

**Отчет о выполнении лабораторной
работы 3.1.3 "Измерение магнитного
поля Земли"**

Калашников Михаил, Б03-205

Цель работы: исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов; измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

В работе используются:

- неодимовые магниты;
- тонкая нить, закрепленная на штативе;
- медная проволока;
- электронные весы ($\sigma_m = 0.001$ г);
- секундомер ($\sigma_t = 0.01$ с);
- измеритель магнитной индукции;
- штангенциркуль ($\sigma_d = 0.1$ мм);
- микрометр ($\sigma_d = 0.01$ мм);
- деревянные бруски;
- набор гирь.

1. Теоретические сведения

Магнитный диполь может быть образован постоянным магнитом или витком с током. Такой диполь описывается величиной \vec{P} – магнитным моментом. Он всегда направлен от южного полюса магнита к северному. Если размеры диполя малы по сравнению с расстоянием до него, то такой диполь называют точечным. Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле (в СГС):

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3}$$

Если точечный магнитный диполь поместить во внешнее магнитное поле с индукцией \vec{B} , то на него будет действовать механический момент сил:

$$\vec{M} = [\vec{P} \times \vec{B}]$$

Потенциальная энергия, которой обладает такой диполь будет определяться следующим образом:

$$W = -(\vec{P} \cdot \vec{B})$$

Из этого следует, что диполь будет находиться в состоянии устойчивого равновесия тогда и только тогда, когда его магнитный момент будет сонаправлен с индукцией внешнего магнитного поля.

Сила взаимодействия между двумя диполями с моментами \vec{P}_1 и \vec{P}_2 на расстоянии r друг от друга может быть рассчитана по формуле:

$$\vec{F} = -\frac{6\vec{P}_1\vec{P}_2}{r^4}$$

2. Экспериментальная установка

Установка представляет из себя штатив с закрепленной на нем нитью. К нити можно прикреплять различные конструкции из неодимовых магнитов.

Рассмотрим крутильные колебания "стрелки" из магнитных шариков. Не учитывая силы, возникающие в нити, при отклонении стрелки на угол θ , на маятник начинает действовать возвращающий момент сил:

$$M = -P_n B_{\text{гор}} \sin \theta$$

При малых углах отклонения, уравнение колебаний имеет вид:

$$I_n \ddot{\theta} + P_n B_{\text{гор}} \theta = 0$$

Представляя цепочку магнитов тонким однородным стержнем ($I_n = \frac{1}{12} n^3 m d^2$), выражаем период таких колебаний:

$$T = \pi \sqrt{\frac{m d^2}{3 P B_{\text{гор}}}} \cdot n$$

Теперь рассмотрим ту же "стрелку" но закрепленную на нити в одной точке. В магнитном поле Земли, которое отклонено от горизонтали на угол β , цепочка тоже отклонится на определенный угол. Уравновесив ее дополнительным грузом $m_{\text{гр}}$, можно определить величину вертикальной составляющей магнитного поля.

$$M_n = m_{\text{гр}} g r_{\text{гр}} = n P B_{\text{верт}}$$

3. Проведение эксперимента и обработка данных

1. Проведем измерения диаметра и массы шариков. Диаметр измерим с помощью микрометра, используя разные шарики. Получим величину $d = 0.590 \pm 0.004$ см. Далее взвесим несколько шариков в таре (предварительно тарируя весы) и найдем массу одного шарика. Получим, что $m = 829.95 \pm 0.05$ мг.
2. С помощью магнетометра определим индукцию магнитного поля на полюсах шарика ($B_{p0} = 2530 \pm 10$ Гс).
3. Между двумя шариками расположим несколько деревянных брусков и листов бумаги. Найдем максимальное расстояние, на котором шарики способны удерживать друг друга в поле тяжести, с помощью штангенциркуля. Получим, $r_{\text{max}} = 1.68 \pm 0.01$ см.
4. Рассчитаем магнитный момент одного шарика P_A , используя формулу $P_A = r_{\text{max}}^2 \sqrt{\frac{mg}{6}}$. Здесь и далее в работе $g = 981.55 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

$$\varepsilon_{P_A} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_{r_{\text{max}}}}{r_{\text{max}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_m}{m}\right)^2} = 1.2\%$$

$$P_A = r_{\text{max}}^2 \sqrt{\frac{mg}{6}} = 32.9 \pm 0.4 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

