



Е.А. Микрин, М.В. Михайлов

НАВИГАЦИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ОТ ГЛОБАЛЬНЫХ СПУТНИКОВЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Курс лекций для студентов, аспирантов и инженеров
ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ, СПУТНИКОВЫЕ
НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ ГЛОНАСС и GPS,
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ КА

Книга 1

Введение

Двадцатый век – век технического прогресса. Автомобили, самолеты, телевидение, космонавтика, вычислительная техника, связь – очевидные технические чудеса, с которыми ежедневно встречается каждый человек. Но в этом числе чудес незаслуженно затерялось еще одно несомненное чудо технического прогресса – в конце XX века вокруг Земли создано рукотворное глобальное навигационное поле, позволяющее в корне изменить отношение человека к времени и пространству. Сложнейшая когда-то для человека задача определения времени и положения в пространстве сегодня решается практически мгновенно с высокой точностью. Не всем известно, но это чудо имеет свой день рождения, давший начало новой эре – эре *GPS*. С 6-го января 1980 г. с 00 час 00 мин 00 сек идет отсчет времени *GPS*. Не исключено, что когда-то календарь *GPS* в силу своих естественных технических преимуществ поглотит все другие мировые календари и станет единым мировым календарем человечества. Во всяком случае, многие технические системы уже сегодня живут во времени *GPS*. Например, бортовая шкала времени Международной космической станции (МКС) – это системное время *GPS*, отсчитываемое в секундах от начала эры *GPS*.

Кроме *GPS* в мире созданы и создаются другие глобальные спутниковые навигационные системы (ГСНС, *GNSS*). Российская ГСНС ГЛОНАСС также, как и *GPS*, позволяет независимо решать весь комплекс задач пространственно-временного обеспечения потребителя. Кроме того, ГЛОНАСС удачно дополняет *GPS*. Совместное использование сигналов двух систем в одной аппаратуре потребителя во многих случаях обеспечивает несомненные преимущества по сравнению с односистемными возможностями *GPS*.

Европейская ГСНС ГАЛИЛЕО (*Galileo*) и китайская Компас (*Compass*) в настоящее время находятся на стадии создания и развития. Каждая из этих систем с точки зрения

потребителя может работать автономно. Однако, создаваемая усилиями четырех мировых космических держав (Россия, США, Европейский союз, КНР) объединенная глобальная спутниковая навигационная система несомненно представляет собой рукотворное чудо, открывающее принципиально новые технические возможности для многих отраслей промышленности. Это, прежде всего, наземный, морской и воздушный транспорт, строительство, обеспечение индивидуальной безопасности и т.п.

Огромные возможности развития появляются и в космической отрасли. Создание ГСНС позволяет реализовать принципиально новые методы решения всего комплекса задач пространственно-временного обеспечения управления космическими аппаратами (КА), включающего задачи навигации на участке выведения, орбитальном участке и участке спуска КА в атмосфере, ориентации и относительной навигации при сближении КА.

Принципиальная возможность решения перечисленных задач с использованием измерений от ГСНС известна и понятна. Понятно также, что эти методы обеспечивают существенное, иногда на порядки, повышение точности и снижение времени решения задачи, позволяют осуществлять эти решения автономно, без воздействования наземного измерительного комплекса, а также существенно снизить вес, габариты, энергопотребление и стоимость аппаратного состава системы по сравнению с аппаратурой, решающей перечисленные задачи традиционными способами. Тем не менее, несмотря на то, что сегодня навигационные приемники ГЛОНАСС и *GPS* используются практически во всех отраслях промышленности, их производство растет в геометрической прогрессии, внедрение аппаратуры спутниковой навигации (АСН) в космическую технику идет крайне медленно. Несмотря на то, что системы ГЛОНАСС и *GPS* развернуты еще в 80-е годы прошлого столетия и функционируют более 25 лет, далеко не все космические аппараты сегодня оснащены АСН.

При этом ни на одном из существующих КА не реализуются в комплексе все перечисленные выше возможности АСН. Как правило, существующая аппаратура по своей структуре аналогична наземным навигационным приемникам и обеспечивает формирование только текущих векторов координат и скорости КА, точность которых недостаточна для решения многих навигационных задач в космосе.

Можно назвать несколько объективных причин медленного проникновения АСН в космическую технику.

Первая причина – это консерватизм космической техники, обусловленный ее высокой стоимостью. Как правило, первый КА серии должен гарантированно исполнить свою миссию. Поэтому разработчики КА предпочитают использовать отработанную, многократно испытанную аппаратуру, пусть она даже и уступает по своим характеристикам новой и более современной аппаратуре.

Вторая причина – тяжелые условия эксплуатации техники в космосе. Это перегрузки и вибрации при выведении и спуске КА, высокая радиация, большие перепады температур и давления, требования длительной безотказной эксплуатации, низкого энергопотребления, массы и объема и т.п. Часто оказывается, что фирмы, производящие лучшие образцы техники для наземной эксплуатации, просто не способны производить аналогичную технику для эксплуатации в космосе.

Третья причина – это сложность воспроизведения на Земле при отработке аппаратуры условий ее космической эксплуатации. Очень часто оказывается, что наземное испытательное оборудование намного сложнее и дороже самой испытываемой аппаратуры. Иногда бывает, что те или иные условия реального космического полета вообще невозможно промоделировать

на Земле. В этом случае приходится проводить космические эксперименты, являющиеся частью программы разработки и испытаний той или иной аппаратуры.

В качестве четвертой причины я бы назвал отсутствие или недостаточность обратной связи для диагностики отказов аппаратуры при ее летной эксплуатации. После выведения КА на орбиту, как правило, отсутствует физический доступ к аппаратуре. Имеющаяся телеметрическая информация, поступающая с КА на Землю, часто бывает недостаточной для однозначного установления причин замечаний к работе аппаратуры или ее отказа. Возникает вопрос, а что же делать со следующим аналогичным запускаемым прибором, если непонятна причина его отказа?

Конечно же, есть и другие причины, которые в совокупности с перечисленными привели к такой задержке внедрения АСН в космическую технику. А ведь игра стоит свеч... Ведь к примеру, АСН весом \sim 12 кг, и энергопотреблением \sim 15 Вт, установленная на КА "Союз", одновременно может решать задачи определения орбиты, формирования высокоточной бортовой шкалы времени, определения ориентации, сближения КА с орбитальной станцией и высокоточной навигации при выведении и посадке КА. Для сравнения, существующая сегодня на КА "Союз", эксплуатируемая десятки лет, система сближения "Курс" весит около 100 кг и потребляет \sim 250 Вт.

Целью настоящего курса лекций является пропаганда скорейшего внедрения АСН во все виды космической техники. В лекциях изложены результаты многолетней работы автора в области космической навигации.

Мне посчастливилось работать в Ракетно-космической корпорации "Энергия" им. С.П. Королёва, которая одной из первых приступила к внедрению АСН в космическую технику. Первая российская АСН, побывавшая в космосе – это экспериментальная аппаратура

космического назначения АСН-2401-2П разработки Российского института радионавигации и времени (РИРВ), г Санкт-Петербург. Эксперимент был проведён в августе–декабре 1998 года на КА "Союз ТМ28", который состыковался с орбитальной станцией "МИР". Дальнейшие разработки АСН проводились для Международной космической станции (МКС), где, в отличие от большинства других КА, имелась возможность доступа к аппаратуре, смены её математики, замены или возврата на Землю отказавших блоков. На МКС был проведён целый ряд экспериментов с АСН, в том числе и международных с участием специалистов *NASA* и *ESA*, по исследованию влияния различных космических факторов на работу АСН. Благодаря этому в РКК "Энергия" накоплен огромный опыт практической работы с аппаратурой АСН в космосе, по созданию космических навигационных систем на базе АСН, а также по созданию инфраструктуры для их наземной отработки и испытаний.

Этот опыт лег в основу данного курса лекций, который автор читает в МГТУ им Н.Э. Баумана, в Московском физико-техническом институте (МФТИ) и в аспирантуре РКК «Энергия». Курс лекций должен быть интересен разработчикам космических систем навигации и управления движением, так как в него включены проблемные вопросы, возникавшие при создании и отработке систем АСН-М МКС, АСН-К кораблей «Союз» и «Прогресс», системы сближения европейского корабля ATV с МКС, а также АСН перспективных космических аппаратов, разрабатываемых в РКК «Энергия».

Ввиду большого объёма материала, курс лекций представлен двумя книгами. Первая книга посвящена, в основном, навигации центра масс КА и состоит из 11 глав.

В Главе 1 рассмотрены основные задачи, а также понятия и определения космической навигации, рассмотрены различные шкалы и форматы времени, используемые в навигации КА

по измерениям АСН, основные системы координат. Рассмотрено невозмущенное движение КА, кеплеровы элементы орбит и другие представления вектора состояния КА.

В Главе 2 рассмотрено возмущенное движение низкоорбитальных КА на примере МКС и высокоорбитальных КА на примере спутников *GPS*. Рассмотрены модели всех составляющих возмущающих ускорений, сколь – либо заметно влияющих на движение КА, включая возмущения, обусловленные фундаментальными параметрами вращения Земли (ПВЗ). Для бортового моделирования предложены упрощенные алгоритмы формирования возмущений, многократно повышающие быстродействие при практическом сохранении точности моделирования.

В Главе 3 рассмотрены методы интегрирования уравнений движения КА и их точность. Предложен метод представления вектора состояния КА в приращениях, для которого быстродействие решения задачи прогноза повышается по сравнению с быстродействием классического метода интегрирования Рунге-Кутта 4-го порядка в ~5 раз.

В Главах 4, 5, 6 рассмотрена идеология построения систем *GPS* и ГЛОНАСС, рекомендуемые официальными документами алгоритмы обработки информации, поступающей от навигационных спутников (НС) в аппаратуру потребителя, оценена точность и быстродействие этих алгоритмов, предложены методы повышения точности.

В Главе 7 рассмотрены методы динамической фильтрации одномоментных измерений координат и скорости (КСВ) АСН, обеспечивающей повышение точности формируемой оценки КА по сравнению с точностью одномоментных навигационных решений АСН.

В Главе 8 рассматривается точность оценки орбиты МКС, формируемой по реальным измерениям АСН-М с использованием рассмотренных алгоритмов динамической фильтрации.

В главе 9 рассмотрены методы динамической фильтрации «сырых» измерений АСН, обладающие существенными преимуществами по сравнению с динамической фильтрацией измерений координат как по точности формируемой оценки орбиты КА, так и устойчивости относительно различных возмущающих факторов.

В Главе 10 рассмотрены алгоритмы формирования оценки орбиты в приращениях по «сырым» измерениям АСН и измерениям бесплатформенной инерциальной системы (БИНС), обладающие существенными преимуществами как по быстродействию, так и по точности формируемой оценки.

В Главе 11 рассмотрены особенности навигации высокоорбитальных КА по измерениям АСН. Предложены алгоритмы динамической фильтрации измерений, проведен анализ точности формируемой оценки орбиты, исследовано влияние на точность различных возмущающих факторов.

В Книге 2 рассмотрены другие задачи координатно-временного обеспечения КА, решаемые АСН:

- формирование бортовой шкалы времени КА;
- определение ориентации;
- решение задачи относительной навигации при сближении КА;
- навигация при спуске КА в атмосфере;
- навигация средств выведения;
- управление движением и ориентацией КА средствами АСН.

Одна из глав второй книги посвящена вопросам проектирования, разработки и наземным испытаниям АСН космического назначения.

Особенностью настоящего курса лекций является то, что после вывода алгоритмов решения той или иной задачи, исследования характеристик полученного решения, приводятся ссылки на сайты, где можно найти программную реализацию этих алгоритмов в виде готовых программных функций. Большая часть этих программных функций разработана моими коллегами и учениками. В результате была создана уникальная библиотека программных функций, из которых, как из кирпичиков, можно формировать сложное навигационное бортовое программное обеспечение. Описание многих из этих программных функций приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций.

В заключение хочу сказать, что настоящий курс лекций создавался в процессе разработки реальных систем навигации МКС и её модулей, кораблей «Союз» и «Прогресс», «Пилотируемой транспортной системы нового поколения», исследовательских спутников и других объектов, разработанных в РКК «Энергия». В этой разработке самое непосредственное участие принимали мои коллеги и ученики С.Н. Рожков, А.С. Семенов, И.А. Краснопольский, О.Ю. Слепушкин, И.И. Ларьков и др. Хочу выскажать им огромную благодарность и за активное участие в подготовке курса лекций. Особую благодарность хочу выскажать Ю.В. Булгаковой за её титанический труд по оформлению и редактированию лекций.

Глава 1 Задачи космической навигации, основные понятия и определения. Невозмущенное движение КА

1.1 Задачи космической навигации

Космическая навигация – широкое понятие, и разными авторами трактуется по-разному. Приведём краткое описание этого термина, которое автор представил в новую редакцию Энциклопедии Машиностроения, том IV-22 Ракетно-космическая техника:

«Космическая навигация (от латинского *navigatio* - мореплавание, *navigo* - плыву на корабле, *navis* - корабль)» - область науки и техники, относящаяся к навигации космических аппаратов (КА). В узком значении к.н. решает задачу определения текущего положения и скорости центра масс КА, а также прогнозирования его движения. В широком значении к.н. включает также определение и прогнозирование параметров углового движения КА - ориентации осей КА в пространстве и его угловой скорости. Система к.н., выполняющая решение навигационной задачи, в общем случае включает бортовые, космические и наземные измерительные и вычислительные средства. В зависимости от типа применяемых навигационных измерительных приборов к.н. делится на радионавигацию, астронавигацию, инерциальную навигацию. В зависимости от участка или вида траектории в целом принято говорить об орбитальной и межпланетной навигации. Радионавигация выполняется по измерениям дальностей и скорости изменения дальностей между КА и измерительными антеннами, расположенными в разных точках Земли. По этим данным в Центре управления полётом КА осуществляется определение параметров движения КА. С конца XX века наиболее универсальными средствами выполнения навигации как орбитальных КА, так и наземных

объектов стали Глобальные спутниковые навигационные системы (ГСНС): американская *GPS* (*Global Positioning System*) и российская ГЛОНАСС (Глобальная навигационная спутниковая система). В настоящее время идёт разработка европейской ГСНС *GALILEO* и китайской *COMPASS*. К.н. по измерениям ГСНС относится к орбитальной радионавигации. Определение параметров движения КА здесь основано на измерениях дальности и скорости изменения дальности между КА и навигационными спутниками ГСНС, параметры движения которых известны с высокой точностью. По сигналам ГСНС могут определяться не только параметры движения центра масс КА, но и его ориентация. Астронавигация выполняется по измерениям углов между осями КА и звездами, планетами или ориентирами на поверхности планет с известными координатами. Инерциальная навигация основана на свойствах различных устройств выполнять измерения ускорений и угловой скорости КА и на базе этих измерений определять параметры движения КА. Межпланетная к.н. может выполняться как по радиоизмерениям с Земли, так и по измерениям автономных систем навигации, устанавливаемых непосредственно на КА. Автономная к.н., как правило, реализует методы астронавигации и инерциальной навигации. Расчёт параметров движения КА в автономных системах к.н. выполняется непосредственно в бортовой вычислительной машине. На пилотируемых КА могут быть установлены приборы, по которым некоторые навигационные параметры движения КА определяет космонавт. В этом случае говорят о ручных или полуавтоматических системах к.н.»

На мой взгляд, такое определение дает краткое, но внятное описание предмета, хотя, как показывает практика, термин «космическая навигация» допускает еще некоторое расширение, выделяющее в самостоятельный раздел задачу относительной навигации двух сближающихся КА и задачи навигации КА при выводении на орбиту и спуске в атмосфере. Разделение

космической навигации на разные предметы имеет право на существование, так как движение КА в каждом случае описывается разными уравнениями и, соответственно, по-разному решается каждая из задач. При этом традиционное решение каждой задачи осуществляется с использованием принципиально различной аппаратуры, построенной на разных физических принципах. Решение этих задач по сигналам ГСНС хотя и имеют общую основу, также осуществляются разными методами с использованием принципиально разных алгоритмов. Тем не менее, во всех случаях космическая навигация – это наука о движении космических аппаратов.

Движение – это изменение положения объекта во времени. Поэтому в первую очередь определим основные понятия навигации – время и положение.

1.2 Время в космической навигации

Для измерения времени пользуются естественными или искусственно создаваемыми периодическими процессами с достаточно постоянным периодом повторения. Вращение небесного свода и периодическое движение по нему Солнца, являющееся отражением вращения Земли вокруг своей оси и обращения её вокруг Солнца, позволяют установить соответственно две основные единицы измерения времени – сутки и год.

1/86400 часть суток называется секундой. Такое определение секунды было действительно до 1965 г., когда на XII Генеральной конференции по мерам и весам, а также Международным комитетом по мерам и весам в системе СИ было принято определение секунды, основанное на атомном стандарте частоты: секунда равна 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями $F=4$, $M=0$ и $F=3$,

М=0 основного состояния $2\ S_{1/2}$ атома цезия-133, не возмущённого внешними полями, и что частоте этого перехода приписывается значение 9192631770 Гц. Эта единица стала единицей Всемирного координированного времени *UTC*, которое рассчитывается на основе более чем 200 атомных часов, принадлежащих различным метрологическим и научным учреждениям нескольких десятков стран мира [59]. Регулярные сличения между лабораториями времени проводятся под эгидой Международного бюро мер и весов (МБМВ, Франция) и Международной службы вращения Земли (МСВЗ, Франция).

Аббревиатура UTC не имеет конкретной расшифровки. Когда в 1970 году требовалось создать не зависящее от языка сокращение, Международный союз электросвязи счел, что английское *CUT* = *Coordinated Universal Time* или французское *TUC* = *Temps Universel Coordonné* не подходит на эту роль. Поэтому был предложен нейтральный вариант *UTC*.

UTC рассчитывается на основе более чем 200 атомных часов, принадлежащим различным метрологическим и научным учреждениям нескольких десятков стран мира. Регулярные сличения между лабораториями времени проводятся под эгидой Международного бюро мер и весов (МБМВ) и Международной службы вращения Земли (МСВЗ). Национальные шкалы времени (ШВ) формируются в соответствии с государственными эталонами времени и частоты (ГЭВЧ).

Россия, как и другие страны, имеет свою национальную шкалу времени *UTC (SU)*, которая является приближением к *UTC*. Шкала времени *UTC (SU)* формируется Государственной службой времени и частоты, поддерживаемой ВНИИФТРИ (г. Менделеев Ленинградской области), с использованием национального эталона, в состав которого входят активные водородные стандарты частоты и времени. Алгоритм формирования *UTC (SU)* во многом похож на алгоритм формирования *UTC*. Она строится в два этапа.

На первом этапе формируется, так называемая, математическая шкала времени, которая опирается на стандарты частоты, входящие в состав ГЭВЧ. Математическая ШВ – это не что иное, как "среднее" время группы атомных часов.

На втором этапе, с учетом оценок поведения математической ШВ относительно *UTC* на основании официальных данных МБМВ в ежемесячном циркуляре (*circular_T*), формируется система корректирующих поправок, обеспечивающая слежение *UTC (SU)* за *UTC*. Поскольку официальные данные МБМВ появляются с временной задержкой около 45 суток, шкала времени *UTC (SU)* автономна в этих временных пределах, т.е. формируется на основе прогноза полуторамесячной давности.

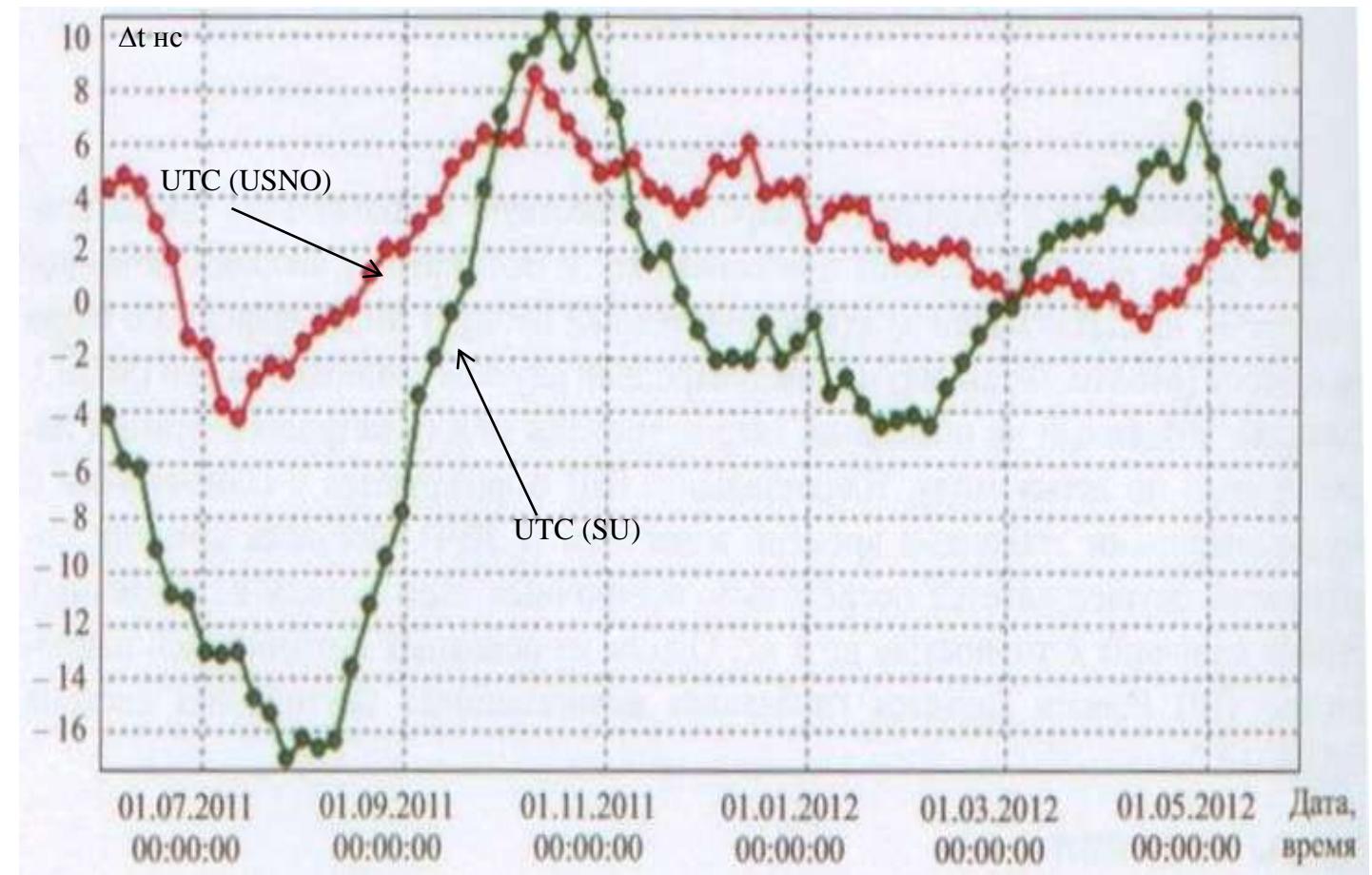
В США существует, по крайней мере, три лаборатории, участвующие в формировании *UTC*: Военно-морская обсерватория (*USNO*), Национальный институт стандартов и технологий (*NIST*) и Военно-морская исследовательская лаборатория (*NRL*). Однако, наибольший вес при построении *UTC* имеет ШВ *UTC (USNO)*, которая в настоящее время наилучшим образом соответствует *UTC* по сравнению со шкалами всех мировых лабораторий. Эта шкала имеет физическую реализацию, а измерения геодезических навигационных приемников, сопряженных со шкалой *UTC (USNO)*, доступны через Интернет с задержкой 1 час.

На рис. 1.0 приведены графики рассогласований шкал времени *UTC (USNO)* и *UTC (SU)* относительно *UTC* на интервале от 01.07.2011 по 01.05.2012. Приведённые графики дают представление о точности формирования рассмотренных шкал времени.

Переход к атомному стандарту частоты был обусловлен, прежде всего, высокой равномерностью шкалы, в то время как вращение Земли не является строго равномерным. Под действием различных внешних и внутренних возмущений угловая скорость вращения Земли непрерывно меняется. Уже в 1965 году период обращения на 2мс превышал принятые по

новому стандарту сутки. Для более полного представления о скорости вращения Земли на рис. 1.1 [с.1] приведён график отклонений периода вращения Земли от номинального в период с 1965 – 2010 гг. Из приведённого графика видно, что на указанном интервале времени реальный период вращения Земли отличается от номинального на величину от +4мс до – 1мс. При этом график отклонения периода от номинального может быть представлен некоторой осреднённой плохо прогнозируемой кривой, на которую наложен случайный шум амплитудой до 1мс.

Рис. 1.0 Разность UTC ($USNO$) и $UTC(SU)$ относительно UTC согласно оценкам МБМВ



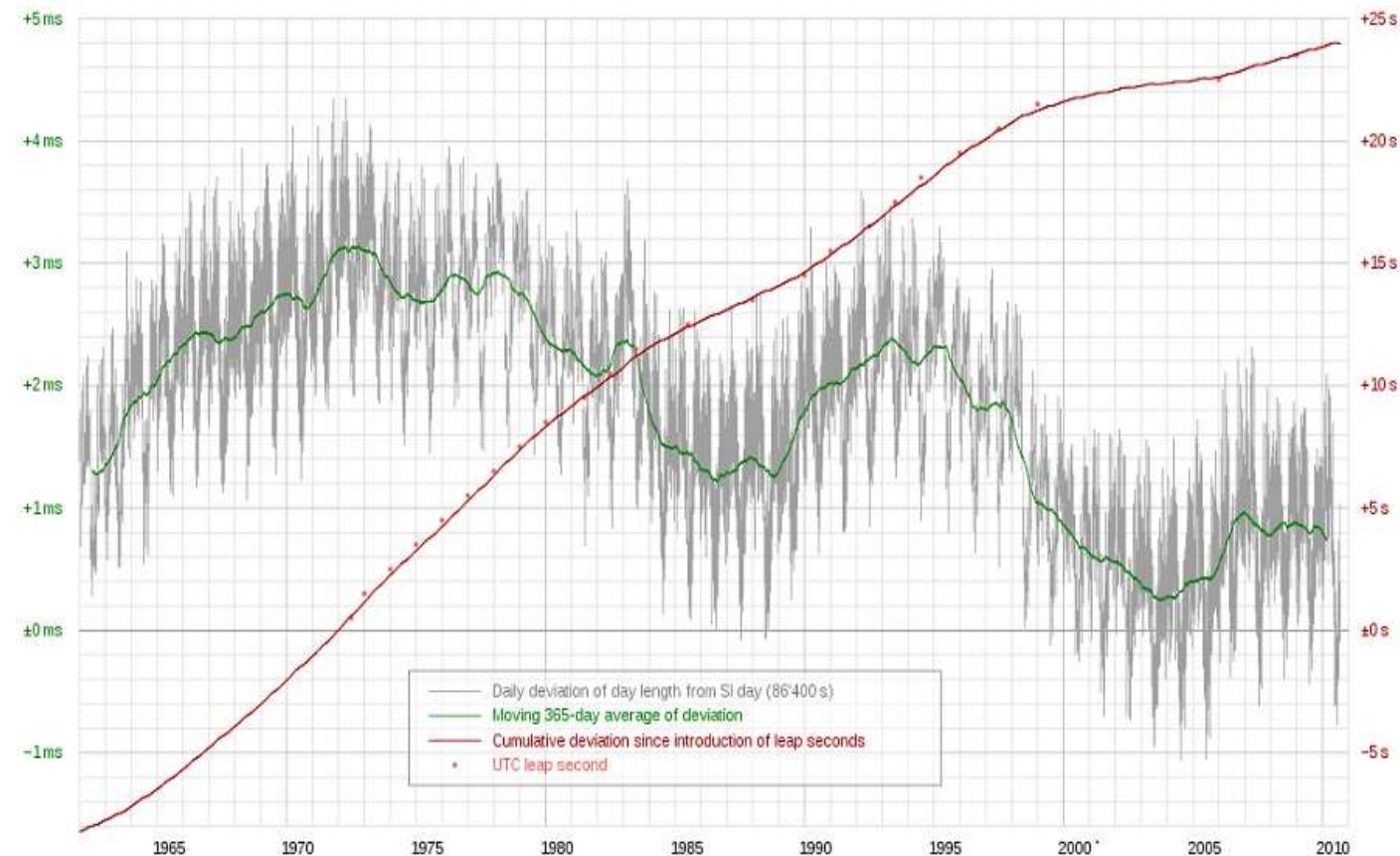


Рис. 1.1 - Графики отклонения периода вращения Земли от номинального значения и роста *leapsec*.

В результате шкала времени *UTC* непрерывно расходится с так называемым Всемирным временем *UT* (*Universal Time*), к которому привязано движение небесных тел и основополагающие понятия времени – полночь, полдень и т.п. Так как космическая техника существенно связана с положением небесных тел, то шкала *UT*, определяющая положение

небесных тел на небесной сфере, также как и UTC , будет играть важную роль в нашем изучении.

Существует много разновидностей шкалы $UT - UT0, UT1, UT2 \dots$, учитывающих изменение положения меридианов Земли с различной степенью точности. Все эти разновидности шкал отличаются между собой на время не превышающее величины $1\div2$ мс. Угол поворота Земли за это время не превышает $0,03''$. В большинстве случаев практической деятельности в области космической навигации такое различие в угловом положении Земли относительно инерциального пространства является несущественным. Поэтому мы не будем вникать в тонкости разновидностей шкал времени UT и для определённости будем использовать шкалу времени $UT1$ – всемирное время среднего Гринвичского меридиана, рассчитанное с учётом движения полюсов Земли.

Приведённая на рис. 1.1 монотонно возрастающая кривая является интегралом от кривой отклонения реального периода вращения Земли и представляет собой график расхождения $UT1$ с равномерной атомной шкалой времени, начиная с 1960 года. Такое же расхождение было бы и со шкалой UTC , если бы периодически не проводилась её коррекция. Шкала UTC периодически (с периодом $0,5\div5$ л) корректируется на 1 сек так, чтобы разность ($UT-UTC$) не превышала 0,9 сек. Коррекции часов выполняются 1 января или 1 июня в 00 час 00 мин 00 сек. О проведении коррекции часов UTC заблаговременно сообщают средства массовой информации. Таким образом, достоинством шкалы UTC является высокая равномерность, присущая атомному времени, и достаточно точная привязка (точнее 0,9с) к шкале $UT1$, описывающей естественные природные процессы (восход, заход), что характерно для среднего солнечного времени.

Однако в некоторых случаях точности привязки $UT1$ к UTC 0,9с оказывается недостаточно для решения той или иной навигационной задачи. Разность времени между двумя шкалами $dUT1$ определяется различными астрономическими службами и выставляется на различных сайтах с высокой точностью. Достаточно приближенный график $dUT1$ для интервала 25 лет (с 1985 года) приведён на рис. 1.2

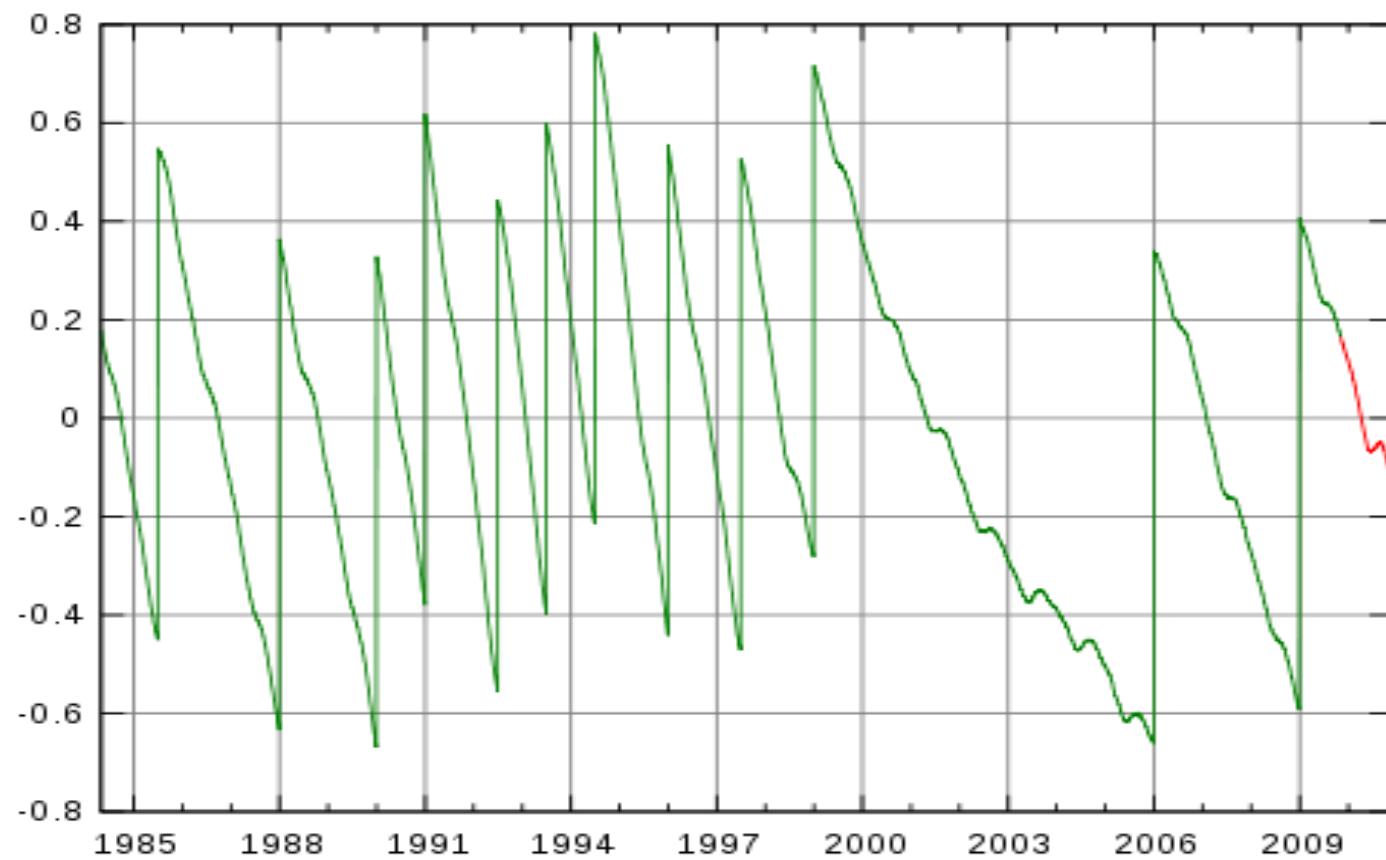


Рис. 1.2 График расхождения шкал времени UTC и $UT1$

Из графика рис. 1.2 можно увидеть, что текущая величина $dUT1$ является плохо прогнозируемой и для точных расчетов следует использовать информацию, получаемую из астрономических наблюдений. Значение $dUT1$ мы в дальнейшем будем использовать для привязки гринвичской системы координат к инерциальной системе. Текущее значение $dUT1$ можно найти на сайте [с.1].

1.3 Основные системы координат

Говоря о положении КА в пространстве, необходимо определить некоторую систему отсчета, относительно которой определяется это положение, т.е. определить систему координат, относительно которой рассматривается движение КА.

С древних времён на Земле используются географические системы координат. В настоящее время одной из основных таких систем является Гринвичская географическая система координат (ГГСК) в которой Земля представлена эллипсоидом вращения с размерами: R_e – радиус экватора и R_p – радиус полюса, ось симметрии эллипсоида совпадает с осью вращения Земли, а поверхность эллипсоида разбита на параллели и меридианы. Параллель – это линия пересечения плоскостей, нормальных оси вращения, с поверхностью эллипсоида. Меридианы – линии пересечения плоскостей, проходящих через ось вращения, с поверхностью эллипсоида.

Параллели и меридианы имеют нумерацию, выраженную в единицах измерения углов (градусы, минуты, секунды). Нулевой параллелью является экватор, нулевым меридианом – меридиан, проходящий через условную точку на поверхности Земли в г. Гринвич (Англия). Географической широтой данной точки называется угол между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора. Положительный отсчет широты от 0° до 90°

идёт от экватора к северному полюсу (северная широта), отрицательный от 0° до -90° – от экватора к южному полюсу (южная широта). Географической долготой данной точки называется угол между нулевым меридианом и меридианом, проходящим через данную точку. Положительный отсчёт долготы (восточная долгота) идёт от 0° до 180° в восточном направлении, отрицательный (западная долгота) от 0° до -180° – в западном направлении. Географической высотой данной точки является кратчайшее расстояние от данной точки до поверхности эллипсоида. Если данная точка находится выше поверхности эллипсоида, то высота положительная, если ниже – отрицательная.

Существует множество разновидностей (международных, национальных, местных) ГГСК, отличающихся размерами и ориентацией эллипсоида относительно Земли. Мы будем рассматривать две основные системы – это американская система WGS-84 и российская система ПЗ-90.02. Для WGS-84 радиус эллипсоида на экваторе равен $R_\vartheta=6378137\text{м}$, коэффициент сжатия $\alpha = \frac{R_\vartheta - R_\pi}{R_\vartheta} = 1/298.257223563$, где R_π – радиус эллипсоида на полюсе.

Для ПЗ-90.02: $R_\vartheta=6378136\text{ м}$, $\alpha=1/298.25784$.

Направления осей эллипсоида совпадают. Имеется незначительное смещение центров эллипсоида (в пределах 30 см), которое приведено ниже (см. формулу (1.1)).

ГГСК чаще используется для определения координат объектов, расположенных или движущихся на Земле. В космической навигации чаще используется прямоугольная гринвичская система координат (ГСК), обозначение которой на английском языке следующее –*Earth-Centred Earth-Fixed (ECEF)*. В качестве основных таких систем также будем рассматривать WGS-84 и ПЗ-90.02. Начала координат этих систем расположены в центрах соответствующих эллипсоидов, а прямоугольные оси X , Y , Z направлены по главным осям

эллипсоидов (ось Z - в направлении северного полюса, ось X - лежит на пересечении экватора с гринвичским меридианом). Принципиально для двух этих систем определения одинаковы. Однако они незначительно отличаются друг от друга, так как определены независимо друг от друга и физически закреплены наземными реперными точками.

Согласно [76] переход между двумя системами определён формулой:

$$\bar{X}_{\text{ПЗ-90.02}} = \bar{X}_{\text{WGS-84}} - \begin{bmatrix} -0.36 \\ 0.08 \\ 0.18 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Так как смещение между двумя системами координат незначительно и составляет $\sim 0,4\text{м}$, в дальнейшем (если нет особой необходимости) этим смещением будем пренебрегать и любую из систем ПЗ-90.02 или WGS-84 называть ГСК.

Переход между ГГСК и ГСК выполняется по следующему алгоритму:

$$\left. \begin{array}{l} X = (N + H) \cos B \cos L \\ Y = (N + H) \cos B \sin L \\ Z = [(1 - e^2)N + H] \sin B \end{array} \right\}, \quad (1.2)$$

где X, Y, Z – прямоугольные пространственные координаты точки;
 B, L – геодезические широта и долгота точки соответственно, рад;
 H – геодезическая высота точки, м;
 N – радиус кривизны первого вертикала, м;
 e – эксцентриситет эллипсоида.

Значения радиуса кривизны первого вертикала и квадрата эксцентрикитета эллипсоида вычисляют, соответственно, по формулам:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad (1.3)$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (1.4)$$

где a – большая полуось эллипсоида, м;

α - сжатие эллипсоида.

Для преобразования пространственных прямоугольных координат в геодезические необходимо проведение итераций при вычислении геодезической широты.

Для этого используют следующий алгоритм:

а) вычисляют вспомогательную величину D по формуле

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (1.5)$$

б) анализируют значение D :

1) если $D=0$, то

$$B = \frac{\pi}{2} \frac{Z}{|Z|}; \quad (1.6)$$

$$L=0;$$

$$H = Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (1.7)$$

2) если $D \neq 0$, при

$$\left. \begin{array}{l} Y < 0, X > 0, \text{то } L = 2\pi - L_a \\ Y < 0, X < 0, \text{то } L = \pi + L_a \\ Y > 0, X < 0, \text{то } L = \pi - L_a \\ Y > 0, X > 0, \text{то } L = L_a \\ Y = 0, X > 0, \text{то } L = 0 \\ Y = 0, X < 0, \text{то } L = \pi \end{array} \right\}, \quad (1.8)$$

где

$$L_a = \left| \arcsin \left(\frac{Y}{D} \right) \right|. \quad (1.9)$$

в) анализируют значение Z :

1) если $Z=0$, то

$$b=0; H=D-a. \quad (1.10)$$

2) во всех других случаях вычисления выполняют следующим образом:

– находят вспомогательные величины r, c, p по формулам:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (1.11)$$

$$c = \arcsin \left(\frac{Z}{r} \right). \quad (1.12)$$

$$p = \frac{e^2 a}{2r}. \quad (1.13)$$

– реализуют итеративный процесс, используя вспомогательные величины s_1 и s_2 :

$$s_1 = 0.$$

$$b=c+s_1.$$

$$s_2 = \arcsin\left(\frac{\rho \sin(2b)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 b}}\right) \quad (1.16)$$

$$d = |s_2 - s_1|. \quad (1.17)$$

- если значение d , определяемое по формуле (1.17), меньше установленного значения допуска, то

$$B=b. \quad (1.18)$$

$$H = D \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (1.19)$$

- если значение d равно или более установленного значения допуска, то

$$s_1=s_2 \quad (1.20)$$

и вычисления повторяют, начиная с формулы (1.15).

При преобразованиях координат в качестве допуска прекращения итеративного процесса принимают значение $10^{-4}''$. В этом случае погрешность вычисления геодезической высоты не превышает 0,003 м.

Неформальное описание программных функций взаимного преобразования ГСК с ГГСК и описание их интерфейсов приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же будет приведён сайт, на котором можно найти программную реализацию этих функций.

Одной из часто используемых в космической навигации систем координат является инерциальная система координат (ИСК), начало которой находится в центре Земли, ось Z совпадает с осью Z ГСК, оси X , Y лежат в плоскости экватора, ось X направлена в точку весеннего равноденствия (*Celestial Reference Frame (CRF)*). Однако точка весеннего равноденствия, а также ось Z ГСК хоть и медленно, но изменяют своё направление в

инерциальном пространстве, поэтому при определении ИСК следует определить эпоху, к которой относятся выбранные направления. В качестве такой эпохи была выбрана эпоха $j2000.0$, которой соответствует Юлианская дата 1 января 2000 г 12 час 00 мин (что соответствует времени 11:58:55,816 1 января 2000 г UTC). Поэтому в дальнейшем в качестве ИСК (если не будет оговорено другое) будем понимать ИСК на указанную дату. Для данной ИСК разработаны различные астрономические каталоги, позволяющие определить координаты Солнца, Луны, звёзд, планет и других светил именно в данной системе координат. Разработаны также высокоточные алгоритмы и программы, позволяющие осуществлять переход из ГСК в ИСК и обратно. Однако, прежде чем приступить к алгоритмам преобразования ГСК в ИСК, рассмотрим особенности движения Земли и, соответственно, ГСК в ИСК.

В идеальном случае, если бы Земля вращалась вокруг оси Z ГСК с постоянной скоростью, а её ось вращения сохраняла своё положение в пространстве, то матрица перевода ИСК в ГСК имела бы вид

$$H_{I\!I-G} = H_{I\!I-G}^0 \begin{pmatrix} \cos \omega_3 t & +\sin \omega_3 t & 0 \\ -\sin \omega_3 t & \cos \omega_3 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где ω_3 – угловая скорость вращения Земли;

t – время от начала эпохи;

$H_{I\!I-G}^0$ – матрица перехода от ИСК в ГСК в начальную эпоху.

Однако, мы уже говорили, что истинная скорость вращения Земли не постоянна и не соответствует номинальной угловой скорости. Если время вычисляется в шкале UTC, то к

этому времени необходимо добавить поправку на ошибку скорости вращения Земли $dUT1$. Максимальная угловая ошибка в искомой матрице преобразования координат, которая может возникнуть из-за неучета поправка $dUT1$, составляет:

$$\Delta\phi_{UT1} = dUT1_{max} \cdot \omega_3 \cong 15''. \quad (1.22)$$

Вторым фактором, влияющим на матрицу преобразования ИСК в ГСК, является прецессия и нутация оси вращения Земли. Из-за несферичности Земля имеет неравные главные моменты инерции. В этом случае на любое тело, находящееся в гравитационном поле других тел, действует гравитационный момент, влияющий на параметры его углового движения. В данном случае Земля находится в гравитационном поле Солнца, Луны и других планет. Действующий в этом случае на Землю гравитационный момент заставляет прецессировать в инерциальном пространстве кинетический момент Земли, близкий по направлению к угловой скорости вращения Земли. Под действием основного момента от Солнца кинетический момент Земли и, соответственно, ось Z ГСК совершает медленное прецессионное движение по конусу с углом при вершине $\sim 23^\circ$ и осью конуса перпендикулярной плоскости эклиптики. Период такого движения составляет ~ 26000 лет. За год угол прецессии составляет $\sim 20''$. Под действием гравитационного момента от Луны и переменной составляющей гравитационного момента от Солнца (а также из-за гравитационного влияния планет) Земля совершает целый ряд мелких колебаний с различными периодами около положения, определяемого прецессией. Это движение называется нутацией. Угловая скорость нутации достигает величины $\sim 0,1''/\text{сутки}$. Для наглядности на рис. 1.3 приведены графики отклонений оси Z Земли вокруг осей X и Y ИСК от своего первоначального положения (на 1 января 2000 года) в течение двухнедельного интервала от 26.08.2007 по 11.09.2007 г.

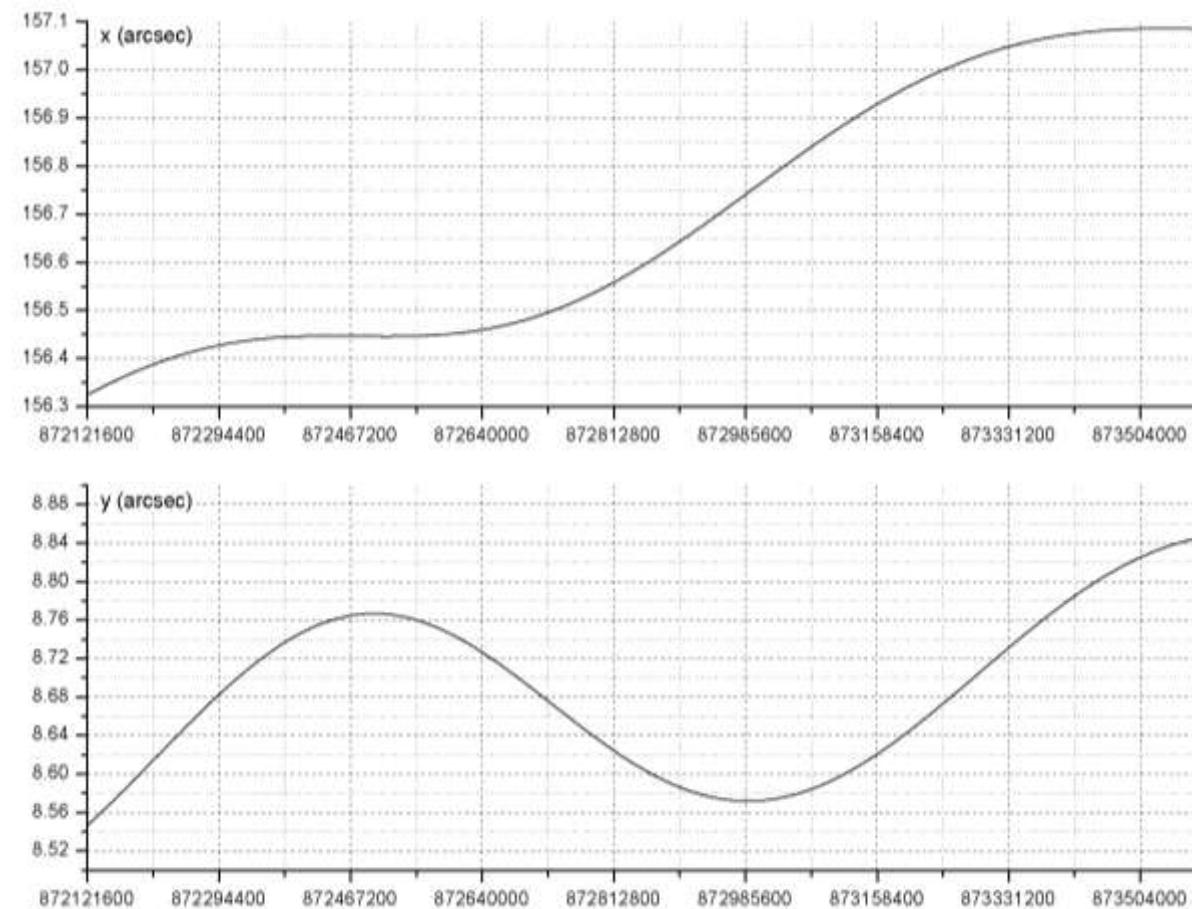


Рис. 1.3 Графики отклонений оси Z Земли от своего первоначального положения в результате прецессии и нутации.

В настоящее время разработаны сложные алгоритмы, позволяющие рассчитывать углы прецессии и нутации с высокой точностью ($\sim 10^{-3}$ угловой секунды) на любом разумном интервале времени. На практике это выражается в формировании матрицы $R_{\text{пп}}$ прецессии-нутации, как функции времени. Существуют различные алгоритмы и программные функции, формирующие матрицу прецессии-нутации $R_{\text{пп}}$, преобразующую положение полюса мира от нулевой эпохи (01.01.2000) на текущий момент. В первом приближении можно считать, что эта матрица является матрицей двух малых поворотов оси Z на углы φ_x и φ_y .

После преобразования положения оси вращения Земли, обусловленной её нутацией и прецессией, необходимо выполнить разворот вокруг оси Z на угол разворота Земли от момента нулевой эпохи до заданного момента времени T_{UTC} с учетом поправки $dUT1$ и начального угла рассогласования φ_0 между осью $X_{\text{ГСК}}$ и осью $X_{\text{ИСК}}$ на нулевую эпоху. Матрица такого разворота имеет вид:

$$R_s = \begin{pmatrix} \cos[\varphi_0 + \omega_3(t + dUT1)] & \sin[\varphi_0 + \omega_3(t + dUT1)] & 0 \\ -\sin[\varphi_0 + \omega_3(t + dUT1)] & \cos[\varphi_0 + \omega_3(t + dUT1)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где φ_0 – начальный угол рассогласования между осью $X_{\text{ГСК}}$ и осью $X_{\text{ИСК}}$ на нулевую эпоху ($T_{UTC}^0 = 11:58:55.816$ 01.01.2000);

$t = T_{UTC} - T_{UTC}^0$ – интервал времени от нулевой эпохи до текущего момента;
 $dUT1$ – поправка к времени UTC (разность между $UT1$ и UTC).

В разделе 1.2 отмечалось, что поправка $dUT1$ является плохо прогнозируемой на интервал времени более двух недель. Её значение с точностью до 1 мс выставляется на сайте

Международной службы вращения Земли [с.2] и для точного преобразования ГСК в ИСК и обратно необходим учёт этой поправки.

Следующим фактором, влияющим на матрицу преобразования ИСК в ГСК, является смещение истинной оси вращения Земли от оси Z ГСК. Такое смещение также обусловлено воздействием внешних возмущающих моментов на Землю. При таком воздействии возникает рассогласование между векторами кинетического момента Земли и угловой скорости вращения Земли. При этом смещение вектора угловой скорости относительно оси Z ГСК достигает $1''$ и является плохо прогнозируемым. На рис. 1.4 приведён график перемещений полюса Земли (определенного положением вектора угловой скорости Земли) вдоль осей X и Y ГСК за последние 5 лет (с 2005 по 2010 год), из которого следует, что полюс колеблется около некоторого среднего положения с амплитудой ~ 10 м. Средняя скорость перемещения полюса составляет ~ 30 м/год ($1''/\text{год}$).

Значение смещения полюса относительно ГСК с высокой точностью выставляется на сайте Международной службы вращения Земли [с.2]. Они должны учитываться при преобразовании ИСК в ГСК. Если же требуется точность такого преобразования ниже $1''$, то смещение полюсов можно не учитывать. Как правило, это касается низкоорбитальных КА, точность знания орбиты которых обычно не превышает $10 \div 30$ м. Для геостационарной орбиты, например, $1''$ соответствует 200 м по положению.

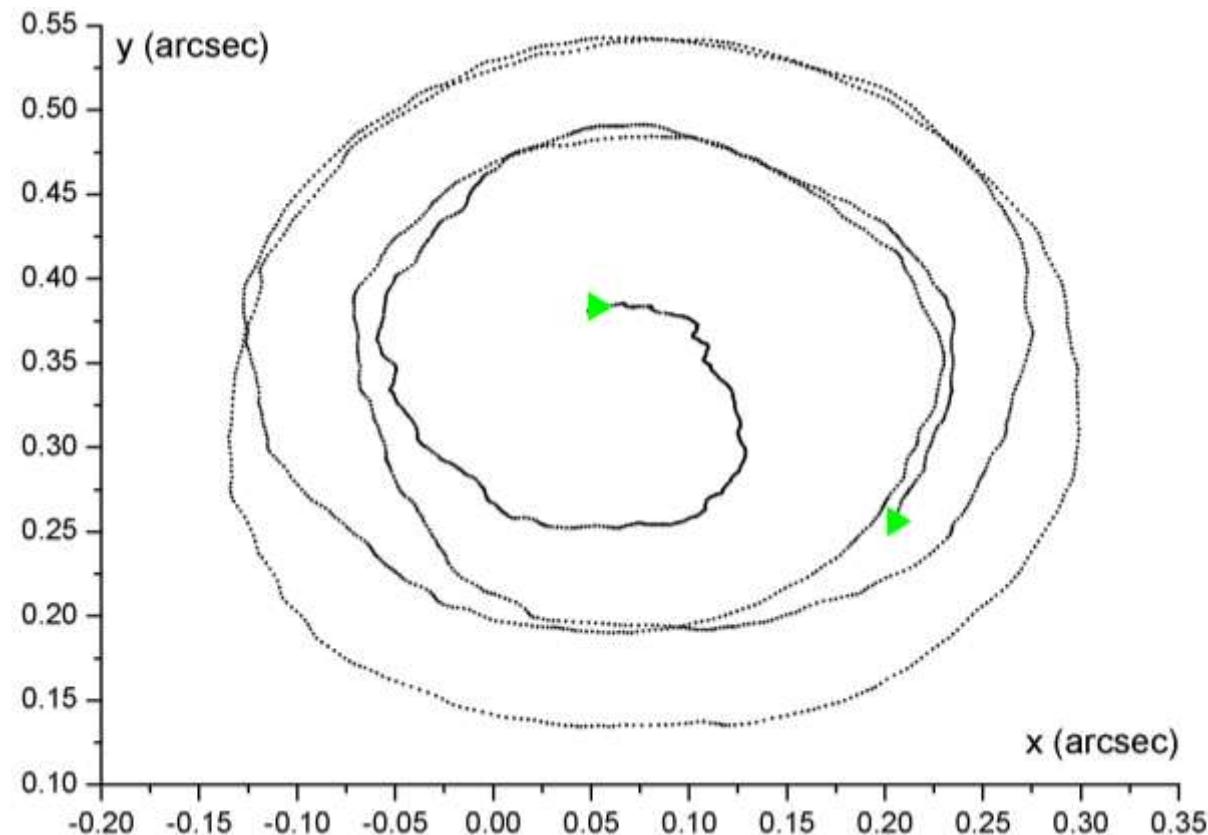


Рис. 1.4 График смещения реального полюса Земли от оси Z ГСК.

С учётом движения полюсов матрица преобразования ИСК в ГСК может быть представлена в виде:

$$R_{I\rightarrow T} = R_M \ R_S \ R_n \ R_p \quad (1.24)$$

где R_p – матрица прецессии;

R_n – матрица нутации;

R_S – матрица вращения;

R_M – матрица движения полюсов.

Сегодня в Интернете на ряде сайтов можно найти алгоритмы или программные функции, формирующие матрицу $R_{И\cdot Г}$ с различной степенью точности. В общем, интерфейс этих функций включает заданное время UTC , поправку к времени $dUT1$, смещение полюса Земли (Δx , Δy). Основным отличием между этими алгоритмами являются алгоритмы вычисления матриц прецессии и нутации, учитывающие влияние Луны, Солнца и планет с разной степенью точности. Общим для всех функций является большой объём занимаемой памяти (30÷50 Кб) и большое время счета.

Объём вычислений для реализации той или иной программной функции является важной её характеристикой, особенно при реализации этой функции на бортовых вычислительных средствах, имеющих существенно меньшее быстродействие по сравнению с наземными средствами. Поэтому при сравнении тех или иных программных функций хотелось бы приблизительно оценивать требуемый объём вычислений, необходимый для их реализации. В качестве относительной количественной характеристики объёма вычислений той или иной программной функции будем считать время её реализации на современном персональном компьютере (*Pentium 4*, 3ГГц) и в бортовом навигационном процессоре навигационной аппаратуры АСН-М МКС, который имеет сравнительно высокое быстродействие по сравнению с другими бортовыми вычислительными средствами, но в ~140 раз меньшее быстродействие по сравнению с быстродействием персонального компьютера.

С помощью упомянутых вычислительных средств экспериментально было оценено время реализации различных программных функций, обеспечивающих вычисление матрицы $R_{И\cdot Г}$. Для персонального компьютера это время лежит в диапазоне 500÷800 мкс, для АСН-М – 70÷110 мс. Отметим, что длительность решения какой-либо отдельной задачи, превышающая

10 мс, является чрезвычайно большой для бортовых вычислительных средств, одновременно решающих большое количество других задач. Поэтому для бортовой реализации был предложен метод, позволяющий в сотни раз снизить объём необходимых вычислений для формирования матрицы $R_{I\text{-}G}$. Суть метода заключается в том, что вычислительный процесс формирования матрицы $R_{I\text{-}G}$ выполняется в два этапа:

- разовый этап инициализации;
- непрерывный этап формирования $R_{I\text{-}G}$ в реальном времени.

