусом стабильных орбит.

Условием перехода к классическому случаю является $r_s \ll a$. Это условие можно переписать в виде

$$\frac{r_s}{a} = \frac{\mu}{c^2}\frac{mc}{L} = \frac{\mu m}{Lc} \sim \frac{\mu m}{mvrc} = \frac{\mu}{vrc} \sim \frac{v^2}{vc} = \frac{v}{c} \ll 1$$

В данном приближении внешний устойчивый радиус $r_{\text{внешн}}$

$$r_{\text{внешн}} \approx \frac{a^2}{r_s}\left(1 + \left(1 - \frac{3r_s^2}{2a^2}\right)\right) = \frac{a^2}{r_s}\left(2 - \frac{3r_s^2}{2a^2}\right) \approx \frac{2a^2}{r_s}$$

Подставляя определения $a$ и $r_s$ можно получить классическую формулу для радиуса круговой орбиты.

$$r_{\text{внешн}} \approx \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{v^2 r_{\text{внешн}}^2}{\mu} = \frac{\omega_\varphi^2 r_{\text{внешн}}^4}{\mu}$$

$$r_{\text{внешн}}^3 \approx \frac{\mu}{\omega_\varphi^2}$$

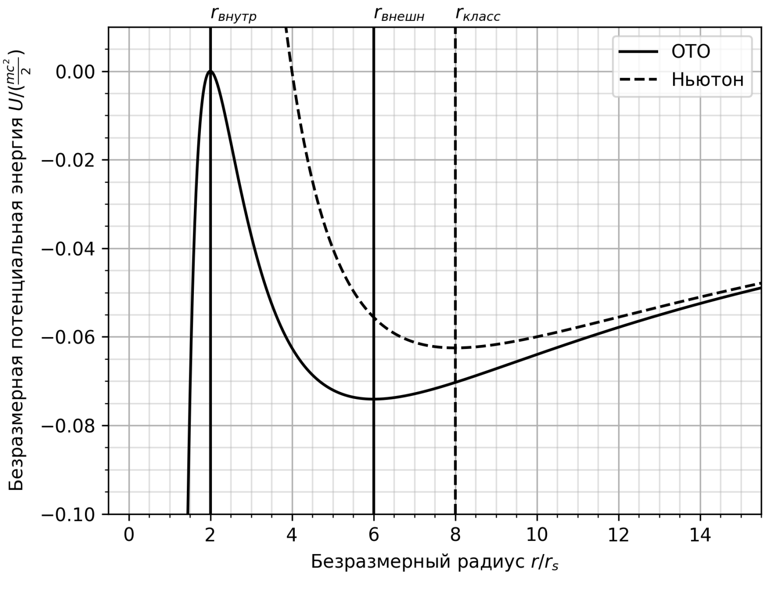


Рис. 2: Сравнение эффективных потенциалов. $a/r_s = 2$

На графике выше представлены зависимости потенциальной энергии в обеих теориях.

$$\left(\frac{U_{\text{эфф}}(r/r_s)}{\frac{mc^2}{2}}\right)_{\text{ОТО}} = -\frac{1}{r/r_s} + \frac{a^2}{r_s^2}\frac{1}{(r/r_s)^2} - \frac{a^2}{r_s^2}\frac{1}{(r/r_s)^3}$$

$$\left(\frac{U_{\text{эфф}}(r/r_s)}{\frac{mc^2}{2}}\right)_{\text{класс}} = -\frac{1}{r/r_s} + \frac{a^2}{r_s^2}\frac{1}{(r/r_s)^2}$$

Можно отметить, что при $r/r_s \gg 1$ функции совпадают. При переходе к классическому приближению графики так же начинают сливаться, а $r_{\text{внешн}}$ переходит в $r_{\text{класс}}$.