5. Теперь измерим магнитный момент вторым способом, присоединив гири к цепочке из шариков. Добьемся минимальной массы нагрузки, при котором цепь отрывается от первого шарика.
6. Взвесив получившуюся цепочку, получим $m_{max} = 244.506 \pm 0.001$ г.
7. Рассчитаем магнитный момент шарика вторым способом, опираясь на массу цепочки. Сила взаимодействия первого шарика с цепочкой равна $F = 1.08F_0 = 1.08 \frac{6P^2}{d^4}$, где F_0 – сила сцепления двух одинаковых шаров диаметрами d с магнитными моментами P . Отсюда $P_B = d^2 \sqrt{\frac{m_{max}g}{4.48}}$.

$$\varepsilon_{P_B} = \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_{m_{max}}}{m_{max}}\right)^2} = 1.5\%$$

$$P_B = d^2 \sqrt{\frac{m_{max}g}{4.48}} = 66.9 \pm 1.0 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

8. Полученные значения магнитного момента отличаются в 2 раза, причем относительная погрешность метода А незначительно меньше. В дальнейшей работе будет использоваться значение магнитного момента, полученного методом А ($P = P_A$).
9. Рассчитаем величину намагниченности материала шариков $p = P/V = \frac{6P}{\pi d^3}$ и остаточную индукцию магнитного поля $B_r = 4\pi p$.

$$\varepsilon_p = \sqrt{\left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 + \left(3 \frac{\sigma_d}{d}\right)^2} = 2.6 \%$$

$$p = \frac{6P}{\pi d^3} = 306.1 \pm 7.9 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс} \cdot \text{см}^3}$$

$$B_r = 4\pi p = 3847 \pm 99 \text{ Гс}$$

10. Найдем индукцию у полюсов шарика.

$$B_p = \frac{2}{3} B_r = 2565 \pm 66 \text{ Гс}$$

Если бы в пункте 8 были выбраны результаты метода В, то тогда мы бы получили $B_p = 5221 \pm 143$ Гс, что сильно расходится с измеренным значением B_{p0} . Это обосновывает выбор метода А.

11. Соберем крутильный маятник из 12 шариков и подвесим его на штативе.
12. Возбудим крутильные колебания и измерим их период. Результат измерения занесем в таблицу 1. Также проведем измерения периода колебаний кольца из шариков. Он оказывается значительно больше периода колебаний "стрелки" из такого же количества шариков. Это означает, что силы, возникающие при скручивании нити пренебрежимо малы по сравнению с силами, оказываемыми со стороны магнитного поля Земли.

13. Дополним таблицу 1 измерениями, проведенными для другого количества шариков. Каждый раз будем измерять время, требуемого для совершения 10 колебаний. Погрешность определения времени t приблизительно равно времени реакции человека: $\sigma_t = 0.15$ с. Следовательно погрешность определения периода составляет $\sigma_T = \sigma_t/10 \approx 0.02$ с.
14. Построим график зависимости $T(n)$. Она получилась линейной, поэтому по значению углового коэффициента $k_{\text{гор}}$ прямой МНК можно определить значение горизонтальной составляющей магнитного поля по формуле Земли $B_{\text{гор}} = \frac{\pi^2 m d^2}{3 P k_{\text{гор}}^2}$. Из МНК, $k_{\text{гор}} = 0.35 \pm 0.01$ с.

$$\varepsilon_{B_{\text{гор}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_{k_{\text{гор}}}}{k_{\text{гор}}}\right)^2} = 4.8 \%$$

$$B_{\text{гор}} = \frac{\pi^2 m d^2}{3 P k_{\text{гор}}^2} = 0.23 \pm 0.01 \text{ Гс}$$

15. Теперь подвесим "стрелку" из 10 шариков за середину с помощью нити на штативе.
16. Приведем "стрелку" в горизонтальное положение, нагружая поднявшийся, под действием магнитного поля Земли, конец.
17. Измерим массу потребавшейся нагрузки $m_{\text{гр}}$. Занесем значение в таблицу 2.
18. Проведем аналогичные эксперименты для цепочек из другого количества шариков. Рассчитаем механический момент сил, действующих на цепочку, по формуле $M = m_{\text{гр}} g r_{\text{гр}} d$, где $r_{\text{гр}}$ – расстояние от точки подвеса груза до центра цепочки, выраженное в диаметрах шариков ($\varepsilon_M = 0.8 \%$). Результаты также занесем в таблицу 2.
19. Построим график зависимости $M(n)$. Проведем прямую МНК и получим, что коэффициент наклона прямой равен $k_{\text{верт}} = 60 \pm 14$ дин · см. Рассчитаем значение вертикальной составляющей магнитного поля Земли. $B_{\text{верт}} = k_{\text{верт}}/P$.