Разовый этап инициализации выполняется однократно, например, при включении системы. На этом этапе вычисляется матрица R_M и $R_{I\text{-}G}$.

$$R_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & -\Delta y \\ -\Delta x & \Delta y & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

где Δx , Δy – смещения реального полюса Земли в угловых секундах, значения которых регулярно обновляются, например, на сайте [с.2].

Матрица $R_{I\text{-}G}$ вычисляется на текущий момент T_{UTC}^0 с учётом поправки $dUT1$, регулярно обновляемой, например, на сайте [с.2].

Из равенств (1.24) и (1.25) определим матрицу:

$$R_0 = R_S R_n R_P = R_M^T R_{I\text{-}G_0}, \quad (1.26)$$

где $R_{I\text{-}G_0}$ – матрица $R_{I\text{-}G}$, вычисленная на этапе инициализации на момент T_{UTC}^0 .

Матрицы R_0 и R_M запоминаются и на всём последующем этапе считаются константами. Текущая матрица $R_{I\text{-}G}$ определяется по формуле:

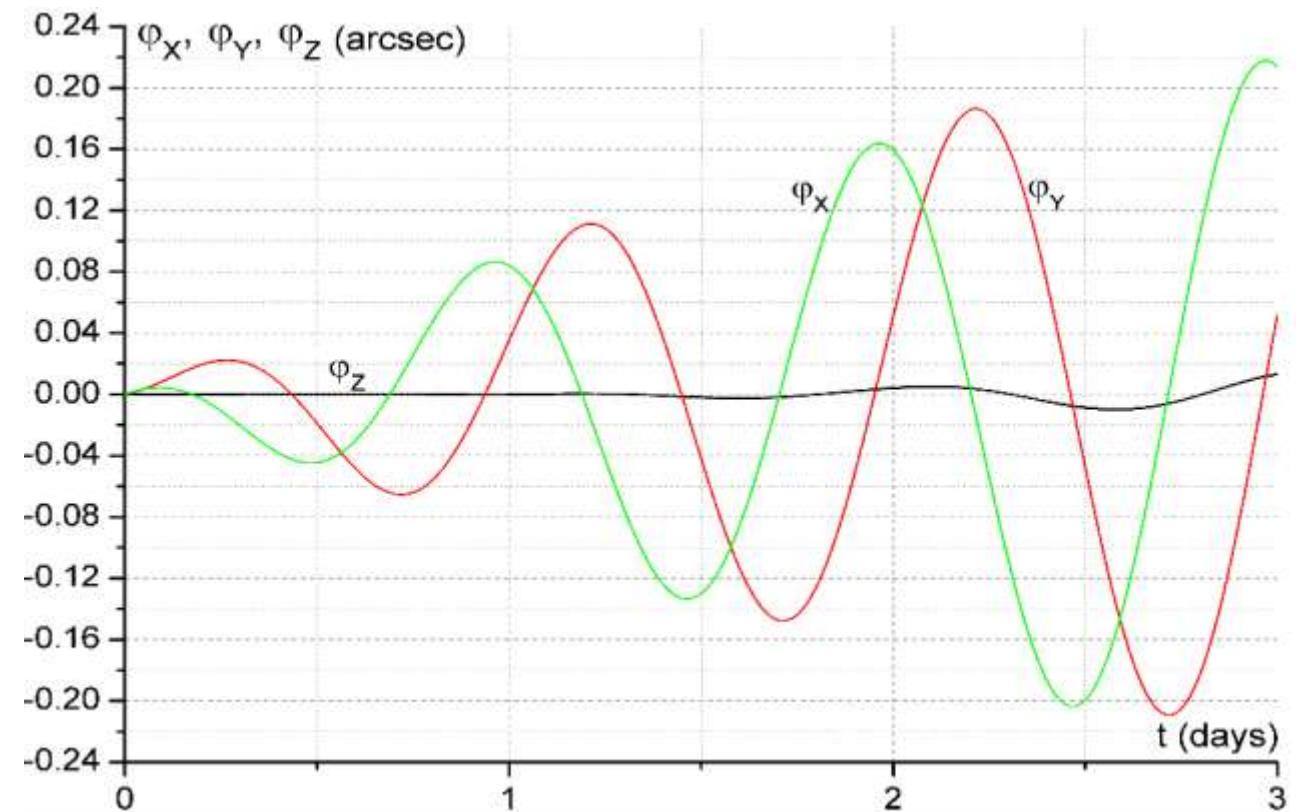
$$R_{II-I} = R_M R_{S_0} R_0 \quad (1.27)$$

где $R_{S_0} = \begin{pmatrix} \cos \omega_3 t & \sin \omega_3 t & 0 \\ -\sin \omega_3 t & \cos \omega_3 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица вращения от момента T_{UTC}^0 ;

ω_3 – угловая скорость вращения Земли;

t – текущее время от момента T_{UTC}^0 .

Рис. 1.5 Графики нарастания ошибок приближенного алгоритма формирования матрицы перехода из ГСК в систему координат $j2000$.



Так как на рассматриваемом интервале времени t мы считаем матрицу R_0 , смещение полюса Δx , Δy и поправку времени $dUT1$ константами, а в реальности эти параметры изменяются, то со временем ошибка отклонения формируемой по алгоритму (1.27) матрицы $R_{и-г}$ будет увеличиваться. На рисунке 1.5 приведён график ошибок матрицы $R_{и-г}$ относительно точной матрицы по малым углам φ_x , φ_y , φ_z , выраженным в угловых секундах. Из приведённого графика следует, что рост ошибки матрицы $R_{и-г}$, формируемой по предложенному алгоритму, составляет $\sim 0,1''$ в сутки. Поэтому, если переинициализацию проводить 1 раз в сутки, то точность формируемой матрицы $R_{и-г}$ будет составлять $0,1''$. При проведении переинициализации 1 раз в 10 суток ошибка будет достигать величины $1''$. При незначительной потере в точности предложенный метод обеспечивает снижение объёма вычислений в $500 \div 800$ раз. Время реализации дежурной части программы составляет на персональном компьютере 1мкс, в АСН-М – 140 мкс. При таком быстродействии данная задача может регулярно решаться на любых бортовых вычислительных средствах. Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

Точность реализации матрицы $R_{и-г}$ при использовании этой функции будет определяться частотой проведения её переинициализации.

Также одной из основных систем координат в космической навигации является орбитальная система координат (ОСК), которую определим следующим образом:

Начало ОСК - в центре масс КА;

Ось Y ОСК направлена по местной вертикали параллельно вектору координат КА \bar{X} , направленному из центра Земли в центр масс КА;

Ось X ОСК лежит в плоскости, образованной осью Y ОСК и вектором \bar{V}_u абсолютной скорости КА (вектор скорости КА в ИСК), и составляет с вектором абсолютной скорости острый угол. Для круговой орбиты ось X совпадает по направлению с вектором \bar{V}_u .

Пусть \bar{X}_u , \bar{V}_u векторы координат и скорости КА в ИСК. Тогда матрица перехода A_{u-0} от ИСК в ОСК определяется по следующему алгоритму:

Единичный вектор $\bar{y}_0 = \frac{\bar{X}_u}{|\bar{X}_u|}$;

Единичный вектор

$$\bar{z}_0 = \frac{[\bar{V}_u \times \bar{y}_0]}{|\bar{V}_u \times \bar{y}_0|}. \quad (1.28)$$

Единичный вектор $\bar{x}_0 = [\bar{z}_0 \times \bar{y}_0]$.

Матрица перехода от ИСК в ОСК равна:

$$A_{u-0} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0^T \\ \bar{y}_0^T \\ \bar{z}_0^T \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Значение любого вектора \bar{X}_u в ИСК можно получить в ОСК по формуле:

$$\bar{X}_0 = A_{u-0} \bar{X}_u. \quad (1.30)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (1.30), получим уравнение для определения скорости КА в ОСК:

$$\bar{V}_0 = \dot{A}_{u-0} \bar{X}_u + A_{u-0} \bar{V}_u. \quad (1.31)$$

Производная матрицы перехода из ИСК в любую вращающуюся систему координат равна:

$$\dot{A}_{u-0} = \Omega A_{u-0}, \quad (1.32)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

матрица вращения, а ω_x , ω_y , ω_z – проекции абсолютной угловой скорости вращающейся системы координат на оси этой вращающейся системы координат

Орбитальная система координат вращается вокруг оси Z_0 с угловой скоростью, равной:

$$\omega_z = -\frac{\left| \bar{V}_u - \frac{\bar{X}}{|\bar{X}|} \frac{\bar{V}_u \cdot \bar{X}}{|\bar{X}|} \right|}{|\bar{X}|}, \omega_x = \omega_y = 0. \quad (1.33)$$

Тогда вектор скорости КА в ОСК будет равен:

$$\bar{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{u-0} \bar{X}_u + A_{u-0} \bar{V}_u. \quad (1.34)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\bar{X}_u = A_{u-0}^T \bar{X}_0; \quad (1.35)$$

$$\bar{V}_u = A_{u-0}^T \bar{V}_0 - A_{u-0}^T \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_0.$$

Определим матрицу перехода из ГСК в ОСК. Пусть заданы векторы координат \bar{X}_Γ и скорости \bar{V}_Γ в ГСК. Тогда матрица перехода $A_{\Gamma-0}$ из ГСК в ОСК определяется по следующему алгоритму:

Единичный вектор $\bar{y}_0 = \frac{\bar{X}_\Gamma}{|\bar{X}_\Gamma|}$.

Вектор абсолютной скорости КА относительно ГСК:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_\Gamma + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_\Gamma], \quad (1.36)$$

где $\bar{\omega}_3$ – вектор угловой скорости Земли.

Единичный вектор $\bar{z}_0 = \frac{[\bar{V}_a \times \bar{y}_0]}{\|[\bar{V}_a \times \bar{y}_0]\|}$.

Единичный вектор $\bar{x}_0 = [\bar{z}_0 \times \bar{y}_0]$

Матрица перехода от ГСК в ОСК равна:

$$A_{\Gamma-0} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0^T \\ \bar{y}_0^T \\ \bar{z}_0^T \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Значение любого вектора \bar{X}_Γ в ГСК можно преобразовать в ОСК по формуле:

$$\bar{X}_0 = A_{\Gamma-0} \bar{X}_\Gamma. \quad (1.38)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (1.38), получим уравнение для определения скорости КА в ОСК:

$$\bar{V}_0 = \dot{A}_{\Gamma-0} \bar{X}_\Gamma + A_{\Gamma-0} \bar{V}_\Gamma. \quad (1.39)$$

Матрицу $A_{\Gamma-0}$ можно представить в виде:

$$A_{\Gamma-0} = A_{u-0} A_{u-\Gamma}^T. \quad (1.40)$$

Продифференцировав равенство (1.40), получим:

$$\dot{A}_{\Gamma-0} = \dot{A}_{u-0} \dot{A}_{u-\Gamma}^T + \dot{A}_{u-0} \dot{A}_{u-\Gamma}^T. \quad (1.41)$$

Для матрицы $A_{u-\Gamma}$ аналогично равенству (1.32) можно записать:

$$\dot{A}_{u-\Gamma} = \Omega A_{u-\Gamma}, \quad (1.42)$$

где $\Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица вращения Земли.

Подставив в уравнение (1.39) значение матрицы $A_{\Gamma-0}$ с учетом равенств (1.41), (1.42) получим:

$$\bar{V}_0 = \Omega A_{u-0} A_{u-\Gamma}^T \bar{X}_\Gamma + A_{u-0} A_{u-\Gamma}^T \Omega_3^T \bar{X}_\Gamma + A_{\Gamma-0} \bar{V}_\Gamma. \quad (1.43)$$

Учитывая, что $A_{u-0} A_{u-\Gamma}^T = A_{\Gamma-0}$ из уравнения (1.43) получим:

$$\bar{V}_0 = \Omega A_{\Gamma-0} \bar{X}_{\Gamma} - A_{\Gamma-0} \Omega_3 \bar{X}_{\Gamma} + A_{\Gamma-0} \bar{V}_{\Gamma}, \quad (1.44)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица орбитального вращения, в которой ω_z определяется равенством (1.33).

Обратное преобразование векторов \bar{X}_0 , \bar{V}_0 в ГСК имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\Gamma} &= A_{\Gamma-0}^T \bar{X}_0; \\ \bar{V}_{\Gamma} &= A_{\Gamma-0}^T \bar{V}_0 - A_{\Gamma-0}^T \Omega \bar{X}_0 + \Omega_3 \bar{X}_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Преобразование векторов координат и скорости в орбитальную систему координат часто приходится реализовывать как в бортовом программном обеспечении, так и в наземном программном обеспечении различных стендов отработки АСН. Поэтому каждый инженер, занимающийся космической навигацией, должен иметь в своей библиотеке функции преобразования векторов координат и скорости из любой из рассмотренных выше систем координат в любую. Формальные описания верифицированных программных функций, реализующих такие преобразования по приведённым в данном разделе алгоритмам и их интерфейсы приведены в Главе 7 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же приведены сайты, на которых можно найти программные реализации этих функций.

Определение орбиты КА, как правило, выполняется для центра масс КА. При этом измерительная аппаратура может быть установлена в любой точке КА. В этом случае навигационные измерения, например, измерения расстояния от наземной точки с известными

координатами до КА будут проводиться с некоторой ошибкой, обусловленной смещением измерительной аппаратуры от центра масс. Однако место установки аппаратуры на КА всегда известно, и эта ошибка может быть учтена при проведении навигационных расчетов. Для этого на КА должна быть введена собственная, так называемая "связанная" система координат (ССК). Определим ее следующим образом:

- начало – в центре масс КА;
- оси X, Y, Z определенным образом расположены относительно КА и жестко связаны с его корпусом.

В процессе полёта, как правило, ССК должна быть определённым образом расположена относительно рассмотренных нами систем координат ИСК, ГСК или ОСК. Обеспечение такого заданного положения осуществляет система ориентации КА. Количественной характеристикой текущей ориентации КА может быть, например, матрица A_{I-C} перехода от ИСК к ССК. Если точка расположения какого-либо прибора в ССК имеет координату \bar{X}_C , то его координаты в ИСК будут равны:

$$\bar{X}_I = \bar{X}_{I^{KA}} + A_{I-C}^T \bar{X}_C, \quad (1.46)$$

где $\bar{X}_{I^{KA}}$ – вектор координат центра масс КА в ИСК.

Определение матрицы ориентации представляет собой одну из важных задач навигации. При вращении КА в пространстве эта матрица меняется в соответствии с уравнением:

$$\dot{A}_{I-C} = \Omega A_{I-C}, \quad (1.47)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ – матрица вращения КА;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции абсолютной угловой скорости КА на оси ССК.

Как правило, на КА устанавливаются датчики угловой скорости (ДУС), непосредственно измеряющие проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ с достаточно высокой точностью. Поэтому, если в начальный момент времени t_0 матрица A_{II-C} известна и производятся измерения угловой скорости КА $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, то в любой последующий момент времени t матрица A_{II-C} может быть получена путём интегрирования уравнения (1.47). При этом необходимо учитывать, что матрица ориентации A_{II-C} является ортонормированной: модули её строк и столбцов равны 1, и справедливо равенство:

$$A_{II-C}^T = A_{II-C}^{-1}. \quad (1.48)$$

В процессе интегрирования ортонормированность матрицы A_{II-C} может нарушаться. Поэтому при её вычислении периодически необходимо осуществлять операцию ортонормирования по алгоритму:

$$A = A + 0.5(A^{-1T} - A), \quad (1.49),$$

где с правой стороны неортонормированная матрица A , полученная в процессе интегрирования уравнения (1.47), а слева – ортонормированная матрица.

Описанный выше процесс интегрирования уравнения (1.47) называется кинематическим преобразованием матрицы ориентации. Такое преобразование часто используется как в бортовом программном обеспечении, так и в наземных исследовательских стендах. Неформальное описание программной функции, реализующей интегрирование матрицы

ориентации с выполнением ортонормирования, а также описание её интерфейса приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Также указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

1.4 Невозмущенное движение КА. Кеплеровы элементы орбиты

Приближенные уравнения движения КА относительно ИСК в векторной форме имеют вид:

$$\ddot{\bar{X}} + \frac{\mu}{r^3} \bar{X} = 0, \quad (1.50)$$

где \bar{X} - радиус-вектор КА;

μ - гравитационная постоянная Земли.

Уравнение (1.50) называется уравнением невозмущенного движения.

В скалярной форме это уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \frac{\mu X}{r^3} &= 0; \\ \ddot{Y} + \frac{\mu Y}{r^3} &= 0; \\ \ddot{Z} + \frac{\mu Z}{r^3} &= 0, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

X, Y, Z - координаты КА в ИСК.

Уравнения (1.50), (1.51) имеют следующие первые интегралы.

1. *Интеграл энергии* (скалярный интеграл). Полная энергия движущегося тела

относительно притягивающего центра постоянна:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h = \text{const}, \quad (1.52)$$

где V – скорость тела;

h – постоянная энергии, зависящая от вида движения.

2. *Интеграл площадей*. Площадь, ометаемая радиусом-вектором в единицу времени, величина постоянная:

$$\bar{X} \times \bar{V} = \bar{c} = \text{const.}$$

Плоскость, в которой совершается движение, определяется уравнением:

$$Xc_1 + Yc_2 + Zc_3 = 0 \quad (1.53)$$

где X, Y, Z – компоненты радиуса-вектора \bar{X} ;

c_1, c_2, c_3 – компоненты вектора \bar{c} .

Для двух положений тела можно записать следующие соотношения:

$$c_1 = Y_1 \dot{Z}_1 - Z_1 \dot{Y}_1 = Y_2 \dot{Z}_2 - Z_2 \dot{Y}_2;$$

$$c_2 = Z_1 \dot{X}_1 - X_1 \dot{Z}_1 = Z_2 \dot{X}_2 - X_2 \dot{Z}_2;$$

$$c_3 = X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1 = X_2 \dot{Y}_2 - Y_2 \dot{X}_2.$$

Интеграл площадей можно записать в виде:

$$c = r^2 \dot{\vartheta}, \quad (1.54)$$

где $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$ – угловая скорость движения тела.

3. *Интеграл Лапласа.* Между векторами \bar{r} , \bar{V} и \bar{c} имеет место следующее соотношение (интеграл Лапласа):

$$-\frac{\mu \bar{X}}{r} + (\bar{V} \times \bar{c}) = \bar{f} = \text{const}, \quad (1.55)$$

где \bar{f} – вектор Лапласа.

В скалярной форме интеграл Лапласа запишется в виде:

$$\begin{aligned} XV^2 - \frac{\mu X}{r} - r\dot{r}X &= f_1; \\ YV^2 - \frac{\mu Y}{r} - r\dot{r}Y &= f_2; \\ ZV^2 - \frac{\mu Z}{r} - r\dot{r}Z &= f_3, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где f_1, f_2, f_3 – компоненты вектора \bar{f} .

Существует всего семь скалярных первых интегралов: интеграл энергии, три скалярных интеграла площадей и три скалярных интеграла Лапласа.

Между этими интегралами имеется связь, определяемая следующими двумя соотношениями:

1. $\bar{f} \times \bar{c} = 0$ или $f_1 c_1 + f_2 c_2 + f_3 c_3 = 0$, т.е. вектор Лапласа \bar{f} и вектор \bar{c} взаимно ортогональны и определяют неизменную плоскость Лапласа.

2. $f^2 = \mu^2 + c^2 h$, соотношение, связывающее энергию движения, константу площадей, гравитационную постоянную с модулем вектора Лапласа.

Приведённое уравнение легко интегрируется. В плоскости движения КА имеет место в результате интегрирования следующее соотношение, определяющее форму орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (1.57)$$

где p - параметр орбиты;

e - эксцентриситет орбиты;

ϑ - истинная аномалия.

Если $0 < e < 1$, то орбита представляет собой эллипс, один из фокусов которого совпадает с началом координат. Большая полуось эллипса определяется соотношением:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (1.58)$$

Истинная аномалия – это угол междуperiцентром, лежащим на большой оси эллипса, и вектором \bar{r} .

Скорость КА определяется из соотношения:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}. \quad (1.59)$$

Связь между истинной аномалией и скоростью определяется соотношением:

$$V^2 = \frac{\mu}{p} e^2 + \frac{\mu}{p} + 2 \frac{\mu}{p} \cos \vartheta. \quad (1.60)$$

В результате интегрирования уравнений движения (1.50) получается выражение для определения времени движения t от момента τ - прохождения черезperiцентр орбиты (уравнение Кеплера).

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E - e \sin E], \quad (1.61)$$

где E - эксцентрическая аномалия, определяемая выражением:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (1.62)$$

Период обращения КА по эллипсу равен:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (1.63)$$

Положение эллипса орбиты задается в ИСК тремя углами (см. рис. 1.6):

i - наклонение орбиты – угол между плоскостью эллипса и плоскостью экватора;

Ω - долгота восходящего узла – угол между осью X ИСК и радиус-вектором, лежащим в плоскости экватора и в плоскости эллипса орбиты в точке восходящего узла, где движение КА идет из южного полушария в северное;

ω - угловое расстояние от узла орбиты доperiцентра.

Элементы $\Omega, i, \omega, e, \tau$ называются кеплеровыми элементами орбиты.

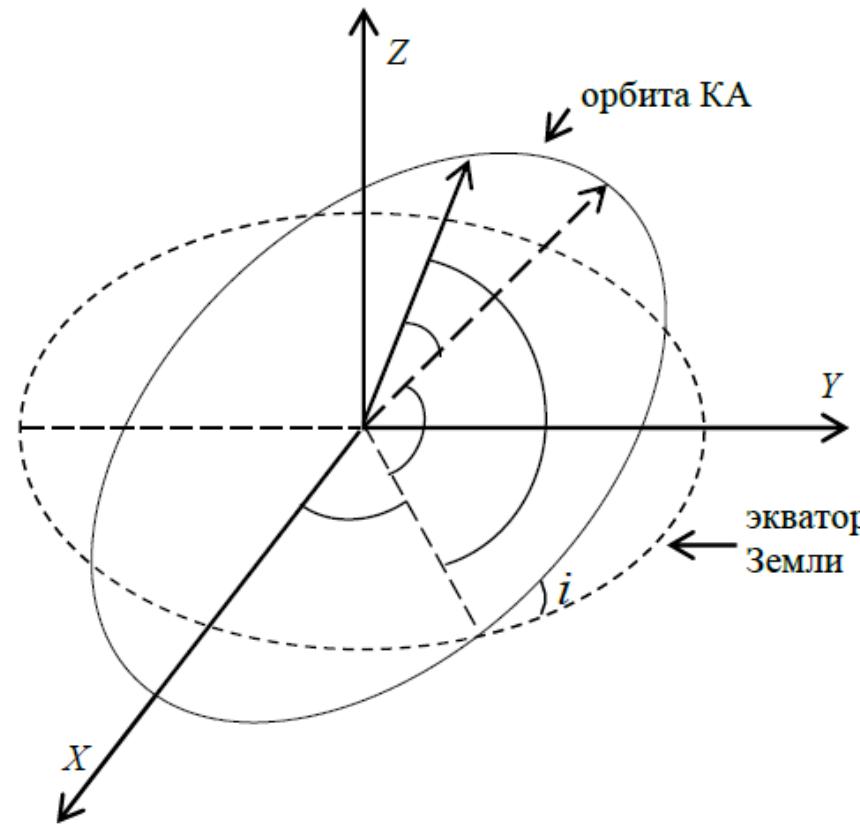


Рис. 1.6 Кеплеровы элементы орбиты.

Кроме основных элементов орбиты часто удобно пользоваться вспомогательными элементами:

- $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ – среднее движение;
- $M = n(t - \tau)$ – средняя аномалия.

Выраженное через эти элементы уравнение Кеплера имеет вид:

$$M = E - e \sin E. \quad (1.64)$$

Если известны кеплеровы элементы орбиты, то на любой заданный момент времени t можно определить векторы координат \bar{X} и скорости $\dot{\bar{X}}$ относительно ИСК.

Для этого из решения уравнения Кеплера (1.64) определяется эксцентрическая аномалия E , а затем величины:

ϑ - из соотношения (1.62);

p - из соотношения (1.58);

r - из соотношения (1.57);

$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta$ - радиальная составляющая скорости;

$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta)$ - нормальная составляющая скорости.

Далее получим проекции вектора координат и вектора абсолютной линейной скорости КА на оси гринвичской системы координат:

$$\begin{aligned}
 X &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\
 Y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\
 Z &= r \sin u \sin i; \\
 \dot{X} &= V_r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - \\
 &\quad - V_n (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i); \\
 \dot{Y} &= V_r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - \\
 &\quad - V_n (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i); \\
 \dot{Z} &= V_r \sin u \sin i + V_n \cos u \sin i,
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

где $u = \omega + \vartheta$.

Аналогично, зная \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$, можно однозначно получить кеплеровы элементы орбиты. Большая полуось орбиты:

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rV^2}, \tag{1.66}$$

где

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \\
 V &= \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}.
 \end{aligned}$$

Эксцентризитет орбиты:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}, \quad (1.67)$$

где

$$p = \frac{(X\dot{Y} - Y\dot{X})^2 + (Y\dot{Z} - Z\dot{Y})^2 + (X\dot{Z} - Z\dot{X})^2}{\mu}. \quad (1.68)$$

Наклонение плоскости орбиты:

$$i = \arccos \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{\sqrt{\mu p}}. \quad (1.69)$$

Долгота восходящего узла доperiцентра орбиты:

$$\begin{aligned} \sin \Omega &= \frac{\dot{Y}Z - \dot{Z}Y}{\sin i \sqrt{\mu p}} ; \\ \cos \Omega &= \frac{X\dot{Z} - Z\dot{X}}{\sin i \sqrt{\mu p}}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Угловое расстояние от узла до перицентра орбиты:

где

$$\omega = u - \vartheta, \quad (1.71)$$

$$\sin u = \frac{Y \cos \Omega - X \sin \Omega}{r \cos i};$$

$$\cos u = \frac{X \cos \Omega + Y \sin \Omega}{r \cos i}; \quad (1.72)$$

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{r}{\mu}} \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}}{er}; \quad (1.73)$$

$$\cos \vartheta = \frac{p - r}{er}. \quad (1.74)$$

Эксцентрическая аномалия определяется из состояния:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (1.75)$$

Время прохождения черезperiцентр τ :

$$\tau = t - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E - e \sin E]. \quad (1.76)$$

Формулы (1.65)÷(1.75) показывают, что шесть компонент векторов \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$ взаимно однозначно определяют шесть кеплеровых элементов орбиты, и сами могут рассматриваться в качестве элементов орбиты. То есть, если на какой-то момент t_0 известны векторы \bar{X}_0 и $\dot{\bar{X}}_0$, то координаты и скорость КА \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$ могут быть определены для любого другого момента времени.

Шестимерный вектор иногда называют вектором состояния КА,

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \dot{\bar{X}} \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

который может быть задан в ИСК или в ГСК. Мы будем называть вектором состояния нормированный шестимерный вектор, имеющий вид:

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{R}_0 \\ \dot{\bar{X}} \\ \bar{V}_0 \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

где R_0 – средний радиус орбиты;
 V_0 – круговая скорость орбиты радиуса R_0 .

При разработке бортового и наземного навигационного ПО часто возникает необходимость взаимного преобразования кеплеровых элементов орбиты в вектор состояния или наоборот. Неформальное описание программных функций перевода кеплеровых элементов орбиты в вектор состояния, заданный в ИСК, и обратного перевода, а также описание интерфейсов этих функций приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же приведён сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

Глава 2 Возмущённое движение КА. Возмущающие ускорения, действующие на КА. Моделирование движения КА

Уравнение движения КА (1.50) предполагает, что на КА действует единственная центральная сила гравитационного поля, равная $\frac{\mu}{r^3} \bar{X}$. Для этих условий в разделе 1.4 получены

формулы невозмущенного движения КА. В действительности на КА кроме центральной силы действует целый ряд других сил, существенно влияющих на движение КА. При этом центральная сила для орбитального КА существенно превосходящая все остальные силы вместе взятые, определяет основную траекторию КА, а все другие силы определяют отклонения или возмущения реальной траектории от основной. Под действием возмущающих ускорений меняются параметры орбиты КА. Например, все шесть кеплеровых элементов орбиты изменяются во времени. Их текущее значение называется оскулирующими кеплеровыми элементами. По значению оскулирующих элементов орбиты по формулам (1.65) могут быть определены текущие значения координат и скорости КА. Аналогично, по текущим значениям координат и скорости КА по алгоритмам (1.66 – 1.76) могут быть определены оскулирующие кеплеровы элементы орбиты.

Основными источниками возмущающих ускорений, действующих на КА, находящиеся на орбите Земли, являются:

- гравитационные возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли;
- атмосфера Земли;
- гравитационные возмущения от Луны;

- гравитационные возмущения от Солнца;
- возмущения от сил солнечного давления;
- возмущения от сил светового давления от альбедо Земли;
- световые и тепловые излучения от самого КА;
- гравитационные возмущения, вызванные изменением формы Земли из-за приливных воздействий на Землю от Луны и Солнца;
- гравитационные возмущения от Венеры и других планет.

Кроме перечисленных, на движение КА влияет множество более мелких возмущений, которыми можно пренебречь. Величина каждого из приведённых выше возмущений зависит и от орбиты КА. Такую зависимость демонстрирует Таблица 2.1, в которой приведены примерные значения возмущающих ускорений, обусловленных перечисленными выше факторами, для орбит высотой 19-20 тыс. км, на которых, например, находятся спутники ГЛОНАСС и *GPS*, и низких орбит высотой 350-400 км (высота орбиты МКС).

Приведённые в Таблице 2.1 ускорения от центрального поля Земли обеспечивают движение КА по кеплеровой орбите. Остальные составляющие вносят возмущения в движение КА относительно этой кеплеровой орбиты.

Значения величин этих составляющих являются примерными. По этим значениям трудно оценить влияние соответствующих факторов на движение КА. Реальные значения возмущаемых ускорений содержат как постоянные, так и периодические составляющие, которые по-разному возмущают орбиту. Например, постоянное аэродинамическое торможение (относительно ОСК) величиной $1 \cdot 10^{-6}$ м/с² за сутки приводит к возмущению орбиты МКС по продольной дальности величиной ~10 км. Такое же по величине возмущение, обусловленное влиянием солнечной гравитации на движение КА *GPS*, за сутки приводит к возмущению

орбиты по положению величиной 400 м, т.е. в 25 раз меньше, чем аэродинамическое возмущение такой же величины. Поэтому существенно большую информацию о влиянии перечисленных возмущений на движение КА разных классов представляют графики рассогласований возмущенной и невозмущенной орбит при воздействии какого-либо из рассматриваемых факторов.

Моделирование движения КА, в частности, возмущений, действующих на КА, является важной частью космической навигации. Сегодня существует много моделей каждого из перечисленных в Таблице 2.1 факторов, имеющих ту или иную точность.

В основном это сложные программы, требующие больших вычислительных затрат как по памяти, так и по объёму вычислений. Они не могут использоваться в бортовых вычислительных средствах. Однако в настоящем курсе лекций при рассмотрении алгоритмов решения этой или иной задачи акцент делается именно на реализацию этих алгоритмов в бортовых вычислительных средствах. Поэтому, как правило, рассматриваются нестандартные методы решения различных задач, в том числе и задач моделирования возмущений, позволяющие существенно повысить быстродействие решения при сохранении необходимой точности.

Таблица 2.1 - Составляющие ускорений, действующих на КА

№	Составляющая ускорений	Орбиты высотой 19000-20000 км м/с ²	Низкие орбиты высотой 350-400 км м/с ²
1	Центральное поле Земли	0,61	8,8
2	Влияние сжатия Земли (гармоника 2×0)	10^{-4}	$2,5 \cdot 10^{-2}$
3	Влияние гармоник от 2×0 до 8×8	$2 \cdot 10^{-7}$	10^{-5}
4	Влияние гармоник порядка от 8×8 до 72×72)	10^{-10}	$4 \cdot 10^{-7}$
	Влияние гармоник выше порядка 72×72	0	10^{-8}
5	Атмосфера Земли	0	$0,5 \cdot 0,9 \cdot 10^{-6}$
6	Лунная гравитация	$4 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}
7	Солнечная гравитация	10^{-6}	$2,5 \cdot 10^{-7}$
8	Силы светового давления от Солнца	10^{-7} (GPS)	$6 \cdot 10^{-8}$ (МКС)
9	Силы светового давления от Земли	10^{-9} (GPS)	$3 \cdot 10^{-9}$ (МКС)
10	Силы, обусловленные световым и тепловым излучением КА	10^{-9}	10^{-9}
11	Гравитационные возмущения, вызванные изменением формы Земли из - за приливных воздействий на Землю Луны	10^{-9}	$1,5 \cdot 10^{-7}$
12	Гравитационные возмущения, вызванные изменением формы Земли из - за приливных воздействий на Землю Солнца	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$0,4 \cdot 10^{-7}$
13	Гравитационные возмущения от Венеры	$1,1 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-11}$

Важным моментом при разработке моделей движения КА является их верификация. К счастью, сейчас появилась возможность проведения такой верификации с высокой точностью. На сайте [с. 3] с задержкой ~2 недели относительно реального времени выставляются прецизионные эфемериды спутников *GPS* и ГЛОНАСС, полученные путём дополнительных измерений и алгоритмической постобработки первичных эфемерид, точность которых по координатам составляет $3 \div 5$ см. Это реальные координаты реальных спутников, движущихся при воздействии реальных возмущений. Эти орбиты взяты за базу для сравнения при проведении верификации модели.

Взяв за начальные условия движения КА высокоточные эфемериды одного из таких спутников, был проведён прогноз орбиты на трое суток с учётом всех имеющихся верифицируемых моделей. После этого была определена разность между прогнозируемой с использованием модели движения КА орбитой и реальной орбитой спутника. На рисунке 2.1 приведены графики "разлёта" таких орбит в ОСК по координатам X , Y , Z (X – продольная дальность, Y – местная вертикаль).

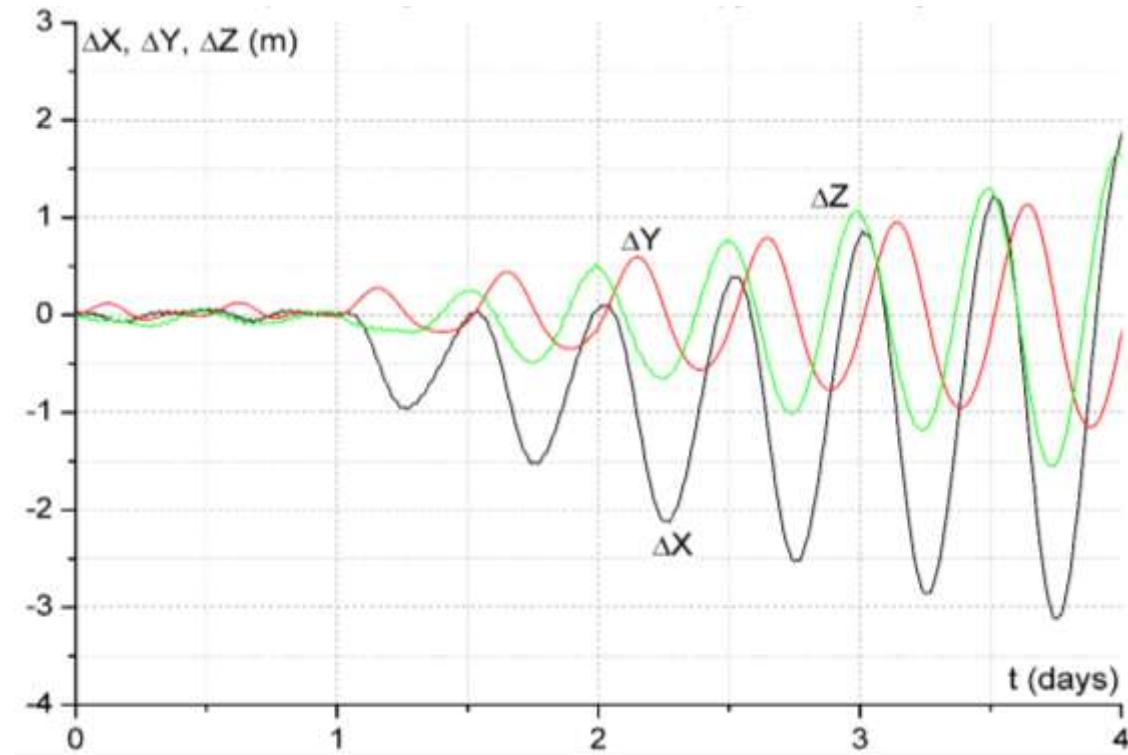


Рис. 2.1 Графики "разлёта" реальной и моделируемой орбит спутника *GPS*.

Из графиков видно, что "разлёт" по продольной дальности за трое суток составил ~ 3 м, по вертикали и боковой дальности $\sim 1,5$ м.

Полученный "разлёт" обусловлен одновременным воздействием трёх факторов:

- различием начальных условий в момент начала моделирования между параметрами моделируемой и реальной орбит;
- суммарным влиянием ошибок верифицируемых моделей;
- влиянием немоделируемых возмущений (п п 9 - 13 Таблицы 2.1).

Раздельное влияние перечисленных факторов на "разлёт" двух орбит трудно оценить. Каждый из этих факторов мог дать основную составляющую "разлёта". Например, легко посчитать, что "разлёт" по продольной дальности 3 м за трое суток может быть вызван начальным рассогласованием параметров орбиты по продольной скорости величиной $4 \cdot 10^{-3}$ мм/с. Однако предположив, что весь "разлёт" обусловлен ошибками верифицируемых моделей, по характеру изменения разности координат моделируемого и реального КА в ОСК можно оценить, что суммарная ошибка моделируемых ускорений не превышает $2 \cdot 10^{-9}$ м/с². Эта ошибка вполне могла бы быть обусловлена неучтёнными составляющими возмущений, например, силами светового давления от альбедо Земли или гравитационными возмущениями, вызванными изменением формы Земли из-за приливных воздействий Луны. Тем не менее, для строгости будем считать, что ошибки всех верифицированных моделей для орбит радиусом ~ 26000 км меньше величины $2 \cdot 10^{-9}$ м/с².

Для низких орбит резко возрастают возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли. Соответственно, могут увеличиться и ошибки соответствующих моделей. Существенное влияние на движение КА также начинает оказывать аэродинамика. Влияние лунной и солнечной гравитации уменьшается, соответственно уменьшается величина и возможные ошибки моделей. Влияние сил светового давления от Солнца примерно одинаково на низких и высоких орбитах, а точность модели возмущающего ускорения определяется точностью моделирования формы КА, его ориентации и коэффициента отражения солнечного света.

Влияние каждого из рассмотренных факторов на движение высокоорбитальных и низкоорбитальных КА будет рассмотрено ниже.

Наиболее сильные возмущения орбиты, особенно низкоорбитальных КА, обусловлены нецентральностью гравитационного поля Земли, которое может быть представлено в виде бесконечного ряда разложения по сферическим функциям. Первый член этого разложения представляет собой ускорение центрального поля Земли, а второй член определяет возмущение поля из-за сжатия Земли, которое на порядки превосходит влияние всех остальных возмущений и определяет основную составляющую возмущений реальной орбиты относительно кеплеровой. Если кеплерова орбита КА, находящегося на орбите Земли, является идеальной и сильно отличается от реальной орбиты, то при учете влияния сжатия Земли моделируемая орбита становится значительно ближе к реальной, однако для более точного моделирования движения КА часто приходится учитывать члены разложения геопотенциала Земли более высокого порядка.

2.1 Возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли

Потенциал гравитационного поля Земли может быть представлен в виде разложения по сферическим функциям:

$$U = \frac{a_{00}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos mL + b_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (2.1)$$

где a_{nm} , b_{nm} – коэффициенты, определяемые из гравиметрических данных, а также по наблюдениям за движением ИСЗ;

L – долгота;

$P_{nm}(\sin \varphi)$ – присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m .

Первый член этого разложения представляет собой составляющие центрального поля Земли:

$$a_{00} = \mu. \quad (2.2)$$

Центральное ускорение, обусловленное этой составляющей, равно:

$$\bar{g}_r = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}. \quad (2.3)$$

Второй член разложения (2.1) обусловлен сжатием Земли. Первые два члена разложения (2.1) называют нормальным потенциалом Земли. Ускорение КА, относительно ГСК, обусловленное влиянием этих членов, может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
 a_x &= -\frac{\mu}{r^3}x - \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}x\left(1 - \frac{5Z^2}{r^2}\right); \\
 a_y &= -\frac{\mu}{r^3}y - \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}y\left(1 - \frac{5Z^2}{r^2}\right); \\
 a_z &= -\frac{\mu}{r^3}z - \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}z\left(3 - \frac{5Z^2}{r^2}\right),
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где x, y, z – координаты КА относительно ГСК;

$$r = \sqrt{x^2, y^2, z^2};$$

$\mu = 398600.4417 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ – константа гравитационного поля Земли;

$a_e = 6378136 \text{ м}$ – экваториальный радиус Земли;

$C_{20} = 1082.62575 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент при второй зональной гармонике.

Остальные члены разложения геопотенциала Земли называют аномальной частью гравитационного поля, имеющий вид:

$$\Delta U = g_0 \sum_{n=e_2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi), \tag{2.5}$$

где α_{nm}, β_{nm} – коэффициенты разложения;

g_0 – среднее значение ускорения силы тяжести;

R – средний радиус Земли.

Проекции ускорений на радиус-вектор r , нормаль к нему в плоскости меридиана по широте φ и нормаль к плоскости меридиана по долготе L определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 \Delta g_r &= \frac{g_0}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) P_{nm}(\sin \varphi); \\
 \Delta g_m &= \frac{g_0}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) \times \left[P_{n,m+1}(\sin \varphi) - \frac{m \sin \varphi}{\cos \varphi} P_{nm}(\sin \varphi) \right]; \\
 \Delta g_L &= \frac{g_0}{R \cos \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (-\alpha_{nm} \sin m\varphi + \beta_{nm} \cos m\varphi) m P_{nm}(\sin \varphi).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.1.1 Влияние сжатия Земли на орбитальное движение КА

Под влиянием возмущений гравитационного поля, обусловленных сжатием Земли, происходит отклонение траектории КА от первоначальной кеплеровой орбиты. Однако каждому текущему вектору состояния ξ по формулам (1.65) – (1.75), можно поставить в соответствие новые значения кеплеровых элементов. Эти изменяющиеся во времени кеплеровы элементы орбиты называются оскулирующими элементами. Изменения оскулирующих кеплеровых элементов носят как периодический характер, так и вековой. Периодические составляющие изменений на интервале одного витка не приводят к изменению соответствующего параметра на величину, пропорциональную времени. Вековым изменениям подвержены три параметра: Ω_0 – восходящий угол, ω – уголperiцентра и M – средняя аномалия. Изменение этих параметров за один виток определяется формулами:

$$\Delta\Omega = -3\pi c_{20} \left(\frac{R}{p} \right)^2 \cos i; \tag{2.7}$$

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\pi c_{20} \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 (5\cos^2 i - 1);$$

$$\Delta M = \frac{3}{2}\pi c_{20} \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 (3\cos^2 i - 1) (1 - e^2)^{1/2}.$$

В соответствии с первой из этих формул орбиты низкоорбитальных КА с наклонением $\sim 51^\circ$ прецессируют с угловой скоростью $\sim 5^\circ/\text{сутки}$ в западном направлении. Скорость прецессии орбит спутников ГЛОНАСС и *GPS* составляет $\sim 0,04^\circ/\text{сутки}$ в этом же направлении. То есть, влияние сжатия Земли на орбиту КА резко уменьшается (в данном случае более чем в 100 раз) с увеличением высоты орбиты КА.

На рис. 2.2 и 2.3 приведены графики "разлёта" орбит из-за влияния сжатия Земли для высокоорбитальных и низкоорбитальных КА. Из приведённых графиков следует, что для высокоорбитальных КА происходит "разлёт" по продольной дальности со скоростью ~ 30 км/сутки и по боковой дальности со скоростью ~ 13 км/сутки. Для низкоорбитальных КА – "разлёт" по продольной дальности составляет 600 км/сутки, по боковой дальности – 500 км/сутки.

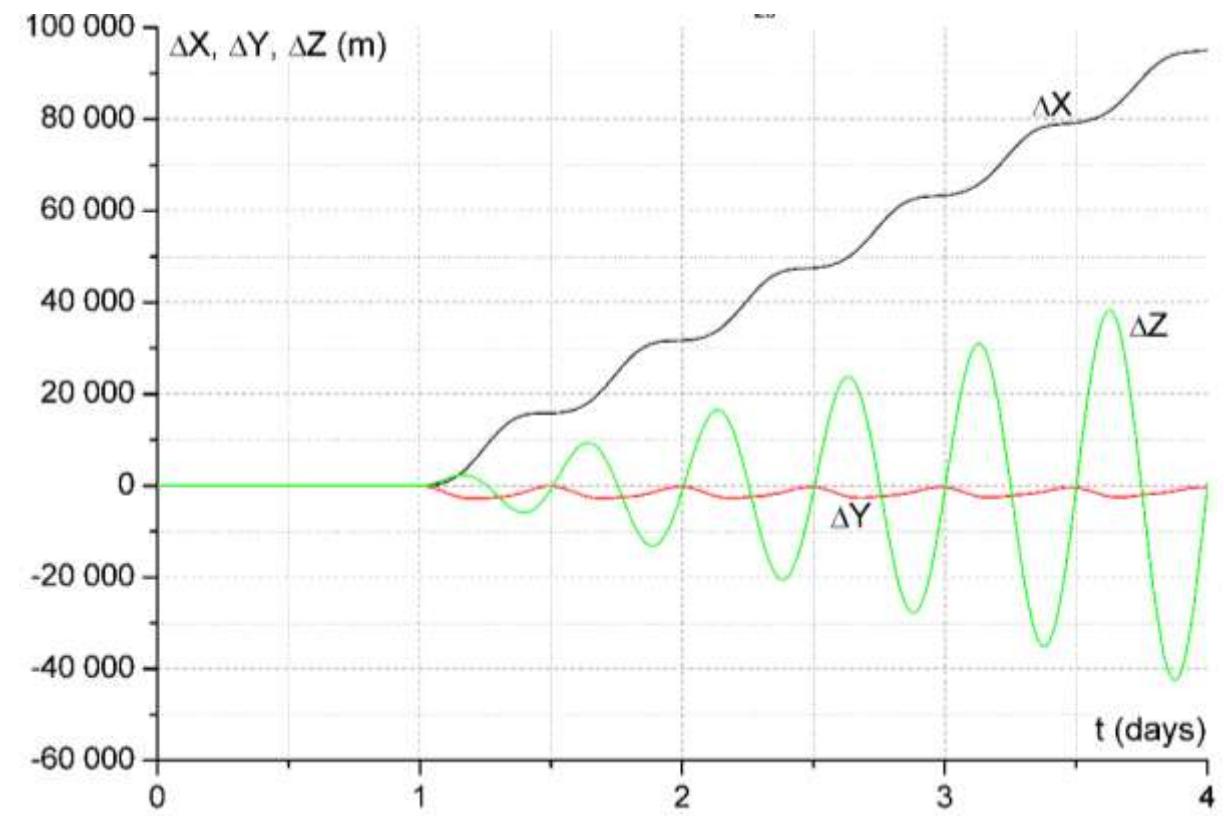


Рис. 2.2 - Влияние сжатия Земли на движение высокоорбитального КА (GPS, ГЛОНАСС).

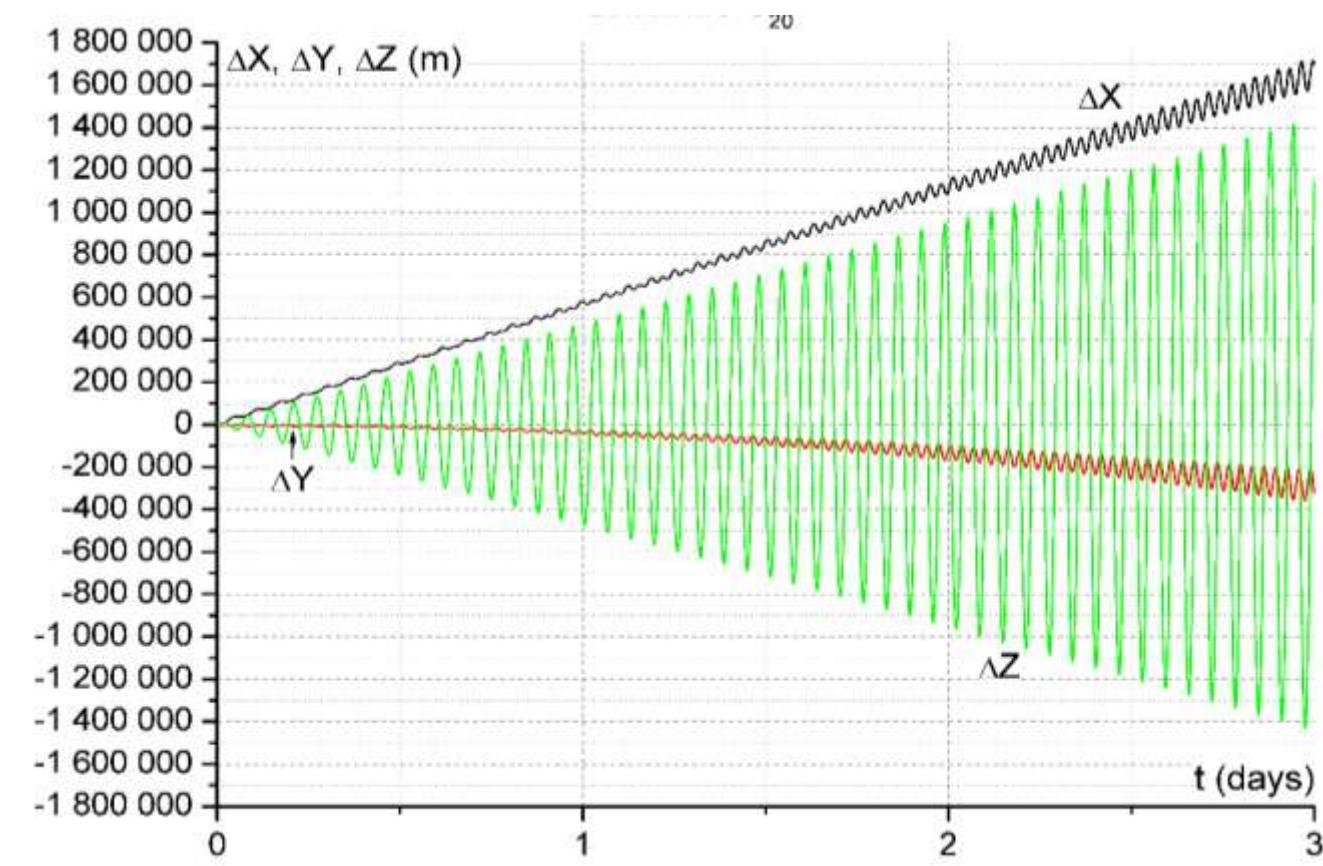


Рис. 2.3 - Влияние сжатия Земли на движение низкоорбитального КА.

2.1.2 Влияние аномальной части гравитационного поля на орбитальное движение КА

Наиболее сильное влияние аномальная часть гравитационного поля Земли оказывает на движение низкоорбитальных КА. Действительно, из формулы (2.6) следует, что влияние каждой из гармоник аномальной части гравитационного поля уменьшается с расстоянием, как

отношение $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$, не говоря о том, что с увеличением порядкового номера гармоники, как

правило, уменьшаются и коэффициенты разложения α_{nm}, β_{nm} . Поэтому для рассматриваемых высоких орбит, радиус которых в ~ 4 раза больше радиуса орбит низкоорбитальных КА, влияние гравитационных аномалий часто существенно меньше, чем для низких орбит, а в ряде случаев аномальной частью просто пренебрегают.

Для низкоорбитальных КА влияние аномальной части гравитационного поля в десятки и сотни раз выше, чем для высокоорбитальных КА и для точного решения многих навигационных задач необходимо учитывать высокие гармоники гравитационного поля вплоть до гармоник порядка 72×72 и выше.

Сказанное иллюстрируют графики, приведённые на рис. 2.4 – 2.8. Рис 2.4 и 2.5 демонстрируют влияние аномальной части гравитационного поля Земли на орбиты высокоорбитальных и низкоорбитальных КА.

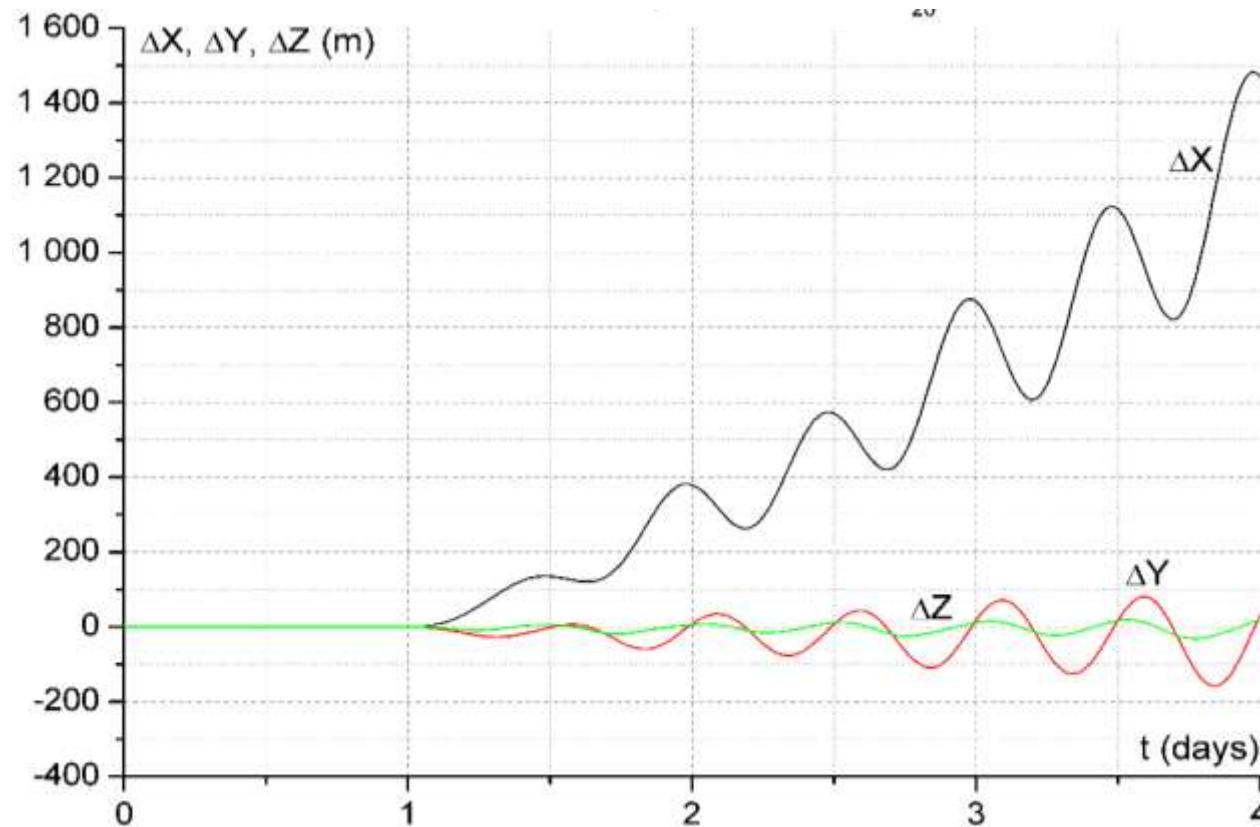


Рис. 2.4 Влияние аномальной части гравитационного поля Земли на движение высокоорбитального КА.

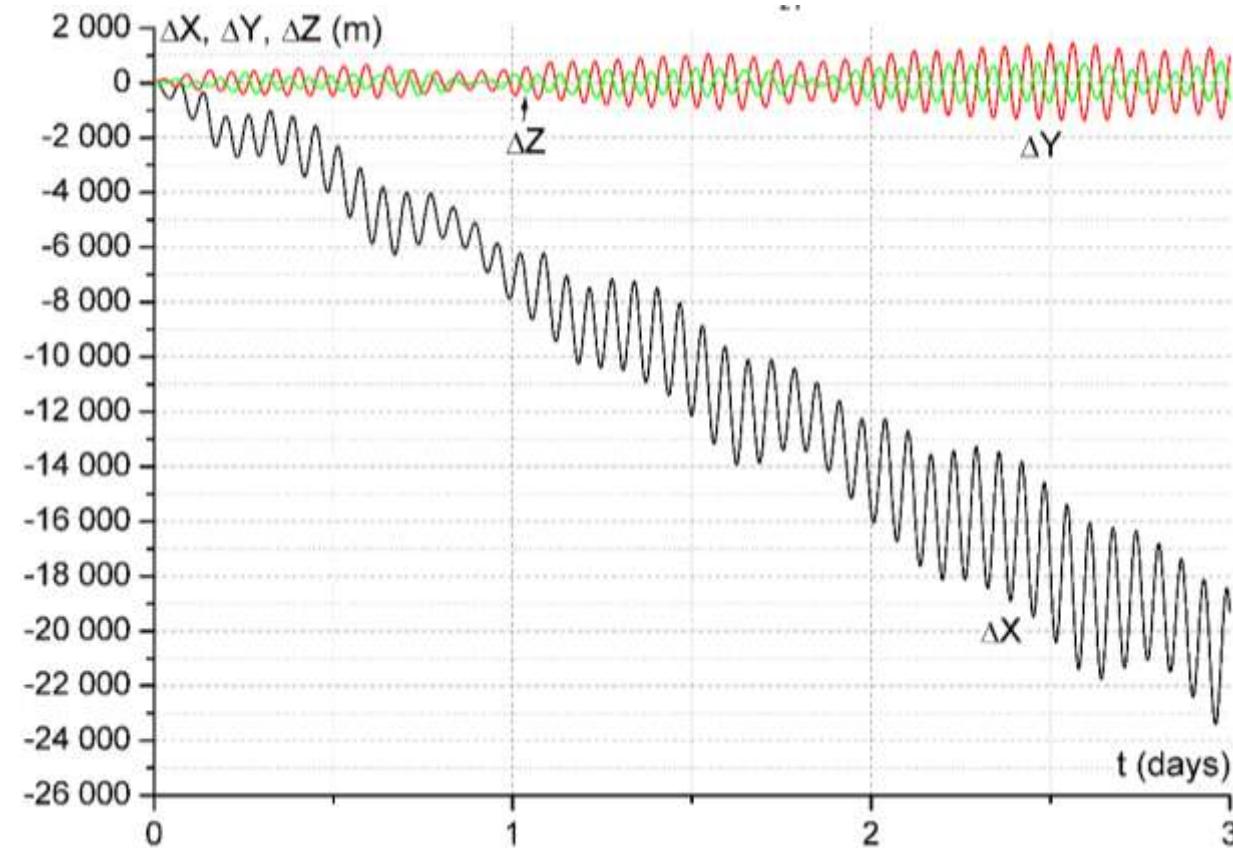


Рис. 2.5 Влияние аномальной части гравитационного поля Земли на движение низкоорбитального КА.