## 4. Прецессия эллиптических орбит

Рассмотрим малое отклонение вдоль радиуса от устойчивой круговой орбиты. Возвращающая сила будет равна

$$F(r+\Delta r)|_{r_{\text{внешн}}} \approx \frac{dF}{dr}|_{r_{\text{внешн}}}\Delta r = -\frac{d^2U_{\text{эфф}}}{dr^2}|_{r_{\text{внешн}}}\Delta r$$

Тогда гармонические колебания около положения равновесия $r_{\text{внешн}}$ будут происходить с угловой частотой

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2U_{\text{эфф}}}{dr^2}|_{r_{\text{внешн}}} = \frac{a^2c^2}{r_{\text{внешн}}^4}\sqrt{1-\frac{3r_s^2}{a^2}} \approx \omega_\varphi^2\sqrt{1-\frac{3r_s^2}{a^2}}$$

$$\omega_r \approx \omega_\varphi\sqrt[4]{1-\frac{3r_s^2}{a^2}} \approx \omega_\varphi\left(1-\frac{3r_s^2}{4a^2}\right)$$

Разность данных угловых скоростей будет соответствовать скорости поворота линии апсид эллиптической орбиты. За один «период» линия апсид орбита повернется на угол

$$\delta\varphi = T(\omega_\varphi - \omega_r) \approx T\omega_\varphi\left(1-1+\frac{3r_s^2}{4a^2}\right) = 2\pi\frac{3r_s^2}{4a^2} = \frac{6\pi\mu^2m^2}{c^2L^2}$$

Из классической небесной механики известно, что

$$\frac{L}{m} = \sqrt{\mu p}$$

где $p$ – фокальный параметр эллипса. Он может быть выражен через кеплеровы элементы как $p = A(1-e^2)$. Здесь $A$ – большая полуось, $e$ – эксцентриситет. Подставим данное соотношение в $\delta\varphi$.

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi\mu}{c^2A(1-e^2)}$$

Данное выражение является наиболее известной приближенной формулой прецессии. Подставляя параметры орбиты Меркурия, получим $\delta\varphi_{☿} \approx 0.1035''$. За столетие эта величина составляет недостающие $42.98''$.

## 5. Вывод

Общая теория относительности Эйнштейна полностью объяснила расхождения в движении Меркурия, обнаруженные Леверье. А сама задача явилась одним из многочисленных подтверждений ОТО. Позже были измерены аномальные прецессии перицентров орбит остальных планет солнечной системы, некоторых астероидов и даже тесных двойных звездных систем. Значения для различных тел варьируются от сотых долей угловой секунды до десятков градусов в год, но все с высокой точностью подтверждаются теорией Эйнштейна.

## 6. Доказательство существования первых интегралов

Как упоминалось ранее, согласно общей теории относительности свободные частицы с пренебрежимо малой массой движутся по геодезическим линиям в пространстве-времени. Последние определяются как кривые, малые вариации которых не изменяют их длину. Это можно записать как

$$0 = \delta s = \delta \int ds = \delta \int \sqrt{\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2} d\tau$$

Производная $\frac{ds}{d\tau}$ была выражена ранее. Её квадрат может быть представлен как

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = c^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

Занесем вариацию под интеграл

$$0 = \delta \int \sqrt{\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2} d\tau = \int \frac{\delta \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2}} d\tau = \int \frac{\delta \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2}{2c} d\tau = \frac{1}{2c} \delta \int \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 d\tau$$

Решение вариационной задачи задаётся уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2}{\partial \left(\frac{dx_i}{d\tau}\right)}\right) = \frac{\partial \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2}{\partial x_i}$$

Применим уравнение Лагранжа к координатам $t$ и $\varphi$

$$\frac{d}{d\tau}\left[2c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}\right] = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[2r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}\right] = 0$$

Следовательно, следующие величины являются интегралами движения

$$\frac{E}{mc^2} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

Переход к классическому приближению позволяет показать, что данные первые интегралы в дейситвительности являются энергией и моментом импульса пробного тела