$$\varepsilon_{B_{\text{верт}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k_{\text{верт}}}}{k_{\text{верт}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2} = 23 \%$$

$$B_{\text{верт}} = k_{\text{верт}}/P = 1.6 \pm 0.4 \text{ Гс}$$

20. Теперь несложно получить значение магнитного наклонения $\beta = \arctg\left(\frac{B_{\text{верт}}}{B_{\text{гор}}}\right)$ и полной магнитной индукции $B = \sqrt{B_{\text{верт}}^2 + B_{\text{гор}}^2}$. Погрешность обеих величин может быть получена по формуле:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial B_{\text{верт}}} \sigma_{B_{\text{верт}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B_{\text{гор}}} \sigma_{B_{\text{гор}}}\right)^2}$$

$$\beta = 81.9^\circ \pm 1.9^\circ \quad B = 1.8 \pm 0.4 \text{ Гс}$$

21. Вектор магнитного поля Земли можно найти по формуле (\bar{i} – единичный вектор, сонаправленный с вектором углового скорости Земли, \bar{j} – вектор, перпендикулярный \bar{i} , $\phi = 56^\circ$ – широта Долгопрудного, r – радиус Земли):

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{3(\bar{P}_3 \cdot \bar{r})\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{P}_3}{r^3} = \frac{P_3}{r^3} \left(\frac{3(\bar{i} \cdot \bar{r})\bar{r}}{r^2} - \bar{i} \right) = \frac{P_3}{r^3} \left(\frac{3 \sin \phi}{r} \bar{r} - \bar{i} \right) = \\ &= \frac{P_3}{r^3} \left((3 \sin^2 \phi - 1) \bar{i} + \frac{3}{2} \sin(2\phi) \bar{j} \right)\end{aligned}$$

Таким образом, расчетное значение наклона β_0 , с учетом направления вертикали в Долгопрудном, можно выразить следующим образом:

$$\beta_0 = 90^\circ - \phi + \arctg \frac{3 \sin^2 \phi - 1}{\frac{3}{2} \sin 2\phi} = 90^\circ - \phi + \arctg 2 \frac{\sin^2 \phi - \frac{1}{3}}{\sin 2\phi} = 71^\circ$$

Полный магнитный момент Земли P_3 может быть выражен из той же формулы:

$$P_3 = \frac{Br^3}{\sqrt{(3 \sin^2 \phi - 1)^2 + \left(\frac{3}{2} \sin 2\phi\right)^2}} = (27 \pm 6) \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$$

4. Вывод

Значения, полученные в ходе лабораторной работы относительно приближены к реальным. Индукция магнитного поля Земли примерно равна 0.7 Гс, а направление отличается от полученного на 10° . Магнитный момент планеты, по справочнику, составляет $8.1 \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$. Таким образом все полученные величины отличаются не более чем на порядок.

5. Приложения

| n | $t, \text{ с}$ | $T, \text{ с}$ |
|-----|----------------|----------------|
| 12 | 42.39 | 4.239 |
| 11 | 38.86 | 3.886 |
| 10 | 33.21 | 3.321 |
| 9 | 30.87 | 3.087 |
| 8 | 26.91 | 2.691 |
| 7 | 23.79 | 2.379 |
| 6 | 19.71 | 1.971 |
| 5 | 17.26 | 1.726 |
| 4 | 13.37 | 1.337 |
| 3 | 10.16 | 1.016 |

Таблица 1: Измерения периодов колебания крутильного маятника

| n | $m_{\text{гp}}, \text{ г}$ | $r_{\text{гp}}, d$ | $M, \text{ дин} \cdot \text{см}$ |
|-----|----------------------------|--------------------|----------------------------------|
| 10 | 0.192 | 4 | 444.6 |
| 8 | 0.188 | 3 | 326.5 |
| 6 | 0.105 | 2 | 121.6 |
| 4 | 0.094 | 1 | 54.4 |