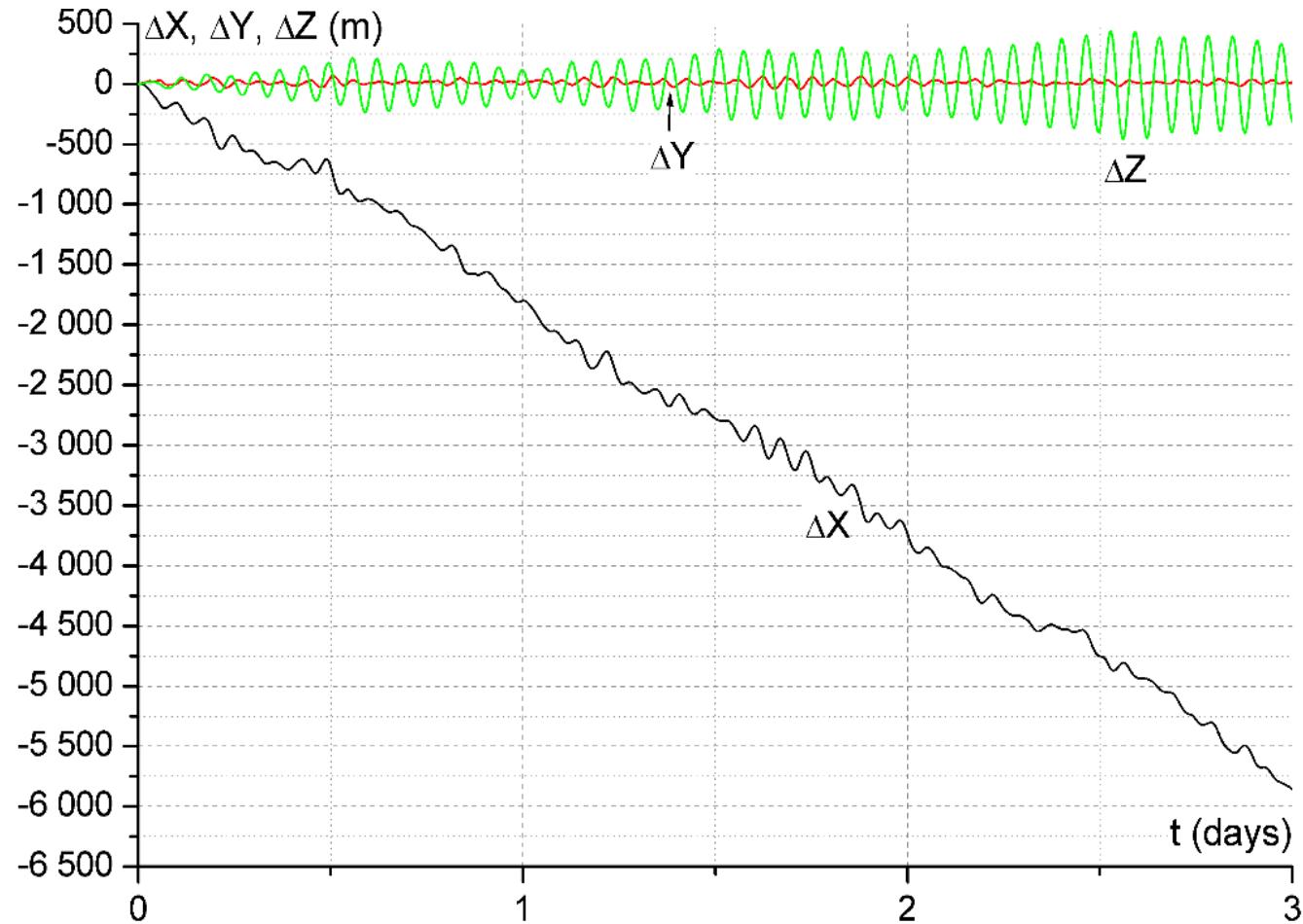


Рис. 2.6 Влияние гармоник гравитационного поля Земли выше восьмого порядка на движение низкоорбитального КА.

На рисунке 2.6 и 2.7 приведены графики возмущений орбит низкоорбитального и высокоорбитального КА от гармоник выше восьмого порядка, а на рисунке 2.8 – для низкоорбитального КА от гармоник выше 36 порядка и 72 порядка.

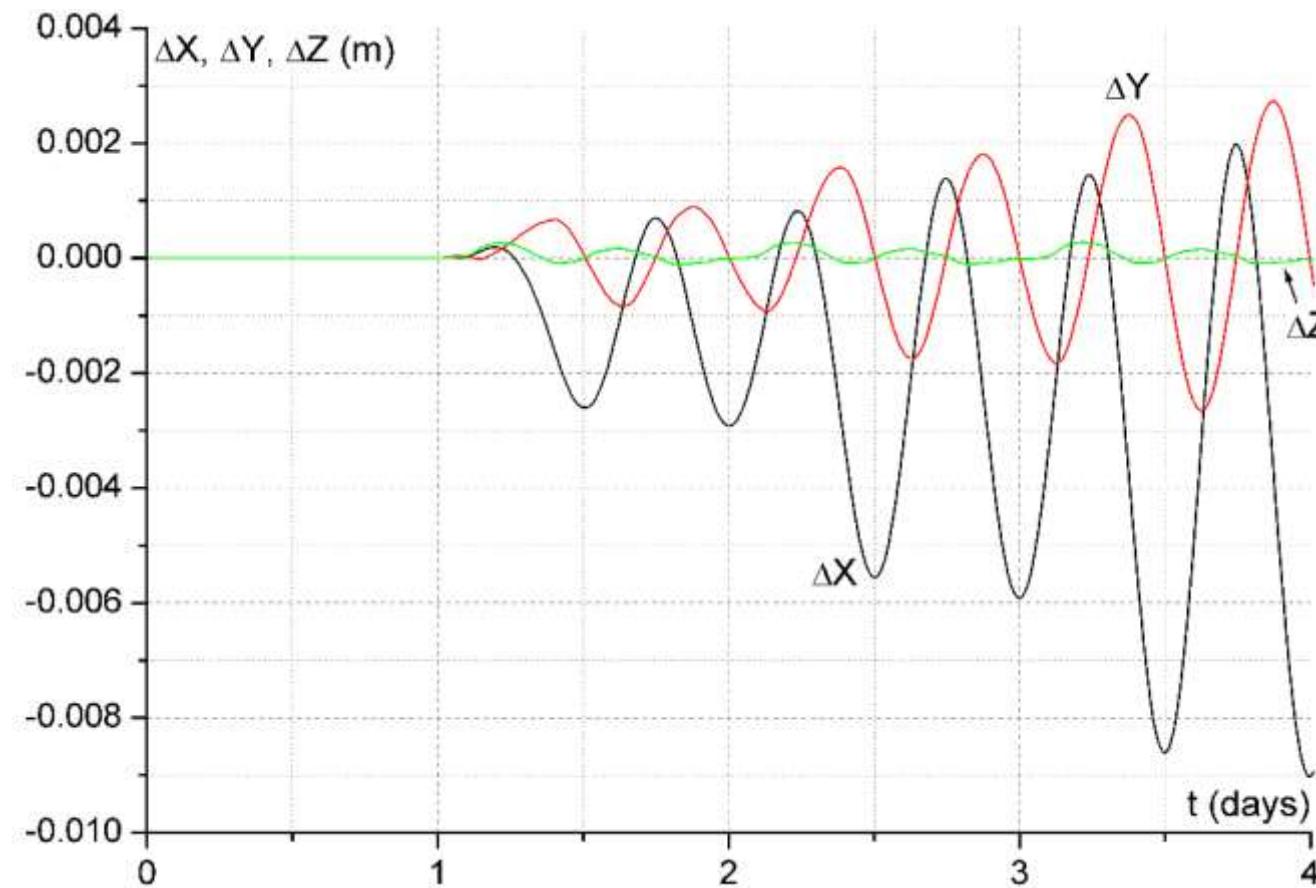


Рис. 2.7 Влияние гармоник гравитационного поля Земли выше восьмого порядка на движение высокоорбитального КА.

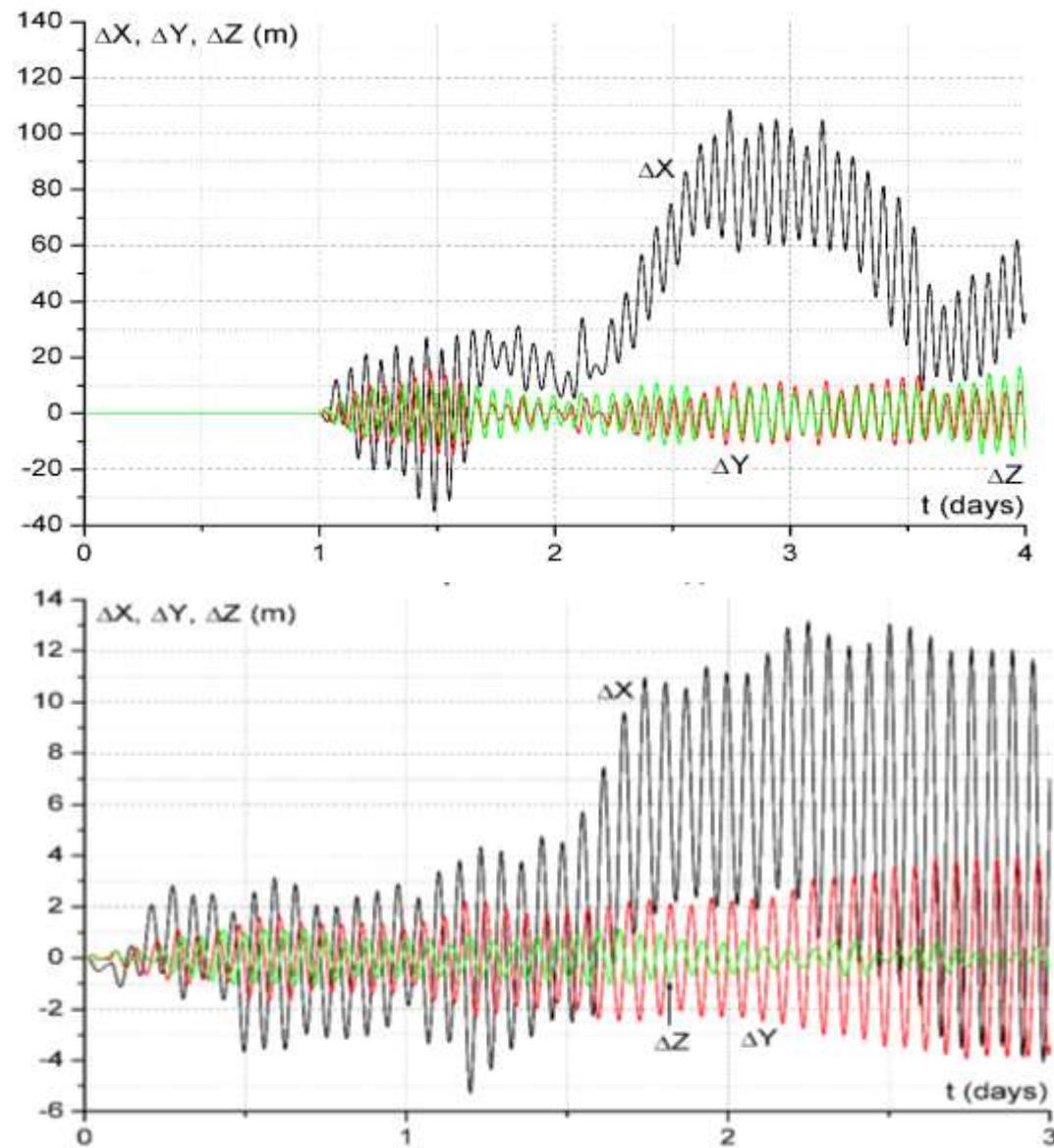


Рис. 2.8 Влияние гравитационного поля Земли выше гармоник 36 порядка (вверху) и 72 порядка (внизу) на движение низкоорбитального КА

2.1.3 Моделирование возмущений гравитационного поля Земли.

Коэффициенты разложения геопотенциала Земли по сферическим функциям известны с достаточно хорошей точностью – до порядка $\sim 200 \times 200$. Как отмечалось выше, знание аномальной части гравитационного поля высокого порядка необходимо для низкоорбитальных КА. Например, для моделирования движения МКС в АСН-М используется модель порядка 72×72 . Особенностью реализации алгоритмов вычисления аномальной части гравитационного поля высокого порядка классическим методом разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям является большой объём необходимых вычислений. Такие алгоритмы не могут быть реализованы на существующих бортовых вычислительных средствах, имеющих ограниченные возможности по быстродействию. Поэтому для моделирования гравитационного поля высокого порядка на бортовых вычислительных средствах был разработан упрощённый метод моделирования требующий, например, для реализации модели порядка 72×72 в несколько сотен раз меньше вычислительных операций по сравнению с методом точного расчёта. Рассмотрим суть этого метода. Вектор гравитационного ускорения Земли может быть представлен в виде суммы векторов:

$$\bar{g}(\bar{X}) = \bar{g}_0(\bar{X}) + \Delta\bar{g}(\bar{X}), \text{ где}$$

$\bar{g}_0(\bar{X})$ - составляющая вектора гравитационного поля Земли порядка 2×0 ;

$\Delta\bar{g}(\bar{X})$ - аномальная часть гравитационного поля.

Вектор $\bar{g}_0(\bar{X})$ представляет собой основную по величине составляющую, алгоритм расчёта которой достаточно прост. Вектор $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ для низких орбит по величине не превышает $10^{-5}g$ и достаточно плавно меняется в некоторой окрестности вектора \bar{X} . Заранее рассчитав на

Земле и запомнив векторы $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$ для сети точек \bar{X}_i , легко рассчитать вектор $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ для любой точки \bar{x} в окрестности точек \bar{X}_i путём линейной интерполяции через запомненные значения $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$. В результате, для произвольной точки \bar{X} компонента $\bar{g}_0(\bar{X})$ вычисляется по алгоритму (2.4) для модели порядка 2×0 и суммируется с составляющей $\Delta\bar{g}(\bar{X})$, вычисленной путём линейной интерполяции через запомненные значения $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$. Реализацию данного метода в этом случае иллюстрирует рисунок 2.9. В окрестности любой точки \bar{X} находится ряд точек \bar{X}_i , для которых в памяти вычислительного устройства хранятся значения суммарных векторов аномальной части гравитационного поля $\Delta\bar{g}_i(\bar{X}_i)$.

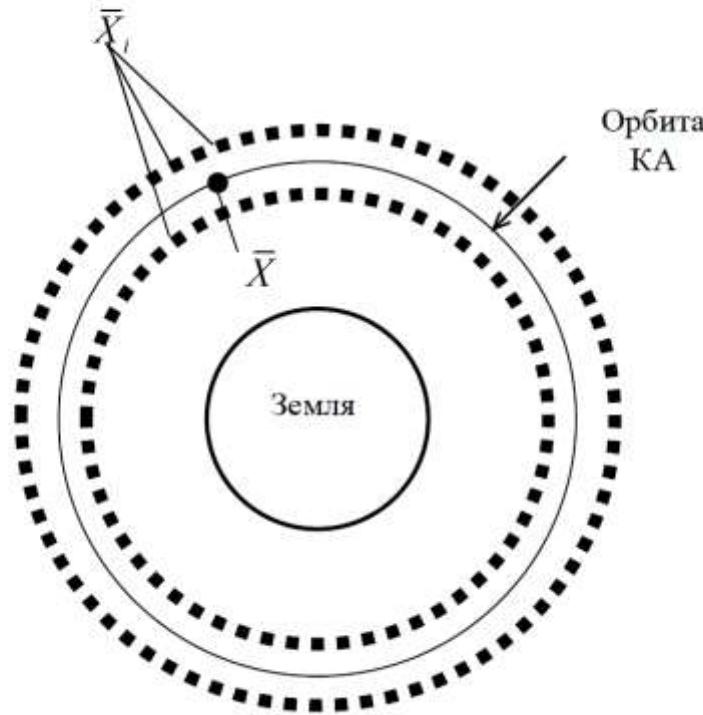


Рис. 2.9 Иллюстрация схемы выбора точек \bar{X}_i , для которого запоминается аномальная составляющая вектора гравитационного ускорения Земли.

Пусть для текущего вектора положения \bar{X} требуется определить аномальную часть гравитационного поля $\Delta\bar{g}(\bar{X})$. Для каждого запомненного вектора $\Delta\bar{g}_i(\bar{X}_i)$ в окрестности точки \bar{X} можно записать уравнение:

$$\Delta\bar{g}(\bar{X}) + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{X}}(\bar{X}_i - \bar{X}) = \Delta\bar{g}_i(\bar{X}_i), \quad (2.8)$$

где $\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}}$ неизвестная матрица производных вектора $\Delta \bar{g}$ в точке \bar{X} по компонентам вектора \bar{X} .

В уравнении (2.8) неизвестными являются $\Delta \bar{g}(\bar{X})$ и $\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}}$, известными параметрами – векторы $\bar{X}, \bar{X}_i, \Delta \bar{g}_i(\bar{X}_i)$.

Для n окрестных точек \bar{X}_i вектора \bar{X} можно записать n векторных уравнений для определения вектора $\Delta \bar{g}(\bar{X})$ и матрицы $\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}}$:

$$\Delta \bar{g}_i^T(\bar{X}_i) = \left[1(\bar{X}_i - \bar{X})^T \right] \begin{pmatrix} \Delta \bar{g}^T(\bar{X}) \\ \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}} \right)^T \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

$$\Delta \bar{g}_n^T(\bar{X}_n) = \left[1(\bar{X}_n - \bar{X})^T \right] \begin{pmatrix} \Delta \bar{g}^T(\bar{X}) \\ \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}} \right)^T \end{pmatrix}$$

Введём матрицы:

$$G_0 = \begin{pmatrix} \Delta \bar{g}_1^T(\bar{X}_1) \\ \Delta \bar{g}_2^T(\bar{X}_2) \\ \Delta \bar{g}_n^T(\bar{X}_n) \end{pmatrix} \quad - \text{известная матрица размерности } (n \times 3);$$

$$P = \begin{pmatrix} 1(\bar{X}_1 - \bar{X})^T \\ 1(\bar{X}_2 - \bar{X})^T \\ \cdots \\ 1(\bar{X}_n - \bar{X})^T \end{pmatrix} \quad - \text{известная матрица размерности } (n \times 4);$$

$$G = \begin{pmatrix} \Delta \bar{g}^T(\bar{X}) \\ \frac{\partial \bar{g}^T}{\partial \bar{X}} \end{pmatrix} \quad - \text{искомая неизвестная матрица размерности } (4 \times 3).$$

С учетом введенных обозначений система уравнений (2.9) примет вид:

$$G_0 = PG. \quad (2.10)$$

Тогда искомая матрица G будет равна

$$G = (P^T P)^{-1} P^T G_0. \quad (2.11)$$

Первая строка полученной матрицы G представляет собой искомый вектор аномалии гравитационного поля $\Delta \bar{g}(\bar{X})$. Суммировав найденный вектор с основной частью гравитационного поля, формируемого по алгоритму (2.4), получим полный вектор гравитационного поля Земли в точке \bar{X} .

Заметим, что быстродействие рассмотренного алгоритма не зависит от порядка моделируемого гравитационного поля. Поэтому его эффективно использовать для моделирования гравитационного поля высокого порядка, где выигрыш по быстродействию оказывается существенным. Для количественной оценки эффективности рассмотренного алгоритма было экспериментально оценено время решения задачи на современном персональном компьютере (*Pentium 4*, 3 ГГц) и в бортовом навигационном процессоре навигационной аппаратуры АСН-М МКС. Оценивалось время вычисления вектора гравитационного ускорения для моделей различного порядка классическим методом разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям и время вычисления вектора гравитационного ускорения для модели порядка 72×72 предложенным методом (*GRAV_72x72_turbo*). Результаты оценки приведены в Таблице 2.2.

Таблица 2.2.

Порядок модели	2×0	4×4	8×8	16×16	24×24	36×36	72×72	GRAV_72×72_turbo
Персональный компьютер τ МКС	0,25	1,3	3,6	11,4	24,3	55,7	223	0,8
Бортовой навигационный процессор τ МКС	35	182	504	1600	3400	7800	31200	112

Из приведённой таблицы следует, что предложенный метод моделирования гравитационного поля Земли требует в ~ 300 раз меньше быстродействия при моделировании поля порядка 72×72 и в 1,5 раза меньше по сравнению с полем порядка 4×4 . Тем не менее, этот метод является приближенным, и представляет интерес его точность.

На рисунке 2.10 приведены графики "разлёта" орбит КА моделируемых с использованием точного и предложенного метода. Из приведённых графиков следует, что "разлёт" по порядку величины аналогичен "разлёту", обусловленному всеми неучтёнными гармониками выше порядка 72×72 и не превышает величины 13 м за трое суток.

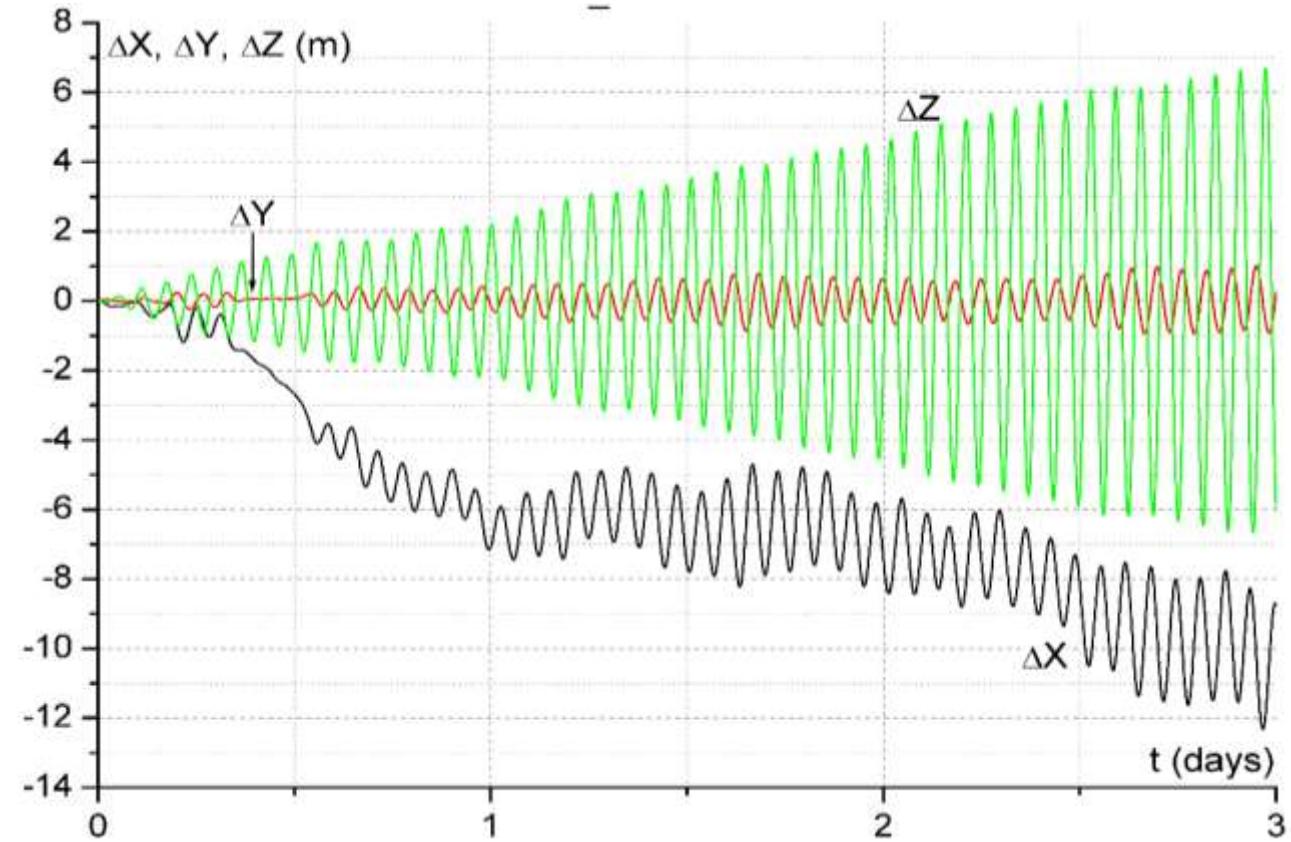


Рис. 2.10 Влияние ошибок приближенного метода на точность моделирования движения низкоорбитального КА.

Величина возмущающего ускорения, обуславливающая такой "разлёт", по величине не превышает 10^{-8} м/с^2 . Для МКС это возмущение имеет такой же порядок, как и все гармоники выше порядка 72×72 . Обоими составляющими этих возмущений в большинстве случаев можно пренебречь.

Выше было показано, что предложенный метод моделирования гравитационного поля Земли существенно (в сотни раз) снижает объём необходимых для его реализации вычислений. Однако при этом необходимо запоминать значения векторов гравитационных аномалий в массиве точек \bar{X}_i , находящихся в окрестности всех возможных координат КА. Например, для МКС массив координат \bar{X}_i задается с шагом 1° по долготе в диапазоне $0\text{-}360^\circ$, 1° по широте в диапазоне $\pm 52^\circ$. По высоте точки \bar{X}_i задаются в двух слоях высотой 350 и 380 км. В каждой точке три координаты вектора $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$ задаются двумя байтами на каждую координату. В результате объём запоминаемого массива $\Delta g(\bar{X}_i)$ равен $M=360\times 104\times 2\times 3\times 2$ байт ≈ 450 Кб.

Описанная выше модель гравитационного поля Земли порядка 72×72 реализована в навигационном процессоре АСН-М МКС и обеспечивает высокоточное моделирование движения МКС.

Запоминаемые координаты \bar{X}_i и объём запоминаемого массива $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$ зависит от типа КА и его орбиты. Например, для низкоорбитального гелиосинхронного КА объём запоминаемого массива для моделирования гравитационного поля порядка 72×72 составляет ~ 780 Кбайт, для геостационарного КА – 1,3 Кбайт.

Неформальные описания программных функций, формирующих векторы гравитационного поля Земли высокого порядка по приведённым алгоритмам для КА различных классов, а также описание интерфейсов этих функций приведены в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этих функций.

2.2 Аэродинамическое возмущение орбиты КА

Аэродинамические возмущения орбит КА являются наиболее непредсказуемыми и трудно моделируемыми. Атмосфера Земли простирается до высот ~ 20000 км, однако заметное влияние оказывает только на низкоорбитальные КА с высотами орбит до ~ 1000 км. Аэродинамическое возмущающее ускорение зависит от плотности окружающей КА атмосферы, геометрии и ориентации КА.

Плотность атмосферы на высотах выше 100 км является величиной крайне нестабильной и зависит от многих факторов. Основными из факторов, определяющих плотность атмосферы в данной точке, являются высота над поверхностью Земли, освещенность Солнцем и солнечная активность. Последний фактор, существенно влияя на плотность атмосферы, является плохо прогнозируемым, что сильно затрудняет создание универсальной модели плотности атмосферы. Зависимость плотности атмосферы от вышеперечисленных факторов частично отражают данные, приведённые в Таблице 2.3.

*Ночные и дневные плотности в кг/м³ для минимума и максимума
 солнечной активности*

Таблица 2.3

Высота h км	Минимум солнечной активности		Максимум солнечной активности	
	4 ч (ночь)	14 ч (день)	4 ч (ночь)	14 ч (день)
120	$2,49 \cdot 10^{-8}$	$2,49 \cdot 10^{-8}$	$2,49 \cdot 10^{-8}$	$2,49 \cdot 10^{-8}$
140	$4,2 \cdot 10^{-9}$	$4,08 \cdot 10^{-9}$	$3,84 \cdot 10^{-9}$	$3,71 \cdot 10^{-9}$
160	1,19	1,19	1,41	1,37
180	$4,19 \cdot 10^{-10}$	$4,69 \cdot 10^{-10}$	$6,81 \cdot 10^{-10}$	$6,82 \cdot 10^{-10}$
200	1,69	2,20	3,76	3,98
220	$7,57 \cdot 10^{-11}$	1,15	2,25	2,55
240	3,66	$6,46 \cdot 10^{-11}$	1,42	1,73
260	1,88	3,83	1,09	1,22
280	1,02	2,37	$6,28 \cdot 10^{-11}$	$8,89 \cdot 10^{-11}$
300	$5,72 \cdot 10^{-12}$	1,51	4,35	6,63
320	3,30	$9,89 \cdot 10^{-12}$	3,03	5,03
340	1,95	6,61	2,20	3,87
360	1,17	4,49	1,60	3,02
380	$7,17 \cdot 10^{-13}$	3,10	1,18	2,38
400	4,43	2,16	$8,80 \cdot 10^{-12}$	1,89
420	2,78	1,53	6,62	1,51
440	1,76	1,09	5,03	1,22
460	1,13	$7,77 \cdot 10^{-13}$	3,84	$9,91 \cdot 10^{-12}$
480	$7,35 \cdot 10^{-14}$	5,60	2,91	8,10
500	4,87	4,06	2,30	6,65

520	3,29	2,96	1,79	5,50
540	2,28	2,17	1,40	4,56
560	1,62	1,61	1,10	3,80
580	1,19	1,19	$8,70 \cdot 10^{-13}$	3,18
600	$8,98 \cdot 10^{-15}$	$8,91 \cdot 10^{-14}$	6,90	2,67
620	6,98	6,71	5,49	2,25
640	5,60	5,09	4,38	1,90
660	4,60	3,90	3,51	1,61
680	3,85	3,01	2,82	1,37
700	3,28	2,35	2,28	1,17
720	2,84	1,86	1,84	$9,98 \cdot 10^{-13}$
740	2,48	1,48	1,49	8,35
760	2,19	1,20	1,21	7,34
780	1,94	$9,86 \cdot 10^{-15}$	$9,91 \cdot 10^{-14}$	6,31
800	$1,74 \cdot 10^{-15}$	8,19	8,12	5,44

На высотах более 200 км КА испытывает сопротивление атмосферы, определяемое формулой:

$$R_x = C_x \frac{\rho g^2}{2} S_\mu, \quad (2.12)$$

где C_x - безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления;

ρ - плотность атмосферы в рассматриваемой точке орбиты;

g - скорость полёта относительно атмосферы;

S_μ - площадь миделевого сечения, определяемая как площадь проекции КА на плоскость, перпендикулярную направлению скорости полёта.

Для расчёта аэродинамического ускорения необходимо определить плотность ρ в данной точке, используя какую-либо модель атмосферы Земли. В настоящее время разработано много моделей атмосферы различной сложности и точности. Одной из наиболее полных моделей является модель, приведённая на сайте [с.]. Если определена плотность атмосферы, плоскость миделевого сечения и коэффициент аэродинамического сопротивления, то аэродинамическое ускорение КА может быть определено по формуле:

$$a_{a\vartheta} = \frac{R_x}{m}, \quad (2.13)$$

где m - масса КА.

Равенство (2.13) может быть представлено в виде:

$$a_{a\vartheta} = b \frac{\rho g^2}{2}, \quad (2.14)$$

где $b = \frac{C_x S_\mu}{m}$ - баллистический коэффициент.

Во многих случаях баллистический коэффициент определяют опытным путём в процессе проведения навигационных измерений. Часто этот коэффициент является медленно меняющимся. Например, при постоянной орбитальной ориентации КА. Даже если в процессе полёта солнечные батареи КА отслеживают Солнце, то в среднем за виток баллистический коэффициент останется константой. Поэтому определив этот коэффициент, можно достаточно точно прогнозировать движение КА с учётом аэродинамического торможения. В качестве примера приведём значения аэродинамического ускорения МКС, находящейся на орбите высотой 350 – 380 км. В зависимости от текущей высоты орбиты, а также от активности Солнца в дежурной ориентации среднее аэродинамическое ускорение МКС составляет $0,5 \div 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$. Такое ускорение сильно влияет на орбиту МКС, обуславливая уменьшение высоты орбиты.

На рисунке 2.11 приведён график влияния аэродинамического торможения МКС на параметры её орбиты. Из графика следует, что при достаточно малой величине аэродинамического торможения ($\sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2$) уход КА по продольной дальности за трое суток составляет ~ 50 км, что соизмеримо с влиянием на продольную дальность второй зональной гармоники (C_{20}), обусловленной сжатием Земли (см. рисунок 2.2).

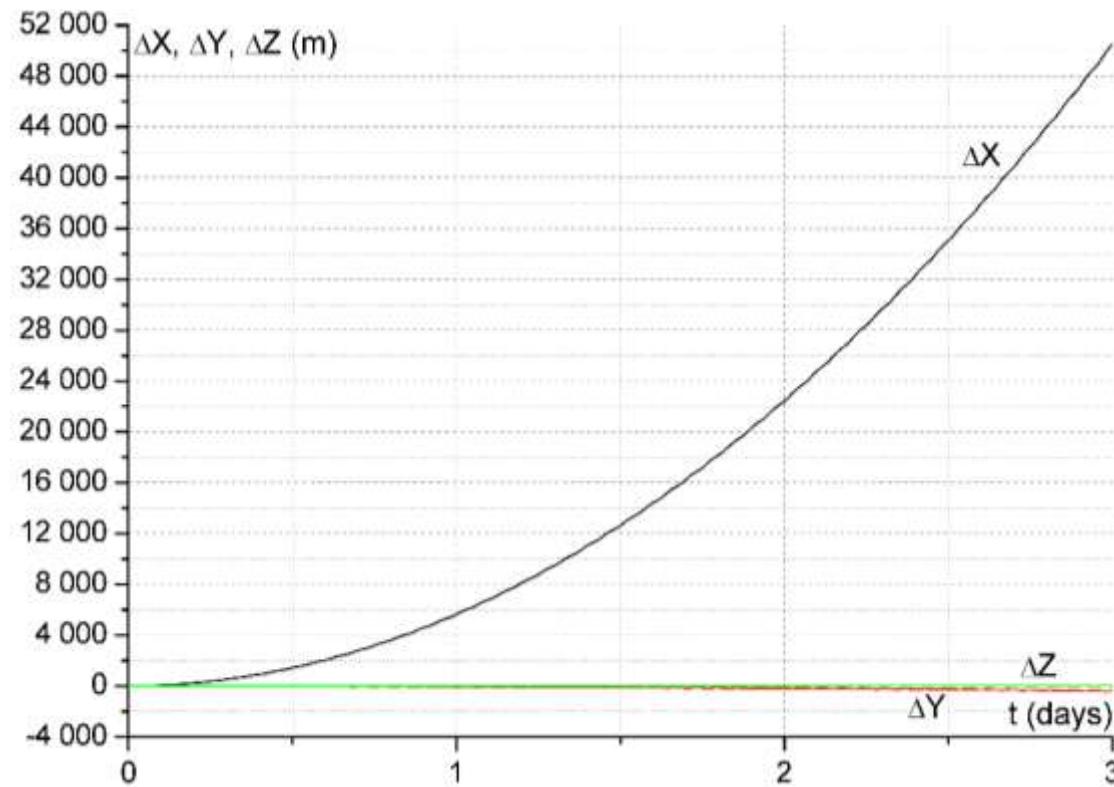


Рис. 2.11 - Влияние аэродинамического торможения на прогноз орбиты МКС.

Учитывая большой диапазон изменения плотности атмосферы из-за влияния активности Солнца, аэродинамическое возмущение орбиты КА должно учитываться для орбит высотой до 1000 км. Действительно, как следует из Таблицы 2.3, плотность дневной атмосферы при максимуме солнечной активности на высоте 800 км превышает плотность ночной атмосферы при минимуме солнечной активности на высоте 400 км.

Существует много различных моделей атмосферы, формирующие на выходе её параметры. Одной из таких моделей является модель плотности атмосферы в текущей точке

траектории NRLMSISE-00, являющаяся международным стандартом атмосферы для космических исследований.

В Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций приведено неформальное описание функции, моделирующей плотность атмосферы в соответствии с этой моделью, а также описание интерфейса этой функции. Там же указан сайт, где можно найти программную реализацию этой функции.

2.3 Возмущения, обусловленные гравитационным воздействием на КА Луны, Солнца и планет

На движение орбитальных КА существенное влияние оказывают другие небесные тела. Наиболее сильные возмущения оказывают Луна и Солнце. Влиянием планет, как правило, можно пренебречь. Определим зависимость возмущающих ускорений от положения и массы возмущающего тела на примере гравитационного влияния Луны.

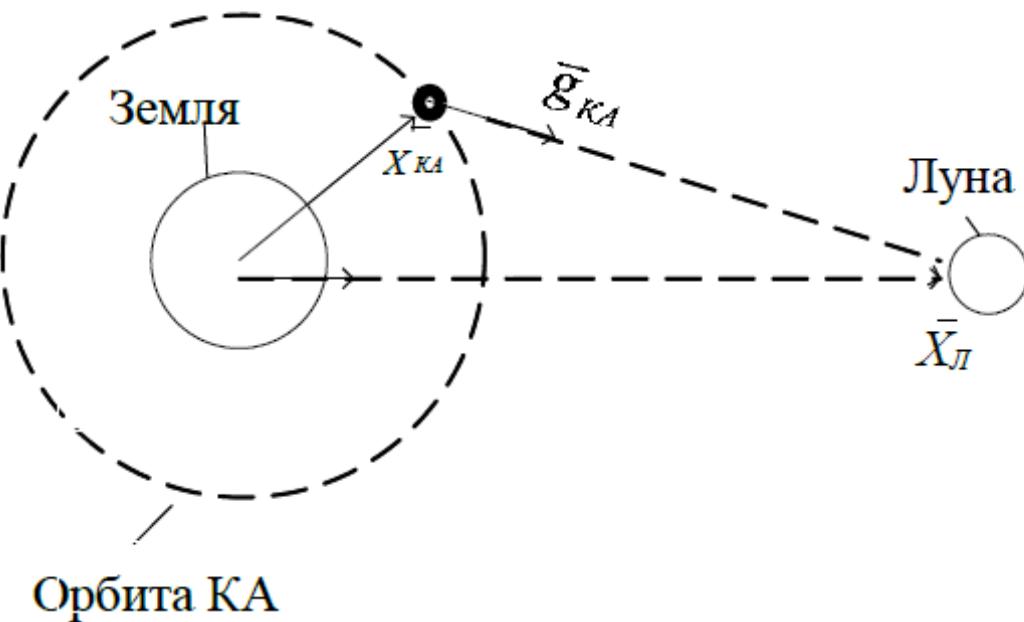


Рис. 2.12 Иллюстрация влияния гравитационного влияния Луны на движение КА.

Пусть $\bar{X}_{КА}$ и $\bar{X}_{Л}$ – векторы координат КА и Луны в геоцентрической системе координат (см. рис. 2.12).

Тогда ускорение Земли, обусловленное гравитационным влиянием Луны, будет равно

$$\bar{g}_3 = \frac{\mu_L}{|\bar{X}_L|^3} \bar{X}_L, \quad (2.15)$$

где μ_L – гравитационная постоянная Луны.

Ускорение КА, обусловленное гравитационным влиянием Луны, будет равно:

$$\bar{g}_{KA} = \frac{\mu_L}{|\bar{X}_L - \bar{X}_{KA}|^3} (\bar{X}_L - \bar{X}_{KA}). \quad (2.16)$$

Гравитационное ускорение КА относительно системы координат, связанной с Землёй, (см. рис. 2.12), будет равно:

$$\bar{g}_{GR,L} = \bar{g}_{KA} - \bar{g}_3 = \mu_L \left(\frac{(\bar{X}_L - \bar{X}_{KA})}{|\bar{X}_L - \bar{X}_{KA}|^3} - \frac{\bar{X}_L}{|\bar{X}_L|^3} \right). \quad (2.17)$$

По аналогичной формуле определяется гравитационное возмущение от Солнца.

Для определения гравитационного возмущения от Луны и Солнца требуется определить их координаты относительно выбранной гелиоцентрической системы координат, например, относительно ИСК или ГСК. В настоящее время в Интернете можно найти алгоритмы и программы расчёта координат Луны и Солнца относительно ИСК с разной степенью точности.

На рисунке 2.13 и 2.14 приведены графики "разлёта" орбит КА *GPS* из-за гравитационного воздействия Луны и Солнца. Из приведённых графиков следует, что за трое суток из-за влияния Луны орбита "уходит" на 4 км по продольной дальности и ~2 км по боковой дальности (из-за поворота плоскости орбиты).

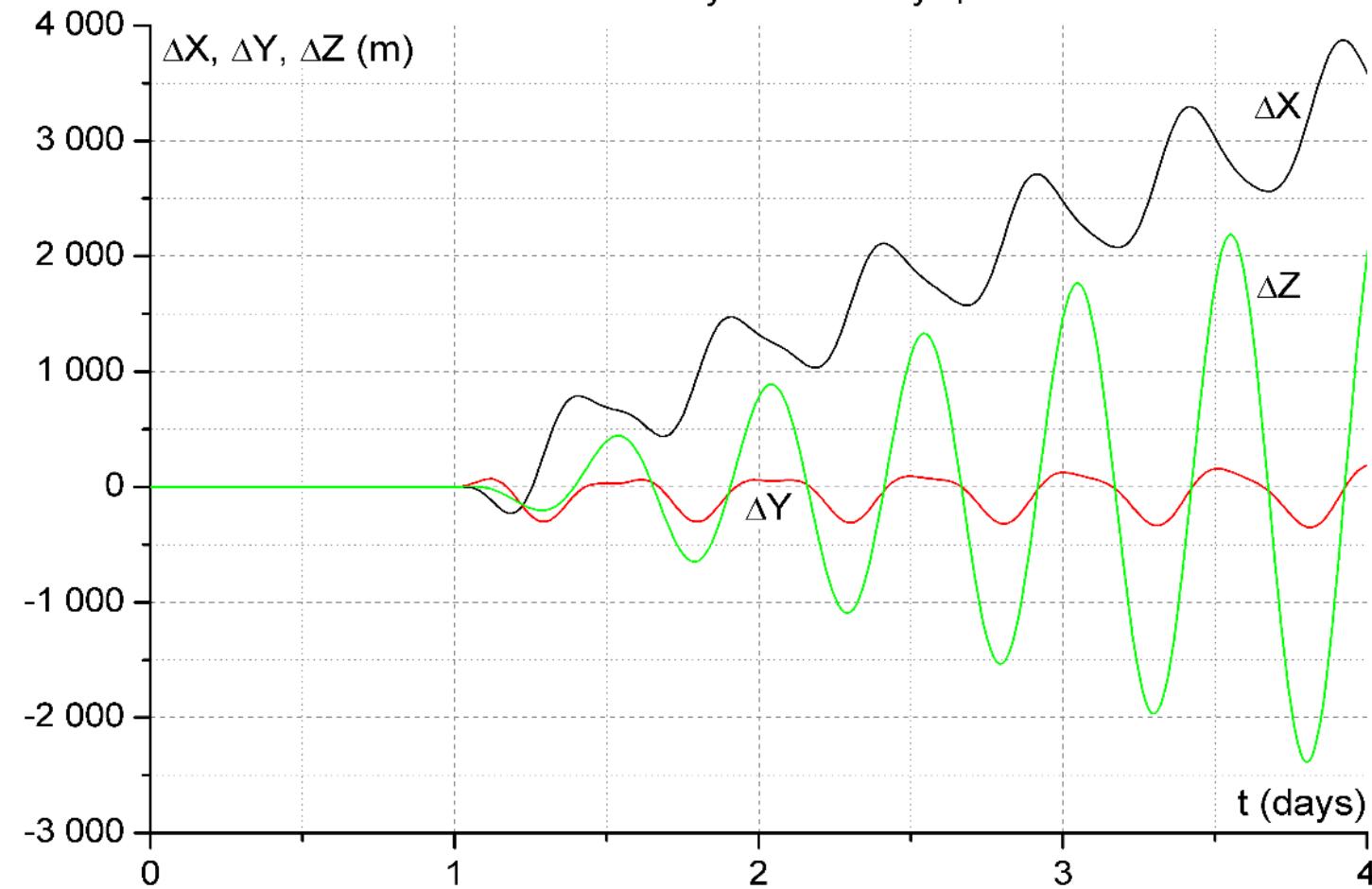


Рис. 2.13 Влияние гравитационных возмущений от Луны на движение высокоорбитального КА.

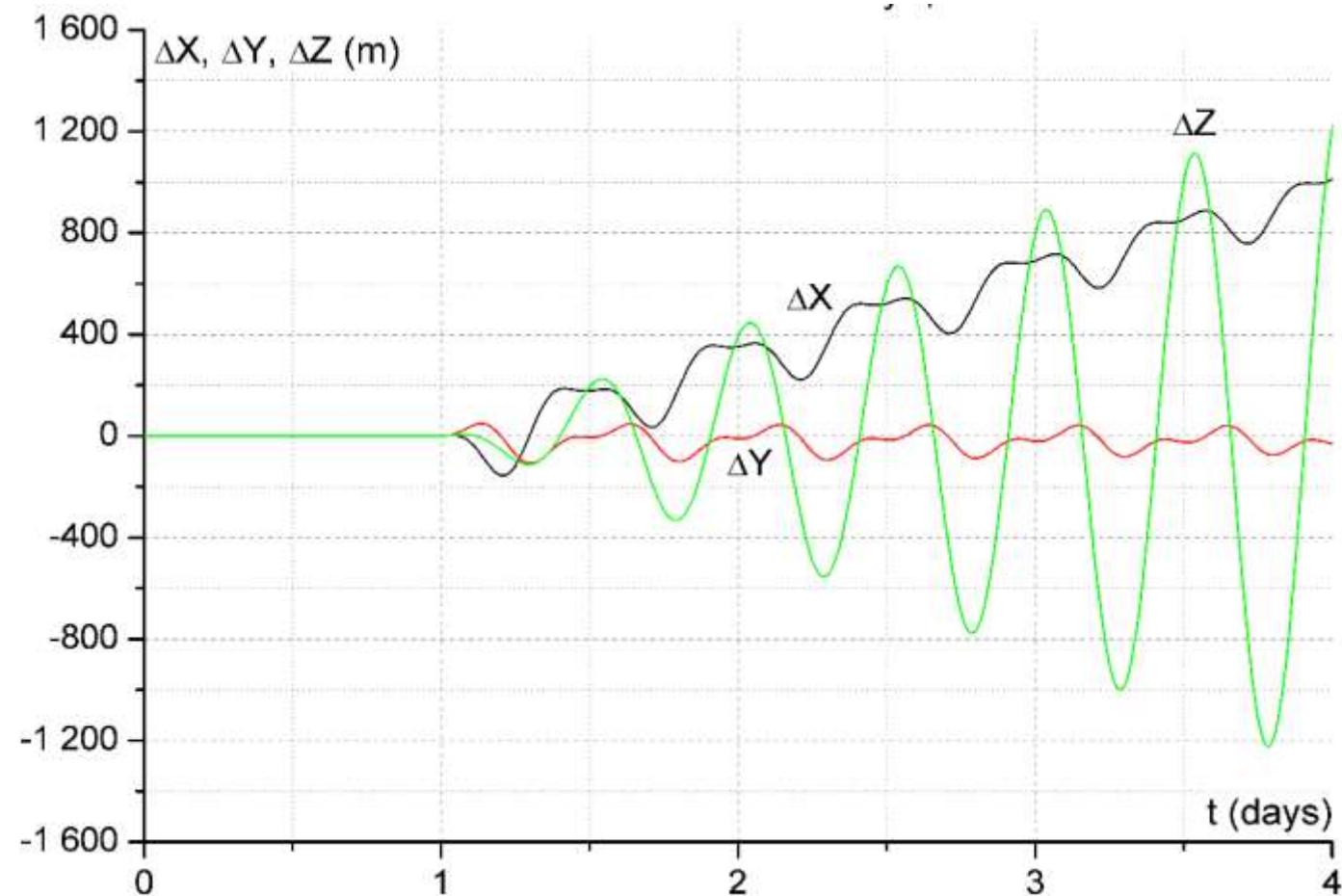


Рис. 2.14 Влияние гравитационных возмущений от Солнца на движение высокоорбитального КА.

Из-за влияния Солнца орбита "уходит" на 1 км по продольной дальности и на 1,2 км по боковой дальности.

На рис. 2.15, 2.16 приведены графики "разлёта" орбиты МКС из-за гравитационного воздействия Луны и Солнца. Из приведённых графиков следует, что за трое суток из-за влияния Луны орбита "уходит" на 400 м по продольной дальности и на 75 м по боковой дальности. Из-за влияния Солнца орбита "уходит" на 100 м по продольной дальности и на 40 м по боковой дальности.

Приведённые примеры показывают значительное влияние Луны и Солнца на орбиту КА. Во многих случаях в модели движения КА необходимо учитывать эти возмущающие ускорения, определяемые по формуле (2.17). Для реализации формулы (2.17) необходимо знать векторы координат Луны \bar{X}_L и Солнца \bar{X}_C в геоцентрической системе координат. Сегодня существует много алгоритмов разной степени сложности и точности вычисления этих векторов на заданный момент времени. Например, достаточно приближённые алгоритмы приведены в Интерфейсном контролльном документе ГЛОНАСС. На ряде сайтов в Интернете можно найти программные функции, формирующие \bar{X}_L и \bar{X}_C с высокой точностью. Однако все эти функции требуют значительных вычислительных ресурсов и не могут быть реализованы в реальном времени на бортовых вычислительных средствах.

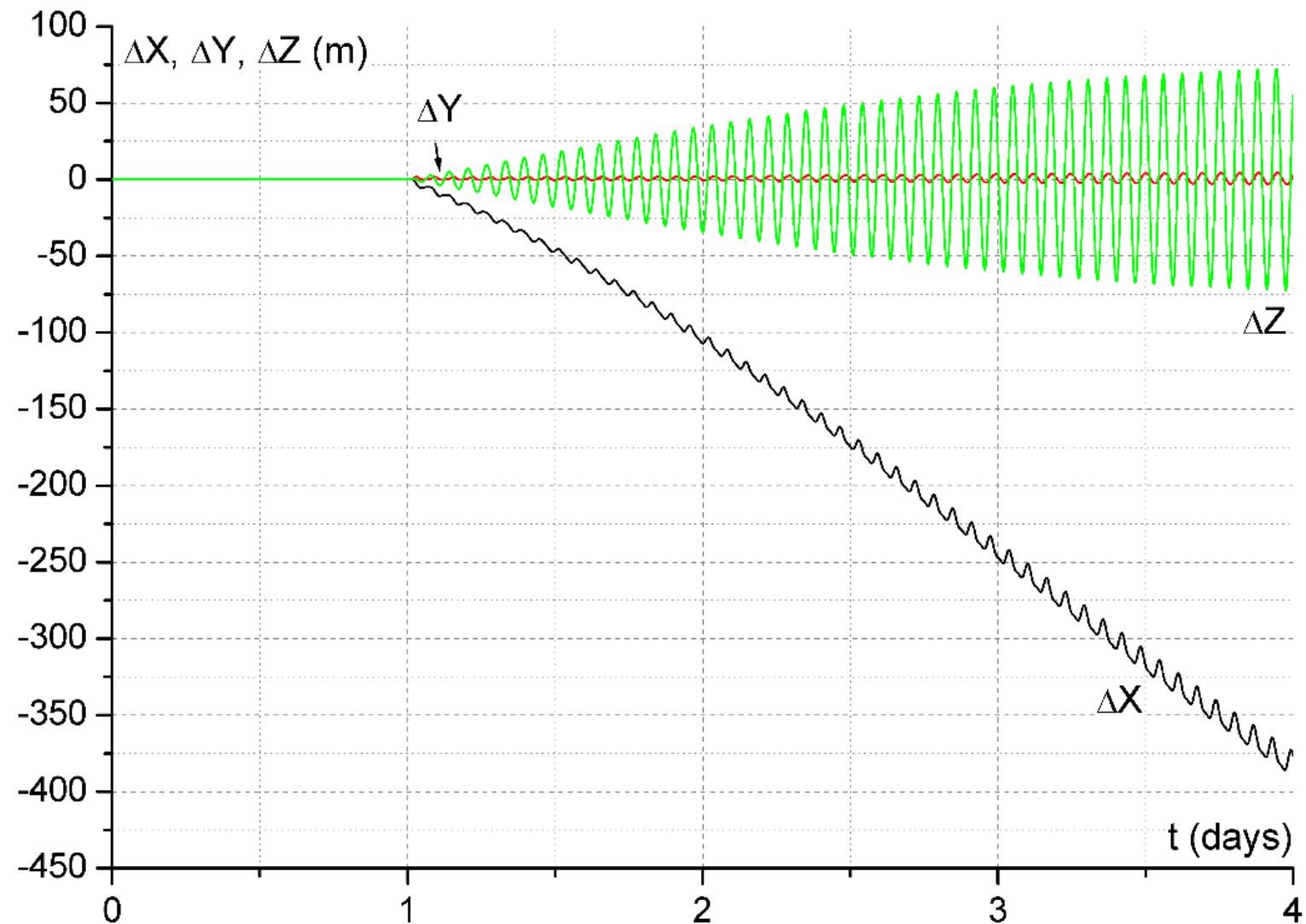


Рис. 2.15 Влияние гравитационных возмущений от Луны на движение низкоорбитального КА.

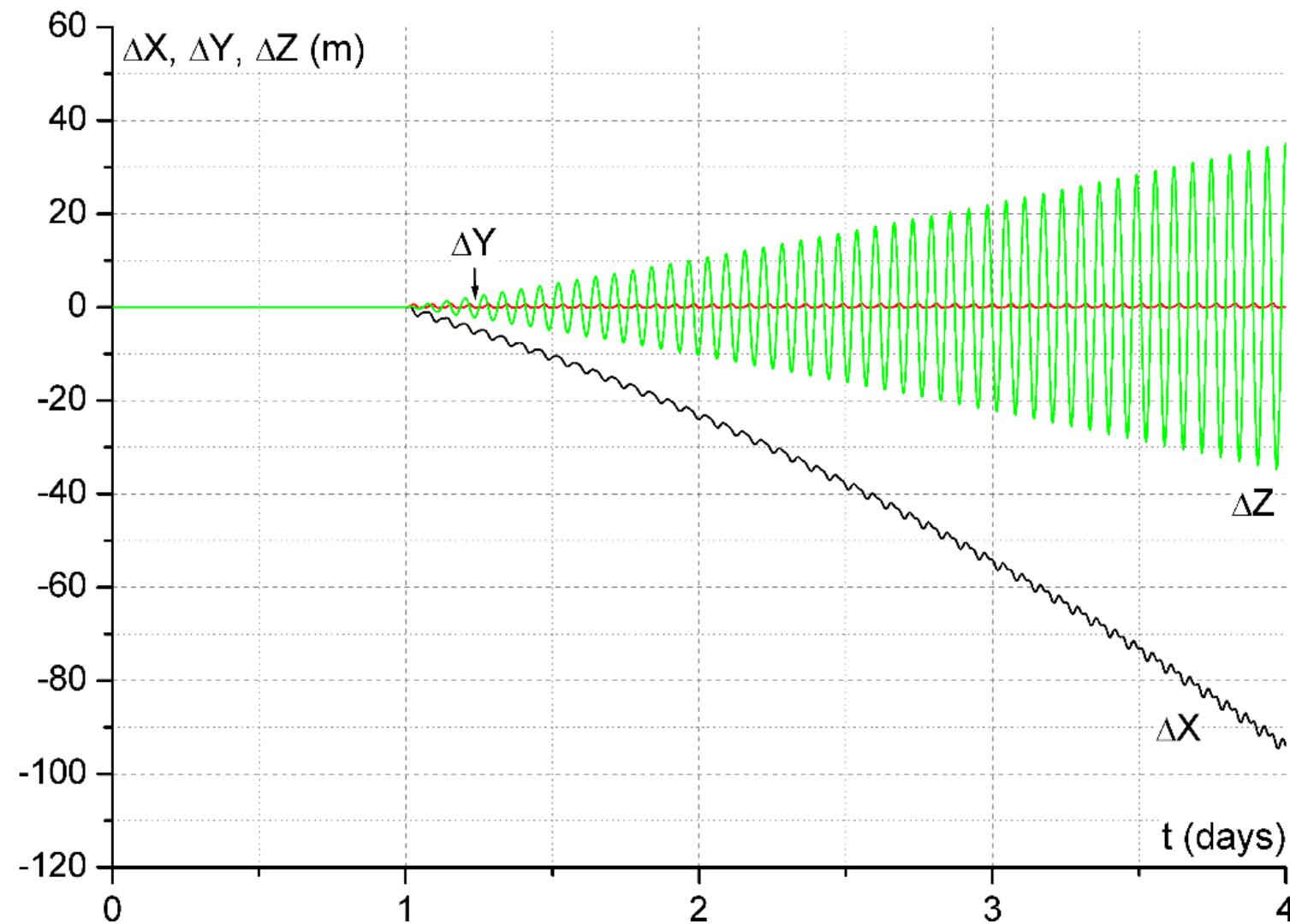


Рис. 2.16 Влияние гравитационных возмущений от Солнца на движение низкоорбитального КА.

Рассмотрим метод формирования векторов \bar{X}_L и \bar{X}_C в геоцентрической системе координат, требующий для своей реализации в десятки раз меньше вычислительных ресурсов по сравнению с существующими алгоритмами высокоточного прогноза координат Луны и Солнца, но не уступающий им по точности.

Земля и Луна врачаются относительно их общего центра масс. Пусть начало инерциальной системы координат X_0, Y_0, Z_0 расположено в общем центре масс Земли и Луны (см. рис. 2.17). Пусть также векторы $\bar{X}_3, \bar{X}_L, \bar{X}_C$ – векторы центров соответственно Земли, Луны и Солнца в этой системе координат. Запишем уравнения движения Луны и Земли в предположении центральности гравитационного поля Земли и Луны без учёта возмущающих ускорений:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{X}}_L &= -\frac{\mu_3}{|(\bar{X}_L - \bar{X}_3)|^3} (\bar{X}_L - \bar{X}_3), \\ \ddot{\bar{X}}_3 &= -\frac{\mu_L}{|(\bar{X}_3 - \bar{X}_L)|^3} (\bar{X}_3 - \bar{X}_L),\end{aligned}\tag{2.18}$$

где μ_3, μ_L – гравитационные постоянные Земли и Луны.

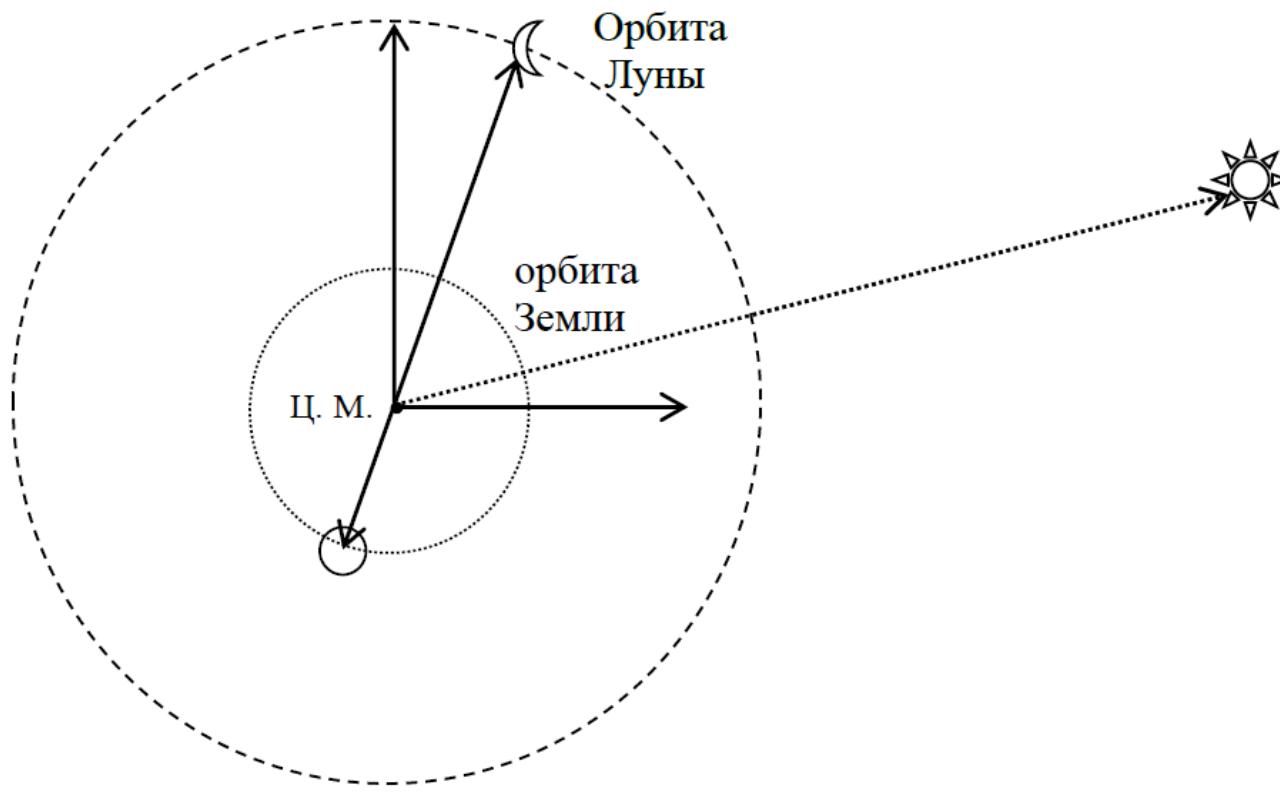


Рис. 2.17 Иллюстрация движения общего цента масс Земля-Луна вокруг Солнца.

Уравнения (2.18) представляют собой уравнения невозмущенного движения Луны и Земли.

Оценим порядок основных возмущающих ускорений, обусловленных разными возмущающими факторами. Основным из таких возмущений является гравитационное возмущение от Солнца. В соответствии с формулой (2.17), возмущающие ускорения от Солнца, действующие на движение Луны и Земли, будут иметь вид:

$$g_{C-L} = \mu_C \left(\frac{(\bar{X}_C - \bar{X}_L)}{|\bar{X}_C - \bar{X}_L|^3} - \frac{\bar{X}_C}{|\bar{X}_C|^3} \right),$$

$$g_{C-3} = \mu_C \left(\frac{(\bar{X}_C - \bar{X}_3)}{|\bar{X}_C - \bar{X}_3|^3} - \frac{\bar{X}_C}{|\bar{X}_C|^3} \right), \quad (2.19)$$

где μ_C гравитационная постоянная Солнца.

Легко определить порядок возмущений, определяемых соотношением (2.19). Для Луны порядок возмущающего ускорения определяется выражением:

$$g_{C-L} \approx \frac{2\mu_C}{\bar{X}_C^2} \frac{|\bar{X}_L|}{|\bar{X}_C|} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2 \quad (2.20)$$

Второй по величине составляющей, возмущающей орбиту Луны, является гравитационное возмущение, обусловленное сжатием Земли. Порядок этой составляющей определяется формулами (2.4) и имеет вид:

$$a \approx \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{|\bar{X}_L|^4} \approx 10^{-9} \text{ м/с}^2. \quad (2.21)$$

То есть, возмущение, обусловленное сжатием Земли, на четыре порядка меньше гравитационного возмущения от Солнца. Поэтому будем пренебрегать всеми возмущениями, влияющими на движение Луны кроме гравитационного возмущения от Солнца, с учётом которого уравнения движения Луны и Земли (2.18) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{X}}_L &= -\frac{\mu_3}{|\bar{X}_L - \bar{X}_3|^3} (\bar{X}_L - \bar{X}_3) + \mu_C \left(\frac{\bar{X}_C - \bar{X}_L}{|\bar{X}_C - \bar{X}_L|^3} - \frac{\bar{X}_C}{|\bar{X}_C|^3} \right) \\ \ddot{\bar{X}}_3 &= -\frac{\mu_L}{|\bar{X}_L - \bar{X}_3|^3} (\bar{X}_3 - \bar{X}_L) + \mu_C \left(\frac{\bar{X}_C - \bar{X}_3}{|\bar{X}_C - \bar{X}_3|^3} - \frac{\bar{X}_C}{|\bar{X}_C|^3} \right)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Рассмотрим движение Луны относительно Земли, т.е. относительно ИСК, начало которой установлено в центре масс Земли.

В новой системе координат векторы \bar{X}_L и \bar{X}_C будут равны

$$\begin{aligned}\bar{X}_{0L} &= \bar{X}_L - \bar{X}_3; \\ \bar{X}_{0C} &= \bar{X}_C - \bar{X}_3\end{aligned}\quad (2.23)$$

Вычтя из первого уравнения системы (2.22) второе уравнение, с учётом равенств (2.23) получим уравнение движения Луны в ИСК с началом в центре масс Земли.

$$\ddot{\bar{X}}_{0L} = -\frac{\mu_3 + \mu_L}{|\bar{X}_{0L}|^3} \bar{X}_{0L} + \mu_C \left(\frac{\bar{X}_{0C} - \bar{X}_{0L}}{|\bar{X}_{0C} - \bar{X}_{0L}|^3} - \frac{\bar{X}_{0C}}{|\bar{X}_{0C}|^3} \right) \quad (2.24)$$

Для движения общего центра масс Земли и Луны вокруг Солнца можно записать уравнение:

$$\ddot{\bar{X}}_C = -\frac{\mu_C + \mu_3 + \mu_L}{|\bar{X}_C|^3} \bar{X}_C \quad (2.25)$$

Уравнения (2.24) и (2.25) с достаточно высокой точностью описывают изменение во времени векторов \bar{X}_{0C} и \bar{X}_{0L} в ИСК. Если в некоторый начальный момент времени t_0 известны векторы \bar{X}_{0C} и \bar{X}_{0L} , то из соотношений (2.23) легко получить значение векторов \bar{X}_c и $\dot{\bar{X}}_c$ на этот момент времени:

$$\begin{aligned}\bar{X}_c &= \bar{X}_{0C} + \bar{X}_3 = \bar{X}_{0C} - \frac{\mu_L}{\mu_L + \mu_3} \bar{X}_{0L} \\ \dot{\bar{X}}_c &= \dot{\bar{X}}_{0C} - \frac{\mu_L}{\mu_3 + \mu_L} \dot{\bar{X}}_{0L}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Интегрируя уравнение (2.25) с достаточно высокой точностью будем формировать вектор \bar{X}_c , из которого легко получить вектор \bar{X}_{0C} по формуле:

$$\bar{X}_{0C} = \bar{X}_c + \frac{\mu_L}{\mu_L + \mu_3} \bar{X}_{0L}\tag{2.27}$$

Подставляя вектор \bar{X}_{0C} в правую часть уравнения (2.24) и интегрируя это уравнение, будем формировать вектор \bar{X}_{0L} .

На сайте [с. 1] можно найти программную функцию на языке C++, определяющую координаты Луны и Солнца в ИСК J2000 в соответствии с рассмотренным выше алгоритмом.

Таблица 2.4

	Время инициализации	Время реализации 1 шага
Персональный компьютер τ мкс	29	0,6
Бортовой навигационный процессор τ мкс	4100	90

Данные, приведённые в таблице, показывают, что для формирования начальных векторов Луны и Солнца в бортовом процессоре требуется около четырёх мкс. Для процессора, решающего на секундном цикле сотни разных задач, в том числе и более приоритетных, четыре мкс представляют собой недопустимо большую величину. Использование предложенного метода позволяет сократить время решения задачи на секундном шаге в более чем в 40 раз и практически снимает проблему быстродействия решения данной задачи.

После формирования векторов координат Луны \bar{X}_{0L} и Солнца \bar{X}_{0C} по формуле (2.17) формируются векторы гравитационного возмущения от Луны и Солнца в ИСК. При необходимости из ИСК эти векторы могут быть преобразованы в ГСК с помощью функций перехода из J2000 в ГСК, рассмотренных в разделе 1.3.

Рассмотренный метод формирования векторов гравитационных возмущений от Луны и Солнца является приближенным. В первоначальный момент его точность соответствует точности метода, используемого при инициализации. Далее, в процессе интегрирования уравнений (2.24) и (2.25) возникает ошибка, которая возрастает со временем из-за накапливающихся ошибок интегрирования. Представляет интерес интервал времени, на котором предложенный метод работает с достаточной точностью, под которой, в соответствии с определением, сделанным в разделе 2, будем понимать величину $2 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2$.

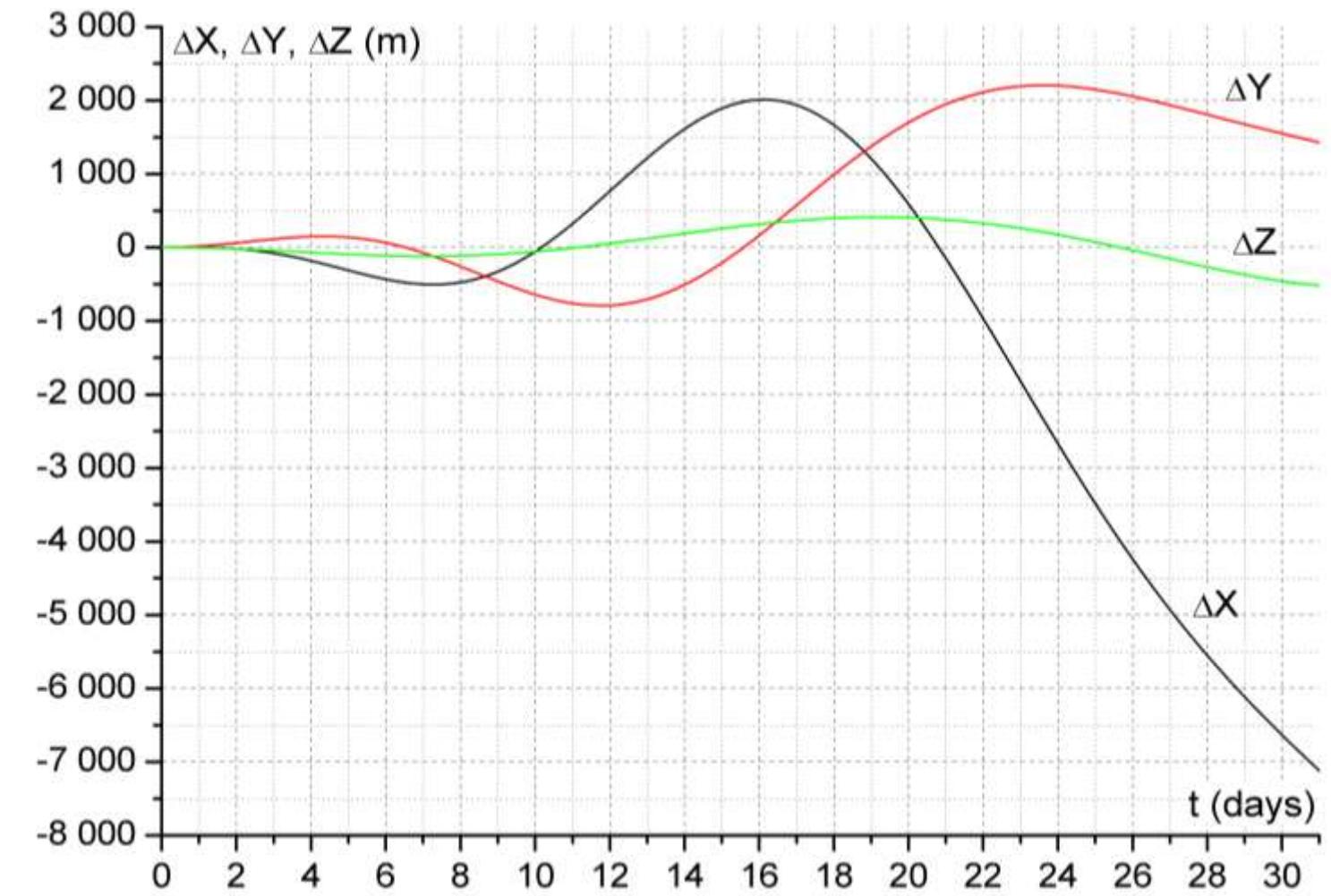


Рис. 2.18 Ошибки прогноза координат Луны.

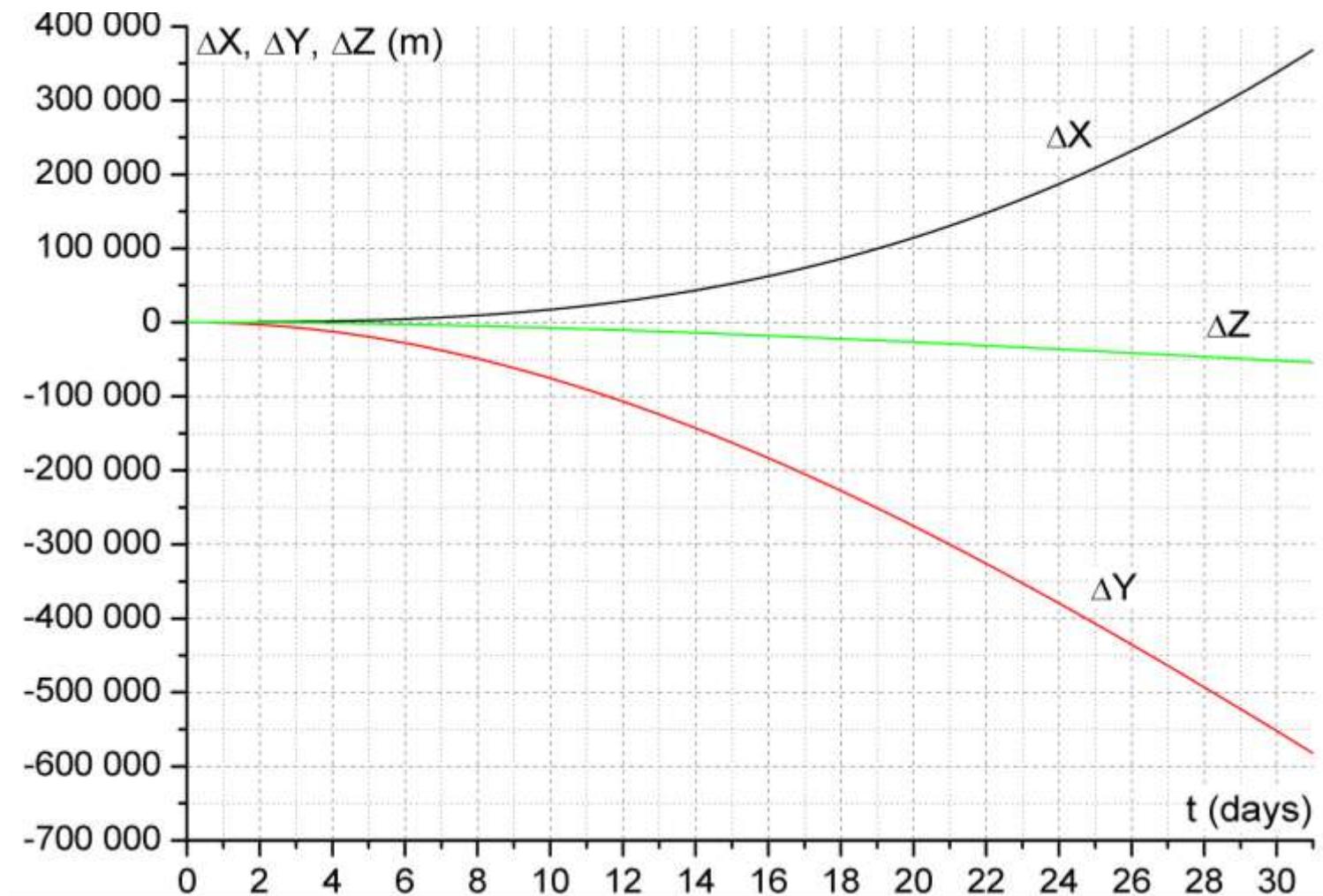


Рис. 2.19 - Ошибки прогноза координат Солнца.

На рис. 2.18, 2.19 приведены графики ошибок координат соответственно Луны и Солнца в ОСК, формируемых предложенным методом на интервале 1 месяц. Из приведённых графиков видно, что в течение месяца ошибки координат Луны в ОСК не превышают 8 км, ошибки координат Солнца 600 км.

Ошибки формирования координат Луны и Солнца приводят соответственно к ошибкам гравитационного возмущения, верхняя оценка которых определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} |\Delta a_L| &= 6|\bar{a}_L| \frac{|\Delta \bar{X}_L|}{r_L}, \\ |\Delta a_C| &= 6|\bar{a}_C| \frac{|\Delta \bar{X}_C|}{r_C}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $\Delta \bar{X}_L$, $\Delta \bar{X}_C$ – ошибки векторов Луны и Солнца;

r_L, r_C – расстояния от Земли до Луны и Солнца;

\bar{a}_L , \bar{a}_C – векторы гравитационных возмущений от Луны и Солнца.

С учётом значений модулей векторов $|\bar{a}_L|$ и $|\bar{a}_C|$, приведённых в Таблице 1, а также средних расстояний от Земли до Луны и Солнца, определим максимальные значения ошибок гравитационных возмущений:

$$\begin{aligned} |\Delta \bar{a}_L| &< 6 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \frac{m}{c^2} \frac{8 \text{ км}}{400000 \text{ км}} \approx 0,5 \cdot 10^{-9} m / c^2 \\ |\Delta \bar{a}_C| &< 6 \cdot 10^{-6} \frac{m}{c^2} \frac{600 \text{ км}}{150000000 \text{ км}} \approx 0,2 \cdot 10^{-10} m / c^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Таким образом, предложенный метод формирования гравитационного воздействия на КА и соответствующая этому методу программная функция на интервале 1 месяц обеспечивают формирование соответствующих возмущений с заведомо более высокой точностью, чем $2 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2$. Это означает, что разработанная функция формирования гравитационных возмущений от Луны и Солнца может, по крайней мере, месяц работать непрерывно без промежуточной инициализации, обеспечивая высокую точность формируемых возмущающих ускорений. При этом, время формирования очередного значения вектора возмущения в ~ 40 раз меньше времени формирования такого вектора при использовании классических методов расчёта с аналогичной точностью.

Кроме Луны и Солнца на движение КА оказывают влияние также и планеты. Для КА, находящихся на орбитах Земли, из всех планет максимальное возмущение оказывает Венера в основном на тех интервалах времени, когда расстояние между Венерой и Землёй не превышает 0,5 астрономической единицы. Ориентировочные значения гравитационных возмущений орбитальных КА для этих интервалов времени приведены в Таблице 1, откуда видно, что эти возмущения на несколько порядков меньше возмущений от Луны и Солнца и в большинстве случаев ими можно пренебречь. Однако при рассмотрении межорбитальных перелётов может возникнуть необходимость учёта влияния не только Венеры, но и других планет.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный метод формирования гравитационных возмущений от Луны и Солнца, а также описания интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти её программную реализацию.

2.4 Возмущения орбиты КА под воздействием сил солнечного давления

Одной из основных составляющих возмущений орбиты КА являются силы солнечного давления, действующие на поверхность КА. Возмущающее ускорение от сил солнечного давления зависит от формы КА, его массы, а также от материала покрытия КА, определяющего коэффициент отражения солнечного света от поверхности элемента конструкции КА. Из-за большого количества различного рода неопределённостей создание точной модели светового давления представляет собой сложную проблему. Однако для многих КА основной отражающей поверхностью являются солнечные батареи, площадь которых во много раз превосходит площадь Миделя самого КА. К тому же эти батареи ориентируются на Солнце. В этом случае в качестве приближенной модели может использоваться алгоритм:

$$\bar{a}_{CD} = \frac{\bar{X}_{KA} - \bar{X}_C}{|\bar{X}_{KA} - \bar{X}_C|} \frac{(S_{CB} + S_M)}{m} K, \quad (2.30)$$

где \bar{X}_{KA}, \bar{X}_C – координаты соответственно КА и Солнца;

S_{CB} – площадь солнечных батарей;

S_M – площадь Миделя КА;

m – масса КА;

K – коэффициент влияния сил солнечного давления. Коэффициент K зависит от мощности солнечного излучения, коэффициента отражения излучения от поверхности солнечных батарей и КА. Обычно величина этого коэффициента лежит в диапазоне $5 \div 5,5 \cdot 10^{-6}$ н/м².

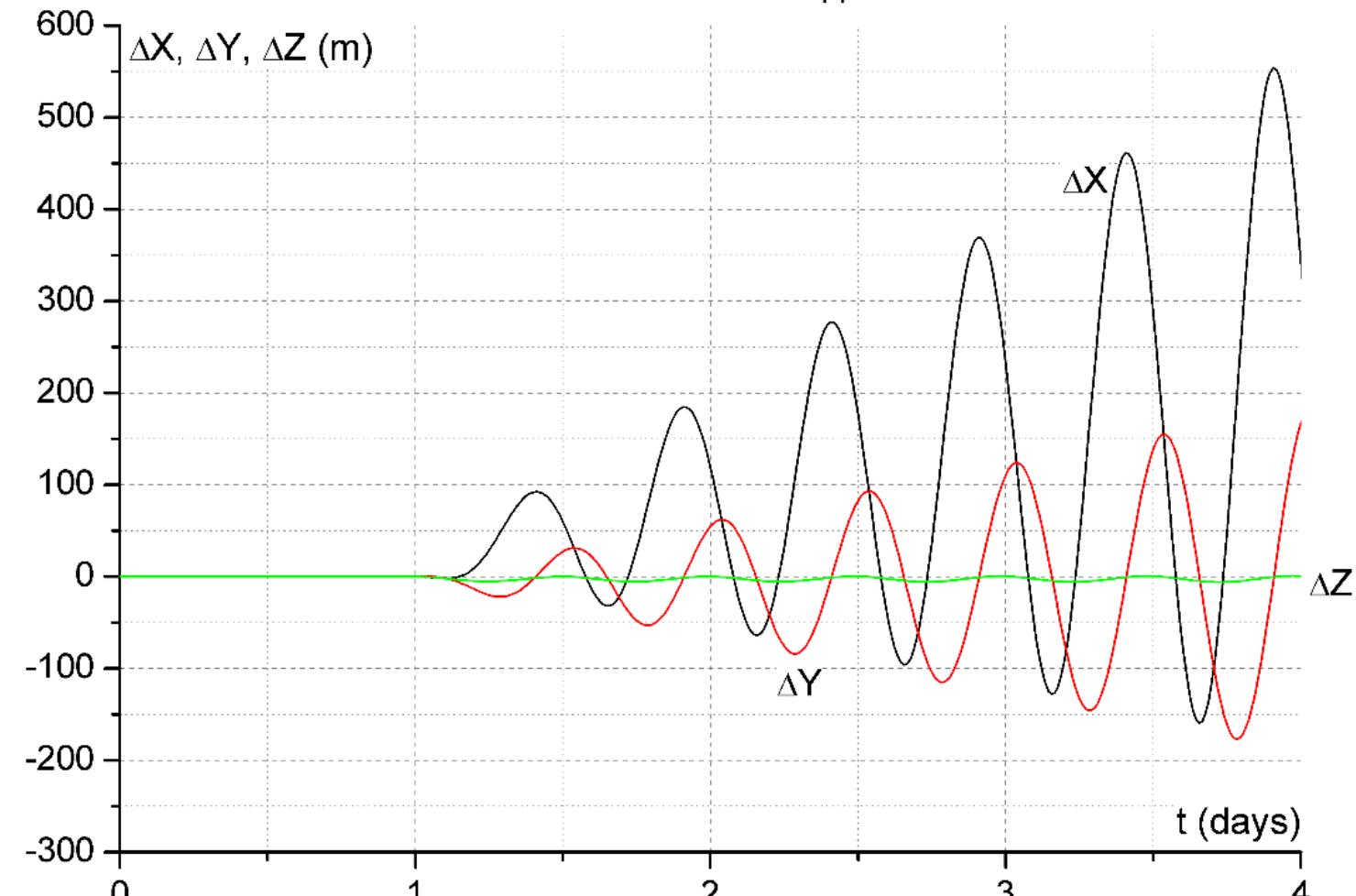


Рис. 2.20 Влияние сил солнечного давления на движение
высокоорбитального КА.

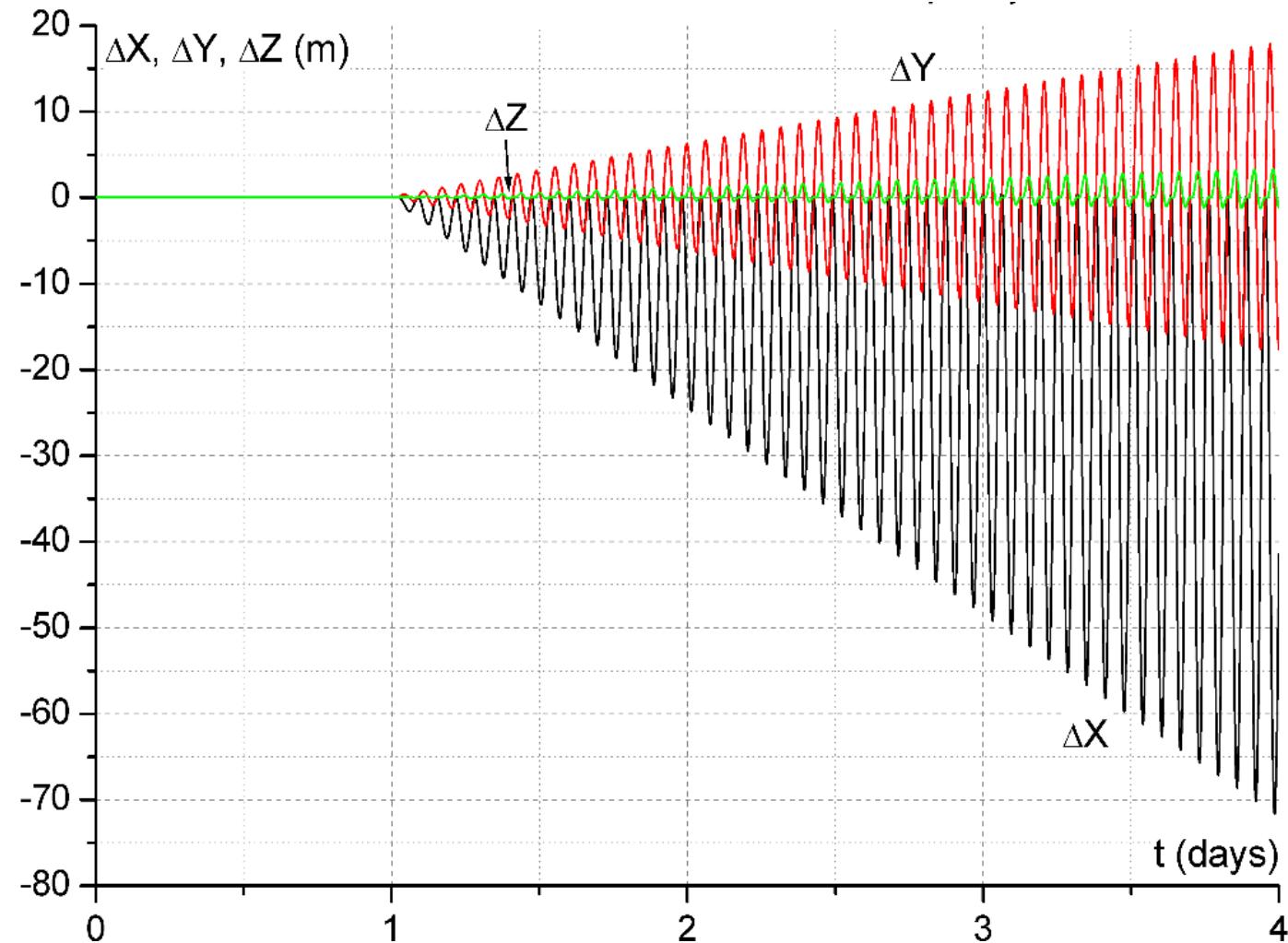


Рис. 2.21 Влияние сил солнечного давления на движение низкоорбитального КА.

Алгоритм (2.30) хорошо описывает модель сил солнечного давления. Для рассматриваемых спутников *GPS* (блок *IR*) при коэффициенте $K=5,3 \cdot 10^{-6}$ н/м² оценённая точность модели составила 1÷2%. В разделе 7.5 рассмотрен метод определения этого коэффициента по эфемеридам НС. В настоящем разделе оценивается влияние сил солнечного давления на орбиту КА.

На рисунке 2.20 приведены графики "разлёта" орбиты КА *GPS* из-за воздействия сил солнечного давления. Из графиков следует, что силы солнечного давления в основном возмущают продольную дальность и высоту орбиты. Изменение плоскости орбиты за трое суток (по боковой дальности) не превысило 5 м, в то время, как под влиянием Луны измерение боковой дальности составило 3,5 км. Уход продольной дальности и высоты составил, соответственно, 600 и 300 м.

На рис. 2.21 приведены графики "разлёта" орбиты МКС. Из графиков следует, что "разлёт" по продольной дальности за трое суток составил величину 70 м, по боковой дальности – 20 м.

Неформальное описание программной функции, моделирующей силы солнечного давления для некоторых КА, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

2.5 Уравнения движения в ГСК. Возмущения движения КА, обусловленные параметрами вращения Земли

2.5.1 Вывод уравнений движения

До сих пор мы рассматривали уравнения движения КА в ИСК. Определив возмущающие ускорения в ИСК, можно осуществлять интегрирование уравнений движения и получать прогнозируемый вектор состояния на любой момент времени также в ИСК. Однако для орбитальных КА часто требуется знать вектор состояния в ГСК. При этом измерения текущего вектора состояния также проводятся относительно наземных точек, то есть, тоже в ГСК. В этом случае нет необходимости пересчитывать начальный вектор состояния из ГСК в ИСК, проводить интегрирование уравнений движения в ИСК, а затем переводить текущий вектор состояния вновь в ГСК. Можно сразу осуществлять интегрирование уравнений движения в ГСК.

Представим уравнение движения КА относительно ИСК (1.50) с учетом возмущения ускорений в виде:

$$\ddot{\bar{X}} + \frac{\mu}{r^3} \bar{X} = \bar{a}_n \quad (2.31)$$

где $\bar{a}_n = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i$; \bar{a}_i - i составляющая суммарного возмущающего ускорения \bar{a}_n .

Определим уравнения движения КА в ГСК. Запишем уравнения движения КА (2.31) в ИСК в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{X}} &= \bar{V}; \\ \dot{\bar{V}} &= -\frac{\mu}{r^3} \bar{X} + \bar{a}_n,\end{aligned}\tag{2.32}$$

где \bar{X}, \bar{V} – векторы координат и скорости КА в ИСК.

Пусть известна матрица перехода $A_{И-Г}$ из ИСК в ГСК. Тогда вектор координат \bar{X} может быть выражен через вектор координат $\bar{X}_Г$ в ГСК:

$$\bar{X} = A_{И-Г}^T \bar{X}_Г.\tag{2.33}$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (2.33), получим:

$$\bar{V} = \dot{A}_{И-Г}^T \bar{X}_Г + A_{И-Г}^T \bar{V}_Г,\tag{2.34}$$

где $\bar{V}_Г$ – вектор скорости КА в ГСК.

Для матрицы $\dot{A}_{И-Г}$ справедливо равенство:

$$\dot{A}_{И-Г} = \Omega A_{И-Г},\tag{2.35}$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ – матрица вращения Земли;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции абсолютной условной скорости вращения Земли на оси ГСК.

Подставив значение матрицы $\dot{A}_{И-Г}$ из (2.35) в равенство (2.34), с учётом $\Omega^T = -\Omega$, получим уравнение:

$$\bar{V} = -A_{И-Г}^T \Omega \bar{X}_Г + A_{И-Г}^T \bar{V}_Г.\tag{2.36}$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (2.36) получим выражение для $\dot{\bar{V}}$:

$$\dot{\bar{V}} = -\dot{A}_{H-G}^T \Omega \bar{X}_G - A_{H-G}^T \dot{\Omega} \bar{X}_G - A_{H-G}^T \Omega \dot{\bar{X}}_G + \dot{A}_{H-G}^T \bar{V}_G + A_{H-G}^T \dot{\bar{V}}_G \quad (2.37)$$

Подставив в правую часть равенства (2.37) выражение для \dot{A}_{H-G} из равенства (2.35), получим:

$$\dot{\bar{V}} = +A_{H-G}^T \Omega^2 \bar{X}_G - A_{H-G}^T \dot{\Omega} \bar{X}_G - A_{H-G}^T \Omega \bar{V}_G - A_{H-G}^T \Omega \dot{\bar{V}}_G + A_{H-G}^T \dot{\bar{V}}_G \quad (2.38)$$

Подставив значение вектора $\dot{\bar{V}}$ из равенства (2.38) во второе уравнение системы (2.32), после преобразования получим:

$$-\frac{\mu}{r^3} A_{H-G} \bar{X} + A_{H-G} \bar{a}_n = \Omega^2 \bar{X}_G - \dot{\Omega} \bar{X}_G - 2\Omega \bar{V}_G + \dot{\bar{V}}_G. \quad (2.39)$$

Из (2.39) получим систему уравнений, описывающую движение КА в ГСК:

$$\begin{aligned} \bar{X}_G &= \bar{V}_G; \\ \dot{\bar{V}}_G &= -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}_G + A_{H-G} \bar{a}_n - (\Omega^2 - \dot{\Omega}) \bar{X}_G + 2\Omega \bar{V}_G. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В первом приближении можно пренебречь смещением полюса Земли и прецессией вектора угловой скорости. Тогда матрица вращения будет равна:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\Omega} = 0, \quad \Omega^2 = \begin{pmatrix} -\omega_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Подставив в алгоритм (2.39) значения матриц $\Omega, \dot{\Omega}, \Omega^2$ из равенств (2.40), получим приближённую систему уравнений движения КА в ГСК:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Gamma &= v_{x\Gamma}; \\ \dot{y}_\Gamma &= v_{y\Gamma}; \\ \dot{z}_\Gamma &= v_{z\Gamma}; \\ \dot{v}_{x\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} x_\Gamma + a_{nx} + \omega_z^2 x_\Gamma + 2v_{y\Gamma} \omega_z; \\ \dot{v}_{y\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} y_\Gamma + a_{ny} + \omega_z^2 y_\Gamma - 2v_{x\Gamma} \omega_z; \\ \dot{v}_{z\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} z_\Gamma + a_{nz},\end{aligned}\tag{2.42}$$

где $x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, v_{x\Gamma}, v_{y\Gamma}, v_{z\Gamma}$ – проекции векторов координат и скорости КА относительно ГСК на оси ГСК;

a_{nx}, a_{ny}, a_{nz} – проекции возмущающих ускорений на оси ГСК;

ω_z – скорость вращения Земли вокруг оси Z ГСК.

Если из всех возмущающих ускорений, входящих в состав вектора \bar{a}_n , учитывать только гравитационное возмущение, обусловленное сжатием Земли, то система уравнений (2.42) примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Gamma &= v_{x\Gamma}; \\ \dot{y}_\Gamma &= v_{y\Gamma}; \\ \dot{z}_\Gamma &= v_{z\Gamma};\end{aligned}\tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_{x\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} x_\Gamma + \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{r^5} x_\Gamma \left(1 - \frac{5z_\Gamma^2}{r^2}\right) + \omega_z^2 x_\Gamma + 2\omega_z v_{y\Gamma}; \\ \dot{v}_{y\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} y_\Gamma + \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{r^5} y_\Gamma \left(1 - \frac{5z_\Gamma^2}{r^2}\right) + \omega_z^2 y_\Gamma - 2\omega_z v_{x\Gamma}; \\ \dot{v}_{z\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} z_\Gamma + \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{r^5} z_\Gamma \left(3 - \frac{5z_\Gamma^2}{r^2}\right),\end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x_\Gamma^2 + y_\Gamma^2 + z_\Gamma^2}$;

$\mu = 398600.4418 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ – константа гравитационного поля Земли;

$a_e = 6378136 \text{ м}$ – экваториальный радиус Земли;

$C_{20} = -1082.62575 \cdot 10^{-6}$ коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала в ряда по сферическим функциям;

$\omega_z = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли.

Уравнения (2.43) часто используются для нахождения приближенного решения уравнений движения. Для более точного решения необходимо учитывать более мелкие составляющие возмущающего ускорения \bar{a}_n , а также влияние смещения полюса Земли прецессии, и нутации вектора угловой скорости вращения Земли.

Влияние основных составляющих вектора \bar{a}_n на движение КА мы рассмотрели в разделах 2.1–2.4. Оценим влияние на движение КА параметров возмущенного движения Земли.

2.5.2 Влияние смещения оси вращения Земли относительно оси Z ГСК на движение КА в ГСК

В приближенных уравнениях движения (2.42) относительно ГСК мы пренебрегли малыми членами, обусловленными смещением реального полюса относительно оси Z ГСК, прецессией и нутацией оси вращения Земли. Неучет этих членов также приводит к возмущению орбиты относительно её точного значения. Оценим влияние перекоса оси вращения Земли. Пусть текущее смещение полюса в направлении оси +X и −Y ГСК равно Δx , Δy и Δz , выраженное в радианах. (Такое представление смещения полюса дано на сайте [с. 2]). Тогда проекции вектора угловой скорости Земли на оси X и Y ГСК будут равны:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_z \Delta x; \\ \omega_y &= -\omega_z \Delta y.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Матрица вращения Ω будет равна:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & \omega_z \Delta y \\ -\omega_z & 0 & \omega_z \Delta x \\ -\omega_z \Delta y & -\omega_z \Delta x & 0 \end{pmatrix} = \omega_z \begin{pmatrix} 0 & 1 & \Delta y \\ -1 & 0 & \Delta x \\ -\Delta y & -\Delta x & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.45}$$

Будем пренебрегать медленным изменением смещений Δx и Δy . Тогда можно считать, что

$$\dot{\Omega} = 0.\tag{2.46}$$

Умножив матрицу Ω саму на себя и пренебрегая членами второго порядка малости, получим значение матрицы Ω^2 :

$$\Omega^2 = -\omega_z^2 \begin{pmatrix} +1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & +1 & +\Delta y \\ -\Delta x & +\Delta y & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Подставив значения матриц Ω и Ω^2 из выражений (2.45) и (2.47) в уравнение движения (2.39), выделим возмущающие ускорения, обусловленные смещением полюса Земли:

$$\bar{a}_\Pi = \begin{pmatrix} -\Delta x \omega_z^2 z_\Gamma + 2\Delta y \omega_z v_z \\ \Delta y \omega_z^2 z_\Gamma + 2\Delta x \omega_z v_z \\ -\Delta x \omega_z^2 x_\Gamma + \Delta y \omega_z^2 y_\Gamma - 2\Delta y \omega_z v_x - 2\Delta x \omega_z v_y \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Из формулы (2.48) для компонент возмущающего ускорения, обусловленного смещением оси вращения Земли относительно оси Z ГСК легко оценить порядок величины этого возмущения для низких и высоких орбит. Для низких орбит возмущения составляют величину $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ м/с, для высоких орбит $\sim 10^{-6}$. Сравнивая полученные оценки возмущений с величинами возмущений, приведённых в Таблице 1, можно отметить, что возмущения как низких, так и высоких орбит, обусловленные смещением реальной оси вращения Земли от оси Z ГСК, имеют такой же порядок величины, как и возмущения от лунной и солнечной гравитаций.

На рисунке 2.27 и 2.28 приведены графики "разлёта" соответственно низких и высоких орбит, обусловленного возмущением из-за смещения полюса Земли от оси Z ГСК. Из графиков следует, что для низкоорбитальных КА "разлёт" по боковой оси Z (в ОСК) достигает величины ~ 20 м. То есть, максимальная амплитуда "разлёта" по величине равна текущему смещению полюса относительно оси Z ГСК.

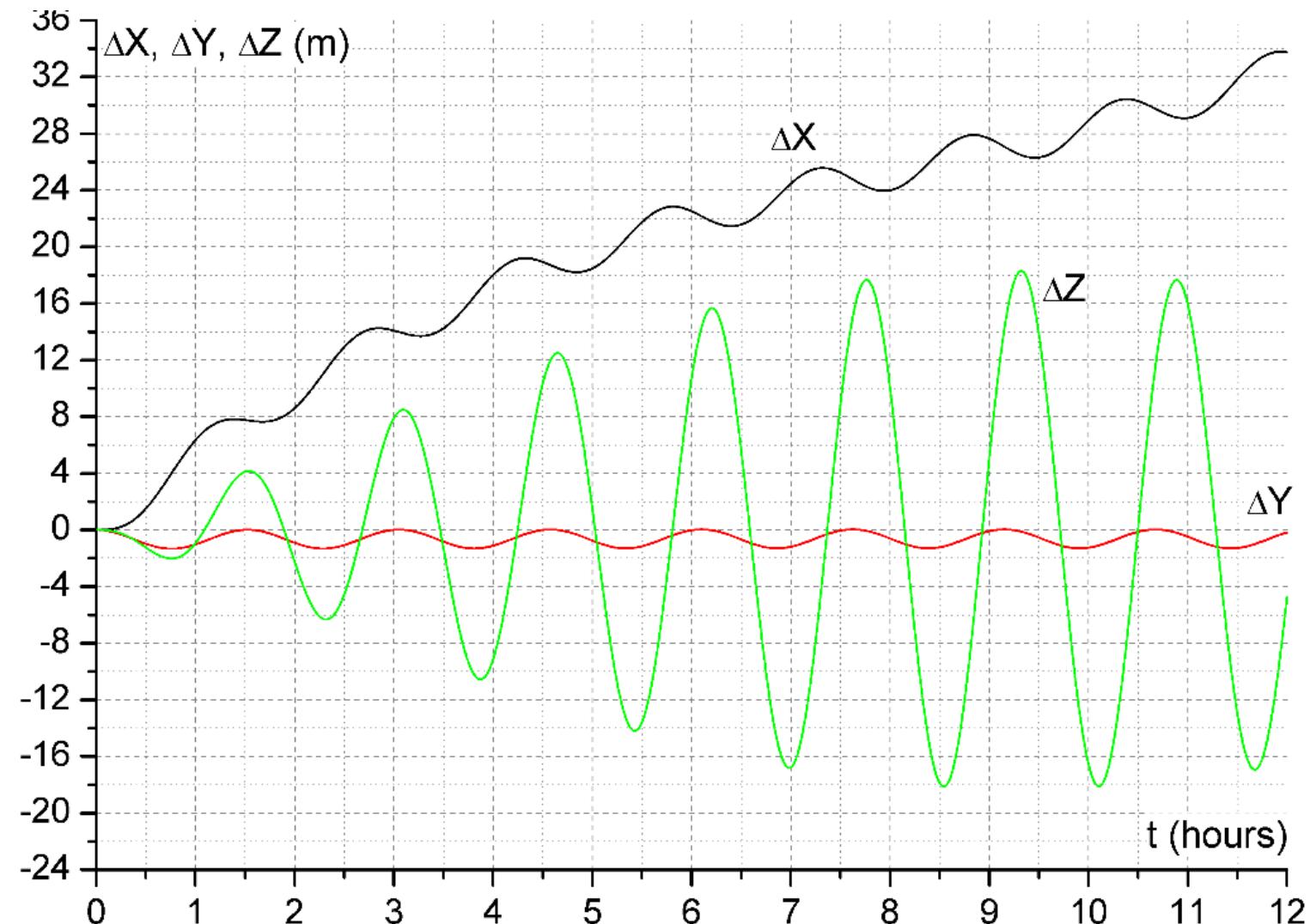


Рис. 2.27 Влияние смещения полюса Земли на точность прогноза низкоорбитального КА.

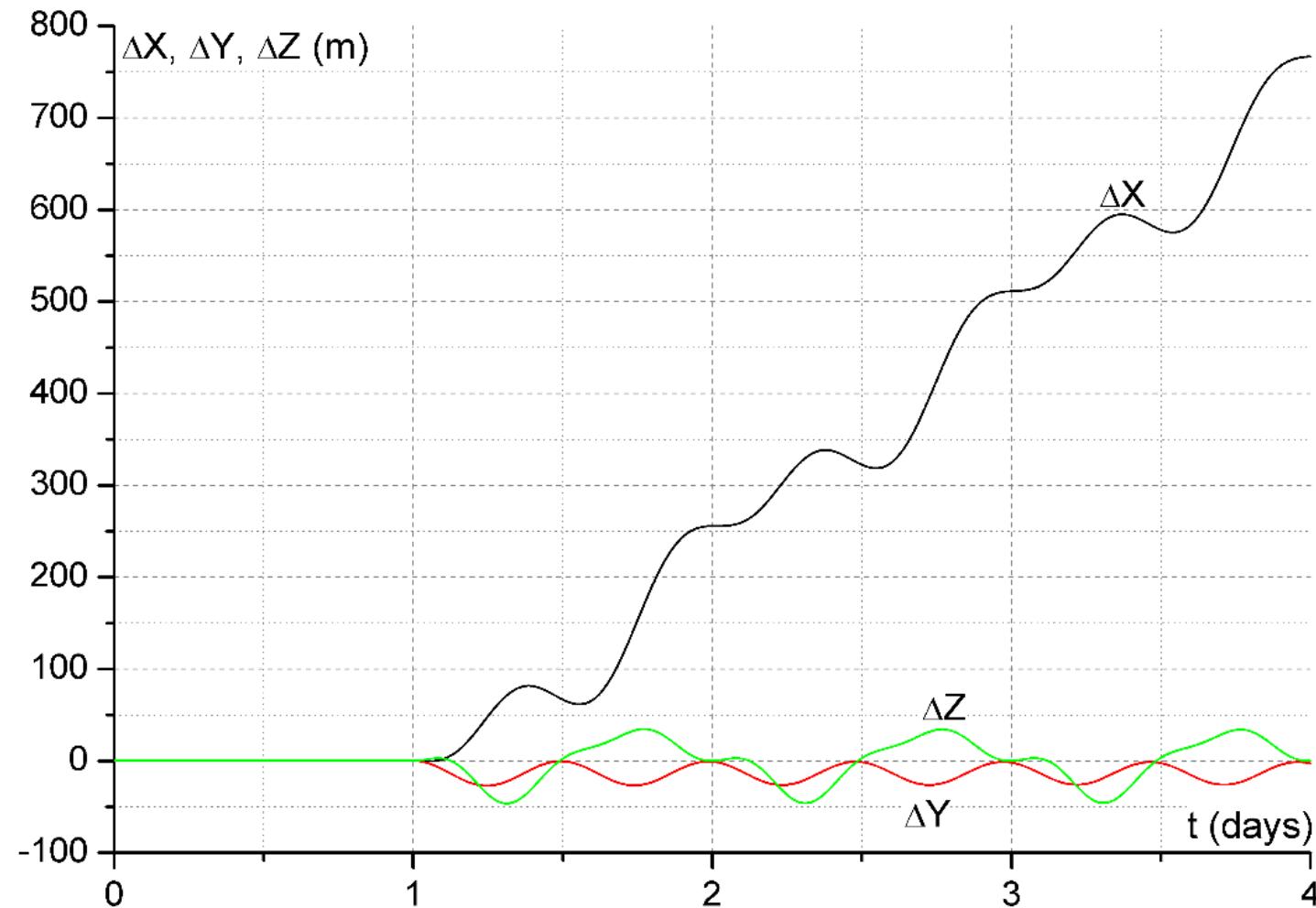


Рис. 2.28 Влияние смещения полюса Земли на точность прогноза высокоорбитального КА.

Для высокоорбитальных КА амплитуда "разлёта" по оси Z пропорциональна радиусу орбиты и для *GPS* составила ~ 50 м. Время достижения максимального "разлёта" по боковой дальности зависит от начальной фазы возмущения и может быть достигнуто за четверть витка (три часа).

По продольной дальности наблюдается вековой уход. Для низких орбит он составляет $50 \div 100$ м/сутки, для высоких орбит $100\text{-}200$ м/сутки. Скорость векового ухода определяется величиной и направлением текущего смещения полюса, а также наклонением и восходящим углом орбиты.

2.5.3 Влияние прецессии и нутации оси вращения Земли на движение КА

Прецессия и нутация оси вращения Земли, так же, как и смещение оси вращения относительно оси Z ГСК, влияют на движение КА относительно ГСК. Оценим это влияние.

Прецессия и нутация оси вращения Земли обуславливают дополнительное вращение этой оси в инерциальном пространстве. Пусть ω_x , ω_y – проекции этой дополнительной угловой скорости Земли на оси ИСК. Будем считать их медленно меняющимися, а на рассматриваемом интервале времени – константами. По порядку величины ω_x , ω_y равны $\sim 0,1''$ за сутки, то есть, значительно меньше скорости вращения Земли вокруг оси Z ω_z .

Определим поправки к правой части уравнений движения (2.40), обусловленные прецессией и нутацией оси вращения Земли. Будем считать, что смещение полюса Земли от оси Z ГСК равно нулю. Тогда матрица перехода от ИСК в ГСК может быть представлена в виде:

$$A_{II-G} = A_B A_{II} \quad (2.49)$$

где $A_B = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z f + \varphi) & \sin(\omega_z f + \varphi) & 0 \\ -\sin(\omega_z f + \varphi) & \cos(\omega_z f + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица вращения Земли;

$A_{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_y \\ 0 & 1 & \alpha_n \\ \alpha_y & -\alpha_n & 1 \end{pmatrix}$ – матрица прецессии и нутации, где

α_n, α_y – малые углы поворота оси Z Земли вокруг осей X и Y ИСК ($j2000$).

Вектор координат \bar{x} КА в ИСК может быть выражен через вектор \bar{X}_G в ГСК:

$$\bar{X} = A_{I-G} \bar{X}_G = A_{\Pi}^T A_B^T \bar{X}_G \quad (2.50)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (2.50) получим:

$$\bar{V} = \dot{A}_{\Pi}^T A_B^T \bar{X}_G + A_{\Pi}^T \dot{A}_B^T X_G + A_{\Pi}^T A_B^T \bar{V}_G \quad (2.51)$$

Для производных матриц \dot{A}_B и \dot{A}_{Π} можно записать:

$$\dot{A}_B^T = -A_B^T \Omega_z, \quad (2.52)$$

где $\Omega_z = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица вращения

$$\dot{A}_{\Pi}^T = -\dot{A}_{\Pi}, \quad (2.53)$$

где $\dot{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_y \\ 0 & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ – матрица скорости прецессии и нутации.

С учетом (2.52) и (2.53), равенство (2.51) может быть представлено в виде:

$$\bar{V} = -\dot{A}_n A_B^T \bar{X}_\Gamma - A_\Pi^T A_B^T \Omega_z \dot{X}_\Gamma - A_\Pi^T A_B^T \bar{V}_\Gamma \quad (2.54)$$

Продифференцировав правую и левую части уравнения (2.54), с учетом равенств (2.32), (2.52) и (2.54) получим:

$$-\frac{\mu}{r^3} \bar{X} + \bar{a}_n = 2\dot{A}_n A_B^T (\Omega_z \bar{X}_\Gamma - \bar{V}_\Gamma) - \begin{pmatrix} \omega_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_\Gamma - 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{V}_\Gamma + \dot{\bar{V}}_\Gamma^T \quad (2.55)$$

Откуда для производной вектора скорости в ГСК получим:

$$\dot{\bar{V}}_\Gamma = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X} + \bar{a}_\Gamma + \begin{pmatrix} \omega_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_\Gamma + 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{V}_\Gamma + 2A_B A_\Pi \dot{A}_n A_B^T (\bar{V}_\Gamma - \Omega_z \bar{X}_\Gamma) \quad (2.56)$$

Учитывая, что матрица A_Π близка к единичной, последнее слагаемое равенства (2.56) можно представить в виде:

$$2A_B A_\Pi \dot{A}_n A_B^T (\bar{V}_\Gamma - \Omega_z \dot{X}_\Gamma) = 2A_{II-G} \dot{A}_G A_{II-G}^T (\bar{V}_\Gamma - \Omega_z \dot{X}_\Gamma) \quad (2.57)$$

С учетом равенства (2.57) уравнение движения КА в ГСК (2.56) с учетом прецессии и нутации оси вращения Земли будет иметь вид:

$$\dot{\bar{V}}_{\Gamma} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}_{\Gamma} + \bar{a}_{\Gamma} + \begin{pmatrix} \omega_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\Gamma} + 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\bar{V}}_{\Gamma} + 2A_{II\Gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_y \\ 0 & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} (\bar{V}_{\Gamma} - \Omega_z \bar{X}_{\Gamma}) \quad (2.58)$$

Последнее слагаемое в уравнении (2.58) определяет возмущение движения КА, обусловленное скоростью прецессии и нутации ω_x, ω_y оси вращения Земли. Исходя из того, что скорость прецессии оси вращения Земли ω_x, ω_y имеет порядок величины $\sim 0,1''/\text{сутки}$, можно оценить порядок величины возмущающего ускорения. Для низкоорбитальных КА оно составляет величину $\sim 6 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}^2$, для высокоорбитальных КА $\sim 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}^2$. То есть, возмущение, обусловленное влиянием прецессии и нутации оси вращения Земли, по величине имеет такой же порядок, как и возмущения от сил солнечного давления (см. Таблицу 1)

На рисунках 2.29 и 2.30 приведены графики "разлёта" соответственно низких и высоких орбит, обусловленного возмущением из-за прецессии оси вращения Земли. Из графиков следует, что для низких орбит прецессия и нутация оси вращения Земли приводят к "разлёту" по продольной дальности на ~ 5 м за трое суток, практически не влияет на высоту и боковую дальность. Для высоких орбит "разлёт" по продольной дальности за трое суток составляет ~ 75 м, а по вертикали и боковой дальности – не превышает 3 м.

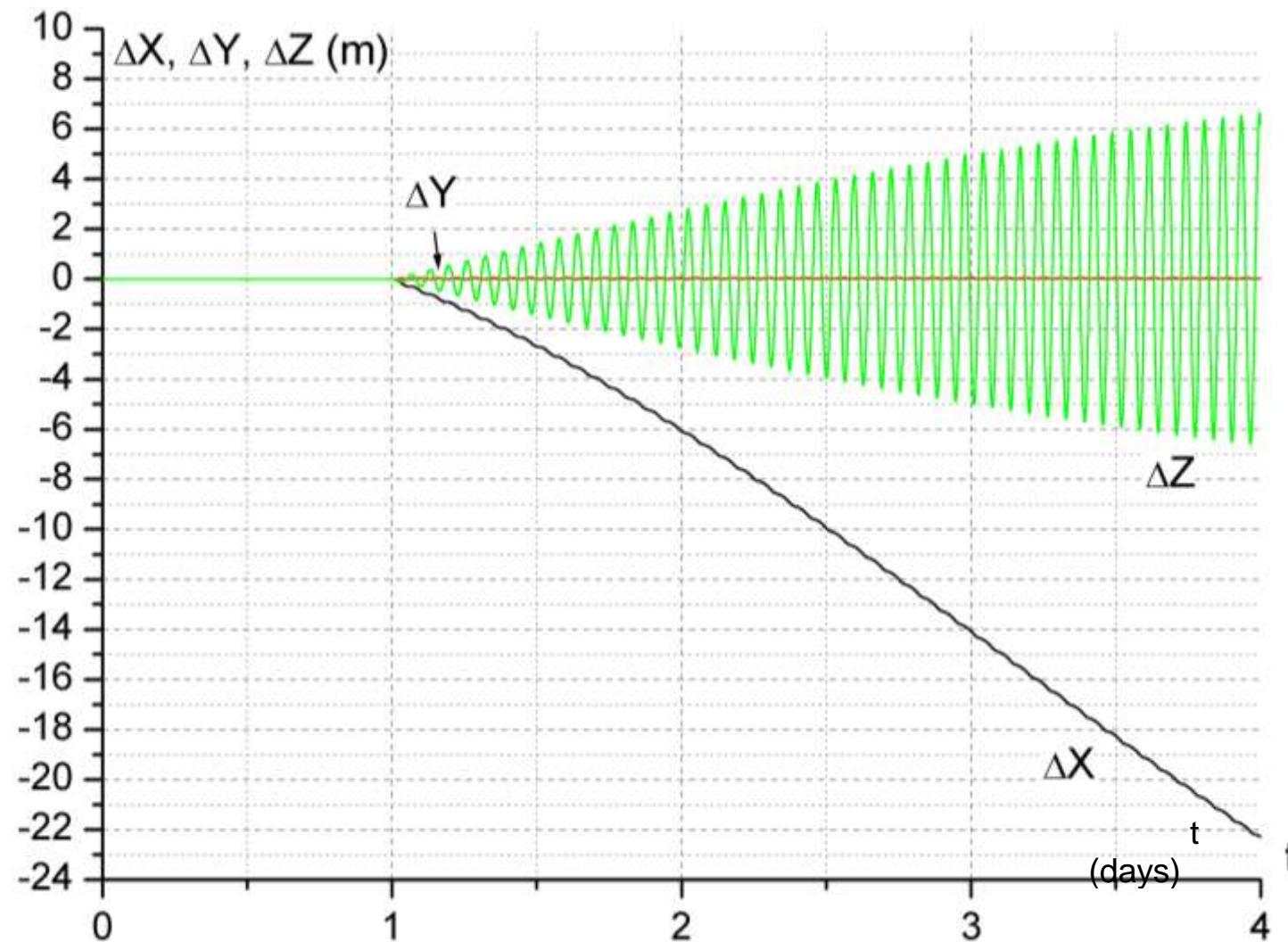


Рис. 2.29 Влияние прецессии и нутации оси вращения Земли на точность прогноза низкоорбитального КА.