Таблица 2: Измерения механического момента сил

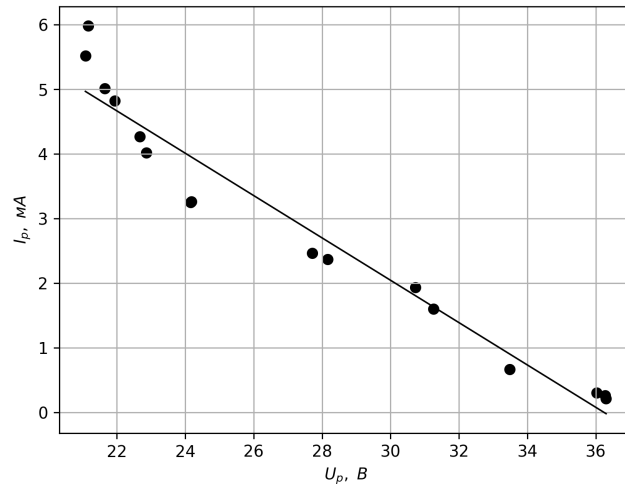


Рис. 1: Вольт-амперная характеристика разряда $I_p(U_p)$

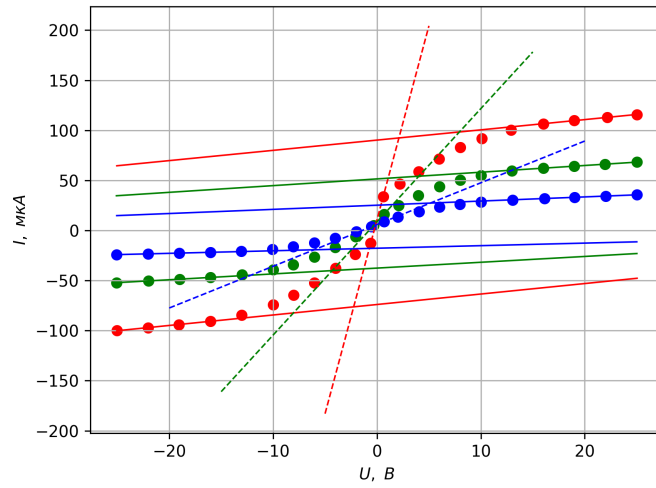


Рис. 2: Вольт-амперная характеристика зонда для разных токов разряда $I(U)$

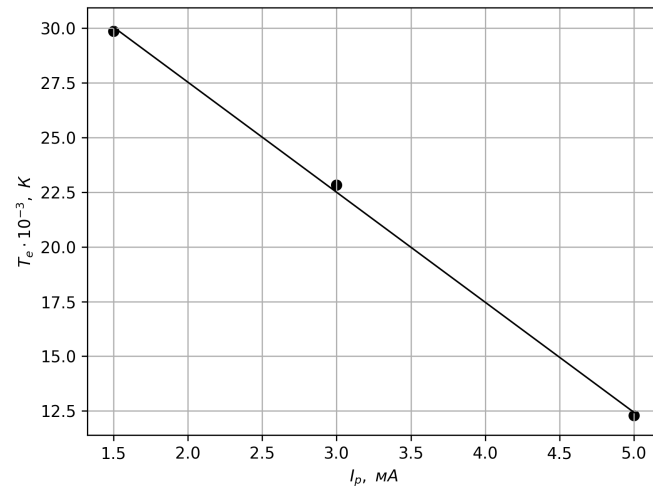


Рис. 3: Зависимость $T_e(I_p)$

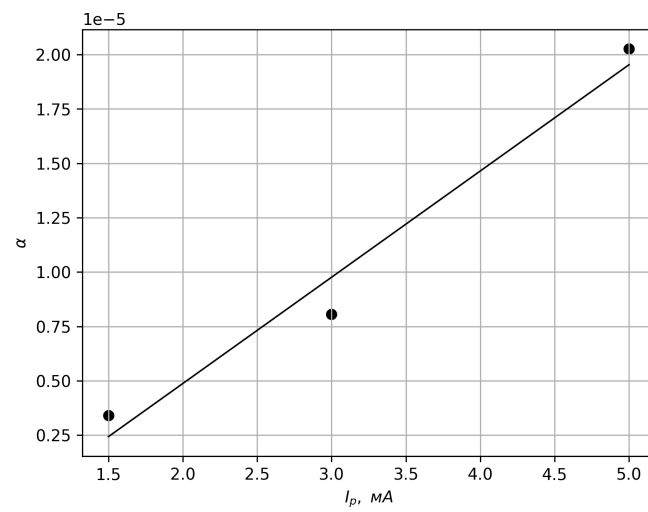


Рис. 4: Зависимость $\alpha(I_p)$