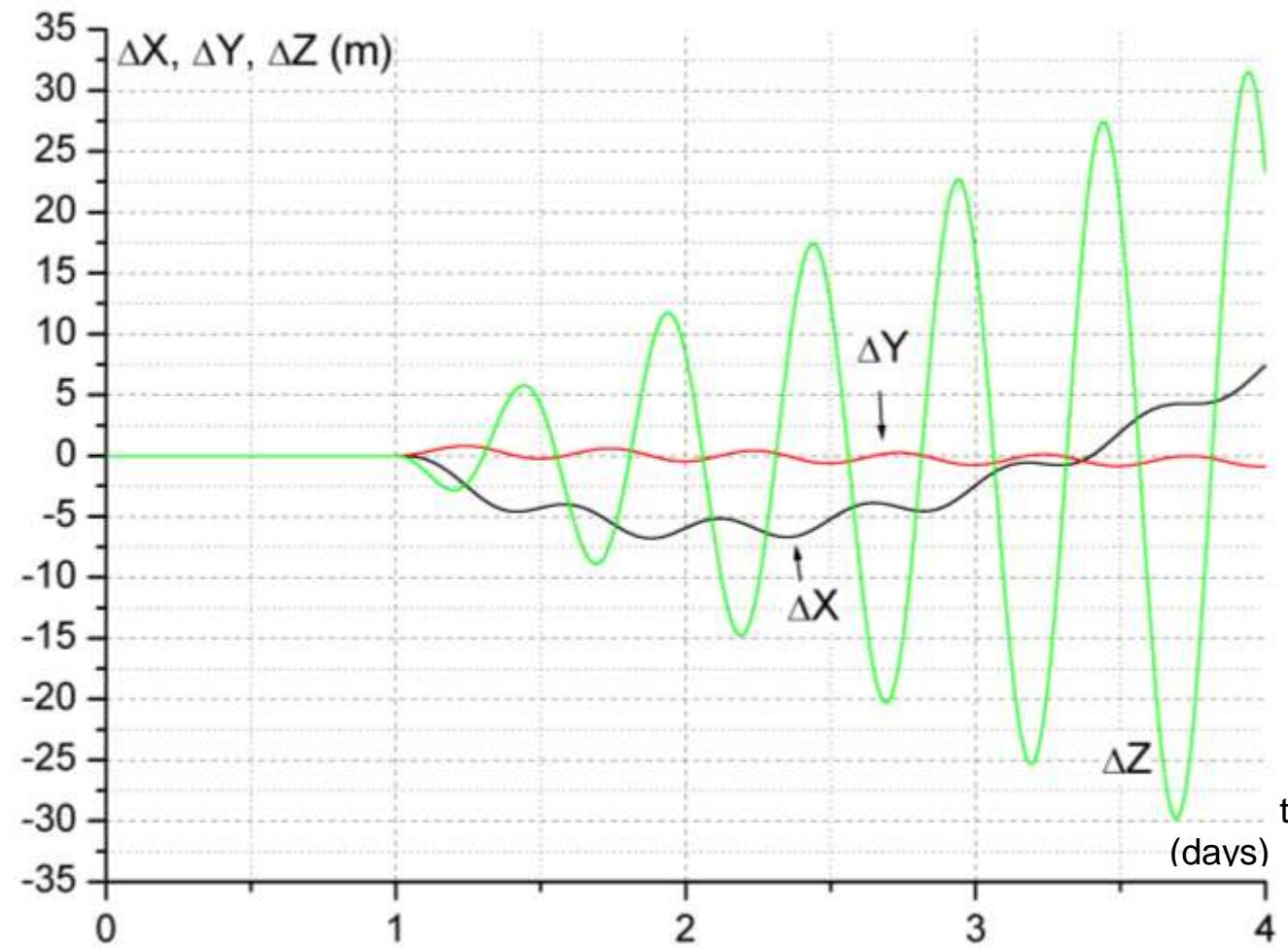


Рис. 2.30 Влияние прецессии и нутации оси вращения Земли на точность прогноза высокоорбитального КА.

2.5.4 Влияние неравномерности вращения Земли на движение КА

Выше, при выводе уравнений движения в ГСК предполагалось, что Земля вращается равномерно с номинальной угловой скоростью $\omega_3=0.7292115 \cdot 10^{-4} c^{-1}$. Однако, как отмечалось выше (см. раздел 1.2), реальный период вращения Земли может отличаться от номинального на несколько миллисекунд (см. рис. 1.1). Отличие скорости вращения Земли от номинальной приводит к росту рассогласования времен *UTC* и *UT1* (всемирное время среднего Гринвичского меридиана, рассчитанное с учётом движения полюсов), а также к отклонению истинной гринвичской системы координат от расчётной, вращающейся с номинальной угловой скоростью. Поэтому в уравнениях движения КА относительно истинной ГСК появляется возмущающий член, обусловленный отличием истинной скорости вращения Земли от номинальной. Это отличие может быть определено по величине отклонения *dUT1* времен *UT1* от *UTC*, которое регулярно и с высокой точностью измеряется соответствующими астрономическими службами и выставляется, по крайней мере, 1 раз в сутки в Интернете [с.1]. Кроме того, эта поправка передается в составе неоперативной информации, передаваемой от НС ГЛОНАСС. Приращение *dUT1* за сутки представляет собой отличие истинного периода вращения Земли от номинального ΔT , которое связано с отклонением угловой скорости Земли от номинальной соотношением

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi}{T^2} \Delta T \quad (2.59)$$

То есть, текущее отклонение реальной угловой скорости вращения Земли от номинальной может быть получено по формуле (2.59). Определим зависимость возмущающего ускорения в

ГСК, обусловленного этим отклонением. Рассмотрим уравнение (2.40). При отсутствии смещения полюса Земли от оси Z ГСК матрица вращения Ω имеет вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

где ω_z – истинная скорость вращения Земли.

Представим истинную скорость вращения Земли в виде:

$$\omega_z = \omega_0 + \Delta\omega_z, \quad (2.61)$$

где ω_0 – номинальная скорость вращения Земли;

$\Delta\omega_z$ – отклонение истинной скорости вращения Земли от номинальной.

Учитывая, что $\Delta\omega_z$ – медленно меняющаяся величина, будем предполагать её равной константе. Тогда уравнение (2.40) может быть представлено в виде:

$$\dot{\bar{V}}_\Gamma = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}_\Gamma + \bar{a}_\Gamma - \Omega_0^2 \bar{X}_\Gamma + 2\Omega_0 \bar{V}_\Gamma - 2\Omega_0 \Delta\Omega \bar{X}_\Gamma + 2\Delta\Omega \bar{V}_\Gamma, \quad (2.62)$$

где

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Delta\omega & 0 \\ -\Delta\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Два последних слагаемых уравнения (2.62) представляют собой возмущения, обусловленные отклонением скорости вращения Земли от номинальной. В более удобном представлении этот вектор возмущающего ускорения имеет вид:

$$\bar{a}_b = 2\omega_0 \Delta\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\Gamma} + 2\Delta\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V}_{\Gamma}, \quad (2.63)$$

где $\Delta\omega$ – определяется по данным Интернета по формуле (2.59)

Формула (2.63) позволяет оценить порядок величины этого возмущения. При отличии реального периода вращения Земли от номинального на 1 мс величина возмущающего ускорения для низкоорбитальных КА составляет величину $\sim 7 \cdot 10^{-9}$ м/с², для высокоорбитальных $\sim 3 \cdot 10^{-9}$ м/с².

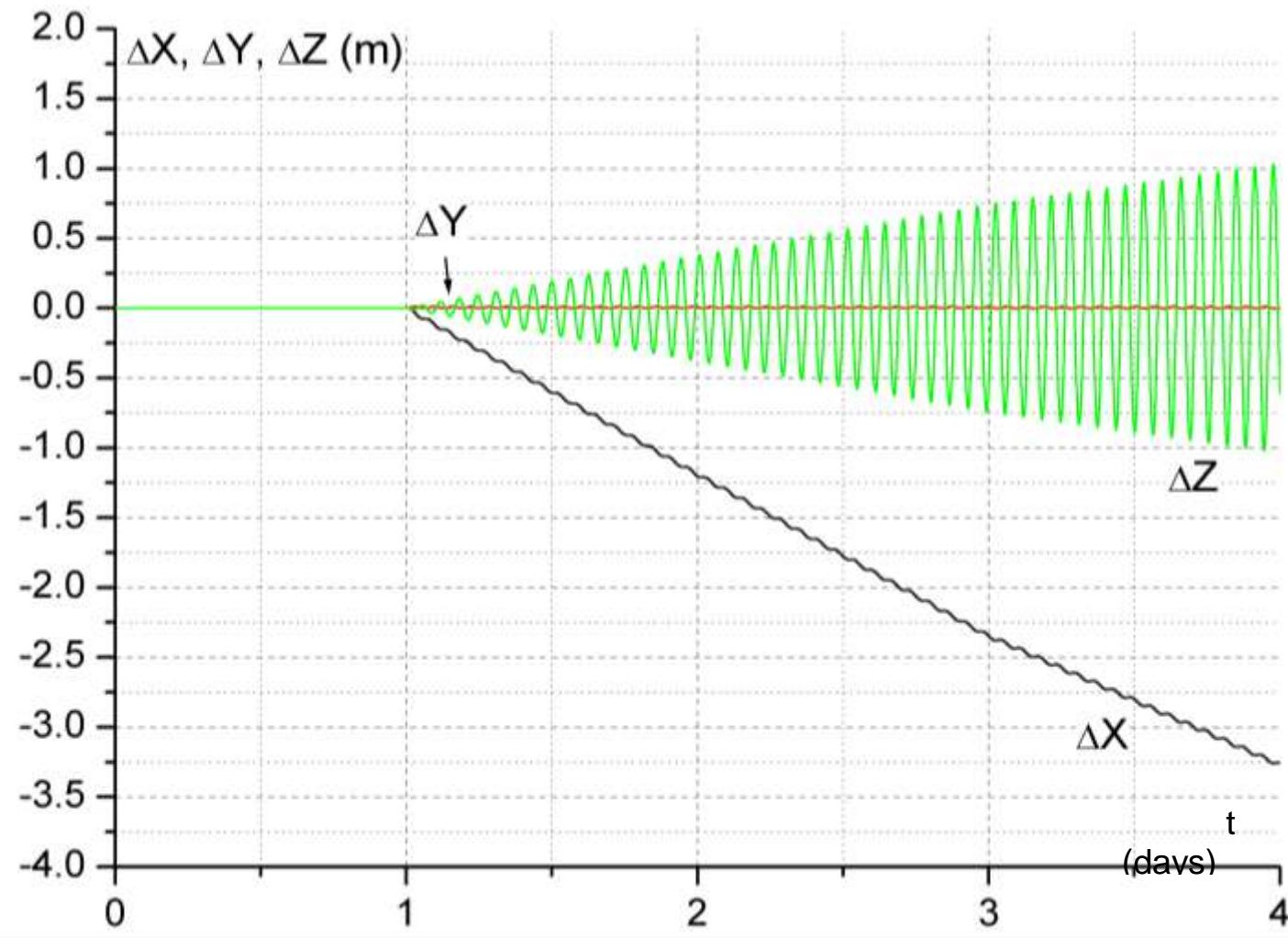


Рис. 2.31 Влияние неравномерности вращения Земли на точность прогноза низкоорбитального КА.

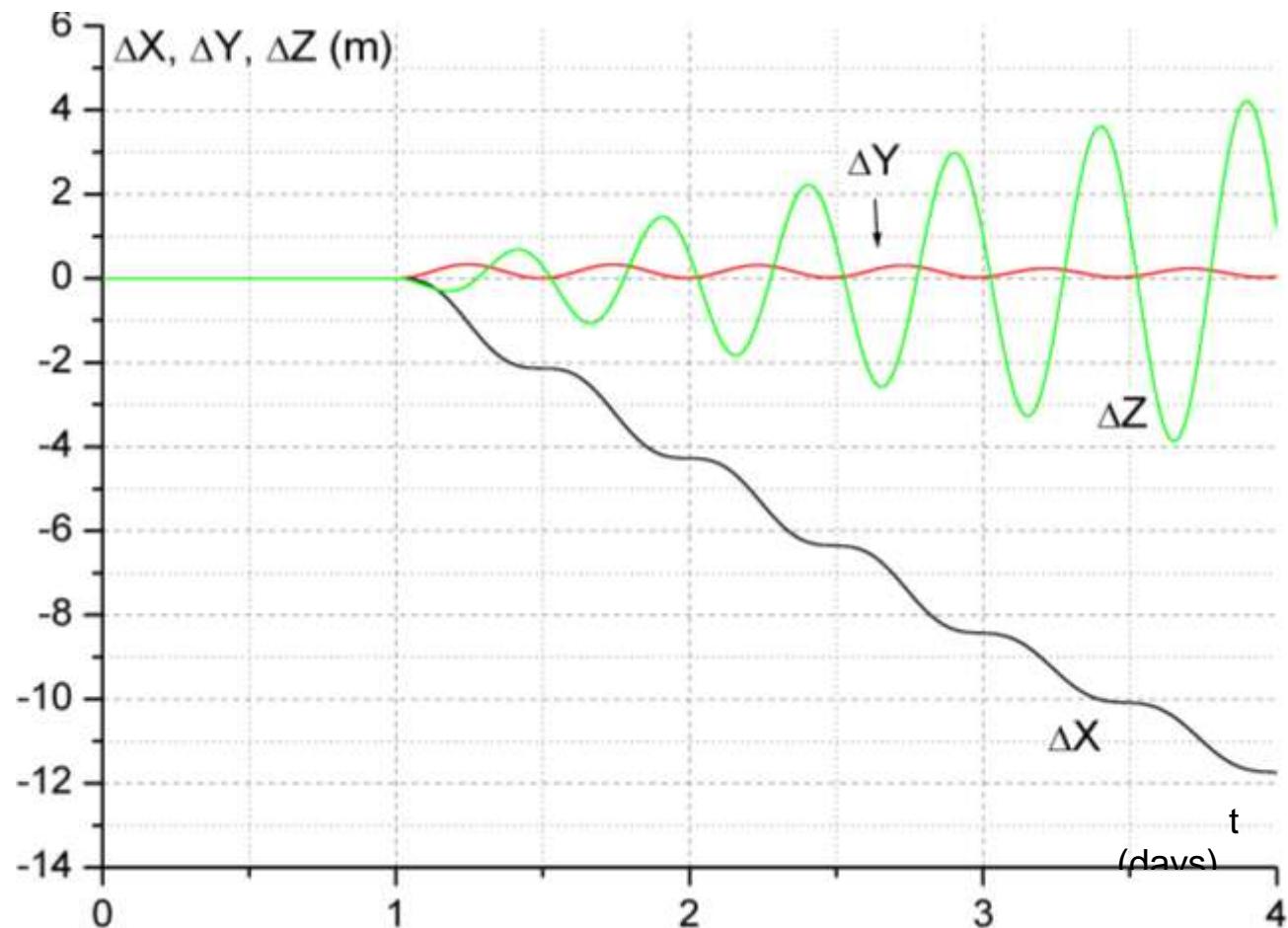


Рис. 2.32 Влияние неравномерности вращения Земли на точность прогноза высокоорбитального КА.

На рисунках 2.31 и 2.32 приведены графики "разлёта" соответственно низких и высоких орбит, обусловленного возмущением из-за неравномерности вращения Земли. Из графиков следует, что для высоких орбит разлёт за 3 суток по продольной дальности составляет ~ 12 м, по боковой дальности – 4 м. Для низких орбит – 3 м по продольной дальности и 1 м по боковой дальности.

Таким образом, нестабильность параметров движения Земли приводит к возмущениям движения КА в ГСК. Эти возмущения достаточно заметны на фоне других возмущающих ускорений, влияющих на движение КА. Они соизмеримы с гравитационными возмущениями от Луны и Солнца и с силами светового давления от Солнца. В Таблице 2 приведён порядок величин этих возмущений для низкоорбитальных (МКС) и высокоорбитальных (GPS) КА.

Таблица 2.4

№	Составляющая ускорения	Орбиты высотой 19000-20000 км ($\text{м}/\text{с}^2$)	Орбиты высотой 350-400 км ($\text{м}/\text{с}^2$)
1	Смещение полюса Земли от оси Z в ГСК.	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
2	Прецессия и нутация оси вращения Земли.	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}$
3	Неравномерность вращения Земли.	$3 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-9}$

Сравнивая величины рассмотренных возмущений с возмущениями, приведёнными в Таблице 1, можно сделать вывод, что возмущения, обусловленные нестабильностью

параметров движения Земли по порядку величины аналогичны величинам основных возмущающих факторов, таких, как аномальная часть гравитационного поля Земли, аэродинамические возмущения, гравитационные возмущения от Луны и Солнца, возмущения от сил солнечного давления. Поэтому при решении задач высокоточной навигации, точного прогнозирования орбит эти возмущения необходимо учитывать. Входную информацию для определения этих возмущений (текущие смещения полюсов, текущие скорости прецессии – нутации оси вращения Земли, текущее приращение $dUT1$) сегодня легко можно найти на различных сайтах.

Формальное описание программных функций, моделирующих возмущения, обусловленные смещением полюса Земли, прецессией и нутацией оси вращения Земли и неравномерностью вращения Земли, а также описание интерфейсов этих функций приведено в Главе 7 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этих функций.

2.6 Замечательные орбиты и их свойства

Мы рассмотрели влияние различных возмущающих факторов на орбиту КА. В некоторых случаях возмущения или совокупность возмущений обуславливают определенные свойства орбиты, которые полезны для решения тех или иных практических задач. Учитывая особенности таких орбит, их иногда называют замечательными орбитами.

2.6.1 Гелиосинхронные орбиты

К замечательным относится, например, гелиосинхронная орбита, обладающая тем свойством, что угол между плоскостью орбиты и направлением на Солнце всегда близок к константе.

Гелиосинхронные орбиты оказались очень удобными для наблюдения за поверхностью Земли. Существует целый класс спутников дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), выводимые на гелиосинхронные орбиты и ведущие съёмку поверхности Земли в различных диапазонах спектра. Благодаря постоянству угла между плоскостью орбиты и направлением на Солнце, съёмка может вестись постоянно в одних и тех же условиях освещенности поверхности Земли, что важно для последующего анализа этих снимков.

Свойство гелиосинхронности обуславливается возмущением орбиты из-за полярного сжатия Земли. В разделе 2.1.2 мы видели, что сжатие Земли обуславливает прецессию орбиты вокруг оси Z ИСК. Из первой формулы (2.7) для скорости прецессии орбиты следует, что прецессия для КА с наклонением меньше 90° всегда происходит в западном направлении. Однако если угол наклонения больше 90° , то орбита будет прецессировать в восточном направлении. В этом же направлении движется Солнце (относительно ИСК) с угловой скоростью $\sim 1^\circ/\text{сутки}$. Для орбитального КА можно выбрать такой угол наклонения орбиты, при

котором скорость прецессии орбиты будет равна скорости движения Солнца по эклиптике. В этом случае угол между плоскостью орбиты КА будет поддерживаться постоянным.

Для околокруговой орбиты высотой, например, 600 км угол наклонения, обеспечивающий синхронную прецессию орбиты с движением Солнца по эклиптике, равен $\sim 97,7^\circ$. Однако "гелиосинхронность" орбиты не является устойчивой. Со временем параметры орбиты НС меняются, соответственно меняется и скорость прецессии орбиты. Для сохранения необходимого наклонения и заданного угла между Солнцем и орбитой КА необходимо осуществлять управление орбитой – определять рассогласования между реальными параметрами орбиты и расчетными, по результатам определения рассчитывать и реализовывать корректирующие импульсы, приближающие орбиту к заданной гелиосинхронной.

2.6.2 Высокоорбитальные 12 часовые орбиты

Свойства другой замечательной орбиты вытекают из второго равенства соотношений 2.7. Из этого равенства следует, что при угле наклонения $i=63,4^\circ$ скорость прецессии углаperiцентра $\dot{\omega}$ становится равной нулю. Это свойство используется для построения квазигеостационарных высокоширотных орбит. Известно, что геостационарные КА "висят" в одной и той же точке небесной сферы, что является удобным свойством для многих типов КА, особенно для КА связи. Однако геостационарные КА имеют малое наклонение и слабодоступны для пользователей, находящихся в высокоширотных районах Земли. Поэтому для высокоширотных районов можно установить КА на высокоэллиптическую орбиту с периодом 12 часов и апогеем над требуемым районом Земли. При угле наклонения $63,4^\circ$ перигей не будет прецессировать, а будет оставаться постоянно над заданным районом. При

высоте перигея ~ 1000 км и высоте апогея ~ 39000 км такой КА большую часть времени будет находиться в окрестности апогея (~ 9 часов из 12). В течение следующего периода он будет "висеть" в аналогичной точке по широте, но в противоположной точке по долготе. Система из трех, четырех таких КА позволяет осуществлять непрерывное наблюдение за любой точкой северного полушария Земли.

Следует отметить, что угол наклонения орбиты НС ГЛОНАСС близок к величине $63,4^\circ$. Поэтому скорость прецессии перицентра для этих НС близка к нулю, и при прогнозе орбиты ГЛОНАСС по данным эфемерид в некоторых случаях прецессией перицентра можно пренебречь.

2.6.3 Геостационарные орбиты

Наиболее популярной орбитой является геостационарная орбита (ГСО) – это круговая орбита в плоскости экватора с высотой ~ 36000 км. Её замечательным свойством является то, что угловая орбитальная скорость КА равна угловой скорости Земли. При этом КА "висит" в одной и той же точке небесной сферы, что обуславливает главное свойство этой орбиты.

Однако на КА, который установлен в некоторой точке ГСО, действует целый ряд возмущений, стремящихся "увести" КА из этой точки. Для его удержания в заданной точке требуется реализация управления, и соответствующий расход рабочего тела. Рассмотрим эти возмущения.

Влияния лунной и солнечной гравитации, а также сжатие Земли обуславливает прецессионное движение плоскости орбиты геостационарного КА с периодом ~ 53 года и начальной максимальной скоростью изменения наклонения около $0,85^\circ/\text{год}$ с достижением

максимального наклонения $\sim 15^\circ$ через 26,5 лет. Для удержания плоскости орбиты в плоскости экватора требуется расход рабочего тела, обеспечивающий суммарный импульс скорости ~ 50 м/с в год.

Второй эффект, который необходимо принимать во внимание, это дрейф КА по долготе, обусловленный поперечным сжатием Земли, из-за чего на ГСО имеются две устойчивые ($\sim 75,3^\circ$ вд и $\sim 104,7^\circ$ зд) и две неустойчивые точки равновесия ($\sim 165,3^\circ$ вд и $14,7^\circ$ зд). Расположенный между этими точками КА будет медленно ускоряться в сторону устойчивой точки равновесия, и совершать колебания около этой точки. Для "удержания" КА требуется проведение коррекций орбиты в плоскости экватора, максимальный суммарный импульс которых равен ~ 2 м/с за год.

2.6.4 Геосинхронные орбиты

Замечательными являются также геосинхронные орбиты – это орбиты с периодом сутки, но с ненулевым наклонением. Такие спутники "висят" на одной и той же долготе, но совершают колебания с периодом сутки по широте, угловая амплитуда которых равна наклонению орбиты. Несколько таких спутников, например, могут реализовать региональную навигационную систему. В отличие от геостационарных спутников, находящихся в одной плоскости, геосинхронные спутники образуют пространственную конфигурацию, обеспечивающую невырожденность навигационного решения.

Особыми геосинхронными орбитами являются эллиптические орбиты с наклонением $\sim 63^\circ$. КА на таких орbitах большую часть периода находятся в окрестности апогея и быстро проходят перигей. Такие орбиты также, как и высокоорбитальные 12 часовые орбиты, удобны

для обслуживания высокоширотных территорий. Например, для организации круглосуточной связи региона достаточно двух КА, так как каждый из них "висит" над обслуживаемой территорией более 12 часов.

Апогей такой орбиты обычно лежит в районе 46 - 52 тыс. км, перигей – в районе 19 - 25 тыс. км, эксцентриситет составляет величину в диапазоне 0,25 - 0,4, большая полуось равна 42164 км.

2.6.5 Орбиты в точках Лагранжа

К ряду замечательных орбит относятся орбиты космических аппаратов, находящихся в точках Лагранжа или так называемых точках либрации (лат. *libration* – раскачивание).

Точки Лагранжа представляют собой частный случай при решении, так называемой, ограниченной задачи трёх тел – когда орбиты всех тел являются круговыми и масса одного из них (КА) намного меньше массы двух других тел, например, пары Солнце-Земля или Земля-Луна. В этом случае можно считать, что два массивных тела обращаются вокруг их общего центра масс с постоянной угловой скоростью. В пространстве вокруг них существует пять точек (см. рис.2.39), в которых третье тело с пренебрежимо малой массой может оставаться неподвижным во врачающейся системе отсчета, связанной с массивными телами. В этих точках гравитационные силы, действующие на КА, уравновешиваются центробежной силой.

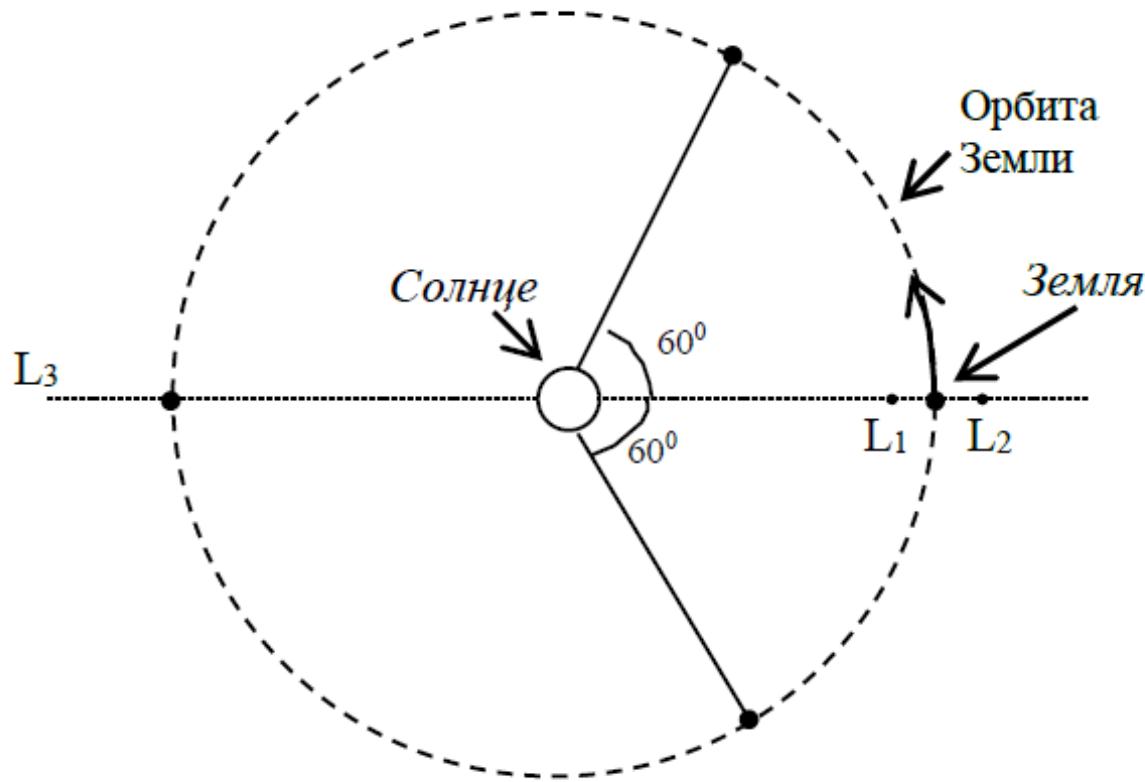


Рис. 2.39 Схема расположения пяти точек Лагранжа в системе двух массивных тел.

Точки Лагранжа получили своё название в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым (в 1772 году) обнаружил это явление. Точки Лагранжа лежат в плоскости орбит массивных тел и обозначаются заглавной латинской буквой L с индексом от 1 до 5. Первые три точки лежат на линии, проходящей через центры масс обоих массивных тел. Эти точки называются коллинеарными и обозначаются L_1 , L_2 , L_3 . Точка L_1 находится между двумя телами ближе к менее массивному телу, L_2 – снаружи за менее массивным телом и L_3 – за более

массивным (см. рис. 2.39). Расстояние от центра масс системы до этих точек в первом приближении по α рассчитываются по формуле:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= R \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}, \\
 r_2 &= R \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}, \\
 r_3 &= R \left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right), \\
 \alpha &= \frac{M_2}{M_1 + M_2},
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

где R – расстояние между телами;

M_1 – масса более массивного тела;

M_2 – масса второго тела.

Для системы Солнце-Земля расстояние от центра Земли до L_1 и L_2 составляет $\sim 1,5$ млн. км. Для системы Земля-Луна расстояние от центра Луны до L_1 и L_2 составляет ~ 61500 км.

Точка L_3 находится не на самой орбите менее массивного тела, а немного ближе к более массивному телу.

Точки L_4 и L_5 называют треугольными. Они находятся в вершинах равносторонних треугольников, основанием которых является линия, соединяющая центры масс двух тел (см. рис.2.39).

Тела, помещенные в коллинеарные точки Лагранжа, находятся в неустойчивом равновесии. В треугольных точках равновесие устойчиво, если отношение масс тел $\frac{M_1}{M_2} > 24,96$, что обеспечивается для систем Солнце-Земля и Земля-Луна.

В настоящее время несколько космических аппаратов, в первую очередь, астрофизических обсерваторий, размещены в различных точках Лагранжа Солнечной системы. В точке L_1 системы Солнце-Земля удобно разместить космическую солнечную обсерваторию – она никогда не будет попадать в тень Земли, а значит, наблюдения могут вестись непрерывно.

Точка L_2 подходит для космического телескопа – здесь Земля почти полностью заслоняет солнечный свет и сама не мешает наблюдениям, так как обращена к L_2 неосвещенной стороной.

Точка L_1 системы Земля-Луна может стать идеальным местом для строительства пилотируемой орбитальной космической станции, которая, располагаясь на "полпути" между Землёй и Луной, позволила бы легко добраться до Луны с минимальными затратами топлива и стать ключевым узлом грузового потока между Землёй и нашим спутником.

Глава 3 Методы интегрирования уравнений движения КА

3.1 Интегрирование уравнений движения КА методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Движение КА описывается уравнениями движения, например, уравнением движения КА в ИСК (2.32). Зная начальный вектор состояния КА, путем интегрирования уравнения движения можно выполнить прогноз вектора состояния на любой другой момент времени. Точность прогноза зависит как от точности уравнений, описывающих движение КА, так и от точности метода интегрирования уравнений движения.

В Главе 2 настоящего курса проведено исследование зависимости точности прогноза от точности модели движения КА. В этом исследовании был реализован классический метод интегрирования уравнения движения – метод Рунге-Кутта четвертого порядка, обеспечивающий высокоточный прогноз вектора состояния. При выбранном шаге интегрирования 1 с прогноз на интервал несколько суток, выполненный этим методом, как для низких, так и для высоких орбит выполняется с точностью несколько сантиметров. Поэтому в проведенном выше исследовании зависимости точности прогноза от точности модели движения мы пренебрегли методической ошибкой прогноза, определяемой методом интегрирования. Приведем алгоритмы интегрирования уравнений движения методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (3.1)$$

Рекуррентный алгоритм формирования вектора состояния на $i+1$ -м шаге имеет вид:

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (3.2)$$

где $K_1 = h\bar{f}(\bar{x}_i, t_i); \quad K_2 = h\bar{f}\left(\bar{x}_i + \frac{1}{2}K_1, t_i + \frac{h}{2}\right);$

$$K_3 = h\bar{f}\left(\bar{x}_i + \frac{1}{2}K_2, t_i + \frac{h}{2}\right); \quad K_4 = h\bar{f}(\bar{x}_i + K_3, t_i + h);$$

h – шаг интегрирования.

Этот метод имеет четвертый порядок точности, то есть ошибка интегрирования на каждом шаге имеет порядок:

0 – малое от $\ddot{a}h^4$, где \bar{a} – вектор суммарного ускорения КА.

Из формулы (3.2) видно, что задаваемым параметром при реализации рассматриваемого метода интегрирования является шаг интегрирования h . При решении той или иной задачи прогноза орбиты КА возникает вопрос выбора шага интегрирования. Ниже проводится исследование зависимости точности прогноза от величины шага интегрирования для низкоорбитальных и высокоорбитальных КА.

С учетом возмущающих ускорений уравнение движения КА (1.47) в ИСК будет иметь вид:

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\mu \bar{r}}{r^3} = \bar{a}_n, \quad (3.3)$$

где \bar{a}_n – суммарный вектор всех возмущающих ускорений относительно ИСК.

Формируя суммарный вектор возмущающих ускорений с использованием моделей, рассмотренных в предыдущих разделах, и интегрируя уравнение (3.3), получим текущий вектор состояния КА $\bar{\xi}$ на любой заданный момент времени. При этом чем более точную

модель возмущающих ускорений мы будем использовать и чем более точно будем интегрировать уравнения движения, тем более точные значения вектора $\bar{\xi}$ мы получим. Вопросы влияния точности моделирования составляющих \bar{a}_n были исследованы в разделах 2.1. – 2.4. При этом моделирование проводилось с использованием метода Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом 1 с.

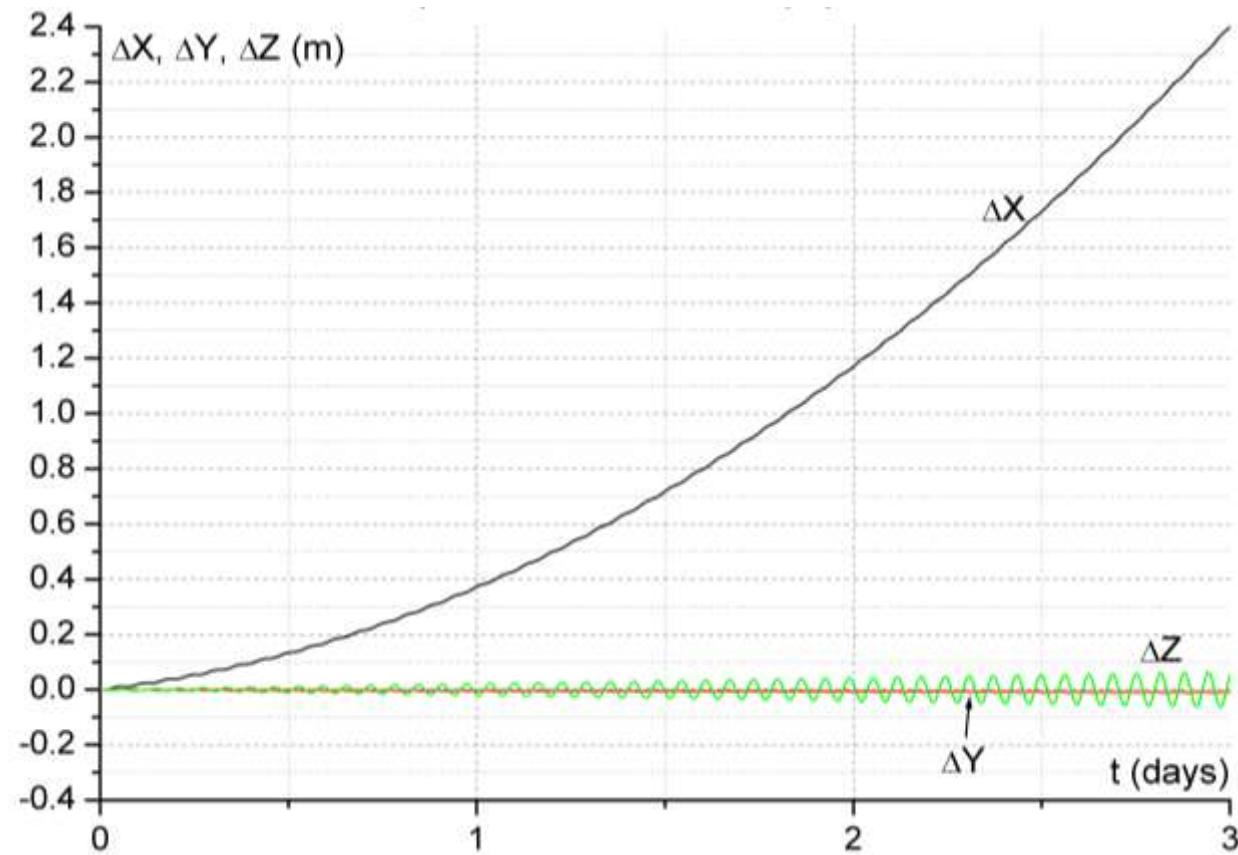


Рис. 3.1 Методическая ошибка прогноза орбиты низкоорбитального КА при шаге интегрирования 10 с.

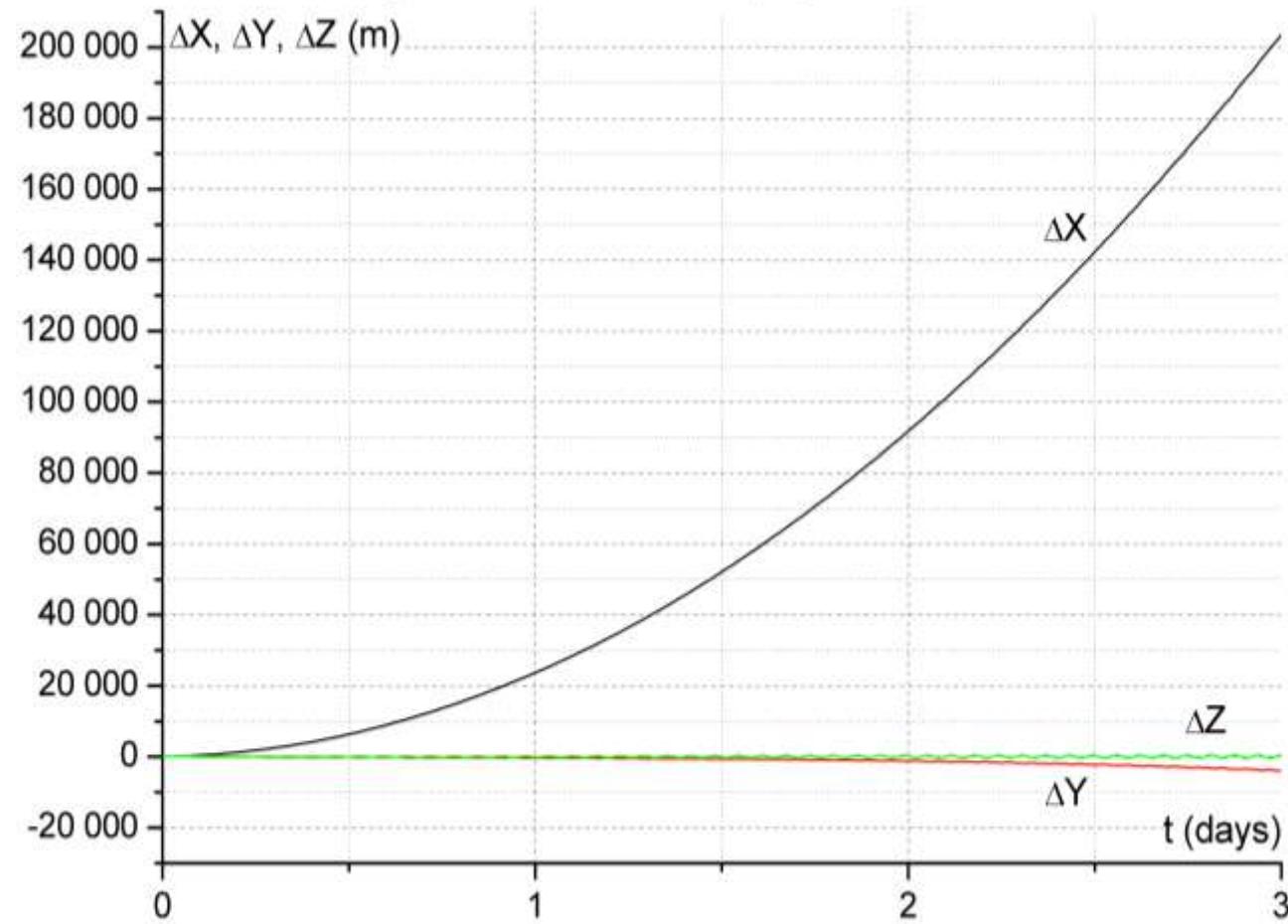


Рис. 3.2 Методическая ошибка прогноза орбиты низкоорбитального КА при шаге интегрирования 100 с.

Интегрирование может проводиться с разным шагом. Чем больше шаг интегрирования, тем выше скорость интегрирования. А этот вопрос, как мы видели, является важным при моделировании движения КА на бортовых вычислительных средствах, имеющих ограниченные ресурсы по быстродействию и памяти. Однако при выборе большого шага интегрирования снижается точность интегрирования, что равноценно наличию неучтенного возмущающего ускорения. Поэтому для выбора шага интегрирования важным вопросом является знание зависимости точности интегрирования от шага. Эта зависимость может быть разной для высоких и низких орбит. На рисунках 3.1 – 3.5 приведены графики зависимости погрешностей интегрирования по трем координатам ОСК от шага интегрирования соответственно для низких и высоких околокруговых орбит. Из приведенных графиков следует, что для низких орбит интегрирование с шагом 10 с на интервале 3 суток дает ошибку по продольной дальности 2,4 м, по боковой дальности – 0,1 м. Такая ошибка соответствует возмущающему ускорению $\sim 10^{-11}$ м/с². Это означает, что для низких околокруговых орбит шаг интегрирования 10 с всегда дает ошибку меньше неучтенных возмущающих ускорений и может выбираться для интегрирования на любой интервал времени. При шаге интегрирования 100 с ошибка возрастает в 10^5 раз и соответствует неучтенному ускорению 10^{-6} м/с². Такой шаг может использоваться только при интегрировании на короткие интервалы времени.

Для высоких орбит шаг интегрирования 10 с и 100 с обеспечивает практически точное решение. Шаг интегрирования 450 с на интервале 3 суток приводит к ошибке интегрирования 1000 м по продольной дальности и 200 м по боковой дальности, что соответствует возмущающему ускорению

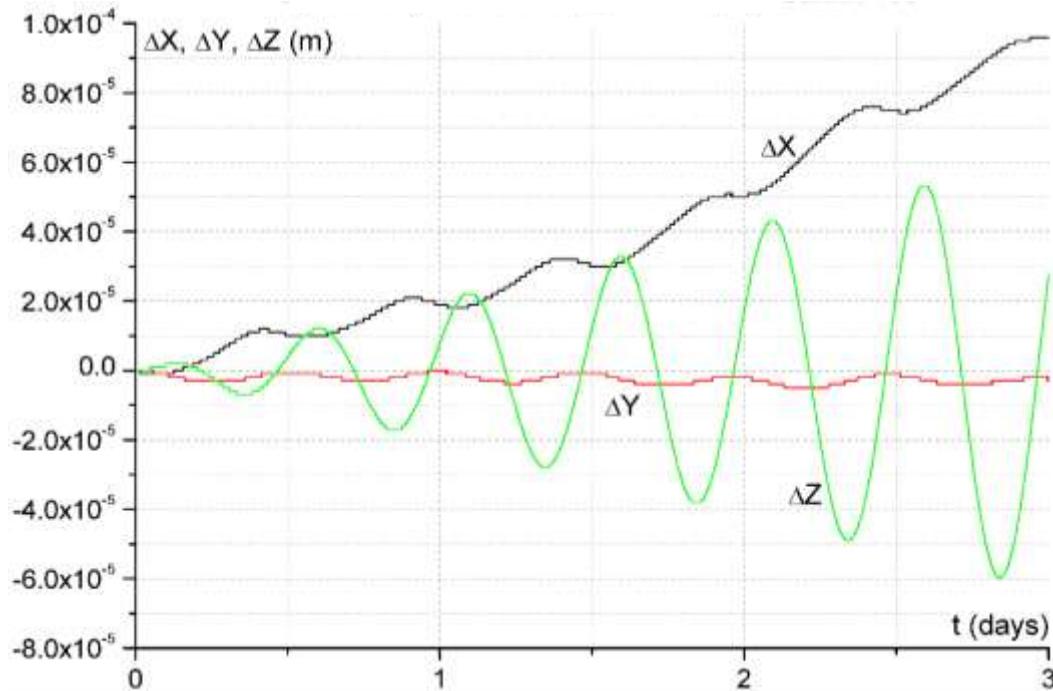


Рис. 3.3 Методическая ошибка прогноза орбиты высокоорбитального КА при шаге прогноза 10 с.

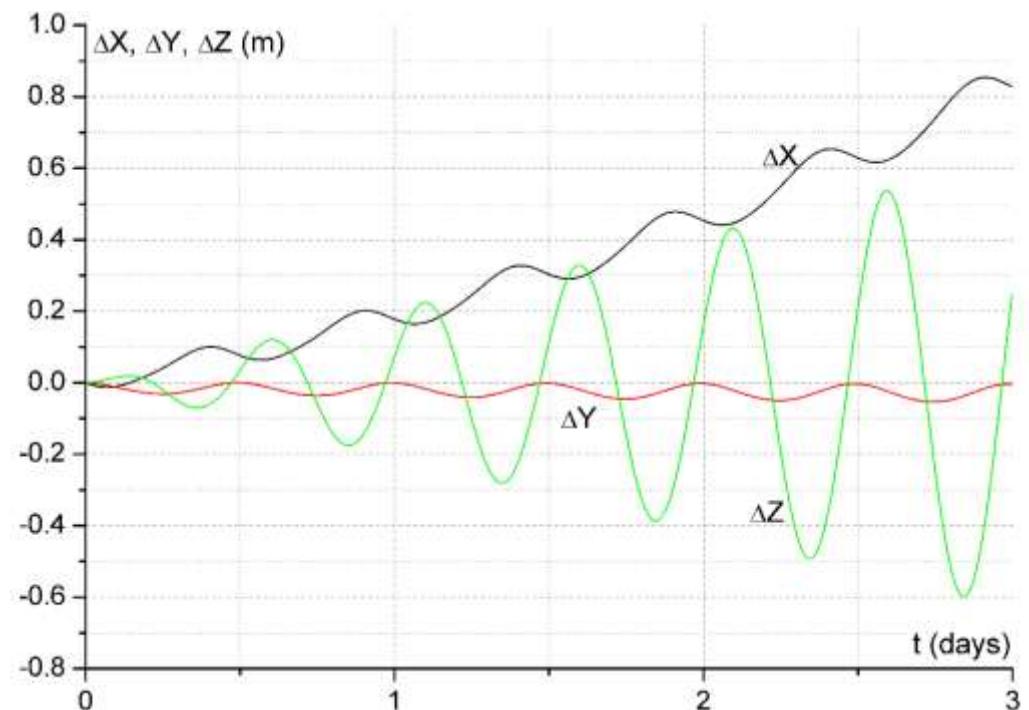


Рис. 3.4 Методическая ошибка прогноза орбиты высокоорбитального КА при шаге прогноза 100 с.

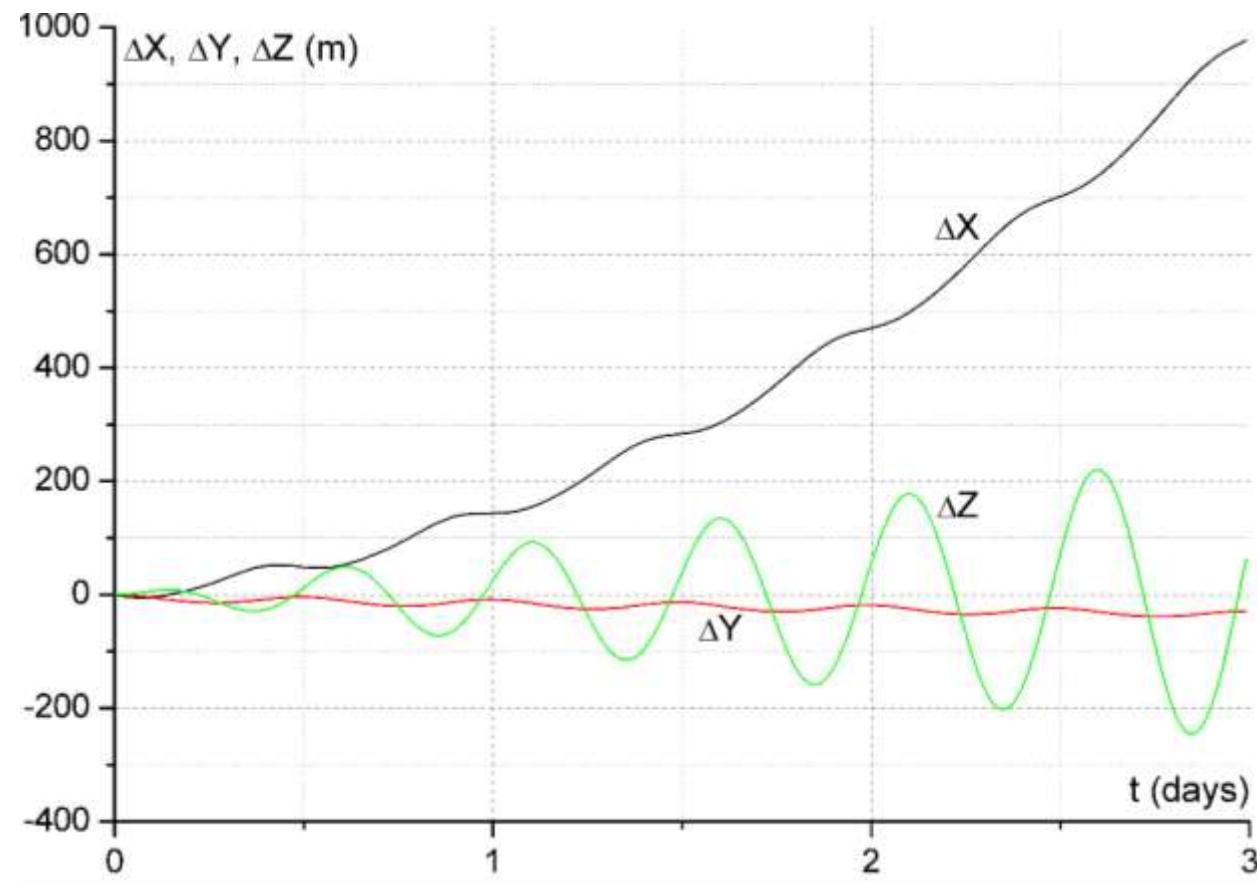


Рис. 3.5 Методическая ошибка прогноза орбиты высокоорбитального КА
при шаге прогноза 450 с.

3.2 Исследование возможности повышения быстродействия алгоритмов. Экономичный метод интегрирования уравнений движения КА

Прогноз орбиты КА на заданный интервал времени предполагает интегрирование уравнений движения (2.42). Интегрирование может выполняться различными численными методами. Важными характеристиками методов интегрирования является их точность при прогнозировании на заданный интервал и быстродействие алгоритма, реализующего соответствующий метод. Достаточно точным и часто используемым методом интегрирования уравнений движения является метод Рунге-Кутта четвёртого порядка. Точностные характеристики этого метода в зависимости от шага интегрирования для низких и высоких орбит рассмотрены в разделе 3.1. При прогнозе орбиты КА этим методом, например, на интервал трое суток для низких и высоких орбит при шаге интегрирования 1 с ошибка прогноза составляет доли миллиметра. Спрогнозированную таким образом орбиту можно принимать за эталонную при исследовании точности прогноза с другим более крупным шагом интегрирования или прогноза, выполняемого другими методами. Точность метода Рунге-Кутта для прогноза низких орбит с шагом 10 с и 100 с демонстрируют графики, приведённые на рис. 3.1 и 3.2, а для прогноза высоких орбит с шагом 10 с, 100 с, 450 с – графики, приведённые на рис. 3.3, 3.4, 3.5. Приведённые графики позволяют в зависимости от требований решаемой задачи выбирать шаг интегрирования для метода Рунге-Кутта.

Однако указанный метод требует для своей реализации значительного объёма вычислений и не всегда может быть использован, особенно при решении различного рода задач прогноза орбит КА в бортовых вычислительных средствах. Большой объём вычислений связан с тем, что метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четыре раза вычислять правую часть

уравнений движения (2.42). Если речь идёт о выполнении точного прогноза, то в правой части уравнений (2.42) при вычислении вектора возмущений \bar{a}_n необходимо учитывать большое количество составляющих, вычисление которых требует значительных вычислительных ресурсов (см. раздел 2.1-2.6). Но при разработке бортового ПО всегда приходится сталкиваться с дефицитом этих вычислительных ресурсов, поэтому вопрос повышения быстродействия алгоритмов, решающих ту или иную задачу, является всегда актуальным. Ниже рассмотрен алгоритм прогнозирования орбит КА, который на каждом вычислительном шаге требует только однократного расчёта правой части уравнений движения (2.42) и по быстродействию в ~5 раз превышает метод Рунге-Кутта. При этом точность интегрирования остаётся достаточно высокой и во многих случаях удовлетворяет требованию точности выполняемого прогноза.

Наиболее известным и простым методом интегрирования уравнений движения КА, требующим однократного вычисления правой части уравнений движения на каждом шаге, является метод Эйлера, имеющий вид:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + \bar{V}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{a}_i \Delta t^2, \\ \bar{V}_{i+1} &= \bar{V}_i + \bar{a}_i \Delta t\end{aligned}\tag{3.4}$$

где \bar{X}_i, \bar{V}_i – известные текущие векторы координат и скорости КА на i -м шаге;

Δt – шаг интегрирования;

\bar{a}_i – вектор ускорения КА относительно ГСК, представляющий собой правую часть уравнений (2.42).

Хотя метод Эйлера по быстродействию в ~5 раз превосходит метод Рунге-Кутта, недостатком метода является его низкая точность. Для демонстрации точности метода Эйлера

на рис. 3.6 приведены графики ошибок прогноза орбиты относительно ОСК низкоорбитального КА, выполненного с шагом 1 с на интервале 3 суток. Приведённые графики показывают, что точность суточного прогноза для низкой орбиты, выполненного с шагом 1 с, составляет ~ 7000 км. Понятно, что при такой точности прогноза метод Эйлера может использоваться только для короткого прогноза орбиты КА, не превышающего несколько минут.

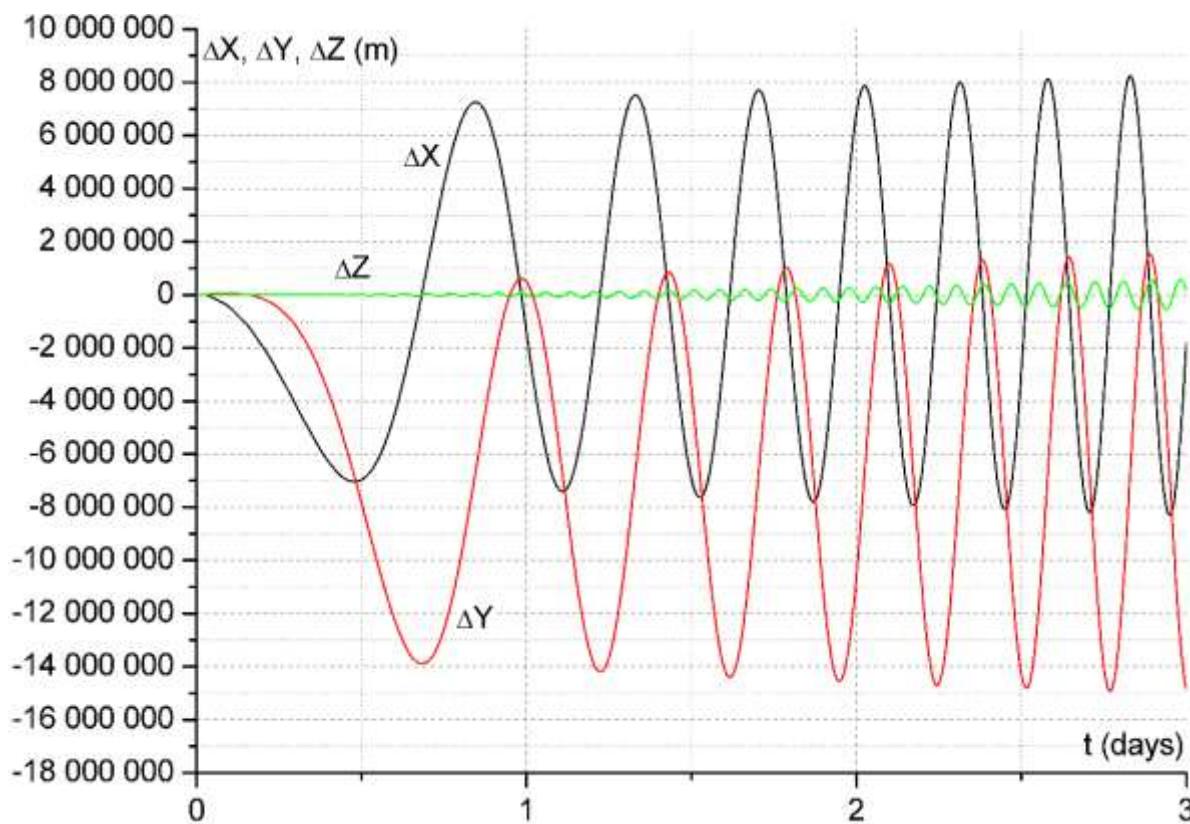


Рис. 3.6 Ошибки прогноза орбиты МКС методом Эйлера (шаг 1с).

Тем не менее, существуют алгоритмы интегрирования уравнений движения КА, которые по быстродействию аналогичны методу Эйлера, однако имеют значительно более высокую точность. Опуская выкладки, приведём один из возможных алгоритмов интегрирования системы уравнений движения КА:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + \bar{V}_i \Delta t + \frac{19}{24} \bar{a}_i \Delta t^2 - \frac{5}{12} \bar{a}_{i-1} \Delta t^2 + \frac{1}{8} \bar{a}_{i-2} \Delta t^2 + \frac{19}{180} \omega_0^4 \bar{V}_i \Delta t^5 \\ \bar{V}_{i+1} &= \bar{V}_i + \frac{23}{12} \bar{a}_i \Delta t - \frac{4}{3} \bar{a}_{i-1} \Delta t + \frac{5}{12} \bar{a}_{i-2} \Delta t + \frac{3}{8} \omega_0 \bar{V}_i \Delta t^4,\end{aligned}\quad (3.5)$$

где \bar{X}_i, \bar{V}_i – известные текущие векторы координат и скорости КА на i -м шаге;

$\bar{a}_i, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i-2}$ – векторы ускорений КА в ГСК на текущем i -м и предыдущих $i-1$ и $i-2$ шагах;

Δt – шаг интегрирования;

ω_0 – средняя орбитальная угловая скорость КА.

По быстродействию алгоритмы (3.5) аналогичны алгоритмам метода Эйлера (3.4), так как основное время вычислений затрачивается на формирование вектора ускорений \bar{a}_i . А в обоих методах вычисление этого вектора на каждом шаге выполняется только 1 раз.

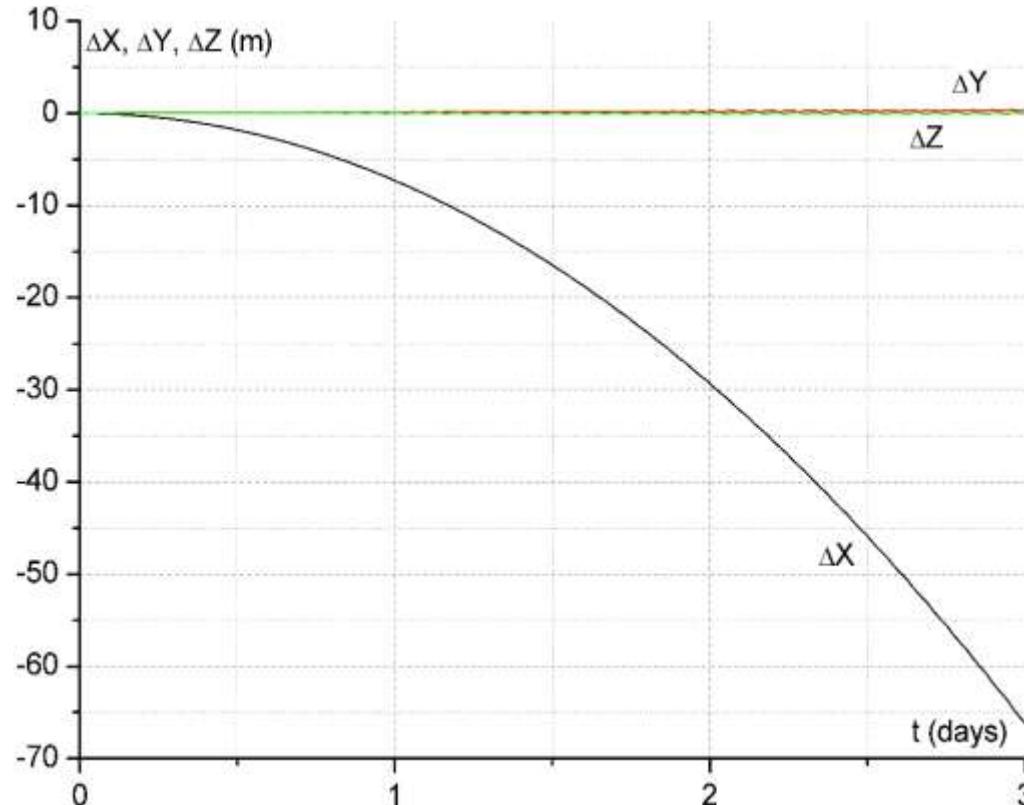


Рис. 3.7 Ошибки прогноза, выполненные по алгоритму (3.5) для орбиты МКС (шаг 1 с).

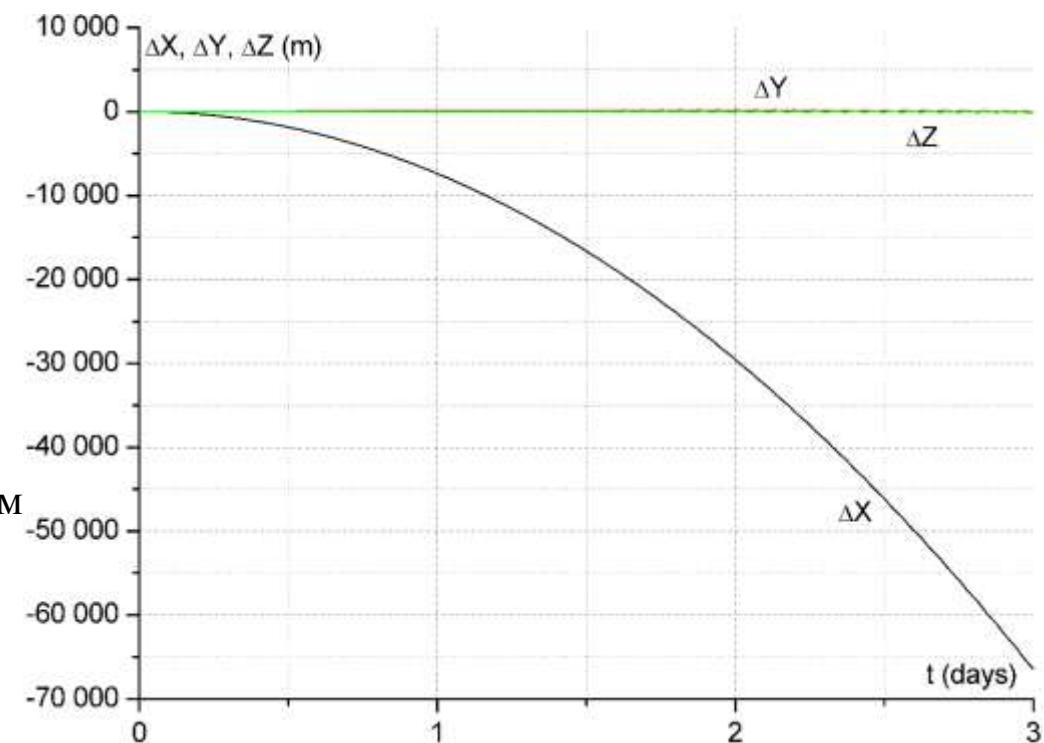
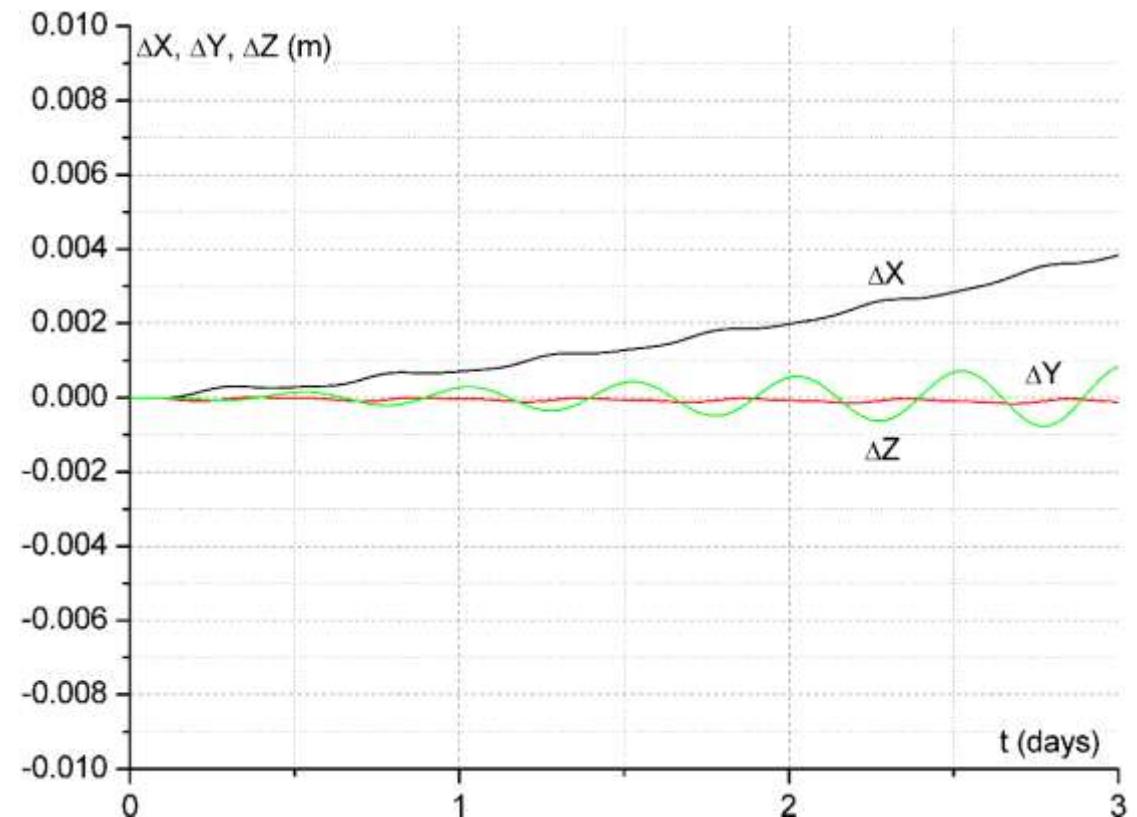


Рис. 3.8 Ошибки прогноза для орбиты МКС (шаг 10с).

На рис. 3.7 и 3.8 приведены графики ошибок трёхсуточного прогноза относительно ОСК, выполненного по алгоритму (3.5) с шагом 1 с и 10 с. На рис. 3.9 – 3.11 приведены аналогичные графики для прогноза высокоорбитального КА, выполненного с шагом 1 с, 10 с и 100 с.

Из приведённых графиков видно, что точность суточного прогноза с шагом 1 с для низких орбит составляет ~ 7 м для высоких – 1 мм. Такая точность достаточна для решения практически любых задач суточного прогноза для низкоорбитальных и высокоорбитальных КА. Графики точности прогноза для шагов интегрирования 10 с и 100 с позволяют выбрать шаг интегрирования для решения конкретных задач в зависимости от интервала прогноза и его требуемой точности.

Рис. 3.9 Ошибки прогноза для орбиты GPS (шаг 1 с).



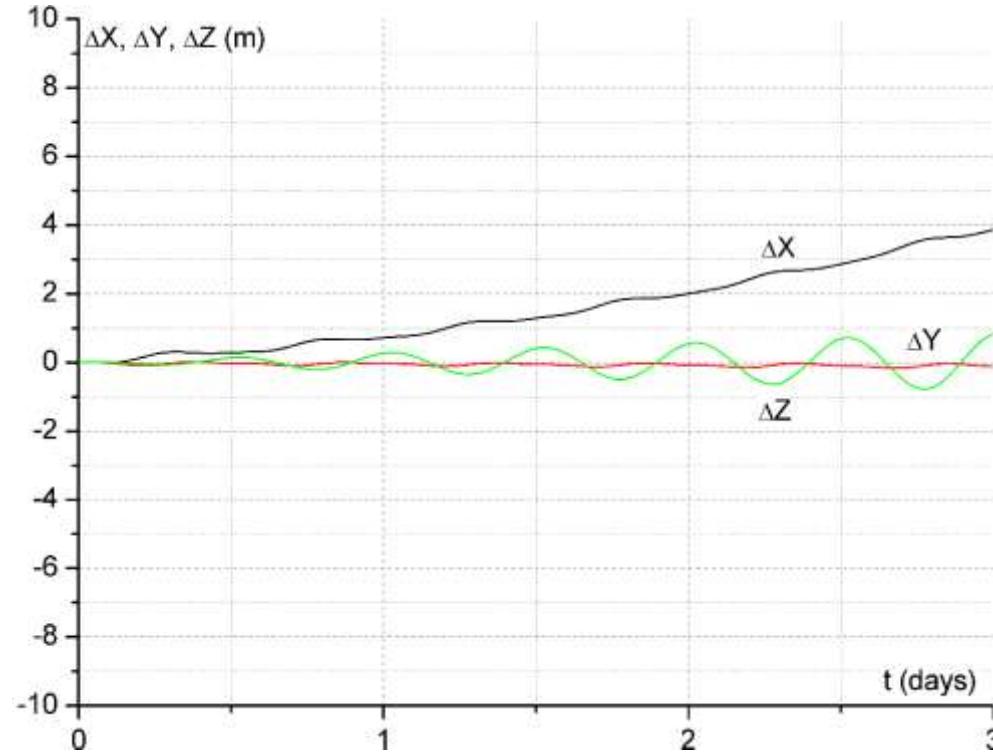


Рис. 3.10 Ошибки прогноза для орбиты GPS (шаг 10 с)

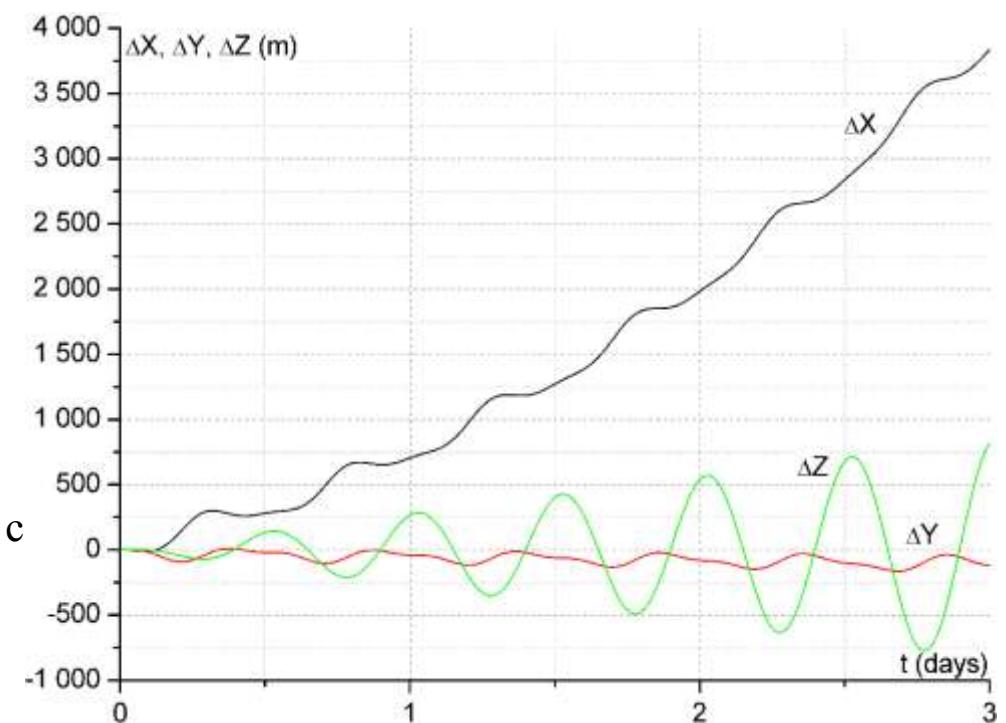


Рис. 3.11 Ошибки прогноза для орбиты GPS (шаг 100 с).

Таким образом, метод прогноза по алгоритмам (3.5) позволяет выполнять прогноз орбит КА с достаточно высокой точностью и при этом его быстродействие в ~5 раз выше быстродействия метода Рунге-Кутта четвертого порядка, что является важным преимуществом при решении задач прогноза орбит КА на бортовых вычислительных средствах.

3.3 Представление вектора состояния КА в виде вектора координат и его приращения. Метод интегрирования уравнений движения КА в приращениях

В предыдущих разделах вектор состояния космического аппарата представлялся в виде векторов координат и скорости КА относительно какой-либо системы координат, например, относительно ГСК. Зная вектор состояния КА на какой-то момент времени, можно путём прогноза определить этот вектор на любой другой момент времени. Прогноз выполняется путём интегрирования уравнений движения КА от начального момента t_0 до заданного момента t . Интегрирование может выполняться различными методами, например, методом Рунге-Кутта или, методом, рассмотренным в предыдущем разделе. Для повышения точности вектора состояния, формируемого в процессе интегрирования уравнений движения, могут осуществляться его измерения различными измерительными средствами, и по результатам этих измерений выполняться коррекция вектора состояния, компенсирующая ошибки интегрирования, обусловленные ошибками модели движения и ошибками метода интегрирования. Такой процесс называется динамической фильтрацией измерений при формировании оценки вектора состояния.

Удобным измерительным средством текущего вектора состояния является аппаратура спутниковой навигации (АСН), в реальном времени измеряющая текущие векторы координат и скорости КА. Эти измерения могут непосредственно использоваться для коррекции. При этом процесс коррекции текущей оценки вектора состояния существенно упрощается, если измеряется именно этот вектор, который в идеальном случае, при отсутствии ошибок измерений и точной модели движения КА, должен быть равен формируемой оценке. Однако, хотя бытует представление, что АСН измеряет векторы координат и скорости КА, на самом

деле измеряются вектор координат и вектор приращения координат за секунду, предшествующую измерению. Для наземных объектов, как правило, этот вектор приращения координат за секунду практически равен вектору скорости объекта в момент измерений. Для космических аппаратов вектор скорости существенно отличается от вектора приращения координат за предшествующую секунду. Например, для низкоорбитальных КА это отличие составляет ~ 5 м/с. Поэтому, чтобы использовать измерение приращения для коррекции текущей оценки векторов положения и скорости КА, требуется преобразовать вектор приращения в вектор скорости. Такое преобразование требует дополнительных вычислительных ресурсов ЦВМ КА.

Для упрощения процесса динамической фильтрации измерений АСН оказывается удобным ввести другой вид представления вектора состояния КА, в котором вместо шестимерного вектора состояния $\bar{\zeta}_i$ равного:

$$\bar{\zeta}_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{V}_i \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

где \bar{X}_i, \bar{V}_i – векторы координат и скорости в i -й момент времени, рассматривается вектор состояния в виде:

$$\zeta_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \Delta\bar{X}_i \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где $\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}$ – приращение вектора координат за секунду, предшествующую моменту i -го измерения.

Рассмотрим алгоритмы прогноза вектора состояния КА, представленного в виде (3.7), и уравнения движения (2.42) относительно ГСК в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{X}} &= \bar{V} \\ \dot{\bar{V}} &= \bar{a}(\bar{X}),\end{aligned}\tag{3.8}$$

где \bar{X}, \bar{V} – векторы координат и скорости КА относительно ГСК;

$\bar{a}(\bar{X})$ – вектор ускорений, зависящий от координат \bar{X} , включающий все учитываемые возмущения.

Представим вектор текущего состояния КА в виде:

\bar{X}_i – вектор координат в текущий i -й момент времени;

$\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}$ – приращение вектора координат на i -м шаге.

Выразим векторы координат КА на $i+1$ и $i-1$ шагах через значения $\bar{X}_i, \bar{V}_i(\bar{X}_i)$ на i -ом шаге с точностью до третьей производной ускорения $\ddot{\bar{a}}$:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + \bar{V}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{a}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \dot{\bar{a}}_i \Delta t^3 + \frac{1}{24} \ddot{\bar{a}}_i \Delta t^4 + \frac{1}{120} \dddot{\bar{a}}_i \Delta t^5; \\ \bar{X}_{i-1} &= \bar{X}_i - \bar{V}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{a}_i \Delta t^2 - \frac{1}{6} \dot{\bar{a}}_i \Delta t^3 + \frac{1}{24} \ddot{\bar{a}}_i \Delta t^4 - \frac{1}{120} \dddot{\bar{a}}_i \Delta t^5.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Из равенств (3.9) получим выражение для вектора приращения координат на $i+1$ -м шаге через его значение на i -м шаге:

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_i \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_i \Delta t^4.\tag{3.10}$$

Производные ускорения $\dot{\bar{a}}_i, \ddot{\bar{a}}_i$ для околокруговых орбит можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{a}}_i &= -\omega_0^2 \frac{\Delta \bar{X}_i}{\Delta t}; \\ \ddot{\bar{a}}_i &= -\omega_0^2 \bar{a}_i.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Подставив значения векторов $\dot{\bar{a}}_i, \ddot{\bar{a}}_i$ в выражение (3.11), после преобразования получим:

$$\Delta \bar{X}_{i+1} = \Delta \bar{X}_i + \left(1 - \frac{1}{12} \omega_0^2 \Delta t^2\right) \bar{a}_i \Delta t^2\tag{3.12}$$

Значение вектора координат \bar{X}_{i+1} на $i+1$ -м шаге получим по формуле:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \Delta \bar{X}_{i+1}.\tag{3.13}$$

Алгоритмы (3.12) и (3.13) позволяют по значениям вектора состояния $\bar{X}_i, \Delta \bar{X}_i$ на текущем i -м шаге определить вектор состояния $\bar{X}_{i+1}, \Delta \bar{X}_{i+1}$ на следующий $i+1$ -й шаг. Для этого требуется вычислить значение вектора ускорения \bar{a}_i , зависящее только от вектора координат \bar{X}_i , на i -м шаге, а затем по алгоритмам (3.12) и (3.13) вычислить значение вектора состояния на следующий шаг. Реализация алгоритма прогноза вектора состояния на один шаг требует однократного вычисления вектора ускорения \bar{a}_i , в отличие от алгоритма Рунге-Кутта 4 порядка, требующего четырёхкратного вычисления этого вектора на одном шаге. В конечном счёте, объём вычислений на каждом шаге для предлагаемого алгоритма оказывается в ~5раз меньше, чем для метода Рунге-Кутта четвертого порядка, традиционно используемого для прогноза орбит КА. По объёму вычислений предложенный алгоритм аналогичен методу Эйлера, также требующего однократного вычисления вектора ускорения \bar{a}_i на каждом шаге интегрирования уравнений движения. Однако точность прогноза орбиты предложенным методом, демонстрируемая графиками, приведёнными на рис. 3.12 – 3.17 оказывается в сотни

раз выше, чем точность прогноза методом Эйлера. Поэтому этот метод вполне может использоваться в бортовом программном обеспечении.

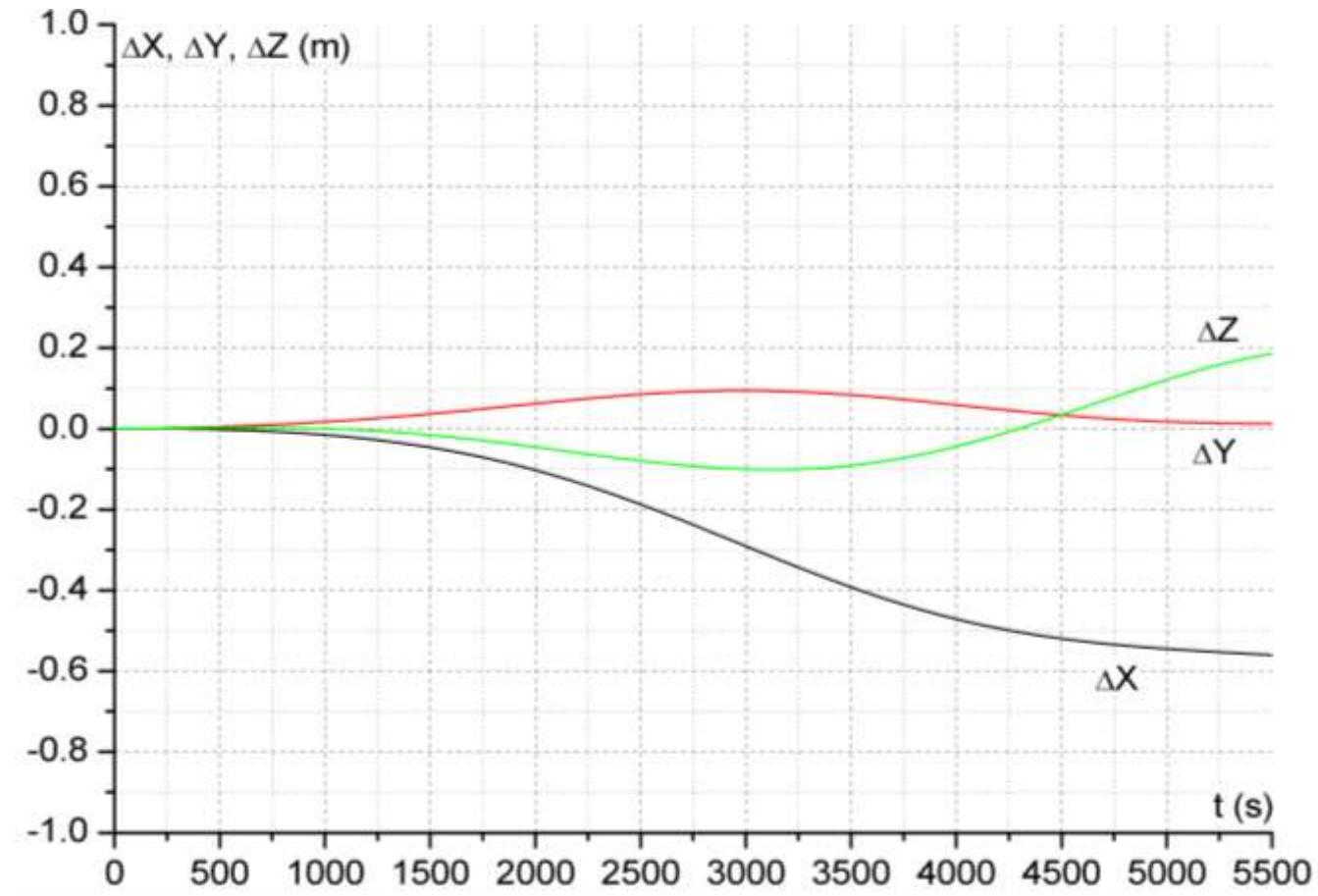


Рис. 3.12 Ошибки прогноза орбиты МКС на интервале 1 виток (шаг 1 с).

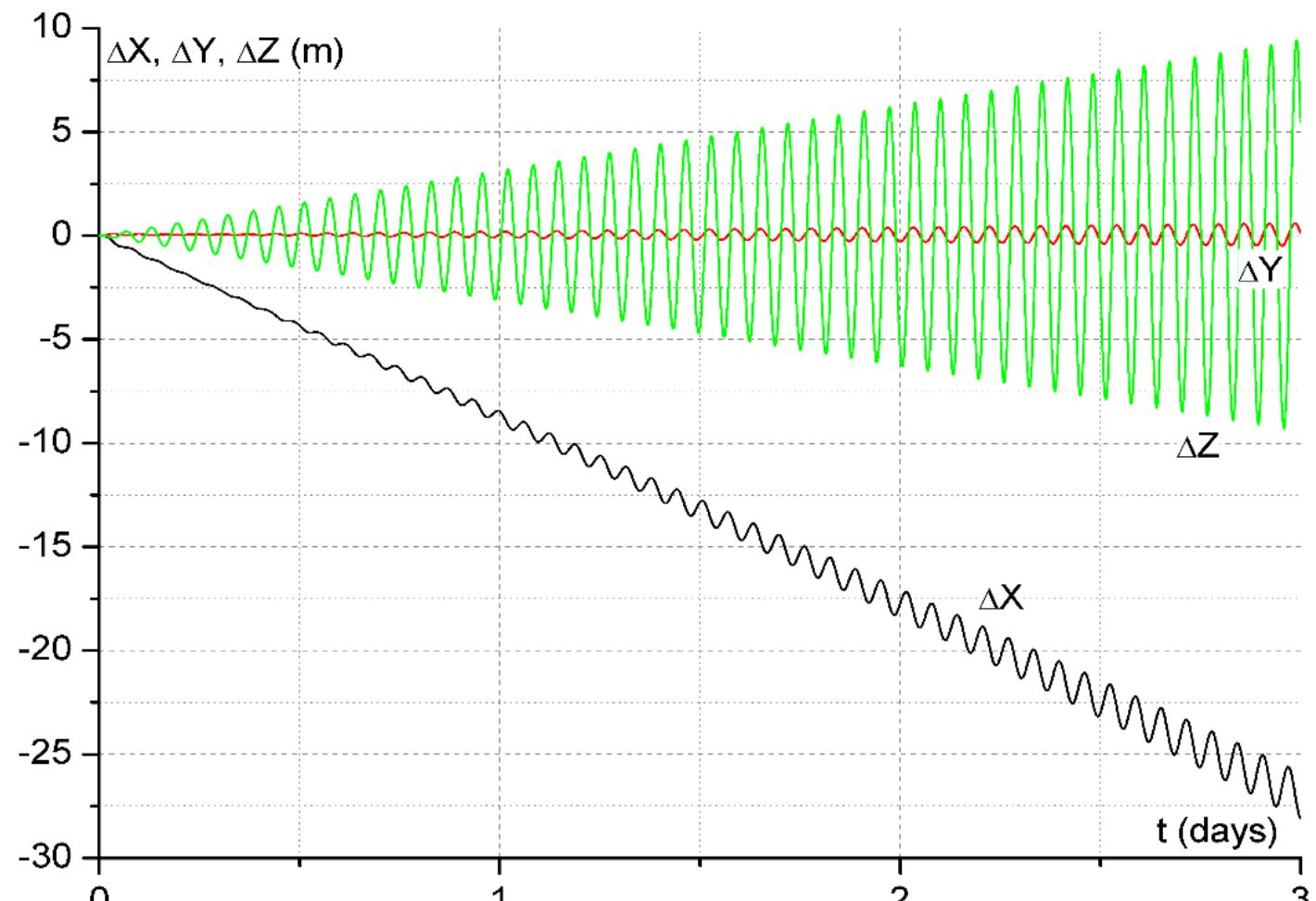


Рис. 3.13. Ошибки прогноза орбиты МКС (шаг 1с).

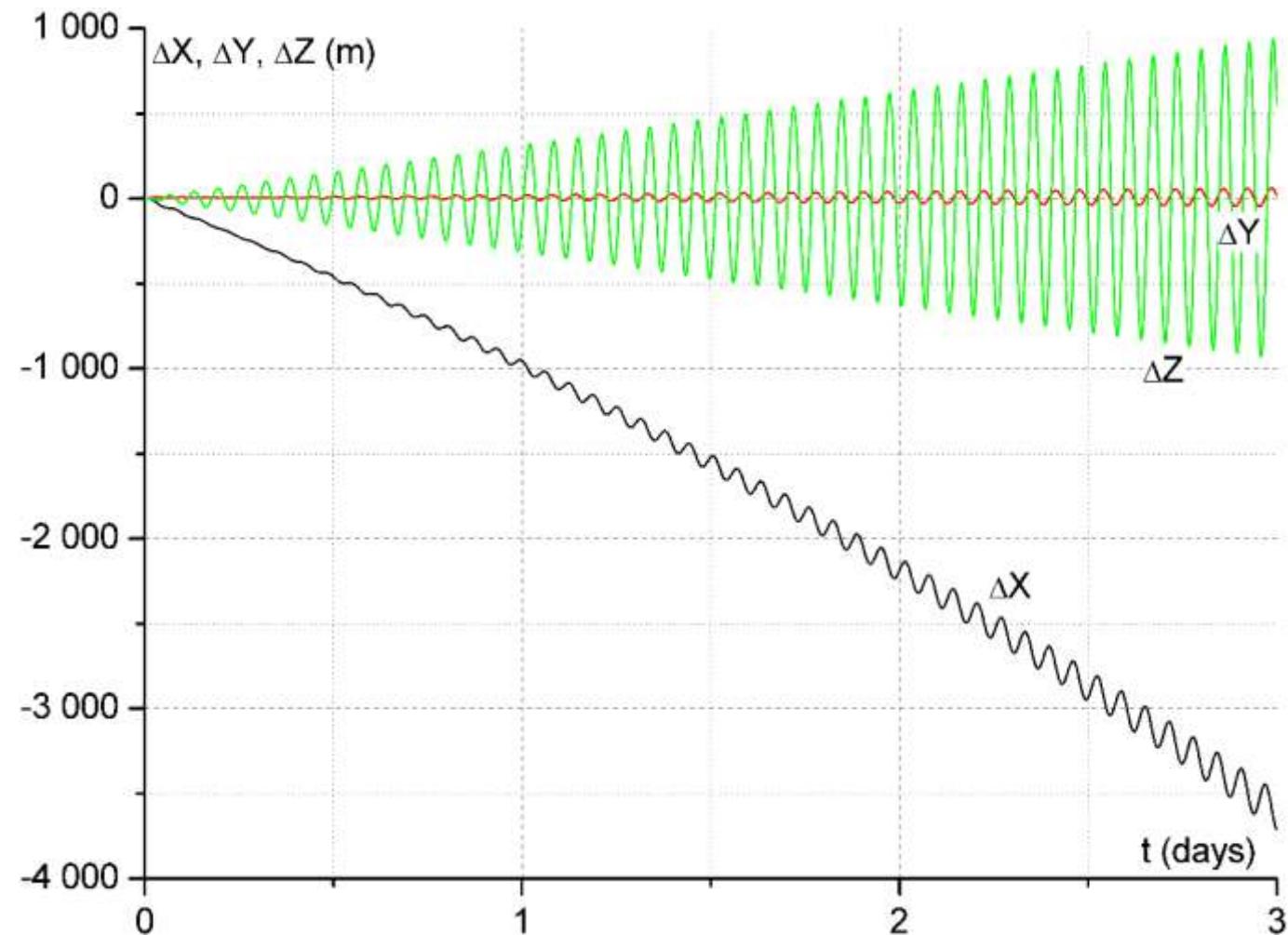


Рис. 3.14 Ошибки прогноза орбиты МКС (шаг 10с).

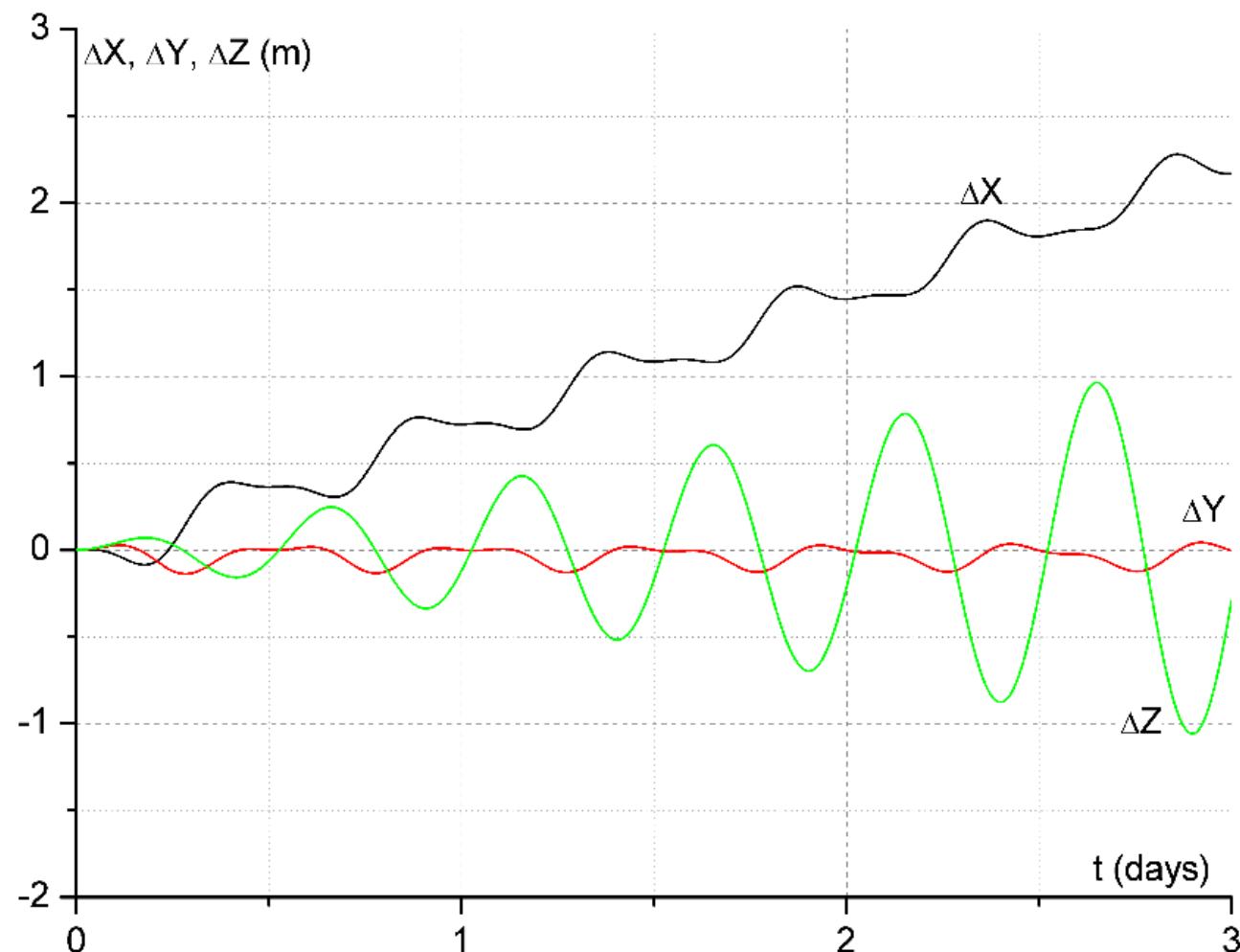


Рис. 3.15 Ошибки прогноза орбиты GPS (шаг 1 с).

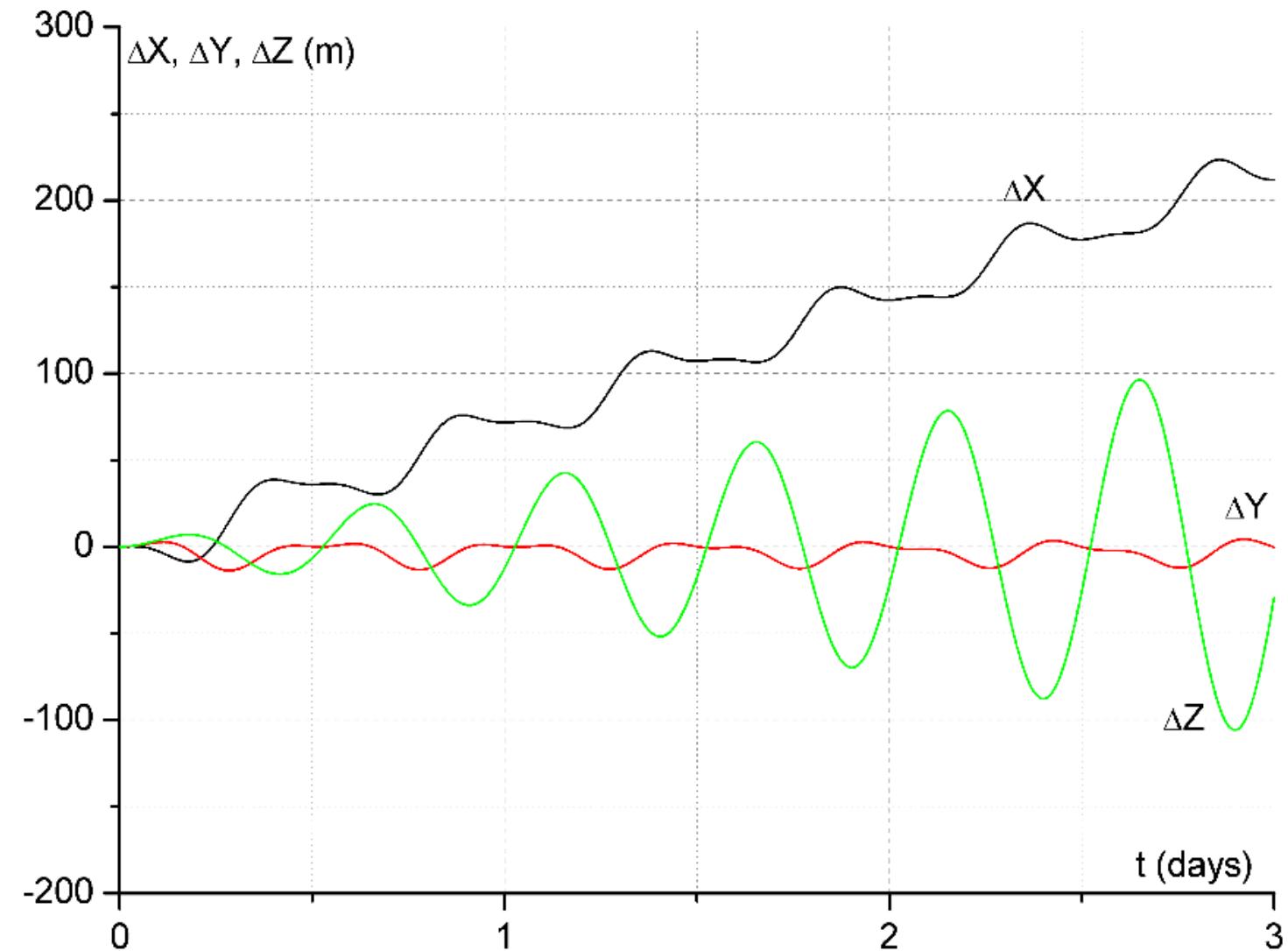


Рис. 3.16 Ошибки прогноза орбиты GPS (шаг 10 с).

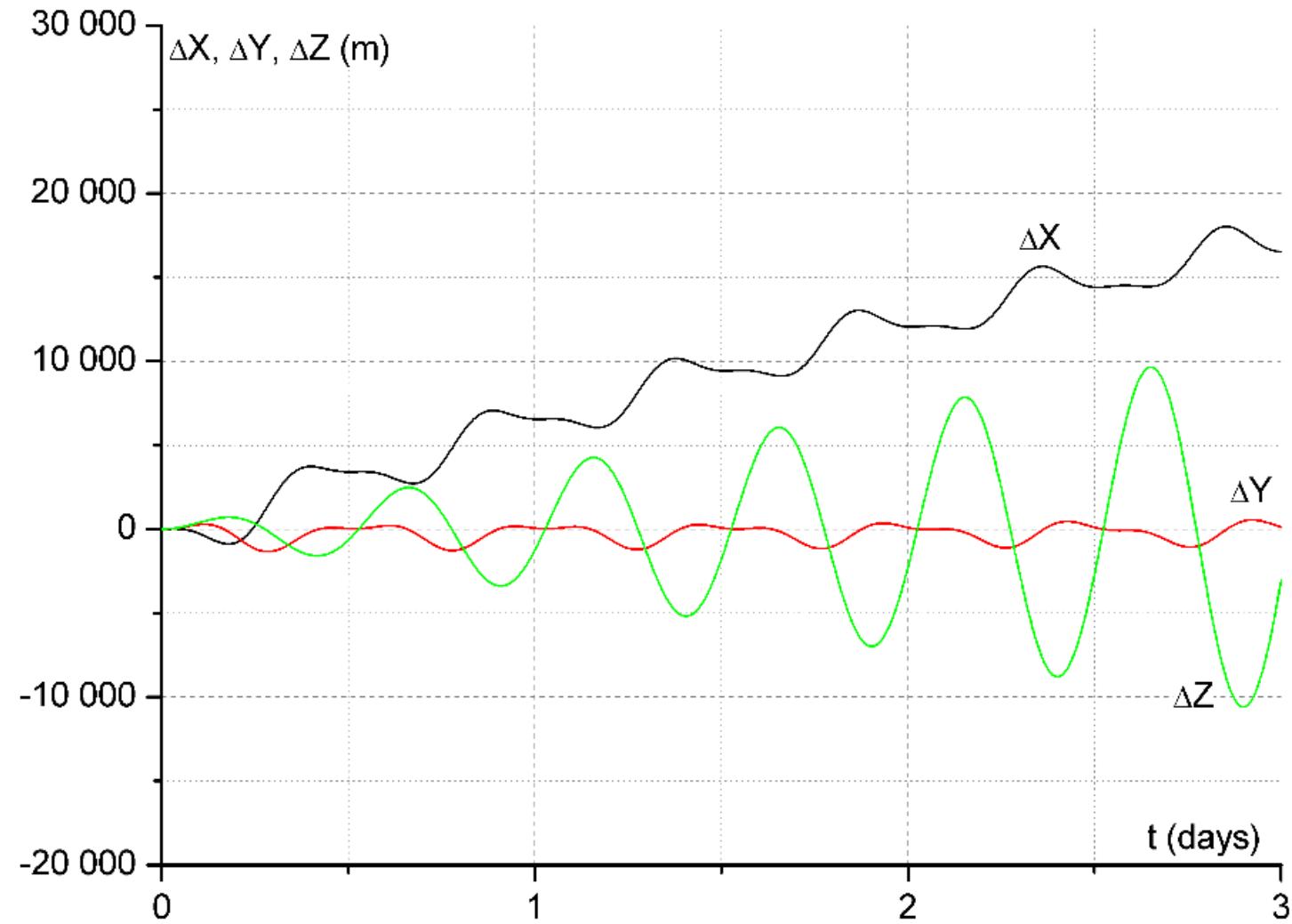


Рис. 3.17 Ошибки прогноза орбиты GPS (шаг 100 с).

3.4 Интегрирование уравнений движения КА в ИСК БИНС с учетом измерений БИНС

Выше мы рассматривали интегрирование уравнений движения КА, находящихся в "свободном полёте", когда ускорение КА полностью моделировалось. На практике часто бывают случаи, когда некоторые составляющие ускорения КА не могут моделироваться вообще, либо моделируются с большими ошибками. Например, при движении КА в атмосфере (ракеты или спускаемого аппарата) его аэродинамические ускорения и ускорения от двигателей могут достигать несколько g , а возможная точность моделирования этих ускорений не превышает 10%. Разумеется, при такой точности не возможен сколь-либо точный прогноз орбиты КА или формирование текущей оценки вектора состояния. В этом случае используются различные инерциальные методы измерений этих ускорений, позволяющие в реальном времени осуществлять интегрирование уравнений движения КА и формировать текущую оценку его вектора состояния.

Наиболее универсальным инструментом, обеспечивающим такие измерения, является БИНС – бесплатформенная инерциальная навигационная система, включающая систему датчиков угловой скорости (ДУС) и систему акселерометров (Акс). Не вдаваясь в детали аппаратной реализации датчиковой аппаратуры отметим, что БИНС измеряет проекции абсолютной угловой скорости КА на оси связанной системы координат КА (ССК) и проекции "кажущихся" ускорений КА на оси ССК. "Кажущимися" ускорениями называются ускорения, обусловленные "негравитационными" силами, такими например, как аэродинамические силы или силы от реактивных двигателей.

Гравитационные силы, обусловленные Землей и другими планетами, акселерометрами БИНС не воспринимаются. Следует отметить, что так как измерения датчиков считаются

ЦВМ КА с определенной дискретностью (тактом), то реально в ЦВМ поступают приращения углов поворотов КА вокруг осей ССК и приращения проекций "кажущейся" скорости на оси ССК за время такта. В ЦВМ осуществляется обработка измерений датчиков БИНС. В результате этой обработки формируется матрица (или кватернион) перехода от некоторой инерциальной системы координат ИСК БИНС, совпадающей с ССК в начальный момент работы БИНС, и проекции приращений "кажущейся" скорости КА за время текущего такта на оси этой ИСК. Матрица перехода $A_{i\text{-}c}$ формируется путем интегрирования кинематических уравнений углового движения КА. С учетом знания этой матрицы осуществляется расчет измерений "кажущейся" скорости. Определение матрицы перехода $A_{i\text{-}g}$ от ИСК БИНС к ГСК или ИСК j 2000 обеспечивает систему ориентации КА.

Рассмотрим задачу формирования текущей оценки орбиты КА при воздействии на КА значительных "негравитационных" ускорений с использованием измерений БИНС. Будем предполагать, что на каждом такте БИНС формирует матрицу $A_{i\text{-}c}$ и вектор приращения "кажущейся" скорости в системе координат ИСК БИНС. Рассмотрим уравнения движения КА относительно ИСК БИНС.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{X}} &= \bar{V}; \\ \dot{\bar{V}} &= \bar{a}_\Gamma + \bar{a}_u,\end{aligned}\tag{3.14}$$

где \bar{a}_Γ – все гравитационные ускорения КА;

\bar{a}_u – все инерциальные ускорения, измеряемые БИНС.

Выразим векторы координат КА на $i+1$ и $i-1$ шагах через значения $\bar{X}_i, \bar{V}_i, \bar{a}_{\Gamma_i}, \bar{a}_u$ на i -м шаге и точностью до третьей производной ускорения

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \bar{V}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{a}_{\Gamma i} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \bar{a}_{ii} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \dot{\bar{a}}_{\Gamma i} \Delta t^3 + \frac{1}{6} \dot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^3 + \frac{1}{24} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma i} \Delta t^4 + \frac{1}{24} \ddot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^4; \quad (3.15)$$

$$X_{i-1} = \bar{X}_i - \bar{V}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{a}_{\Gamma i} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \bar{a}_{ii} \Delta t^2 - \frac{1}{6} \dot{\bar{a}}_{\Gamma i} \Delta t^3 - \frac{1}{6} \dot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^3 + \frac{1}{24} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma i} \Delta t^4 + \frac{1}{24} \ddot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^4.$$

Из равенства (3.15) получим выражение для вектора приращения координат на $i+1$ -м шаге через его значение на i -м шаге:

$$\Delta \bar{X}_{i+1} = \Delta \bar{X}_i + \bar{a}_{\Gamma i} \Delta t^2 + \bar{a}_{ii} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma i} \Delta t^4 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^4. \quad (3.16)$$

В правой части выражения (3.16) вектор $\Delta \bar{X}_i$ известен, так как он сформирован на предыдущем шаге. Вектор гравитационных ускорений $\bar{a}_{\Gamma i}$ известен из модели движения КА. Определим вектор $\ddot{\bar{a}}_{\Gamma i}$. Учитывая малость этого вектора, получим его выражение через приближенное значение вектора $\bar{a}_{\Gamma i}$, представленного в виде:

$$\bar{a}_{\Gamma} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}, \quad (3.17)$$

где $r^3 = |\bar{X}|^3$

Здесь мы пренебрегли всеми гармониками гравитационного поля Земли и влиянием Луны и Солнца на движение КА. Определим производные вектора \bar{a}_{Γ} :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{a}}_{\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} \dot{\vec{X}} + \frac{3\mu}{r^4} \dot{r} \cdot \vec{X}_j \\ \ddot{\vec{a}}_{\Gamma} &= -\frac{\mu}{r^3} \ddot{\vec{X}} + \frac{6\mu}{r^4} \dot{r} \dot{\vec{X}} + \frac{3\mu}{r^4} \ddot{r} \vec{X} - \frac{12\mu}{r^5} \dot{r}^2 \vec{X}\end{aligned}\tag{3.18}$$

Заметим, что в предыдущем разделе мы предполагали, что орбита КА близка к круговой и пренебрегали членом, включающим скорость роста модуля вектора координат \dot{r} . Здесь будем рассматривать более общий случай, когда орбита может быть существенно эллиптической. Тогда в выражении (3.18) необходимо учитывать \dot{r} .

Скорость роста расстояния от КА до центра Земли равна:

$$\dot{r} = \frac{\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}}{r}\tag{3.19}$$

Подставив в выражение (3.18) значение $\ddot{\vec{X}}$ полученное из выражения (3.14) и (3.17), после преобразований получим формулу для $\ddot{\vec{a}}_{\Gamma}$:

$$\ddot{\vec{a}}_{\Gamma} = \left(\frac{\mu}{r^3} \right)^2 \vec{X} + \frac{6\mu}{r^3} \frac{\dot{r}}{r} \dot{\vec{X}} + \frac{3\mu}{r^3} \left(\frac{\ddot{r}}{r} - \frac{4\dot{r}^2}{r^2} \right) \vec{X}\tag{3.20}$$

Продифференцировав выражение (3.19) для \dot{r} после преобразований получим значение \ddot{r} :

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\dot{\vec{X}}^2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r}.\tag{3.21}$$

Подставив значение \ddot{r} из равенства (3.21) в равенство (3.20), после преобразований получим выражение для второй производной гравитационного ускорения:

$$\ddot{\bar{a}}_{\Gamma} = \omega_0^2 \left(3 \frac{\dot{\bar{X}}^2}{r^2} - 2\omega_0^2 - \frac{15\dot{r}^2}{r^2} \right) \bar{X} + 6\omega_0^2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\bar{X}}, \quad (3.22)$$

где $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}$; $r = |\bar{X}|$; $\dot{r} = \frac{\dot{\bar{X}} \cdot \bar{X}}{r}$.

Выражение (3.22) позволяет для любых значений векторов \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$ (или $\Delta\bar{X}$) определить вектор $\ddot{\bar{a}}_{\Gamma}$.

Теперь определим значение векторов \bar{a}_{II_i} и $\ddot{\bar{a}}_{II_i}$, входящих в правую часть равенства (3.16). Будем предполагать, что по результатам обработки измерений БИНС на каждом такте определяются приращения "кажущейся" скорости ΔV_i в проекции на оси ИСК БИНС. Приращение "кажущейся" скорости на $i+1$ -м и $i-1$ -м тактах определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V}_{i+1} &= \int_0^{\Delta t} \bar{a}_I(t) dt = \int_0^{\Delta t} \left(\bar{a}_{II_i} + \dot{\bar{a}}_{II_i} t + \frac{1}{2} \ddot{\bar{a}}_{II_i} t^2 \right) dt = \\ &= \bar{a}_{II_i} \Delta t + \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_{II_i} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_{II_i} \Delta t^3; \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\Delta \bar{V}_i = \bar{a}_{II_i} \Delta t - \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_{II_i} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_{II_i} \Delta t^3.$$

Исключив из системы уравнений (3.23) вектор $\dot{\bar{a}}_{IIi}$, определим значение вектора \bar{a}_{IIi} через значения приращений $\Delta\bar{V}_i$ и $\Delta\bar{V}_{i+1}$:

$$\bar{a}_{IIi}\Delta t = \frac{\Delta\bar{V}_{i+1} + \Delta\bar{V}_i}{2} - \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{IIi}\Delta t^3 \quad (3.24)$$

Подставив значение выражения $\bar{a}_{IIi}\Delta t$ из (3.24) в выражение (3.16), получим формулу для формирования вектора приращения координат КА на $i+1$ -м шаге:

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_{\Gamma i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\Gamma i}\Delta t^4 + \frac{\Delta\bar{V}_{i+1} + \Delta\bar{V}_i}{2}\Delta t - \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{IIi}\Delta t^4 \quad (3.25)$$

В выражение (3.25) для приращения вектора координат на $i+1$ -м шаге входит приращение вектора координат на текущем шаге $\Delta\bar{X}_i$, значение гравитационного ускорения на текущем шаге $\bar{a}_{\Gamma i}$, значение второй производной гравитационного ускорения на текущем шаге $\ddot{\bar{a}}_{\Gamma i}$, формируемое по формуле (3.22), значения приращений "кажущейся" скорости в системе координат ИСК БИНС на $i+1$ -м и i -м шагах $\Delta\bar{V}_{i+1}$ и $\Delta\bar{V}_i$, формируемые БИНС. В правую часть выражения (3.25) входит также вектор $\ddot{\bar{a}}_{IIi}$, которым в большинстве практических задач можно пренебречь. При необходимости этот вектор может быть оценен через значение приращения кажущейся скорости на предыдущем $i-1$ -м шаге:

$$\ddot{\bar{a}}_{IIi}\Delta t^3 = \Delta\bar{V}_{i+1} - 2\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i-1} \quad (3.26)$$

Подставив значение вектора $\ddot{\vec{a}}_{H_i}$ из выражения (3.26) в выражение (3.25), получим алгоритм формирования приращений векторов координат:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{X}_{i+1} &= \Delta \bar{X}_i + \bar{a}_{\Gamma_i} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma_i} \Delta t^4 + \frac{5\Delta \bar{V}_{i+1} + 8\Delta \bar{V}_i - \Delta \bar{V}_{i-1}}{12} \Delta t \\ \bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + \Delta \bar{X}_{i+1}\end{aligned}\tag{3.27}$$

3.5 Алгоритмы расчета приращений "кажущейся" скорости в БИНС

Для реализации алгоритмов интегрирования уравнений движения необходимо формировать векторы приращений "кажущейся" скорости $\Delta\bar{V}_i$ за время шага Δt_i . Для обеспечения высокой точности интегрирования требуется высокая точность формирования вектора $\Delta\bar{V}_i$, для чего интегрирование этого вектора в БИНС выполняется с более мелким шагом, чем интегрирование уравнений движения. Например, в аппаратуре спутниковой навигации АСН-М МКС при формировании текущего вектора состояния интегрирование уравнений движения выполняется с шагом 1 с, а формирование приращений "кажущейся" скорости в БИНС, реализуемой в бортовой вычислительной системе (БВС) МКС, выполняется с шагом 0,2 с. Рассмотрим алгоритмы формирования приращений "кажущейся" скорости в ИСК БИНС за время Δt при считывании показаний датчиков БИНС с более мелким шагом h . Будем предполагать, что величина такта Δt кратна шагу h , как это реализовано на МКС. Пусть A_{I-C} – матрица перехода от ИСК БИНС к ССК. Для производной этой матрицы можно записать кинематическое уравнение:

$$\dot{A}_{I-C} = \Omega A_{I-C}, \quad (3.28)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ – матрица вращения;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции абсолютной угловой скорости КА на ССК.

В идеале ДУСы БИНС измеряют приращения углов φ_x , φ_y , φ_z , равные интегралам соответственно от ω_x , ω_y , ω_z за время такта h . Значения матриц $\Omega(t)$ и $A_{II-C}(t)$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \Omega_0 + \dot{\Omega}_0 t; \\ A_{II-C}(t) &= A_{II-C_0} + \dot{A}_{II-C_0} t + \frac{1}{2} \ddot{A}_{II-C_0} t^2,\end{aligned}\tag{3.29}$$

где $\Omega_0, \dot{\Omega}_0, A_{II-C_0}, \dot{A}_{II-C_0}, \ddot{A}_{II-C_0}$ – значения соответствующих матриц на начало $i+1$ -го такта (момент t_i);

t – время от момента t_i .

Введем матрицу углов приращения за время i -го такта:

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{zi} & -\varphi_{yi} \\ -\varphi_{zi} & 0 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 0 \end{pmatrix}\tag{3.30}$$

Для i -го и $i+1$ -го тактов с точностью до членов порядка h^3 эта матрица будет равна:

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \int_{-h}^0 (\Omega + \dot{\Omega}_0 t) dt = \Omega_0 h - \frac{1}{2} \dot{\Omega}_0 h^2, \\ \varphi_{i+1} &= \int_{-\theta}^h (\Omega + \dot{\Omega}_0 t) dt = \Omega_0 h + \frac{1}{2} \dot{\Omega}_0 h^2.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Из равенства (3.31) определим значение матриц $\Omega_0 h$ и $\dot{\Omega}_0 h^2$, через матрицы измерений φ_i , φ_{i+1} на i -м и $i+1$ -м шагах:

$$\Omega_0 h = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}; \quad \dot{\Omega}_0 h^2 = \varphi_{i+1} - \varphi_i. \quad (3.32)$$

Из второго уравнения (3.29) с учетом равенства (3.28) получим значение матрицы $A_{II-C}(t)$:

$$A_{II-C}(t) = A_{II-C_0} + \Omega_0 A_{II-C_0}(t) + \frac{1}{2}(\dot{\Omega}_0 + \Omega_0^2) A_{II-C_0} t^2. \quad (3.33)$$

Если $A_{II-C}(0) = A_{II-Ci}$, а $A_{II-C}(h) = A_{II-Ci+1}$, то из равенства (3.33) с учетом равенства (3.32) получим рекуррентный алгоритм формирования матрицы $A_{II-Ci+1}$:

$$A_{II-Ci+1} = \left[E + \varphi_{i+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2} \right)^2 \right] A_{II-Ci}. \quad (3.34)$$

Учитывая, что $\varphi_i \approx \varphi_{i+1}$, с учетом малости φ_i^2 , получим рекуррентный алгоритм формирования матрицы $A_{II-Ci+1}$ без использования измерений ДУС на предыдущем шаге:

$$A_{II-Ci+1} = \left[E + \varphi_{i+1} + \frac{1}{2} \varphi_{i+1}^2 \right] A_{II-Ci}. \quad (3.35)$$

Отметим, что при малых угловых скоростях вращения КА членом $\frac{1}{2} \varphi_{i+1}^2$ в алгоритме (3.35) можно пренебречь. Тогда приближенный алгоритм имеет вид:

$$A_{II-Ci+1} = (E + \varphi_{i+1}) A_{II-Ci} \quad (3.36)$$

Оценим величину дрейфа БИНС при не учёте малых членов в алгоритме (3.36). Пусть КА имеет угловую скорость ω порядка $1^0/\text{с}$. Тогда, за время такта h , ошибка матрицы $A_{II-Ci+1}$ составит величину порядка:

$$\Delta A_{II-Ci+1} \approx \frac{1}{2} (\omega h)^2. \quad (3.37)$$

Скорость дрейфа для $h=0,2$ с будет иметь порядок:

$$\dot{A}_{II-C} \approx \frac{\Delta A_{II-Ci+1}}{h} \approx \frac{1}{2} \omega^2 h \approx 0.0017^\circ / c. \quad (3.38)$$

При таком дрейфе за час уход БИНС составит $\sim 6^\circ$. При учете членов порядка φ_i^2 , оцениваемая методическая ошибка ухода БИНС, обусловленная неточностью алгоритма (3.36), в рассматриваемом примере уменьшается более чем в 800 раз.

Рассмотрим алгоритмы формирования приращений кажущейся скорости $\Delta \bar{V}_I$ относительно ИСК БИНС на интервале шага интегрирования уравнений движения КА Δt . Пусть на $i+1$ -м такте h измерений БИНС проведено измерение $\Delta \bar{V}_{Ci+1}$ акселерометра БИНС относительно ССК, на момент t_i известна матрица перехода A_{II-Ci} от ИСК БИНС к ССК, сформированная по алгоритму (3.35). Выполняемые на такте измерения равны интегралу за время такта от ускорения КА в осях ССК.

$$\Delta \bar{V}_{Ci+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{a}_c(t) dt. \quad (3.39)$$

Приращение кажущейся скорости за время такта h в осях ИСК БИНС равно:

$$\Delta \bar{V}_{i+1II} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{II-C}^T(t) \bar{a}_c(t) dt. \quad (3.40)$$

Представим вектор $\bar{a}_c(t)$ и матрицу $A_{II-C}(t)$ в виде:

$$\bar{a}_c(t) = \bar{a}_{Ci} + \dot{\bar{a}}_{Ci}t + \frac{1}{2}\ddot{\bar{a}}_{Ci}t^2; \quad A_{II-C}(t) = A_{II-Ci} + \dot{A}_{II-Ci}t + \frac{1}{2}\ddot{A}_{II-Ci}t^2, \quad (3.41)$$

где t – время от момента t_i ;

\bar{a}_{Ci} , $\dot{\bar{a}}_{Ci}$, $\ddot{\bar{a}}_{Ci}$ – вектор кажущегося ускорения и его производные в момент t_i ;

A_{II-Ci} , \dot{A}_{II-Ci} , \ddot{A}_{II-Ci} – матрица A_{II-C} и ее производные в момент t_i .

С учетом равенства (3.28) матрица $A_{II-C}(t)$ может быть представлена в виде:

$$A_{II-C}(t) = A_{II-Ci} + \Omega_i A_{II-Ci} t + \frac{1}{2}(\dot{\Omega}_i + \Omega_i^2) A_{II-Ci} t^2, \quad (3.42)$$

где $\Omega_i, \dot{\Omega}_i$ – матрица скорости вращения КА и ее производная в момент t_i .

Подставив значение вектора ускорения $\bar{a}_c(t)$ из равенства (3.41) и матрицы $A_{II-C}(t)$ из равенства (3.42) в равенство (3.39), после интегрирования на интервалах от t_{i-1} до t_i и от t_i до t_{i+1} , пренебрегая членами третьего порядка малости по h , получим значения приращений вектора кажущейся скорости относительно ИСК БИНС на i -м и $i+1$ -м шагах.

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{V}_{Hi} &= A_{H-Ci}^T \bar{a}_i h - \frac{1}{2} A_{H-Ci}^T (\dot{\bar{a}}_{Ci} - \Omega_i \bar{a}_{Ci}) h^2 + \\
 &+ \frac{1}{6} A^T [\ddot{\bar{a}}_{Ci} + \Omega_i \dot{\bar{a}}_{Ci} + (\Omega_i^2 - \dot{\Omega}_i) \bar{a}_{Ci}] h^3; \\
 \Delta \bar{V}_{Hi+1} &= A_{H-Ci}^T \bar{a}_i h + \frac{1}{2} A_{H-Ci}^T (\dot{\bar{a}}_{Ci} - \Omega_i \bar{a}_{Ci}) h^2 + \\
 &+ \frac{1}{6} A_{H-Ci}^T [\ddot{\bar{a}}_{Ci} + \Omega_i \dot{\bar{a}}_{Ci} + (\Omega_i^2 - \dot{\Omega}_i) \bar{a}_{Ci}] h^3.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Вычтя первое равенство из второго, получим рекуррентный алгоритм формирования вектора $\Delta \bar{V}_{Hi+1}$

$$\Delta \bar{V}_{Hi+1} = \Delta \bar{V}_{Hi} + A_{H-Ci}^T (\dot{\bar{a}}_{Ci} - \Omega_i \bar{a}_{Ci}) h^2. \tag{3.44}$$

Выразим значения векторов \bar{a}_{Ci} и $\dot{\bar{a}}_{Ci}$ через измерения приращений кажущейся скорости относительно ССК на i -м и $i+1$ -м шагах. Подставив значение $\bar{a}_c(t)$ из первого уравнения (3.41) в равенство (3.39) и проинтегрировав вектор $\bar{a}_c(t)$ на интервалах времени от t_{i-1} до t_i и от t_i до t_{i+1} получим значения векторов приращений $\Delta \bar{V}_{Ci}$ и $\Delta \bar{V}_{Ci+1}$, измеряемых БИНС:

$$\Delta \bar{V}_{Ci} = \bar{a}_{Ci} h - \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_{Ci} h^2 + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_{Ci} h^3; \quad \Delta \bar{V}_{Ci+1} = \bar{a}_{Ci} h + \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_{Ci} h^2 + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_{Ci} h^3. \tag{3.45}$$

Сложив первое и второе равенство (3.45) и вычтя первое равенство из второго, получим значения векторов \bar{a}_{Ci} и $\dot{\bar{a}}_{Ci}$:

$$\bar{a}_{Ci} h = \frac{\Delta \bar{V}_{Ci+1} + \Delta \bar{V}_{Ci}}{2} - \frac{1}{6} \ddot{a}_{Ci} h^3; \quad \dot{\bar{a}}_{Ci} h^2 = \Delta \bar{V}_{Ci+1} - \Delta \bar{V}_{Ci}. \quad (3.46)$$

Подставив значения векторов \bar{a}_{Ci} и $\dot{\bar{a}}_C$ через измерения приращений кажущейся скорости $\Delta \bar{V}_{Ci}$ и $\Delta \bar{V}_{Ci+1}$ из (3.46), и значение матриц Ω_i через измерения φ_i и φ_{i+1} из равенства (3.32), получим рекуррентный алгоритм формирования вектора $\Delta \bar{V}_{Hi+1}$ $i+1$ -м шаге через его значение на i -м шаге и измерения БИНС на i -м и $i+1$ -м шагах:

$$\Delta \bar{V}_{Hi+1} = \Delta \bar{V}_{Hi} + A_{Hi-Ci}^T \left[\Delta \bar{V}_{Ci+1} - \Delta \bar{V}_{Ci} - \frac{(\varphi_i + \varphi_{i+1})(\Delta \bar{V}_{Ci+1} + \Delta \bar{V}_{Ci})}{4} \right] \quad (3.47)$$

Матрица A_{Hi-Ci} в алгоритме (3.47) формируется по алгоритму (3.35).

Просуммировав значения векторов приращений $\Delta \bar{V}_{Hi}$ на малых тактах БИНС h от 1 до k , получим значение приращения вектора кажущейся скорости за время большого такта Δt интегрирования уравнений движения КА:

$$\Delta \bar{V}_H = \sum_{i=1}^K \Delta \bar{V}_{Hi} \quad (3.48)$$

3.6 Синхронизация измерений БИНС с измерениями аппаратуры спутниковой навигации (АСН)

Выше, при выводе алгоритмов прогноза вектора состояния (3.29), предполагалось, что измерения БИНС выполняются синхронно с тактами прогноза Δt , хотя и с более мелким шагом h . То есть, такт Δt , включает точно k тактов h , при этом начало первого такта измерений БИНС внутри такта Δt строго совпадает с началом такта прогноза. Такая ситуация реализуется, например, если прогноз орбиты КА и обработка результатов измерений БИНС выполняются в ЦВМ КА. При этом прогноз орбиты КА выполняется на моменты целой секунды времени ЦВМ, а измерения БИНС выполняются с более высокой частотой, но синхронно с временем ЦВМ.

В некоторых случаях прогнозирование орбиты и обработка измерений датчиков БИНС может выполняться в разных вычислителях. При этом в каждом из вычислителей соответствующая задача решается во времени соответствующего вычислителя, а это время физически может быть не синхронизировано. Например, на МКС задача высокоточного прогноза орбиты решается в аппаратуре спутниковой навигации АСН-М. Вычислитель АСН выполняет интегрирование уравнений движения КА с тактом 1 сек внутренних часов АСН. Обработка измерений БИНС выполняется в БВС МКС с тактом 0,2 сек внутренних часов БВС. Поэтому будем предполагать, что матрица A_{II-C} и вектор $\Delta \bar{V}_{II}$ в ЦВМ формируются на момент t_i с малым шагом h , а интегрирование уравнений движения выполняется в АСН с большим шагом Δt . В шаг Δt входит $\sim k$ шагов h . Но так как часы ЦВМ и АСН не синхронизированы, через некоторое число шагов Δt на одном шаге Δt может быть $k+1$ или $k-1$ шаг h . Будем предполагать, что в ЦВМ из АСН периодически поступает информация о сдвиге часов ЦВМ τ_C .

и АСН τ_A относительно системного времени с привязкой к системному времени, а также значение дрейфа часов ЦВМ v_C и часов АСН v_A . Обмен информацией между ЦВМ и АСН в принципе мог быть построен с частотой $\frac{1}{h}$. То-есть, после каждого короткого такта h

информация от A_{II-C} и $\Delta\bar{V}_H$ после ее формирования в ЦВМ могла бы передаваться в АСН для реализации интегрирования уравнений движения. Однако в этом случае из ЦВМ в АСН требовалось бы передавать слишком большой поток информации. Реально обмен между АСН и ЦВМ устроен с частотой 1 Гц часов АСН, то-есть, с частотой измерений АСН. Поэтому в ЦВМ в течение k малых тактов h формируется матрица A_{II-C} по алгоритму (3.35) и вектор $\Delta\bar{V}_H$ по алгоритму (3.47) и (3.48) и только после этого значение этой матрицы и вектора с их привязкой к времени ЦВМ передаются в АСН с частотой 1 Гц. Момент передачи должен выбираться по следующему алгоритму. После завершения каждого малого такта h рассчитывается время часов АСН, соответствующее моменту завершения такта h ЦВМ. Если дробная часть секунды этого времени меньше или равна величине такта h , а число тактов m от начала суммирования векторов $\Delta\bar{V}_H$ (в соответствии с алгоритмом (3.48) больше 3, то осуществляется передача вектора $\Delta\bar{V}_H$ с привязкой к часам ЦВМ, а также выполняется обнуление текущего числа тактов накопления m и накопленного вектора $\Delta\bar{V}_H$. В результате в АСН от ЦВМ с интервалами, близкими к Δt передаются значения вектора приращения кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{i+1}$ и значение времени t_{i+1C} в шкале ЦВМ, на которое этот вектор рассчитан.

В АСН, с учетом знания смещения часов АСН τ_A и ЦВМ τ_C относительно системного времени на какой-то момент времени T_A и дрейфа часов АСН v_A и ЦВМ v_C рассчитывается момент времени t_{i+1A} , в шкале АСН, соответствующий моменту измерения t_{i+1C} . Расчет приращения вектора $\Delta\bar{X}_{i+1}$ на $i+1$ -м такте АСН будем делать по алгоритму (3.16). Для этого по измерениям приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_I$ необходимо определить вектор кажущегося ускорения \bar{a}_H на момент t_i и второй производной этого ускорения $\ddot{\bar{a}}_H$ на этот же момент времени.

Для вычисления этих векторов необходимо использовать три измерения приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{Hi-1}, \Delta\bar{V}_{Hi}, \Delta\bar{V}_{Hi+1}$, выполненные соответственно в моменты времени $t_{Ai-1}, t_{Ai}, t_{Ai+1}$ шкалы АСН.

Пусть t – время от момента t_i . Тогда приращение кажущейся скорости на интервале от t_0 до t_k определяется по формуле:

$$\Delta\bar{V}_I = \int_{t_0}^{t_k} \left(\bar{a}_H + \dot{\bar{a}}_H t + \frac{1}{2} \ddot{\bar{a}}_H t^2 \right) dt = \bar{a}_H (t_k - t_0) + \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_H (t_k^2 - t_0^2) + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_H (t_k^3 - t_0^3) \quad (3.49)$$

Введем обозначения:

$$\tau_{i+1} = t_{Ai+1} - t_i; \quad \tau_I = t_{Ai} - t_i; \quad \tau_{i-1} = t_{Ai-1} - t_i; \quad \tau_{i-2} = t_{Ai-2} - t_i. \quad (3.50)$$

Тогда для значений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{Hi-1}, \Delta\bar{V}_{Hi}, \Delta\bar{V}_{Hi+1}$ можно составить три уравнения:

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{V}_{Hi-1} &= \bar{a}_H (\tau_{i-1} - \tau_{i-2}) + \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_H (\tau_{i-1}^2 - \tau_{i-2}^2) + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_H (\tau_{i-1}^3 - \tau_{i-2}^3); \\
 \Delta \bar{V}_{Hi} &= \bar{a}_H (\tau_i - \tau_{i-1}) + \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_H (\tau_i^2 - \tau_{i-1}^2) + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_H (\tau_i^3 - \tau_{i-1}^3); \\
 \Delta \bar{V}_{Hi+1} &= \bar{a}_H (\tau_{i+1} - \tau_i) + \frac{1}{2} \dot{\bar{a}}_H (\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) + \frac{1}{6} \ddot{\bar{a}}_H (\tau_{i+1}^3 - \tau_i^3).
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Неизвестными в этой системе уравнений являются векторы $\bar{a}_H, \dot{\bar{a}}_H, \ddot{\bar{a}}_H$. Составим матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} \tau_{i-1} - \tau_{i-2} & \frac{1}{2}(\tau_{i-1}^2 - \tau_{i-2}^2) & \frac{1}{6}(\tau_{i-1}^3 - \tau_{i-2}^3) \\ \tau_i - \tau_{i-1} & \frac{1}{2}(\tau_i^2 - \tau_{i-1}^2) & \frac{1}{6}(\tau_i^3 - \tau_{i-1}^3) \\ \tau_{i+1} - \tau_i & \frac{1}{2}(\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) & \frac{1}{6}(\tau_{i+1}^3 - \tau_i^3) \end{pmatrix}; \tag{3.52}$$

$$\Delta V = (\Delta \bar{V}_{i-1}, \Delta \bar{V}_i, \Delta \bar{V}_{i+1});$$

$$A = (\bar{a}_H \dot{\bar{a}}_H \ddot{\bar{a}}_H).$$

Тогда система уравнений может быть представлена в виде:

$$\Delta V = A H^T \tag{3.53}$$

Откуда

$$A = \Delta V H^{-1 T} \tag{3.54}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда интегрирование уравнений движения КА и измерений БИНС выполняются синхронно в одном вычислителе. Тогда $v=0$ и $\tau=0$. Пусть также шаг интегрирования уравнения движения Δt равен 1 сек. Тогда матрица H будет равна:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Подставив значение матрицы H^{-1} из равенства (3.43) в равенство (3.42), получим значения векторов $\bar{a}_I, \dot{\bar{a}}_I$ и $\ddot{\bar{a}}_I$ для i -го момента времени через значения измеренных векторов $\Delta\bar{V}_i, \Delta\bar{V}_{i-1}, \Delta\bar{V}_{i+1}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_I &= -\frac{1}{6}\Delta\bar{V}_{i-1} + \frac{5}{6}\Delta\bar{V}_i + \frac{1}{3}\Delta\bar{V}_{i+1}; \\ \dot{\bar{a}}_I &= -\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i+1}; \\ \ddot{\bar{a}}_I &= \Delta\bar{V}_{i-1} - 2\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Подставив значения векторов \bar{a}_I и $\ddot{\bar{a}}_I$ в алгоритм формирования приращения вектора координат $\Delta\bar{X}_{i+1}$ на $i+1$ -м шаге (3.16), после преобразований получим:

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_{\Gamma_i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\Gamma_i}\Delta t^4 + \frac{5\Delta\bar{V}_{i+1} + 8\Delta\bar{V}_i - \Delta\bar{V}_{i-1}}{12}\Delta t. \quad (3.57)$$

Полученный результат совпадает с алгоритмом (3.27), определяющим приращение вектора координат при синхронном интегрировании уравнений движения КА по измерениям БИНС, рассмотренным в разделе 3.4.

3.7 Рекуррентный алгоритм интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС

Алгоритм формирования вектора приращений координат (3.16) с учетом измерений БИНС обеспечивает прогноз движения КА в приращениях относительно ИСК БИНС. Для нас представляет интерес прогноз движения КА относительно ГСК или ИСК $j2000$. Рассмотрим интегрирование уравнений движения КА в ГСК. Будем считать, что матрица перехода из ИСК БИНС в ГСК формируется БИНС и известна в момент времени t_i . Умножив левую и правую части равенства (3.16) на матрицу A_{II-Gi} , получим:

$$A_{II-Gi}(\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i) = A_{II-Gi}(\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}) + A_{II-Gi}\bar{a}_i, \quad (3.58)$$

Вектор \bar{a} в правой части равенства (3.58) имеет вид:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{\Gamma i} \Delta t^2 + \bar{a}_{IIi} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma i} \Delta t^4 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{IIi} \Delta t^4. \quad (3.59)$$

Выразим матрицу A_{II-Gi} через ее значения в моменты t_{i+1} и t_{i-1} :

$$\begin{aligned} A_{II-Gi} &= \left(E - \Omega + \frac{1}{2} \Omega^2 \right) A_{II-Gi+1} \\ A_{II-Gi} &= \left(E + \Omega + \frac{1}{2} \Omega^2 \right) A_{II-Gi-1}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta t$ – матрица поворота Земли за такт Δt ;

ω_z – скорость вращения Земли.

Будем обозначать векторы координат КА в ГСК через \bar{X}_{Gi} . Тогда

$$\bar{X}_{Gi} = A_{H-Gi} \bar{X}_i. \quad (3.61)$$

Подставив значения матрицы A_{H-Gi} из равенства (3.60) в равенство (3.58), получим уравнения для определения приращения вектора координат $\Delta\bar{X}_{Gi+1}$ на $i+1$ -й шаг через его значения на i -м шаге:

$$\left(E - \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \bar{X}_{Gi+1} - \bar{X}_{Gi} = \bar{X}_{Gi} - \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \bar{X}_{Gi-1} + A_{H-Gi} \bar{a}_i; \quad (3.62)$$

Откуда, с учетом малости скорости вращения Земли, после ряда преобразований получим:

$$\Delta\bar{X}_{Gi+1} = \Delta\bar{X}_{Gi} + \left(\Omega - \frac{1}{2}\Omega^2 \right) (\Delta\bar{X}_{Gi+1} + \bar{X}_{Gi}) - \left(\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) (\bar{X}_{Gi} - \Delta\bar{X}_{Gi}) + A_{H-Gi} \bar{a}. \quad (3.63)$$

Из равенства (3.63) получим:

$$\Delta\bar{X}_{Gi+1} = \Delta\bar{X}_{Gi} + \Omega (\Delta\bar{X}_{Gi+1} + \Delta\bar{X}_{Gi}) - \Omega^2 \bar{X}_{Gi} + A_{H-Gi} \bar{a}. \quad (3.64)$$

Отсюда получим рекуррентный алгоритм интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС:

$$\Delta\bar{X}_{Gi+1} = \left(E + 2\Omega + \Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega^3 \right) \Delta\bar{X}_{Gi} - \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \Omega^2 \bar{X}_{Gi} + \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) A_{H-Gi} \bar{a}_i, \quad (3.65)$$

$$\bar{X}_{Gi+1} = \bar{X}_{Gi} + \Delta\bar{X}_{Gi+1}$$

Вектор \bar{a} в алгоритме (3.65) представляет собой сумму возмущающих векторов в соответствии с выражением (3.59), представленных в ИСК. Матрица A_{H-Gi} в правой части равенства (3.65) преобразует эти векторы в ГСК. Например, вектор гравитационных ускорений

\bar{a}_{Γ_i} , входящий в равенство (3.59), после умножения на матрицу A_{II-G_i} будет представлять собой вектор гравитационных ускорений относительно ГСК. Вектор второй производной гравитационных ускорений $\ddot{\bar{a}}_{\Gamma}$, также входящий в вектор \bar{a} , для околокруговых орбит может быть вычислен в соответствии с формулой (3.11):

$$\ddot{\bar{a}}_{\Gamma} = -\omega_0^2 \bar{a}_{\Gamma}, \quad (3.66)$$

где \bar{a}_{Γ} – вектор гравитационных ускорений в ИСК.

После умножения вектора \bar{a} слева на матрицу A_{II-G} получим:

$$A_{II-G} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma} = -\omega_0^2 A_{II-G} \bar{a}_{\Gamma} \quad (3.67)$$

Вектор $A_{II-G} \bar{a}_{\Gamma}$ представляет собой вектор гравитационных ускорений относительно ГСК.

Тогда алгоритм (3.65) для околокруговой орбиты после пренебрежения малыми высокого порядка при отсутствии ускорений от двигателей и измерений БИНС примет вид:

$$\Delta \bar{X}_{G_{i+1}} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta \bar{X}_{G_i} - (E + \Omega) \Omega^2 \bar{X}_{G_i} + (E + \Omega) \left(1 - \frac{\omega_0^2}{12} \Delta t^2\right) \bar{a}_{G_i} \Delta t^2, \quad (3.68)$$

Если орбита не является околокруговой, то вектор $\ddot{\bar{a}}_{\Gamma}$ необходимо формировать по алгоритму (3.22). После умножения вектора $\ddot{\bar{a}}_{\Gamma}$ слева на матрицу A_{II-G} алгоритм (3.22) примет вид:

$$A_{II-G} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma} = \omega_0^2 \left(3 \frac{\dot{\bar{X}}_{G0}^2}{r^2} - 2\omega_0^2 - \frac{15\dot{r}^2}{r^2} \right) \bar{X}_G + 6\omega_0^2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\bar{X}}_{G0}, \quad (3.69)$$

где \bar{X}_G – вектор текущих координат в ГСК;

$\dot{\bar{X}}_{G0}$ – вектор полной скорости КА в проекциях на ГСК, равный $\dot{\bar{X}}_{G0} = \dot{\bar{X}}_G + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_G]$;

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}; \quad r = |\bar{X}_G|; \quad \dot{r} = \frac{\dot{\bar{X}}_G \bar{X}_G}{r};$$

$$\bar{a}_{ii} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^4 = \frac{\Delta \bar{V}_{i+1} + \Delta \bar{V}_i}{2} - \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{ii}$$

$$\ddot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^3 = \Delta \bar{V}_{i+1} - 2\Delta \bar{V}_i + \Delta \bar{V}_{i-1}$$

где $\dot{\bar{X}}_G$ – вектор скорости относительно ГСК.

Вектор скорости $\dot{\bar{X}}_G$ может быть выражен через приращение $\Delta \bar{X}_G$ в соответствии с формулой:

$$\dot{\bar{X}}_G = \Delta \bar{X}_G + 0.5 \bar{a}_{GR} \quad (3.70)$$

Заметим, что учет эллиптичности орбиты при вычислении вектора $\ddot{\bar{a}}_\Gamma$ по алгоритму (3.69) обеспечивает более точный прогноз орбиты даже для окколокруговых орбит. Так, на рис. 3.18, приведены графики ошибок прогноза орбиты МКС, выполненного по алгоритму (3.65) с расчетом вектора $\ddot{\bar{a}}_\Gamma$ по алгоритму (3.69).

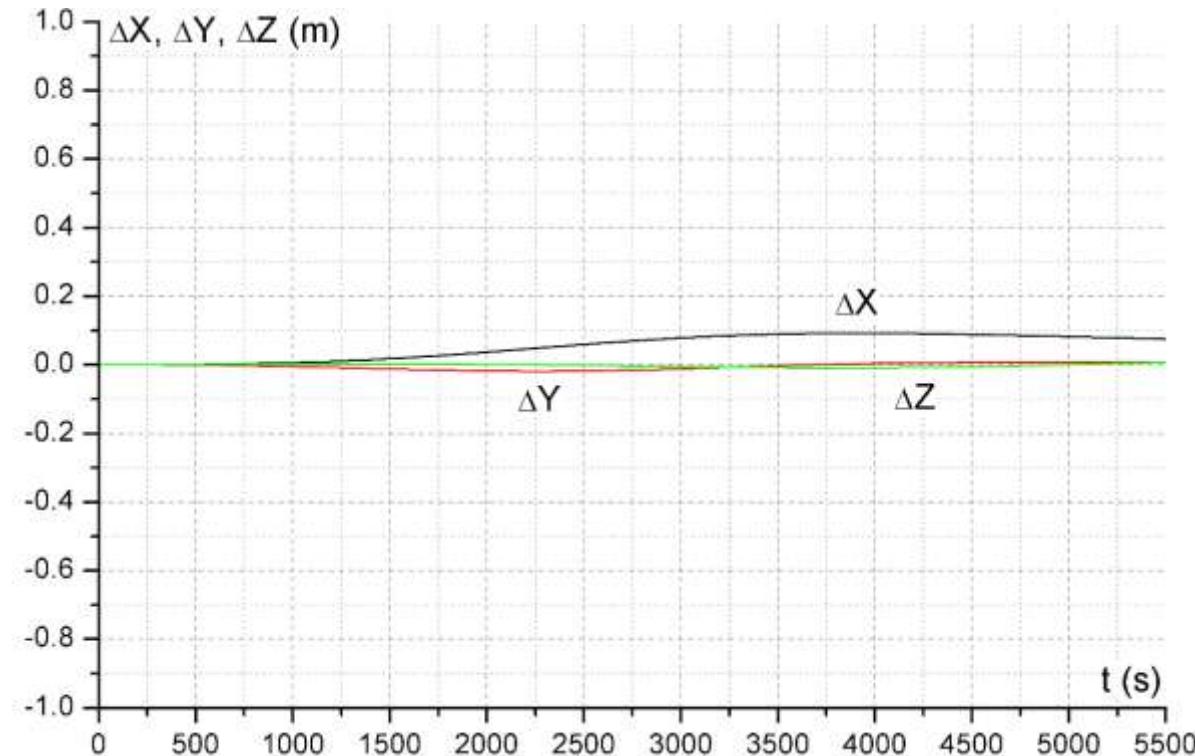


Рис. 3.18 Ошибки прогноза орбиты МКС в приращениях (шаг 1 с).

Из графиков видно, что ошибки прогноза на виток по осям ΔX , ΔY , ΔZ ГСК не превышают 7 см. Аналогичные графики ошибок прогноза для этого же участка орбиты МКС с расчетом вектора \ddot{a} , выполненного по алгоритму (3.67), приведены на рис. 3.12. Там ошибки прогноза на виток составили 60 см, то есть, учет эллиптичности орбиты по алгоритму (3.69) даже для орбиты МКС, эксцентриситет которой имеет порядок 0.01, обеспечил повышение точности прогноза почти в 10 раз.

На рис. 3.19 приведены графики ошибок прогноза орбиты МКС для трехсуточного интервала относительно ОСК. Из графиков видно, что за трое суток ошибка прогноза по продольной дальности составила ~ 30 м, по высоте и боковой дальности ~ 1 м.

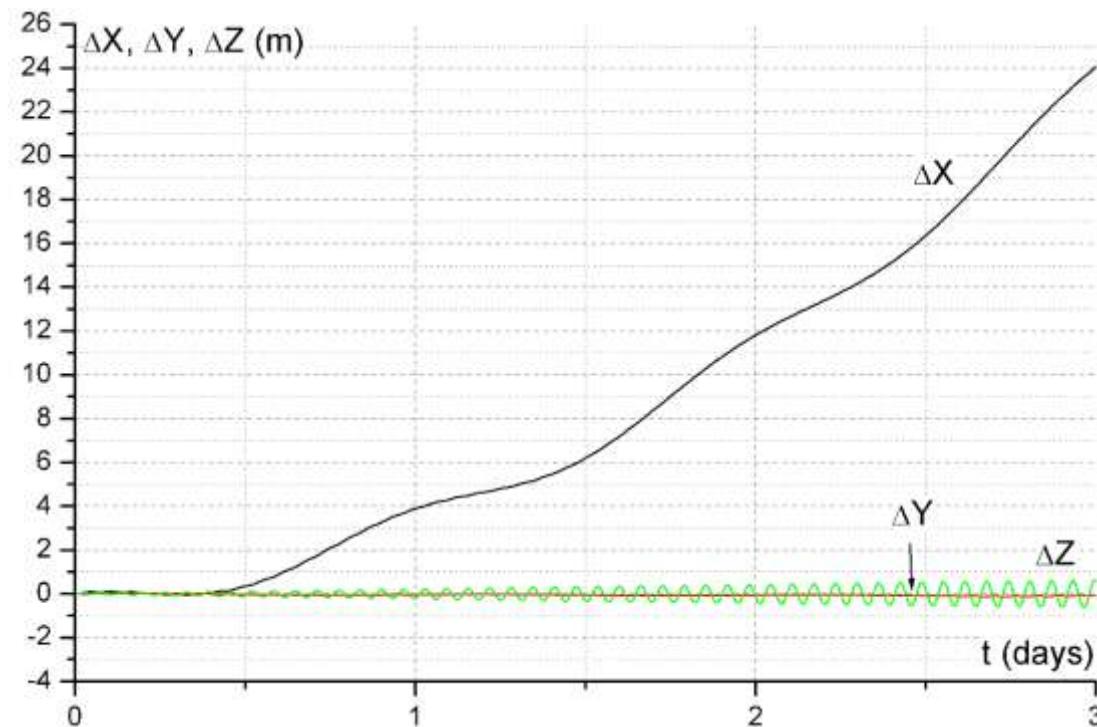


Рис. 3.19 Графики ошибок прогноза орбиты МКС для трехсуточного интервала относительно ОСК

3.8 Неформальное описание алгоритмов интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС

Предыдущие разделы были посвящены выводу алгоритмов интегрирования уравнений движения КА с учетом БИНС и анализу точности этих алгоритмов. В принципе, информации, содержащейся в этих разделах, достаточно для разработки программного обеспечения (ПО), реализующего эти алгоритмы. Однако там не указана последовательность выполнения действий и содержится излишняя информация, вносящая определенные трудности для программирования, требующего задания точного и однозначного решения. Для обеспечения такой однозначности и обеспечения работы програмиста процесс создания ПО включает этап разработки так называемого неформального описания программы, включающего:

- краткое словесное описание, содержащее суть задачи, ее цель и методы решения;
- описание интерфейса программы;
- описание используемых структур и других программных функций;
- описание алгоритма решения задачи;
- описание методов верификации разработанного ПО.

В качестве примера неформального описания ПО рассмотрим неформальное описание алгоритмов интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС.

3.8.1 Назначение ПО и методы решения задачи

Разрабатываемое ПО предназначено для интегрирования уравнений движения КА. Интервал интегрирования – 1 шаг (Δt), то есть ПО обеспечивает по вектору состояния на текущем i -м шаге формирование вектора состояния КА на следующем $i+1$ -м шаге. Вектором состояния КА в данном ПО является текущий вектор координат КА в ГСК \bar{X}_i и вектор приращения координат $\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}$. Предполагается, что вектор гравитационных ускорений $\bar{a}_{\Gamma_i}(\bar{X}_i)$ известен. Его расчет и формирование выполняют другие программы. Предполагается также, что инерциальные ускорения КА измеряются датчиками БИНС. Управление процессом измерений датчиков БИНС и обработку этих измерений реализует ЦВМ КА с шагом h . Циклограмма измерений БИНС реализуется в шкале времени ЦВМ. ЦВМ обеспечивает также формирование матрицы перехода от ИСК БИНС в ГСК. Интегрирование уравнений движения КА обеспечивает вычислитель АСН с шагом Δt . Будем предполагать, что $\Delta t=1$ с в шкале внутренних часов АСН, а k шагов измерений БИНС h примерно равны 1с в шкале часов ЦВМ. В течение этой секунды БИНС принимает и обрабатывает их по рассмотренному выше алгоритму. По завершении секунды БИНС формирует вектор приращения кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{H_{i+1}}$ относительно ИСК БИНС на момент, близкий к завершению $i+1$ -й секунды часов АСН. Задача БИНС решается независимо в ЦВМ, а матрица $A_{H_i-H_i}$ и вектор $\Delta\bar{V}_{H_{i+1}}$ передаются в АСН в виде информационных сообщений. Эти матрица и вектор являются входной информацией для задачи интегрирования уравнений движения КА, решаемой в АСН.

Входной информацией для данной программы также являются дрейф внутренних часов АСН v_{ACN} , дрейф часов ЦВМ v_{CVM} , смещение часов ЦВМ τ_{CVM} и часов АСН τ_{ACN} относительно

системного времени в i -й момент времени t , формируемые другими программами ПО АСН. На выходе программы должны быть сформированы векторы $\Delta\bar{X}_{i+1}$ и \bar{X}_{i+1} относительно ГСК для момента $i+1$ целой секунды внутренних часов АСН. С учетом независимости работы БИНС и АСН, программы, относящиеся к работе ПО БИНС и ПО АСН могут быть оформлены как отдельные программные функции. Назовем их соответственно f_BINS (функция обработки измерений БИНС) и f_INTEGR (функция интегрирования уравнений движения КА).

3.8.2 Описание интерфейса программы

Программа использует ряд констант, которые, как правило, должны быть глобальными для всего ПО АСН. Это ω_z – угловая скорость вращения Земли, μ – гравитационная постоянная Земли. Не глобальными константами могут быть Δt – шаг интегрирования уравнений движения в АСН и h – шаг обработки измерений БИНС в ЦВМ.

Интерфейсные параметры программ могут быть входными (I), выходными (O) и входными-выходными (I/O). Входные параметры используются программой, но не меняются внутри нее. Выходные – формируются программой и используются другими программами, но не используются данной программой на следующих шагах. Входные - выходные параметры формируются программой, могут использоваться другими программами и используются данной программой на следующем шаге.

Для всех интерфейсных параметров в неформальном описании программы должны быть приведены: размер, тип и размерность. Такое описание интерфейсных параметров для функций f_BINS и f_INTEGR приведено соответственно в Таблицах 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

Идентификатор	Название	I/O	Size	type	unit
<i>n</i>	Номер текущего такта БИНС внутри секунды	I/O	1	short	—
φ_{mes}	Вектор измерений приращений угловой скорости в БИНС на такте	I	3	float	rad/s
<i>prev_matr_I_B</i>	Матрица перехода ИСК-БИНС в ССК на предыдущем такте БИНС	I/O	3×3	double	—
<i>prev_delta_V_mes</i>	Измеренное значение приращения кажущейся скорости на предыдущем такте БИНС.	I/O	3	double	m/s
<i>delta_V_mes</i>	Измеренное значение приращений кажущейся скорости на <i>n</i> -м такте БИНС.	I	3	double	m/s
<i>delta_V_I_n</i>	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС за предыдущие <i>n</i> -1 такты.	I/O	3	double	m/s
<i>delta_V_I_mes</i>	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС за такт Δt	0	3	double	m/s
<i>t_OCS_mes</i>	Время формирования <i>delta_V_I_mes</i>	0	1	double	s
<i>tau_OCS</i>	Смещение часов ЦВМ относительно системного времени.	I	1	double	s
<i>drift_OCS</i>	Дрейф часов ЦВМ относительно системного времени.	I	1	double	s/s
<i>t_tau</i>	Время в шкале системного времени на которое рассчитано смещение и дрейф часов ЦВМ.	I	1	double	s
<i>t_OCS</i>	Время в шкале ЦВМ завершения <i>n</i> -го такта БИНС.	I	1	double	s

Таблица 3.2

Идентификатор	Название	I/O	Size	type	unit
<i>t ASN</i>	Текущий момент времени в шкале АСН	I	1	double	s
<i>pos_vect</i>	Вектор координат КА на текущем шаге	I/O	3	double	m
<i>delta_Pos_vect</i>	Вектор приращения координат КА на текущем шаге	I/O	3	double	m
<i>acs_vect</i>	Вектор гравитационного ускорения на текущем шаге в ГСК	I	3	double	m/s^2
<i>delta_V_I_mes</i>	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС на <i>i+1</i> -м такте БИНС	I	3	double	m/s
<i>t_OCS_mes</i>	Время завершения <i>i+1</i> -го такта БИНС	I	1	double	s
<i>delta_V_I_mes1</i>	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС на <i>i</i> -м такте БИНС	I/O	3	double	m/s
<i>t_OCS_mes1</i>	Время завершения <i>i</i> -го такта БИНС	I/O	1	double	s
<i>delta_V_I_mes2</i>	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС на <i>i</i> -м такте БИНС	I/O	3	double	m/s
<i>t_OCS_mes2</i>	Время завершения <i>i-1</i> -го такта БИНС	I/O	1	double	s
<i>t_OCS_mes3</i>	Время завершения <i>i-2</i> -го такта БИНС	I/O	1	double	s
<i>matr_I_G</i>	Матрица перехода от ИСК БИНС в ГСК на текущем шаге	I	3×3	double	-
<i>tau_OCS</i>	Смещение часов ЦВМ относительно системного времени.	I	1	double	s
<i>drift_OCS</i>	Дрейф часов ЦВМ относительно системного времени	I	1	double	s/s
<i>t_tau_OCS</i>	Время в шкале системного времени, на которое рассчитано смещение и дрейф часов ЦВМ	I	1	double	s
<i>tau ASN</i>	Смещение часов АСН относительно системного времени	I	1	double	s
<i>drift ASN</i>	Дрейф часов АСН относительно системного времени.	I	1	double	s/s
<i>t_tau ASN</i>	Время в шкале системного времени, на которое рассчитано смещение и дрейф часов АСН.	I	1	double	s

Из приведённых таблиц 3.1 и 3.2 следует, что интерфейсы рассматриваемых программных функций не содержат структур. Соответственно, в данном неформальном описании ПО отсутствует раздел с описанием интерфейсных структур. Ниже приводится описание алгоритмов функций f_BINS и f_INTEGR .

3.8.3 Алгоритм функции *f_BINS*

Данная программная функция входит в состав ПО ЦВМ и запускается на каждом такте *h* БИНС после выведения измерений БИНС φ_{mes} и δV_{mes} . В момент первого запуска функции должны быть обусловлены все интерфейсные параметры типа I/O.

Программа реализуется в следующей последовательности.

Начало.

Формирование номера текущего такта БИНС.

$$n = n+1$$

Формирование матрицы приращений углов БИНС на *n*-м шаге:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{mes_z} & -\varphi_{mes_y} \\ -\varphi_{mes_z} & 0 & \varphi_{mes_x} \\ \varphi_{mes_y} & -\varphi_{mes_x} & 0 \end{pmatrix},$$

где φ_{mes_x} , φ_{mes_y} , φ_{mes_z} – компоненты вектора φ_{mes} .

Формирование вектора приращения $\Delta \bar{V}_H$ за *n* тактов:

$$\Delta \bar{V}_H = \Delta \bar{V}_H + A_{H-C}^T \left[\Delta \bar{V}_{C_{i+1}} - \Delta \bar{V}_{C_i} - \frac{(\varphi_{i+1} + \varphi_i)(\Delta \bar{V}_{C_{i+1}} + \Delta \bar{V}_{C_i})}{4} \right],$$

$$A_{H-C} = prev_matr_I_B;$$

$$\Delta \bar{V}_{C_{i+1}} = delta_V_mes;$$

где

$$\Delta \bar{V}_{C_i} = prev_delta_V_mes;$$

$$\Delta \bar{V}_H = delta_V_I_n.$$

Переприсвоение значения вектора приращения:

prev_delta_ \bar{V} *_mes:=delta_V_mes*

Формирование матрицы A_{II-C} на n -й шаг:

$$A_{II-C} = \left[E + \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 \right] A_{II-C},$$

где $A_{II-C} = prev_matr_I_B$

Формирование времени завершения n -го такта БИНС в шкале системного времени и дробной части этого времени.

$t = t_{ocs} + tau_OCS + drift_OCS (t_{ocs} + tau_OCS - t_{tau})$

τ =дробная часть (t).

Формирование вектора приращения кажущейся скорости, передаваемого в АСН.

Если $\tau \leq 1.1$ h и $n > 3$, то

$delta_V_I_mes := \Delta \bar{V}_n;$

$\Delta \bar{V}_n := 0$

$t_{ocs_mes} := t_{ocs};$

$n = 0$

Конец.

Сформированный в результате работы программы вектор $delta_V_I_mes$ и соответствующее время t_{ocs_mes} в шкале ЦВМ передаются в АСН для расчета возмущающих ускорений \bar{a}_n в уравнении движения КА.

Данная функция ПО ЦВМ вызывается на каждом такте h и раз в секунду формирует вектор $\Delta \bar{V}_n$ с соответствующей привязкой к времени, который передаётся в АСН через

интерфейс между ЦВМ и АСН, и является входной информацией для функции f_INTEGR . Кроме того, из ЦВМ в АСН передаётся матрица A_{II-G} , формируемая в ЦВМ не рассматриваемыми здесь другими программами.

3.8.4 Алгоритм функции f_INTEGR

Данная программная функция входит в состав ПО АСН и запускается на каждом такте Δt работы АСН после получения данных от БИНС $\delta_V, I_{mes}, matr_I_G$ и t_OCS_{mes} .

Первый запуск программы выполняется после получения измерений БИНС минимум на 4-х тактах Δt АСН.

Программа реализуется в следующей последовательности.

Начало.

Формируем вектор $\ddot{\vec{a}}_{\Gamma_i}$ относительно ГСК в соответствии с алгоритмами (3.22):

$$r = |pos_vect|;$$

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3};$$

$$\dot{\vec{X}} = \delta_{pos_vect} + [\bar{\omega}_3 \times pos_vect] + 0.5 \cdot acs_vect,$$

где $\bar{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$, ω_z – скорость вращения Земли;

$$\dot{r} = \frac{(\dot{\vec{X}}) \cdot (\delta_{pos_vect})}{r};$$

$$\ddot{\vec{a}}_{\Gamma} = \omega_0^2 \left[3 \frac{\left(\dot{\vec{X}} \right)^2}{r^2} - 2\omega_0^2 - \frac{15\dot{r}^2}{r^2} \right] (pos_vect) + 6\omega_0^2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\vec{X}}.$$

Вычислим в системной шкале время окончания i -го такта t_i , заданного в шкале АЧН (t_ASN):

$$t_i = t_ASN + tau_ASN + drift_ASN (t_ASN + tau_ASN - t_tau_ASN)$$

Вычислим времена τ_{i+1} , τ_i , τ_{i-1} , τ_{i-2} формирования векторов приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{Hi+1}, \Delta\bar{V}_{Hi}, \Delta\bar{V}_{Hi-1}, \Delta\bar{V}_{Hi-2}$ в системной шкале времени относительно времени окончания i такта t_i через их значения в шкале времени ЦВМ:

$$\tau_{i+1} = t_OCS_mes + tau_OCS + drift_OCS (t_OCS_mes + tau_OCS - t_tau_OCS) - t_i;$$

$$\tau_i = t_OCS_mes1 + tau_OCS + drift_OCS (t_OCS_mes1 + tau_OCS - t_tau_OCS) - t_i;$$

$$\tau_{i-1} = t_OCS_mes2 + tau_OCS + drift_OCS (t_OCS_mes2 + tau_OCS - t_tau_OCS) - t_i;$$

$$\tau_{i-2} = t_OCS_mes3 + tau_OCS + drift_OCS (t_OCS_mes3 + tau_OCS - t_tau_OCS) - t_i;$$

Формируем матрицы H и ΔV :

$$H = \begin{pmatrix} \tau_{i-1} - \tau_{i-2} & \frac{1}{2}(\tau_{i-1}^2 - \tau_{i-2}^2) & \frac{1}{6}(\tau_{i-1}^3 - \tau_{i-2}^3) \\ \tau_i - \tau_{i-1} & \frac{1}{2}(\tau_i^2 - \tau_{i-1}^2) & \frac{1}{6}(\tau_i^3 - \tau_{i-1}^3) \\ \tau_{i+1} - \tau_i & \frac{1}{2}(\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2) & \frac{1}{6}(\tau_{i+1}^3 - \tau_i^3) \end{pmatrix}$$

$$\Delta V = (\Delta \bar{V}_{i-1}, \Delta \bar{V}_i, \Delta \bar{V}_{i+1}),$$

где

$$\Delta \bar{V}_{i+1} = \text{delta_V_I_mes},$$

$$\Delta \bar{V}_i = \text{delta_V_I_mes1},$$

$$\Delta \bar{V}_{i-1} = \text{delta_V_I_mes2}.$$

Вычислим матрицу A

$$A = \Delta V H^{-1T},$$

где $A = (\bar{a}_H, \dot{\bar{a}}_H, \ddot{\bar{a}}_H).$

Формируем шаг интегрирования:

$$\Delta t = \Delta t + \text{drift ASN}$$

Формируем вектор:

$$\bar{a} = \text{acs_vect} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{a}_r \Delta t^4 + \text{matr_I_G} \left(\bar{a}_H \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_H \Delta t^4 \right)$$

Формируем матрицу вращения Земли:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

$$\Delta \bar{X}_{Gi} = \text{delta_pos_vect};$$

$$\bar{X}_{Gi} = \text{pos_vect}.$$

Формируем вектор приращения координат и вектор координат на следующий шаг:

$$\text{delta_pos_vect} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta \bar{X}_{Gi} - (E + \Omega) \Omega^2 \bar{X}_{Gi} + (E + \Omega) \bar{a};$$

$$\text{pos_vect} = \bar{X}_{Gi} + \text{delta_pos_vect}.$$

Переприсваиваем значения векторов приращений кажущейся скорости и соответствующих им времен для предыдущих шагов:

$$t_OCS_mes3 := t_OCS_mes2;$$

$$t_OCS_mes2 := t_OCS_mes1;$$

$$t_OCS_mes1 := t_OCS_mes;$$

$$\text{delta_V_I_mes2} := \text{delta_V_I_mes1};$$

$$\text{delta_V_I_mes1} := \text{delta_V_I_mes}.$$

Конец.

3.8.5 Методы верификации программных функций f_BINS и f_INTEGR

Верификация программного обеспечения является важным этапом разработки ПО. Часто этот этап является и наиболее сложным, когда неизвестен результат работы ПО. Удобно верификацию ПО проводить путем сравнения выходных параметров, формируемых этим ПО с аналогичными параметрами, формируемыми другими, уже верифицированными программами.

Так рассмотренные функции используются в бортовом ПО, обеспечивая прогноз движения КА в приращениях с учетом измерений БИНС. В процессе разработки этого ПО обычно параллельно разрабатывается модель реального движения КА. Эта модель разрабатывается независимо от разработки бортового ПО, а алгоритмы этой модели реализуют другие методы моделирования. В этом случае верификацию разрабатываемого ПО удобно проводить путем сравнения выходных параметров с соответствующими параметрами модели. Их совпадение или близость являются одновременным подтверждением правильности разрабатываемого ПО и ПО модели.

Рассматриваемое нами программное обеспечение разрабатывалось для решения задачи спуска, в которой бортовое ПО формирует оценку траектории КА по измерениям БИНС и прогноз его движения в гравитационном поле. Параллельно была разработана модель движения КА, в которой моделировалось движение спускаемого аппарата с учетом воздействия аэродинамических и гравитационных сил. Интегрирование уравнений движения выполнялось методом Рунге-Кутта 4-го порядка. При этом задачей бортового ПО являлось формирование оценки траектории спускаемого аппарата, близкой к моделируемой реальной траектории. Результаты сравнения формируемой оценки траектории с учетом различных возмущающих факторов с реальной моделируемой траекторией приведены ниже в Главе 10.

Анализ этих результатов подтвердил правильность функционирования рассмотренных в настоящем разделе программных функций f_BINS и f_INTEGR .

Глава 4 Определение орбит. Глобальные спутниковые навигационные системы ГЛОНАСС и GPS, их основные характеристики

4.1 Определение орбит КА по наземным радиоизмерениям

До развёртывания глобальных спутниковых навигационных систем (ГСНС) *GPS* и ГЛОНАСС наиболее распространенным методом определения орбиты КА был метод траекторных радиоизмерений, для реализации которого в ряде наземных измерительных пунктов (НИП) устанавливалась специальная радиоаппаратура, которая при пролете КА над соответствующим НИПом излучала в направлении на КА радиосигнал определенной частоты. Этот сигнал с помощью определенной аппаратуры принимался на КА, усиливается и транслировался на Землю. На Земле после приема обратного сигнала определялась задержка между моментом приема и моментом излучения сигнала, а также изменение частоты несущего сигнала. Задержка принятого сигнала соответствовала двойной дальности (деленной на скорость света c) от наземного излучателя до КА, а изменение частоты – двойной проекции скорости КА в направлении на излучатель.

Описанную схему измерений иллюстрирует рис. 4.1.

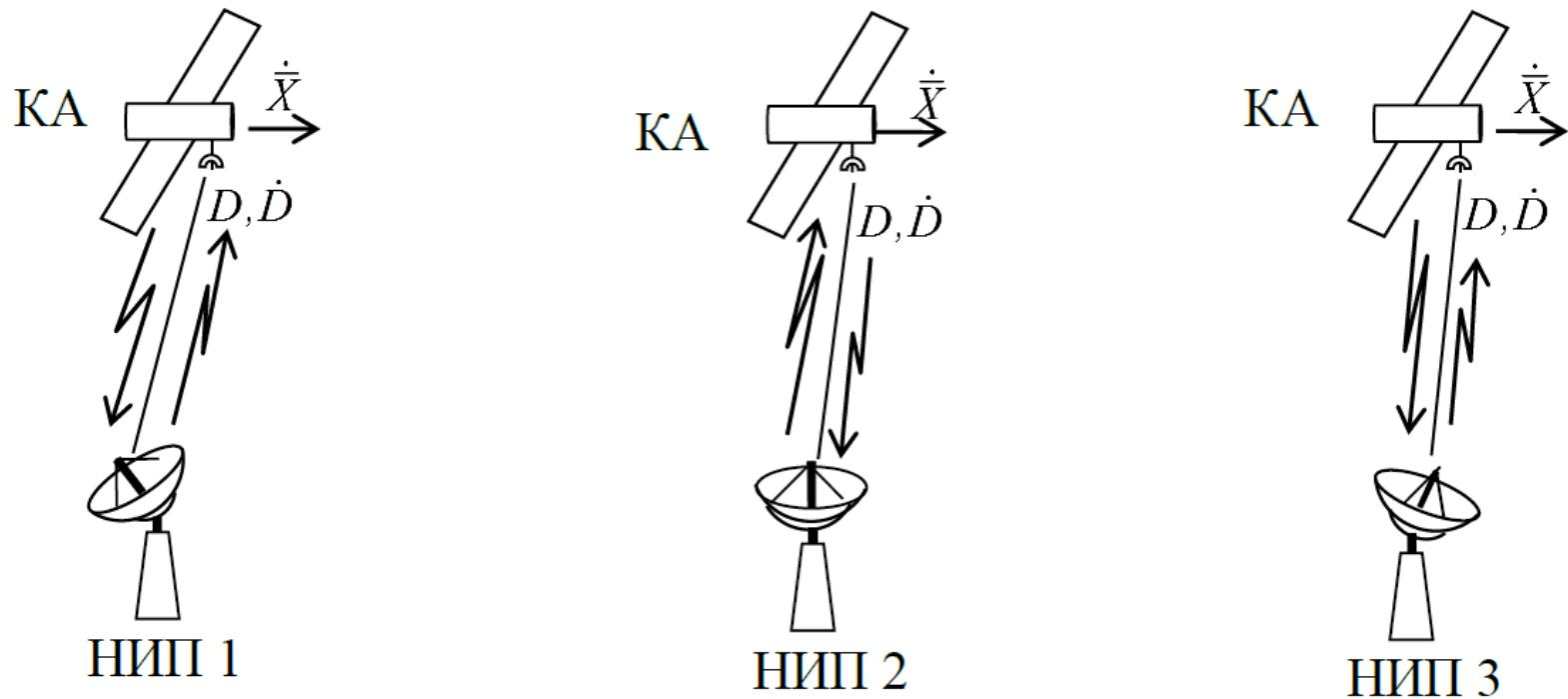


Рис. 4.1 Схема наземных навигационных измерений.

В результате измерений, выполненных несколькими НИПами на двух-трех соседних витках, формировались массивы:

D_{ij} - дальности КА в моменты t_i до j -го НИП;

\dot{D}_{ij} - проекции скорости КА в направлении на излучатель в момент t_i относительно излучателя j -го НИП.

Дальность и скорость ее изменения являются функциями параметров движения КА, т.е., функциями его вектора состояния $\bar{\xi}(t)$. Для D_{ij} и \dot{D}_{ij} можно записать равенства:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= F_{ij}(\bar{\xi}_i); \\ \dot{D}_{ij} &= f_{ij}(\bar{\xi}_i), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где F_{ij}, f_{ij} – известные функции, связывающие измеряемые параметры с вектором состояния; $\bar{\xi}_i$ – вектор состояния КА в момент t_i .

Если траектория КА известна с некоторой точностью, то можно считать, что известно начальное приближение вектора состояния $\bar{\xi}_{0i}$ в каждый момент t_i . В этом случае задачей определения орбиты является определение погрешности начального приближения:

$$\Delta\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i - \bar{\xi}_{0i}. \quad (4.2)$$

Для погрешности начального приближения уравнения (4.1) могут быть записаны в линеализированном виде:

$$\begin{aligned} D_{ij}(\bar{\xi}_i) - D_{ij}(\bar{\xi}_{0i}) &= \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \bar{\xi}_i} \right)^T \Delta\bar{\xi}_i; \\ \dot{D}_{ij}(\bar{\xi}_i) - \dot{D}_{ij}(\bar{\xi}_{0i}) &= \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{\xi}_i} \right)^T \Delta\bar{\xi}_i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\frac{\partial F_{ij}}{\partial \bar{\xi}_i}, \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{\xi}_i}$ – известные векторы размерности 6.

При серии из n измерений система уравнений (4.3) примет вид:

$$\begin{aligned}
 D_{1j}(\bar{\xi}_1) - D_{1j}(\bar{\xi}_{01}) &= \left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial \bar{\xi}_1} \right)^T \Delta \bar{\xi}_1 \\
 \dot{D}_{1j}(\bar{\xi}_1) - \dot{D}_{1j}(\bar{\xi}_{01}) &= \left(\frac{\partial f_{1j}}{\partial \bar{\xi}_1} \right)^T \Delta \bar{\xi}_1 \\
 \cdots & \\
 D_{nj}(\bar{\xi}_n) - D_{nj}(\bar{\xi}_{0n}) &= \left(\frac{\partial F_{nj}}{\partial \bar{\xi}_n} \right)^T \Delta \bar{\xi}_n \\
 \dot{D}_{nj}(\bar{\xi}_n) - \dot{D}_{nj}(\bar{\xi}_{0n}) &= \left(\frac{\partial f_{nj}}{\partial \bar{\xi}_n} \right)^T \Delta \bar{\xi}_n
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Система уравнений (4.4) состоит из $2n$ линейных уравнений, содержащих $6n$ неизвестных $\Delta \bar{\xi}_i$ компонент шестимерных векторов состояния. Казалось бы, такая система не должна решаться ни при каких значениях n . Однако векторы $\Delta \bar{\xi}_i$ не являются независимыми. Между ними существует взаимно однозначная связь, определяемая уравнениями движения. Если уравнения движения точные, то зная $\Delta \bar{\xi}_1$, можно однозначно определить все векторы $\Delta \bar{\xi}_i$ путем интегрирования уравнений движения. Поэтому в действительности система уравнений (4.4) содержит только шесть неизвестных $\Delta \bar{\xi}_i$, соответствующих вектору состояния на любой выбранный момент времени.

При абсолютно точных измерениях достаточно получить три значения дальности и три значения относительной скорости для однозначного определения орбиты КА. Однако при наличии ошибок измерений возникают ошибки в определении орбиты. Для того, чтобы орбита

определялась с требуемой точностью, необходимо проведение большого количества измерений на достаточно большой временной базе. Так для МКС, КА «Союз» и «Прогресс» сеанс измерений обычно длится 3 витка, на каждом витке измерения выполняются на 3 НИПах, на каждом НИПе измерения ведутся с частотой 1 Гц в течение всего времени пролета КА над НИПом (5-6 мин). Далее все измерения передаются в Центр управления полетом (ЦУП), где в результате их математической обработки формируются параметры орбиты КА на конец сеанса измерений. Точность определения параметров орбиты указанным методом на конец сеанса измерений составляет 100-200 м по положению и 5-10 см/с по скорости. Далее определение положения КА на любой последующий момент времени осуществляется путем прогноза орбиты. При этом, чем больше интервал прогноза, тем больше ошибка в определении положения КА. Так, точность прогноза орбиты МКС по радиоизмерениям ухудшается со скоростью 2-3 км/сут. Это ошибки, обусловленные как ошибками начального вектора состояния (после сеанса измерений), так и ошибками модели движения КА, используемой при прогнозировании. В заключение следует сказать, что существенным недостатком рассмотренного метода определения орбиты (кроме низкой точности) является большое время решения задачи. Как отмечалось выше, это время составляет 3-5 часов, что недопустимо долго для решения многих практических задач.

Существенное снижение этого времени и повышение точности решения навигационной задачи стало возможным с развертыванием глобальных спутниковых навигационных систем (ГСНС) ГЛОНАСС и *GPS*.

4.2 Основные принципы решения навигационной задачи КА с использованием ГСНС

Предположим, что имеется n излучателей радиосигнала, расположенных в точках с известными координатами \bar{X}_i . Эти радиосигналы в момент времени t принимаются потребителем, координаты \bar{X} которого неизвестны. Пусть радиосигналы от каждого излучателя определенным образом окрашены – то есть, потребитель понимает, какой сигнал от какого источника был послан и, более того, в какой момент времени каждый сигнал был излучен соответствующим излучателем. Время распространения каждого сигнала от излучателя до потребителя равно:

$$\Delta t_i = \frac{|\bar{X}_i - \bar{X}|}{c}, \quad (4.5)$$

где c – скорость света;

\bar{X}_i – координаты излучателя в момент излучения сигнала, принятого потребителем в момент времени t .

Пусть время распространения сигнала Δt_i определяется в аппаратуре потребителя. Тогда для определения вектора \bar{X} можно составить систему из n уравнений:

$$c\Delta t_1 = \sqrt{(\bar{X}_1 - \bar{X})^T (\bar{X}_1 - \bar{X})}$$

$$c\Delta t_n = \sqrt{(\bar{X}_n - \bar{X})^T (\bar{X}_n - \bar{X})} \quad (4.6)$$

После возведения в квадрат левой и правой частей каждого из уравнений системы (4.6) и последовательного вычитания последующего уравнения из предыдущего систему (4.6) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1^T \bar{X}_1 - \bar{X}_2^T \bar{X}_2 - c^2 (\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2) &= 2(\bar{X}_1^T - \bar{X}_2^T) \bar{X} \\ \bar{X}_2^T \bar{X}_2 - \bar{X}_3^T \bar{X}_3 - c^2 (\Delta t_2^2 - \Delta t_3^2) &= 2(\bar{X}_2^T - \bar{X}_3^T) \bar{X} \\ \cdots & \\ \bar{X}_n^T \bar{X}_n - \bar{X}_1^T \bar{X}_1 - c^2 (\Delta t_n^2 - \Delta t_1^2) &= 2(\bar{X}_n^T - \bar{X}_1^T) \bar{X} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Введем обозначения:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^T \bar{X}_1 - \bar{X}_2^T \bar{X}_2 - c^2 (\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2) \\ \cdots \\ \bar{X}_n^T \bar{X}_n - \bar{X}_1^T \bar{X}_1 - c^2 (\Delta t_n^2 - \Delta t_1^2) \end{pmatrix}$$

- n -мерный вектор измерений, все компоненты которого известны.

$$B = \begin{pmatrix} 2(\bar{X}_1^T - \bar{X}_2^T) \\ \cdots \\ 2(\bar{X}_n^T - \bar{X}_1^T) \end{pmatrix}$$

- матрица размерности $n \times 3$, все компоненты которой известны.

Тогда система уравнений (4.7) может быть представлена в виде:

$$\bar{U} = B \bar{X}, \quad (4.8)$$

где неизвестным является только вектор координат потребителя \bar{X} . Из уравнения (4.8) получим:

$$\bar{X} = (B^T B)^{-1} B^T \bar{U} \quad (4.9)$$

Условием существования решения \bar{X} является обратимость матрицы $B^T B$, то есть:

$$\det(B^T B) \neq 0 \quad (4.10)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.10) координаты потребителя могут быть определены по формуле (4.9).

Предположим также, что каждый из излучателей формирует высокочастотный радиосигнал строго определенной известной частоты f_0 , а потребитель, приняв сигнал, абсолютно точно меряет его частоту f_i , которая отличается от первоначальной за счет эффекта Доплера, обусловленного движением потребителя и излучателей. Зная изменение частоты сигнала каждого излучателя Δf_i , можно составить систему уравнений для определения вектора скорости потребителя:

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X})^T}{|\bar{X}_1 - \bar{X}|} (\bar{V}_1 + \bar{V})$$

-----,

$$\frac{\Delta f_n}{f_0} c = \frac{(\bar{X}_n - \bar{X})^T}{|\bar{X}_n - \bar{X}|} (\bar{V}_n + \bar{V}) \quad (4.11)$$

где \bar{V}_i – вектор скорости i -го НС;

\bar{V} – вектор скорости потребителя.

Введем обозначения:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta f_1}{f_0} c - \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X})^T}{|\bar{X}_1 - \bar{X}|} \bar{V}_1 \\ \vdots \\ \frac{\Delta f_n}{f_0} c - \frac{(\bar{X}_n - \bar{X})^T}{|\bar{X}_n - \bar{X}|} \bar{V}_n \end{pmatrix}$$

- n -мерный вектор измерений, все компоненты которого известны (вектор координат \bar{X} определён по формуле (4.9));

$$B = \begin{pmatrix} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X})^T}{|\bar{X}_1 - \bar{X}|} \\ \vdots \\ \frac{\bar{X}_n - \bar{X}}{|\bar{X}_1 - \bar{X}|} \end{pmatrix}$$

- матрица размерности $n \times 3$, все компоненты которой известны.

Тогда система уравнений (4.11) может быть представлена в виде:

$$\bar{U} = B \bar{V}, \quad (4.12)$$

откуда искомый вектор \bar{V} определяется по формуле:

$$\bar{V} = (B^T B)^{-1} B^T \bar{U}. \quad (4.13)$$

Условием существования решения V является обратимость матрицы $B^T B$, то есть:

$$\det(B^T B) \neq 0 \quad (4.14)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.14) вектор скорости потребителя может быть определен по формуле (4.13).

Рассмотренный выше метод определения параметров движения потребителя лежит в основе функционирования ГСНС. Конечно, мы рассмотрели идеальный случай, когда координаты и скорости излучателей известны абсолютно точно, шкалы времени излучателей и потребителя совпадают, среда распространения радиосигнала не вносит никаких возмущений в изменение частоты и скорости распространение сигнала, измерения задержек Δt_i и частоты f_i в аппаратуре потребителя осуществляются абсолютно точно. В реальности все перечисленные факторы вносят определенные погрешности в решение навигационной задачи, которые разработчики ГСНС стараются свести к минимуму. Тем не менее, реальные ГСНС существенно отличаются от рассмотренной идеальной системы.

Ниже мы рассмотрим работу ГСНС на примере систем ГЛОНАСС и *GPS*, обращая внимание на их отличия, отмечая преимущества и недостатки этих отличий.

4.3 Идеология построения систем ГЛОНАСС и *GPS*, их основные характеристики и отличия. «Сырые» измерения в аппаратуре потребителя

В предыдущем разделе мы предполагали, что потребитель одновременно принимает сигналы от n излучателей с известными координатами и скоростью движения. Каждый из таких излучателей может быть расположен на Земле. В этом случае существенно ограничена дальность от излучателей до потребителя, т.к. все излучатели (или их значительная часть) должны быть в зоне прямой видимости потребителей. По такому принципу строятся локальные навигационные системы, обслуживающие потребителей, находящихся в некотором ограниченном районе – (аэропорта, морского порта и т.п.).

Для построения глобальной навигационной системы при разумном общем числе излучателей они должны быть вынесены в космос на достаточно высокие орбиты. Именно так реализованы глобальные навигационные системы – российская ГЛОНАСС и американская *GPS*.

Выбор количества навигационных спутников (НС) в группировке, параметров их орбит, распределения НС по орбитам определяется условиями «покрытия» всей поверхности Земли с обеспечением возможности решения потребителем навигационной задачи в любой момент времени с достаточно высокой точностью. Не останавливаясь на вопросах обоснования такого выбора для систем ГЛОНАСС и *GPS*, приведем основные характеристики космических группировок этих систем.

В первоначальном проекте предполагалось создание космической группировки системы *GPS* из 24 НС. Впоследствии, для повышения качества системы и обеспечения резервирования НС на орбите для обеспечения возможности их оперативной замены в случае отказов, число НС увеличивалось, и в настоящее время доведено до 32 спутников.

Система ГЛОНАСС включает 24 НС.

Спутники *GPS* равномерно распределены в шести орбитальных плоскостях с наклонением 54° и равномерным распределением восходящих узлов орбит по экватору. В каждой плоскости устанавливается 5-6 НС. Высота орбиты спутников – 20000 км, период обращения – 12 час.

Спутники ГЛОНАСС равномерно распределены в трех орбитальных плоскостях с наклонением $64,8^\circ$ и равномерным распределением восходящих узлов орбит по экватору. Высота орбиты спутников ~ 19100 км, номинальный период 11 час 15 мин 44 сек.

За счет большого наклонения орбит НС система ГЛОНАСС обеспечивает более «плотное покрытие» высоких широт Земли, по сравнению с *GPS*.

Выше, при рассмотрении основных принципов решения навигационной задачи, отмечалось, что координаты и скорость движения каждого излучателя, а также время излучения сигнала должны быть известны с высокой точностью. Это означает, что параметры орбит НС, а также бортовое время НС должно быть известно с очень высокой точностью. Это требование накладывает существенную особенность в построении ГСНС по сравнению с другими спутниковыми системами. ГСНС должна включать высокоточную наземную систему временного и навигационного обеспечения орбитальной группировки НС. Эту функцию выполняет командно-измерительный комплекс (КИК), который не только обеспечивает управление НС как космическими аппаратами, но также осуществляет определение параметров движения НС, проводит сверку и согласование бортовых шкал времени с наземной системной шкалой времени.

Координирует функционирование всех элементов ГСНС центр управления полетом (ЦУП), который связан информационными радиолиниями с КИК и информационными и управляющими радиолиниями с каждым НС.

Таким образом, информация о точном времени и координатах имеется на каждом НС. Но эта информация должна быть доведена до каждого потребителя. Для этого она включается в информационную часть радиосигнала, передаваемого в сторону Земли каждым НС. Навигационные спутники находятся в орбитальной ориентации, и центр диаграммы передающих антенн направлен в центр Земли. Мощность передаваемого радиосигнала зависит от угла между направлением на центр Земли и направлением на потребителя. Достаточно условно ширину диаграммы направленности передающей антенны НС можно принять равной

40°. Будем считать, что потребитель, находящийся в окрестности Земли в зоне диаграммы направленности, устойчиво принимает радиосигнал от НС. Область устойчивого приема радиосигнала НС в окрестности Земли иллюстрирует рис. 4.2.

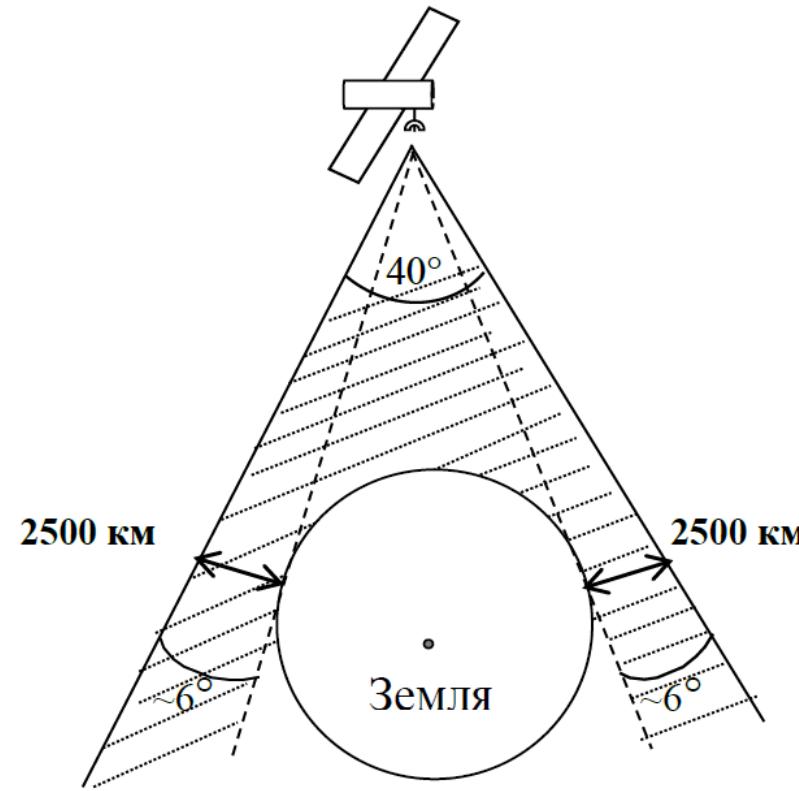


Рис. 4.2 Область устойчивого приема сигналов НС в окрестности Земли

Из рисунка следует, что потребитель, находящийся у Земли в зоне прямой видимости НС на высотах до 2500 км, устойчиво принимает радиосигнал НС. Приведенные цифры являются достаточно условными, так как они зависят, в том числе и от чувствительности приемного

радиотракта потребителя, мощности и спектра радиопомех в окрестности потребителя и прочего.

И спутники *GPS*, и спутники ГЛОНАСС формируют для потребителя сигналы на двух несущих частотах из диапазона $L1$ ($\sim 1,5$ гГц) и $L2$ ($\sim 1,2$ гГц). Сигнал $L1$ – для гражданских потребителей, сигнал $L2$ – для специальных потребителей. Учитывая, что для решения большинства задач навигации космических аппаратов достаточно использование одночастотных навигационных приемников, работающих на частоте $L1$, то ниже мы будем рассматривать характеристики систем ГЛОНАСС и *GPS* в части, относящейся к информации, передаваемой потребителю в этом диапазоне частоты.

Для системы *GPS* частота несущего сигнала $L1$ для всех НС одинакова и составляет 1575,42 Мгц.

Выше, при рассмотрении принципов решения навигационной задачи с использованием ГСНС, отмечалось, что радиосигналы от каждого НС должны быть определенным образом «окрашены» для того, чтобы потребитель понимал, принадлежностью какого НС является принятый сигнал. Такое «окрашивание» называется разделением сигналов. В системе *GPS* используется метод кодового разделения, в системе ГЛОНАСС – метод частотного разделения. При кодовом разделении несущий сигнал модулируется некоторой кодовой последовательностью, уникальной для каждого источника сигнала. При частотном разделении несущий сигнал каждого источника имеет собственную уникальную частоту.

Для понимания принципа кодового разделения рассмотрим структуру сигнала *GPS*, который может быть представлен в виде:

$$U_{GPSi} = A_i \sin_i (\omega_0 t + \varphi_i) \cdot ПСП_i \cdot D_i \quad (4.15)$$

где i - номер НС;

ω_0 - номинальная частота несущего сигнала $L1\ GPS$;

φ_i - фаза сигналов i -го НС;

A_i - амплитуда сигнала;

$ПСП_i$ - сигнал псевдослучайной последовательности i -го НС;

D_i - массив данных i -го НС.

Первый сомножитель правой части выражения (4.15) ($A_i \sin_i(\omega_0 t + \varphi_i)$) представляет собой несущий сигнал, второй сомножитель – массив псевдослучайной последовательности, обеспечивающий реализацию функций разделения сигналов и дальномерных измерений, третий сомножитель – код данных, обеспечивающий передачу потребителю данных о параметрах системы, необходимых для проведения навигационных расчетов.

Код $ПСП_i$ представляет собой определенную последовательность «+1» и «-1», на которые умножается несущий сигнал, то есть выполняется фазовая манипуляция несущего сигнала – при умножении на «-1» фаза несущего сигнала поворачивается на 180^0 . Пример фрагмента $ПСП_i$ во времени приведен на рис. 4.3.

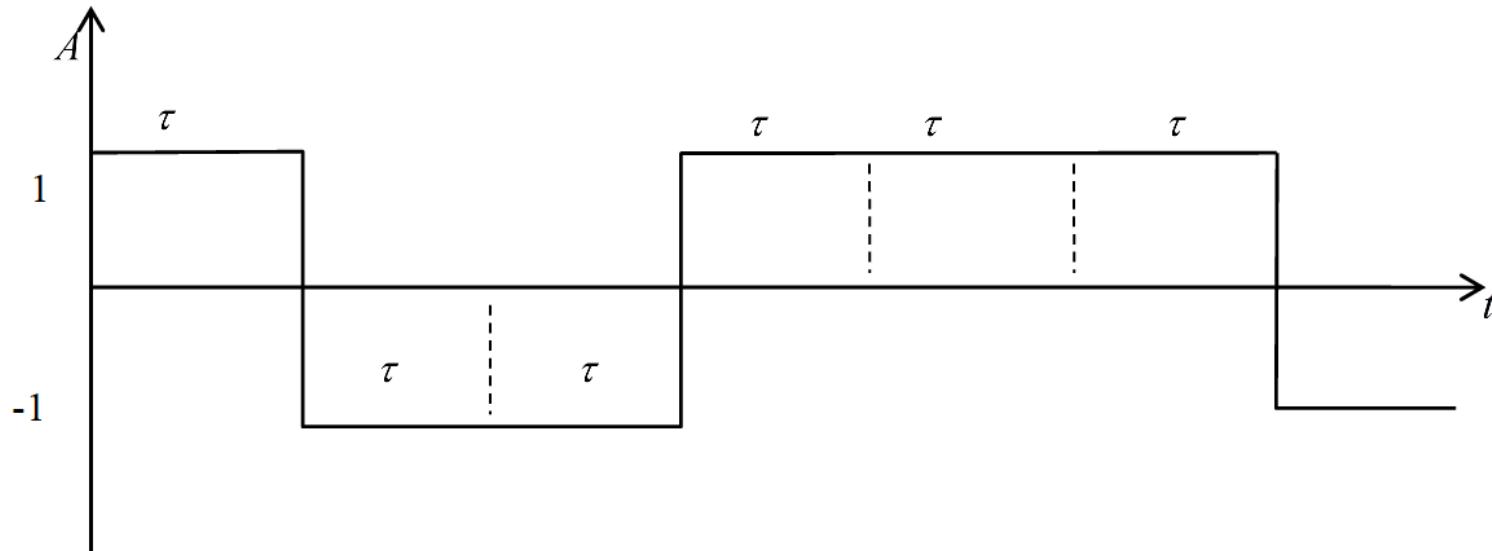


Рис. 4.3 Фрагмент $\text{ПСП}_i \text{ GPS}$

Для всех НС период $\text{ПСП}_i \text{ GPS}$ равен $T=1\text{мс}$. В период $\text{ПСП}_i \text{ GPS}$ укладывается 1023 минимальных тактов $\tau_{\text{ПСП}_i}$, то есть период каждого i -го ПСП может быть представлен в виде двоичного кода с размерностью 1023 Бит. Для каждого ПСП_i очевидно соотношение:

$$\int_t^{t+T} \text{ПСП}_i(t + \Delta t) \cdot \text{ПСП}_i(t + \Delta t) dt = 1023 = U_{max}. \quad (4.16)$$

Но кроме того, $\text{ПСП}_i \text{ GPS}$ обладает двумя удивительными свойствами: для каждого i справедливы равенства:

$$\left| \int_t^{t+T} \text{ПСП}_i(t) \cdot \text{ПСП}_i(t + \Delta t) dt \right| \ll U_{max} \quad (4.17)$$

для любого Δt из диапазона $\tau < |\Delta t| < T - \tau$.

$$\left| \int_t^{t+T} PСП_i(t) \cdot PСП_j(t + \Delta t) dt \right| \ll U_{max} \quad (4.18)$$

для любого Δt и $i \neq j$.

Выполнение равенств (4.16), (4.17) определяет возможность измерения дальности между НС и потребителем, равенство (4.18) обеспечивает разделение сигналов от разных НС.

В системе ГЛОНАСС реализовано частотное разделение сигналов – НС ГЛОНАСС работают на разных частотах. Номинальные значения несущих частот навигационных сигналов в диапазоне $L1$ определяются следующими выражениями:

$$f_K = f_0 + K\Delta f, \quad (4.19)$$

где K – номера несущих частот навигационных радиосигналов:
 $\Delta f = 562,5$ КГц.

Распределение номинальных значений несущих частот f_k по номерам K приведено в Таблице 4.1.

Распределение номеров K между НС отображается в альманахе системы, передаваемом в составе данных.

Таблица 4.1

№ частоты	Номинал частоты в диапазоне L1
13	1609,3125
12	1608,75
11	1608,1875
10	1607,625
09	1607,0625
08	1606,5
07	1605,9375
06	1605,375
05	1604,8125
04	1604,25
03	1603,6875
02	1603,125
01	1602,5625
00	1602,0
-01	1601,4375
-02	1600,8750
-03	1600,3125
-04	1599,7500
-05	1599,1875
-06	1598,6250
-07	1598,0625

Предусматривается поэтапное изменение частотного диапазона ГЛОНАСС:

1998-2005 г.г.

На этом этапе находящиеся в эксплуатации спутники ГЛОНАСС будут использовать без ограничений номера частот $K = 0 \dots 12$.

Номера частот $K = 0,13$ будут использоваться как технологические.

С 2005 года.

На этом этапе все находящиеся в эксплуатации спутники ГЛОНАСС будут использовать номера частот $K = (-7 \dots +6)$, причем номера $K = +5$ и $K = +6$ будут использоваться лишь как технологические в ограниченные периоды времени (например, при восполнении орбитальной подсистемы).

Таким образом, для работы 24-х НС ГЛОНАСС отведено только 12 частот. На одной и той же частоте работают два НС, находящиеся в диаметрально противоположных точках орбит. В этом случае для наземного потребителя не возникает ситуации, когда антенна приемника может одновременно принимать сигналы от двух НС. Однако, к сожалению, для КА, такие ситуации могут возникать. Для защиты от них требуется предусматривать специальные меры.

Для обеспечения дальномерных измерений на несущий сигнал ГЛОНАСС также накладывается сигнал *ПСП*, код которого является общим для всех НС. Период *ПСП* ГЛОНАСС также как и для *GPS* составляет 1 мс, однако длина кода *ПСП* состоит из 511 минимальных тактов τ .

Код данных D_i также представляет собой последовательность «+1» и «-1», на которую умножается несущий сигнал, то есть также, как и при умножении на код PCP_i выполняется фазовая манипуляция несущего сигнала. Длительность одного такта τ_D составляет 20 мс.

Моменты фазовых манипуляций от PCP_i и D_i строго синхронизированы - момент фазовой манипуляции от PCP_i может либо совпадать с моментом фазовой манипуляции от D_i , либо отстоять от этого момента на время, кратное τ . Период передачи данных GPS составляет 12,5 мин., ГЛОНАСС – 2,5 мин.

Рассмотрим, каким образом в навигационном приемнике обеспечивается работа с сигналом какого-либо НС. При этом нашей целью не является построение какой-либо конкретной электронной схемы, обеспечивающей обработку сигнала. Мы рассматриваем только принцип этой работы для общего понимания идеологии работы систем ГЛОНАСС и GPS .

Если в зоне прямой видимости антенны GPS имеется n спутников, то их суммарный сигнал на входе антенны будет равен:

$$U_{GPS\sum} = \sum_1^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) PCP_i D_i \quad (4.20)$$

При этом частота несущего сигнала ω_i каждого НС в данном случае разная из-за эффекта Доплера.

В современных навигационных приемниках имеется несколько каналов, каждый из которых может организовать работу с сигналом одного из НС. Принцип работы с j -м НС заключается в формировании сигнала $\sin \omega_j t PCP_j$, совпадающего соответственно по частоте и фазе несущего сигнала и по фазе PCP входного сигнала j -го НС. Предположим, такой сигнал

сформирован. Умножим на него суммарный входной сигнал, определяемый равенством (4.20), и проинтегрируем на интервале от t до $t+T$. Если на этом интервале нет смены знака D_i , то с учетом равенств (4.16) и (4.18) получим:

$$\int_t^{t+T} \sin \omega_j t \cdot \text{ПСП}_j \cdot U_{GPS\sum} dt = \frac{A_i}{2} \cdot 1023 \quad (4.21)$$

Здесь, с учетом равенства (3.18), составляющими от сигналов НС_{*i*} при $i \neq j$ мы пренебрегли.

Равенство (4.21) получено для $D_i = 1$. При смене знака D_i знак интеграла (4.21) меняется на противоположный. Осуществляя контроль за сменой знака, соответствующим образом читается массив данных D_i .

Выше мы предположили, что синхронизация сигналов по фазе несущей и по фазе ПСП_{*i*} на соответствующем канале выполнена.

Процесс синхронизации называется поиском сигнала. Поиск осуществляется путем сканирования по частоте и коду ПСП сигнала, формируемого в приемнике, с определенным шагом. Шаг по частоте должен быть в 3-5 раз меньше килогерца (что определяет период ПСП 1 мс), а шаг по коду – не более $0,5\tau$. Диапазон сканирования определяется возможным диапазоном доплеровского смещения частоты для данного потребителя, априорным знанием времени, координат и скорости потребителя, а также альманахов и эфемерид КА. Диапазон сканирования определяет время поиска сигнала. Время выхода на режим навигационных определений, когда найдены сигналы как минимум четырех НС, называется временем старта приемника. Обычно различают три вида старта:

- холодный старт;
- теплый старт;

– горячий старт.

При холодном старте в приемнике полностью отсутствует какая-либо информация о времени, параметрах движения и альманахах НС. В этом случае при поиске сигналов НС сканирование выполняется по всему возможному диапазону частот и по всему коду *ПСП*. Для наземного потребителя доплеровское смещение частоты лежит в диапазоне ± 5 КГц, для космического ± 50 КГц. Обычно время холодного старта составляет 5-20 мин. При теплом старте в приемнике имеется альманах и с определенной точностью известно время и параметры движения потребителя. В этом случае время старта составляет 1 – 2 мин. из которых 30 сек. занимает время приема эфемерид НС.

При горячем старте в приемнике имеются эфемериды НС, а время и параметры движения известны с достаточно высокой точностью. Время горячего старта составляет 5-20 сек. После завершения поиска сигналов НС идет их отслеживание.

В этом случае по смещению кода PSP_j и по частоте ω_t определяются, так называемые псевдодальности и псевдоскорости (или доплеровское смещение) HC_j .

Под псевдодальностью понимается величина *PR (pseudorange)*:

$$PR_j = c\Delta t_j \quad (4.22)$$

где c - скорость света;

Δt_j - время распространения сигнала от НС в момент его излучения до момента получения этого сигнала антенной потребителя. При этом время в момент излучения считается в шкале времени j -го НС, а время приема – в шкале времени аппаратуры потребителя.

Под доплеровским смещением понимается проекция относительной скорости антенны потребителя и НС на направление от потребителя в момент приема сигнала t на НС в момент излучения сигнала, принятого потребителем в момент t .

$$d_j = \frac{f - f_0}{f_0} c, , \quad (4.23)$$

где f - частота принятого сигнала в частотной шкале приемника;
 f_0 - номинальная частота несущего сигнала *GPS*.

В некоторых навигационных приемниках в качестве измеренных параметров формируются набег фазы за секунду и полная интегральная фаза (от момента формирования достоверного сигнала). Набег фазы за секунду, выраженный в метрах, представляет собой величину:

$$\varphi_j = \lambda_0 \int_{t-1}^t (f_j - f_0) dt, , \quad (4.24)$$

где λ_0 - номинальная длина волны несущего сигнала $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$

Полная интегральная фаза *CP* (*carrier phase*) равна:

$$CP_j = \lambda_0 \left(\varphi_0 + \int_{t_0}^t (f_j - f_0) dt \right), \quad (4.25)$$

где φ_0 - разность фаз несущих входного сигнала на входе в приемник и компенсирующего сигнала, формируемого в приемнике в момент t_0 .

К интегральной фазе, соответствующей равенству (4.24), иногда для удобства добавляют начальную константу, равную кратную числу λ_0 . Такой константой может быть значение

псевдодальности на момент t_0 , округленное до ближайшего целого по λ_0 . В этом случае формируемые в приемнике полные интегральные фазы по величине близки к соответствующим псевдодальностям.

4.4 Время в системах ГЛОНАСС и GPS

4.4.1 Шкалы времени в системах ГЛОНАСС и GPS, форматы их представления

Основной шкалой времени системы *GPS* является шкала системного времени *GPS* (*UTC GPS*). Основой для формирования системного времени *GPS* является водородный стандарт частоты Центрального синхронизатора системы, суточная нестабильность которого $\sim 10^{-14}$. Расхождение между *UTC GPS* и координированным Всемирным временем (*UTC*) не должна превышать 1 мс (без учета *leap_sec*). Данные для обеспечения привязки передаются потребителю в составе альманаха *GPS*. Погрешность привязки не должна превышать 1 мкс.

Формат времени *GPS* – номер недели, отсчитываемый от 06.01.1980 (начало нулевой недели) и время в секундах от начала недели. Первый день недели – воскресенье. Так как в системе *GPS* для передачи потребителю номера недели используется 10 бит, то после 1023-й недели идет нулевая неделя.

Время *GPS* в отличие от времени *UTC* идет непрерывно, и при коррекциях времени *UTC* на 1 сек. время *GPS* не корректируется. Поэтому между временем *GPS* и *UTC* существует сдвиг на целое число секунд, соответствующее суммарному числу секундных коррекций (так называемых *leap_sec*) начиная с 6 января 1980 года. В 2009 году сдвиг составил 15сек.

Работа каждого спутника *GPS* осуществляется в собственной шкале времени. Шкалы времени каждого НС периодически сверяются со шкалой времени *GPS*. Поправки к шкалам времени каждого НС закладываются на борт каждого спутника. Погрешности сверки времени не превышают 10 нс на момент проведения измерений. Данные для обеспечения привязки времени НС к времени *GPS* передаются потребителю в составе оперативной информации.

Аппаратура потребителя формирует выходные данные с привязкой либо к времени *GPS*, либо к времени *UTC*. Выбор желаемой шкалы определяет потребитель.

Основной шкалой времени системы ГЛОНАСС является шкала системного времени ГЛОНАСС. Основой для формирования системного времени является водородный стандарт частоты Центрального синхронизатора системы, суточная нестабильность которого составляет 5×10^{-14} . Расхождение между шкалой системного времени ГЛОНАСС и шкалой Госэталона Координированного Всемирного Времени *UTC (SU)* не должна превышать 1мс. Погрешность привязки системного времени ГЛОНАСС к шкале *UTC (SU)* не должна превышать 1 мкс.

Формат времени ГЛОНАСС – номер суток, отсчитываемый внутри четырехлетнего интервала, начиная с 1-го января последнего високосного года и время в секундах от начала суток.

Шкалы времени каждого НС ГЛОНАСС периодически сверяются с системной шкалой времени. Поправки к шкале времени каждого НС дважды в сутки закладываются на борт каждого спутника. Погрешность сверки времени не превышает 10 нс на момент проведения измерений.

Шкала системного времени ГЛОНАСС корректируется с плановой коррекцией на целое число секунд Координированного всемирного времени *UTC*. Коррекция проводится, как правило, 1 раз в год (в полтора года) в конце одного из кварталов: 00 час. 00 мин.00 сек.

(полночь с 31 декабря на 1 января или с 31 марта на 1 апреля, с 30 июня на 1 июля, с 30 сентября на 1 октября) и осуществляется одновременно всеми пользователями, воспроизводящими или использующими шкалу *UTC*. Предупреждение о моменте и величине коррекции *UTC* заблаговременно сообщается пользователям в соответствующих бюллетенях, извещениях и другими способами.

В результате периодического проведения плановой секундной коррекции между системным временем ГЛОНАСС и *UTC* (*SU*) не существует сдвига на целое число секунд. Однако существует постоянный сдвиг на целое число часов, обусловленный особенностями функционирования ГЛОНАСС:

$$t_{\text{ГЛОНАСС}} = \text{UTC}(\text{SU}) + 03 \text{ часа } 00 \text{ мин.} \quad (4.26)$$

Аппаратура потребителя, работающая по сигналам НС ГЛОНАСС, формирует выходные данные с привязкой либо к системному времени ГЛОНАСС, либо к *UTC* (*SU*). Выбор желаемой шкалы определяет потребитель.

Аппаратура потребителя, работающая по двум системам - ГЛОНАСС и *GPS*, может формировать выходные данные с привязкой к любой из четырех шкал времени: *UTC*, *UTC* (*SU*), *GPS*, ГЛОНАСС. В процессе работы аппаратура автоматически определяет сдвиг между системными шкалами времени ГЛОНАСС и *GPS*. Этот сдвиг может также передаваться потребителю.

В разделе 1.3 данного курса лекций рассматривались основные системы координат, используемые в космической навигации, в том числе ГСК и ИСК. Отмечалось, что для обеспечения точного перехода между этими системами необходимо знать величину поправки *dUT1*, определяющей разность времени между шкалами *UTC* и *UT1* (см. раздел 1.1).

Отмечалось, что эта поправка выставляется в Интернете. Следует отметить, что после запуска новой модификации НС ГЛОНАСС ("ГЛОНАСС-М") в составе неоперативной информации навигационного сообщения ГЛОНАСС передаются данные, позволяющие вычислить эту поправку на любой момент времени. Для этого в составе неоперативной информации сообщений ГЛОНАСС передаются параметры:

N^A – номер суток, к которым относятся передаваемые данные;

$B1$ – величина $dUT1$ на начало суток N^A ;

$B2$ – скорость изменения $dUT1$ за средние солнечные сутки

Поправка $dUT1$ в течение текущих суток N_t определяется по формуле:

$$dUT1 = B1 + B2(N_t - N_A) \quad (4.27)$$

Наличие на борту КА поправки $dUT1$ позволяет автономно осуществлять расчет матрицы перехода из ГСК в ИСК $j2000$ с точностью до ошибок, обусловленных смещением полюса Земли. Более точный расчет требует периодической передачи на борт КА параметров смещения полюса Земли от оси Z ГСК.

4.4.2 Временные параметры, передаваемые в информационных сообщениях. Алгоритмы связи между различными шкалами времени систем ГЛОНАСС и GPS

В информационных сообщениях ГЛОНАСС и *GPS* передается целый ряд параметров, связывающих между собой различные шкалы времени. Рассмотрим эти параметры и приведем алгоритмы, позволяющие выполнять переход от одной шкалы времени к другой, а также от одного формата представления времени к другому.

Рассмотрим форматы представления времени. Выше отмечалось, что в системе *GPS* время формируется в формате:

N – номер текущей недели, начиная с 06.01.1980;

t – текущее время в секундах от начала текущей недели, за которое принимается воскресенье.

Отсчет недель осуществляется от 0 до 1023, после чего начинается опять нулевая неделя. Период обновления недель называется "эпоха *GPS*", составляет $\sim 19,6$ лет. Первая смена эпохи с нулевой на первую произошла в августе 1999 года. Номер эпохи *GPS* не передается в информационных сообщениях от НС, поэтому для корректной работы навигационного приемника необходимо, чтобы этот номер, а также алгоритм смены номера эпохи были в памяти вычислителя приемника.

Для упрощения алгоритмов связи между различными шкалами удобно в навигационном приемнике ввести общее для двух систем времени – так называемое "Большое время *GPS*", выраженное в секундах от начала нулевой эпохи *GPS*. Переход от текущего времени *GPS* к "Большому времени *GPS*" осуществляется по алгоритму:

$$T_{GPS} = (1024 \cdot N_{\mathcal{E}} + N) \cdot 604800 + t_{GPS} \quad (4.28)$$

где $N_{\mathcal{E}}$ – номер эпохи *GPS*;

N – номер текущей недели;

t_{GPS} – время в секундах от начала текущей недели.

В системе ГЛОНАСС время формируется в формате:

N_T – текущая дата, календарный номер суток внутри четырехлетнего периода, начиная с первого января последнего високосного года;

N_4 – номер четырехлетнего периода, первый год первого четырехлетия соответствует 1996 году;

t – время в секундах от начала суток.

Шкала времени ГЛОНАСС сдвигается на секунду синхронно с временем $UTC(SU)$.

Начало суток в системе GPS соответствует зимнему московскому времени, т.е., если не учитывать доли секунд между временем $UTC(SU)$, то

$$T_{GL} = T_{UTC(SU)} + 3 \text{ час. } 00 \text{ мин.} \quad (4.29)$$

Между временем $UTC(SU)$ и временем ГЛОНАСС имеется также сдвиг на дробную часть секунды τ_c , величина которой передается в составе неоперативной информации. С учетом этого сдвига связь времени в шкале UTC и ГЛОНАСС определяется соотношением:

$$T_{UTC(SU)} = T_{GL} - 03 \text{ час. } 00 \text{ мин.} + \tau_c \quad (4.30)$$

В составе неоперативной информации передается также слово τ_{GPS} – поправка на расхождение системных шкал времени GPS (T_{GPS}) и ГЛОНАСС (T_{GL}) в соответствии с выражением

$$T_{GPS} - T_{GL} = \Delta T + \tau_{GPS} \quad (4.31)$$

где ΔT – целая часть секунд расхождения шкал времени ГЛОНАСС и GPS .

По аналогии с Большим временем GPS можно ввести понятие "Большое время ГЛОНАСС" – время в секундах от начала 1996 года, которое определяется по формуле:

$$T_{GL} = (N_4 - 1)1.2623 \cdot 10^8 + (N_T - 1) \cdot 86400 + t_{GL} \quad (4.32)$$

где t_{GL} – время в секундах от начала текущих суток.

Время ГЛОНАСС также, как и время UTC периодически корректируется для того, чтобы разность со временем $UT1$ не превышала 0,9 сек. Коррекция может выполняться первого числа

квартала любого года. О предстоящей коррекции сообщается заблаговременно. В том числе в составе неоперативной информации сообщений ГЛОНАСС передается двухбитовое слово КР со следующими значениями:

- 00 – в конце текущего квартала коррекции *UTC* не будет;
- 01 – в конце текущего квартала будет коррекция на +1сек.;
- 11 – в конце текущего квартала будет коррекция на -1сек.;
- 10 – решение еще не принято.

В результате коррекции времени *UTC* накапливается разница между временем *UTC* и временем *GPS*, называемая *leap_sec*. Значение *leap_sec* передается в составе неоперативной информации сообщений *GPS* вместе с датой и новым значением *leap_sec* после изменения. С учетом всех поправок связь между "Большим временем *GPS*" и "Большим временем ГЛОНАСС" T_{GL} определяется соотношением:

$$T_{GPS} = T_{GL} + 504478800 - leap_sec + \tau_{GPS}. \quad (4.33)$$

Время *UTC* и *UTC(SU)* также удобно передавать в формате "Большого времени *GPS*".

Между временем *GPS* и временем *UTC* также, как и между временем ГЛОНАСС и временем *UTC(SU)* существует сдвиг на дробную часть секунды. В составе неоперативной информации сообщений *GPS* передаются параметры, позволяющие рассчитать этот сдвиг в любой момент времени:

- t_{0t} – эталонное время;
- WN_t – номер эталонной недели;
- A_0 – константа полинома;
- A_1 – член 1-го порядка полинома.

На текущий момент времени t текущей недели WN величина дробной части смещения шкал GPS и UTC ($t_{GPS} - t_{UTC}$) определяется по формуле:

$$\tau_{UTC} = A_0 + A_1 [t - t_{0t} - (WN - WN_t) \cdot 604800] \quad (4.34)$$

С использованием поправок τ_{GPS} , τ_c , τ_{UTC} можно определить сдвиг между шкалами UTC (Международная шкала времени) и $UTC(SU)$ (Российская шкала времени):

$$t_{UTC} - t_{UTC(SU)} = \tau_{GPS} - \tau_{UTC} - \tau_c \quad (4.35)$$

Передача сигнала каждым НС осуществляется в собственной шкале времени НС, которая имеет незначительный сдвиг относительно системной шкалы времени (GPS или ГЛОНАСС). Параметры, позволяющие определить этот сдвиг, передаются как в составе оперативной информации, так и в составе неоперативной информации. Параметры, передаваемые в составе неоперативной информации, позволяют грубо оценить этот сдвиг. Эта оценка используется для обеспечения более быстрого поиска сигналов НС ("теплого" старта). Параметры, передаваемые в составе оперативной информации, позволяют определить сдвиг шкалы времени НС с высокой точностью. Эта оценка используется для обеспечения измерений, а также для обеспечения мгновенного поиска сигнала ("горячего" старта).

В составе неоперативной информации сообщений ГЛОНАСС передается параметр τ_n – представляющий собой сдвиг шкалы времени n -го НС относительно шкалы времени ГЛОНАСС на момент $t_{\lambda n}$ – времени прохождения первого внутри суток с номером N^A восходящего узла орбиты НС с номером n :

$$\tau_{\lambda n} = t_{nHC} - t_{GL}. \quad (4.36)$$

В составе оперативной информации сообщений ГЛОНАСС передаются параметры: t_b – время, к которому относится передаваемая оперативная информация;

τ_n – сдвиг шкалы времени n -го НС относительно шкалы времени ГЛОНАСС на момент t_b ;
 γ_n – относительное отклонение прогнозируемого значения несущей частоты излучаемого навигационного радиосигнала n -го НС от номинального значения на момент t_b .

Сдвиг шкалы времени n -го НС относительно шкалы времени ГЛОНАСС определяется по формуле:

$$\tau_{\lambda n} = \tau_n(t_b) + \gamma_n(t_b)(t - t_b), \quad (4.37)$$

где t – текущее время ГЛОНАСС.

В составе неоперативной информации сообщений *GPS* i -го НС передаются параметры

- t_{0a} – время, к которому относятся передаваемые данные;
- a_{f0} – смещение часов НС на момент t_{0a} ;
- a_{f1} – дрейф часов НС на момент t_{0a} .

Смещение часов НС от шкалы времени *GPS* определяется по формуле:

$$\Delta t_{iHC}(t) = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{0a}), \quad (4.38)$$

где t – текущее время *GPS*.

В составе оперативной информации сообщений *GPS* i -го НС передаются параметры:

- t_{0c} – время, к которому относятся передаваемые параметры;
- a_{f0} – смещение часов в момент t_{0c} ;
- a_{f1} – дрейф часов в момент t_{0c} ;
- a_{f2} – производная дрейфа часов в момент t_{0c} .

Смещение часов НС от шкалы времени *GPS* определяется по формуле:

$$\Delta t_{iHC}(t) = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{0c}) + a_{f2}(t - t_{0c})^2, \quad (4.39)$$

где t – текущее время *GPS*.

На уход бортовых часов НС влияет также релятивистский эффект: изменение высоты полета НС приводит к изменению бортового времени. В системе ГЛОНАСС это изменение учитывается на борту НС, и передаваемый сигнал уже включает необходимую поправку на релятивистский эффект. В системе *GPS* эта поправка должна формироваться в навигационном приемнике. Величина релятивистской поправки может быть определена по формуле:

$$\Delta t_r = -\frac{2\bar{X} \cdot \bar{V}}{c^2}, \quad (4.40)$$

где \bar{X} – вектор НС в ГСК;

\bar{V} – вектор скорости НС в ГСК;

c – скорость света.

Векторы \bar{X} , \bar{V} вычисляются в процессе решения навигационной задачи. Для вычисления релятивистской поправки Δt_r по формуле (4.40) можно использовать векторы \bar{X} и \bar{V} , вычисленные на предыдущей секунде.

После формирования поправок к времени НС пользователь должен корректировать время НС по формуле:

$$t = t_{HC} - \Delta t_{HC} \quad (4.41)$$

где Δt_{HC} – суммарная поправка времени НС, учитывающая все рассмотренные выше составляющие.

Приведенные выше формулы преобразования форматов времени: *GPS*, ГЛОНАСС, "Большое время *GPS*", "Большое время ГЛОНАСС", календарное время *UTC* и *GPS*, календарное время ГЛОНАСС друг в друга и обратно, а также формулы формирования поправок, позволяющих осуществлять переход между разными шкалами времени: *UTC*,

$UTC(SU)$, GPS , ГЛОНАСС, HC_{GPS} HC_{GL} , не являются сложными. Однако множество различных вариантов задач и их решений приводит к значительным проблемам при отладке соответствующих программ, обеспечивающих решение этих задач. Поэтому рекомендуется использовать уже готовое и верифицированное программное обеспечение.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

4.4.3 Формирование собственной шкалы времени в навигационном приемнике. Начальная оцифровка шкалы времени.

Принцип работы ГСНС основан на измерении времени распространения навигационного сигнала от НС до антенны навигационного приемника. Для выполнения таких измерений в самом приемнике должны быть реализованы достаточно точные часы, формирующие внутреннее аппаратное время. Для этого в состав приемника должен входить генератор частоты, стабильность работы которого обычно составляет $10^{-6} - 10^{-7}$ с/с. Однако в момент включения в аппаратуре не никакой информации о времени. Внутренние часы после включения могут отсчитывать время, например, в секундах от момента включения. Для нормальной работы аппаратуры с системами GPS или ГЛОНАСС требуется оцифровка секунд этого времени в соответствии с системным временем ГЛОНАСС или GPS и более или менее точная синхронизация внутренних часов приемника с системным временем. Не вдаваясь в детали процесса синхронизации аппаратного времени с системным, рассмотрим принцип решения этой задачи.

После включения навигационный приемник путем сканирования по частоте и коду выполняет процесс поиска сигналов НС на разных каналах. При захвате сигнала НС на каком-либо из каналов начинает выполняться процесс чтения данных, передаваемых от НС. Реализация этого процесса связана в достаточно точной привязкой 20-и миллисекундных тактов принимаемых данных к шкале внутренних часов приемника. Точность такой привязки должна быть выше 1мс.

В системе *GPS* информация передается в виде кадров, состоящих из 1500 Бит. Длительность передачи кадра – 30 с. Каждый кадр состоит из 5 строк, состоящих из 300 бит. Длительность передачи строки – 6 с. Передача данных строго синхронизирована со шкалой времени *GPS*. Начало первого кадра и, соответственно, первой строки первого кадра строго совпадают с началом недели. В каждой из передаваемых каждые 6 с. строк одно из слов (называемое Ключ) содержит номер текущей недели (10 разрядов) и число полных 6-и секундных интервалов, прошедших с начала текущей недели. Так как слово Ключ расположено в конкретном месте строки, то строго известно время от начала чтения строки до момента чтения в приемнике этого слова. Если в приемнике также имеется значение текущей эпохи *GPS*, то имеющейся информации достаточно, чтобы выполнить оцифровку часов приемника и их привязку к времени *GPS*. При этом, если бы было известно время распространения сигнала от НС до приемника, то привязка часов могла бы быть выполнена с точностью выше 1 мс. Однако время распространения сигнала от НС до Земли составляет $\sim 0,08\text{с} \pm 0,01\text{с}$ в зависимости от конкретного расстояния между НС и потребителем, составляющем величину $24000\text{ км} \pm 3000\text{ км}$. Среднее время распространения 0,08 с. может быть учтено при выставке часов. А неопределенность дальности $\pm 3000\text{ км}$ приводит к неопределенности начальной

установки часов по сигналу 1 НС равной ± 10 мс. Более точная установка выполняется после решения в приемнике навигационной задачи.

В системе ГЛОНАСС информация передается в виде навигационных кадров также, как и в *GPS*, состоящих из 1500 Бит. Каждый кадр состоит из 15 строк, каждая из которых состоит из 100 Бит и имеет длительность 2 с. В каждом кадре передается информация о номере текущих суток N_t от начала текущего четырехлетия и о времени t_K начала текущего кадра внутри текущих суток, включающем количество целых часов и целых минут от начала суток, а также количество 30 секундных интервалов, прошедших с начала текущей минуты. Зная расположение параметра t_K в кадре, легко привязать момент чтения этого параметра к началу суток. Зная номер текущего четырёхлетия, передаваемом в составе неоперативной информации, легко определить текущую дату. Также, как и в системе *GPS*, точность начальной привязки внутренних часов приемника к системному времени по информации от одного НС составляет ± 10 мс. Точная привязка внутренних часов приемника к системному времени выполняется после решения навигационной задачи.

Глава 5 Альманахи и эфемериды ГЛОНАСС и GPS. Алгоритмы расчета координат и скорости НС по альманахам и эфемеридам. Точностные характеристики и "время жизни" альманахов и эфемерид систем ГЛОНАСС и GPS

После определения псевдодальности и псевдоскорости можно выполнять определение координат и скорости антенны приемника по формулам, аналогичным формулам (4.9) и (4.13), полученным в разделе 4.2. Однако для этого необходимо знать координаты и скорости НС. Кроме того, измерения в аппаратуре потребителя проводятся в собственной шкале времени аппаратуры, а момент излучения принятого сигнала известен в шкале времени каждого НС. Все эти времена отличаются друг от друга. Для проведения потребителями навигационных определений, привязки к точному времени и для планирования навигационных сеансов предусмотрены навигационные сообщения, передаваемые от НС потребителю в массивах данных.

По своему содержанию навигационное сообщение подразделяется на оперативную и неоперативную информацию.

Оперативная информация относится к тому НС, с борта которого передается данный навигационный радиосигнал и содержит:

- оцифровку меток времени НС;
- сдвиг шкалы времени НС относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС или *GPS*;
- относительное отличие несущей частоты излучаемого навигационного радиосигнала от номинального значения;

- эфемериды НС (параметры орбиты, позволяющие определить с высокой точностью координаты и скорость НС в любой момент времени).

Неоперативная информация содержит альманах системы, включающей в себя:

- данные о состоянии всех НС системы (альманах состояния);
- сдвиг шкалы времени каждого НС относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС или *GPS*;
- параметры орбит всех НС системы (альманах орбит);
- сдвиг шкалы времени системы ГЛОНАСС или *GPS* относительно всемирной шкалы *UTC*.

В системе ГЛОНАСС вся передаваемая информация имеет длительность 2,5 мин. и состоит из пяти кадров, длительностью 30 сек. Каждый кадр состоит из 15 строк, длительностью 2 сек. В пределах каждого кадра передается полный объем оперативной информации для данного НС и часть неоперативной информации. Оперативная информация содержится в первых четырех строках кадра, неоперативная – с пятой по пятнадцатую.

В системе *GPS* формат основного сообщения представляет собой кадр, состоящий из 1500 бит, скомпонован из пяти субкадров, называемых строками, по 300 бит. Строки передаются 6 сек. Оперативный период повторения информации, содержащейся в кадре, $T_K = 30$ сек.

В строке 1 передается с периодом T_K информация для коррекции бортовых часов НС. Строки 2, 3 содержат оперативную эфемеридную информацию о данном НС, передаваемую также с периодом T_K . Стока 4 предназначена для передачи параметров задержки распространения радиоволн в ионосфере, параметры согласования системного времени *GPS* со всемирным временем *UTC* и некоторых специальных сообщений. Стока 5 содержит информацию о конфигурации, состоянии всех НС системы и их альманахах.

Строки 4 и 5 имеют другие периоды повторения. Они составляют 1/25 часть полного объема, так что полное сообщение требует передачи 25 кадров. Поэтому период передачи неоперативной информации – 12,5 мин.

5.1 Алгоритм расчета координат и скорости НС по данным альманаха *GPS*. Точность формируемых координат

Альманах *GPS*, передаваемый потребителю для каждого НС в информационных сообщениях содержит следующие параметры:

- N_{0a} – номер недели, на которую передаются данные альманаха;
- t_{0a} – опорное время альманаха - время внутри недели N , на которое передаются данные альманаха;
- e – эксцентриситет НС;
- Δi – поправка к наклонению $i_0=54^\circ$;
- Ω_0 – угол восходящего узла на момент начала недели N ;
- $\dot{\Omega}$ – скорость прецессии орбиты;
- \sqrt{a} – корень из большой полуоси;
- ω – аргумент перигея;
- M_0 – средняя аномалия на эпоху t_{0a} .

Приведем алгоритм расчета координат и скорости НС в момент времени t недели N , рекомендуемый основным контрольным интерфейсным документом *GPS – ICD-200* [95]:

- $a = (\sqrt{a})^2$ – формирование большой полуоси;

- $n_0 = \sqrt{\mu/a^3}$ – формирование среднего движения, где $\mu = 398600.44$ км³/с² константа гравитационного поля Земли;
- $t_k = (N-N_{0a})604800 + t - t_{0a}$ – время от момента t_{0a} ;
- $M_k = M_0 + n_0 t_k$ – средняя аномалия на момент t_k ;
- $M_k = E_k - e \sin E_k$ – решается уравнение Кеплера для эксцентрической аномалии E_k на момент t_k ;
- $\sin \vartheta_k = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E_k}{1-e \cos E_k}$ $\cos \vartheta_k = \frac{\cos E_k - e}{1-e \cos E_k}$ – формирование истинной аномалии ϑ_k ;
- $\rho_k = a(1 - e \cos E_k)$ – формирование текущего радиуса орбиты;
- $i_k = i_0 + \Delta i$, $i_0 = 54^\circ$ – формирование наклонения;
- $\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \Omega_3) t_k - \Omega_3 t_{0a}$ – формирование долготы восходящего узла;
- $p = a(1 - e^2)$ – формирование параметра орбиты;
- $V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta$ – формирование радиальной составляющей скорости;
- $V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta)$ – формирование нормальной составляющей скорости;
- $u_k = \omega + \vartheta_k$ – формирование аргумента широты;
- формирование текущих координат и вектора абсолютной скорости НС в ГСК:

$$X = r (\cos u_k \cos \Omega - \sin u_k \sin \Omega \cos i_k);$$

$$Y = r (\cos u_k \sin \Omega + \sin u_k \cos \Omega \cos i_k)$$

$$Z = r \sin u_k \sin i_k$$

$$V_{0x} = V_r (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) - V_n (\sin u_k \cos \Omega_k + \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k); \quad (5.1)$$

$$V_{0y} = V_r (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k) - V_n (\sin u_k \sin \Omega_k - \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k);$$

$$V_{0z} = V_r \sin u_k \sin i_k + V_n \cos u_k \sin i_k$$

– формирование вектора скорости НС в ГСК:

$$\begin{aligned}\bar{V}_x &= \bar{V}_{0x} + \Omega_3 Y; \\ \bar{V}_y &= \bar{V}_{0y} - \Omega_3 X; \\ \bar{V}_z &= \bar{V}_{0z}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Приведенные алгоритмы являются упрощенными. Из всех возмущений, действующих на НС, учитывается только сжатие Земли, обуславливающее прецессию орбиты $\dot{\Omega}$. Но даже учет сжатия Земли является упрощенным – предполагается, что НС движется в равномерно прецессирующей плоскости. Отклонениями НС из этой плоскости приведенные алгоритмы пренебрегают. Не учитывается также прецессия перицентра, так как во-первых, для наклонений $\sim 55^\circ$ величина этой прецессии на порядок меньше скорости прецессии плоскости орбиты, во-вторых, при малых эксцентриситетах прецессия перицентра слабо влияет на изменение координат НС. При таком существенном упрощении алгоритмов прогноза параметров орбиты спутников *GPS* по данным альманаха представляют интерес точность прогноза и ее зависимость от времени. На рис. 5.1 и 5.2 приведены графики ошибок прогноза орбит *GPS* по данным альманаха для разных интервалов времени. На рис. 5.1 приведены графики на интервал 2 месяца, на рис. 5.2 – те же графики в более крупном масштабе для интервала 1 неделя. Прогноз выполнен по данным альманаха *GPS*. Выбранные на произвольную дату ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по этому

альманаху координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС для этого же интервала времени, представленных в *Internet International GNSS SERVICE* – Международной службой глобальных навигационных спутниковых систем (*IGS*) [с. 3]. Эфемериды получены в результате постобработки высокоточных лазерных измерений. Декларируемая точность эфемерид по координатам – 3 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.1, 5.2 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным альманаха.

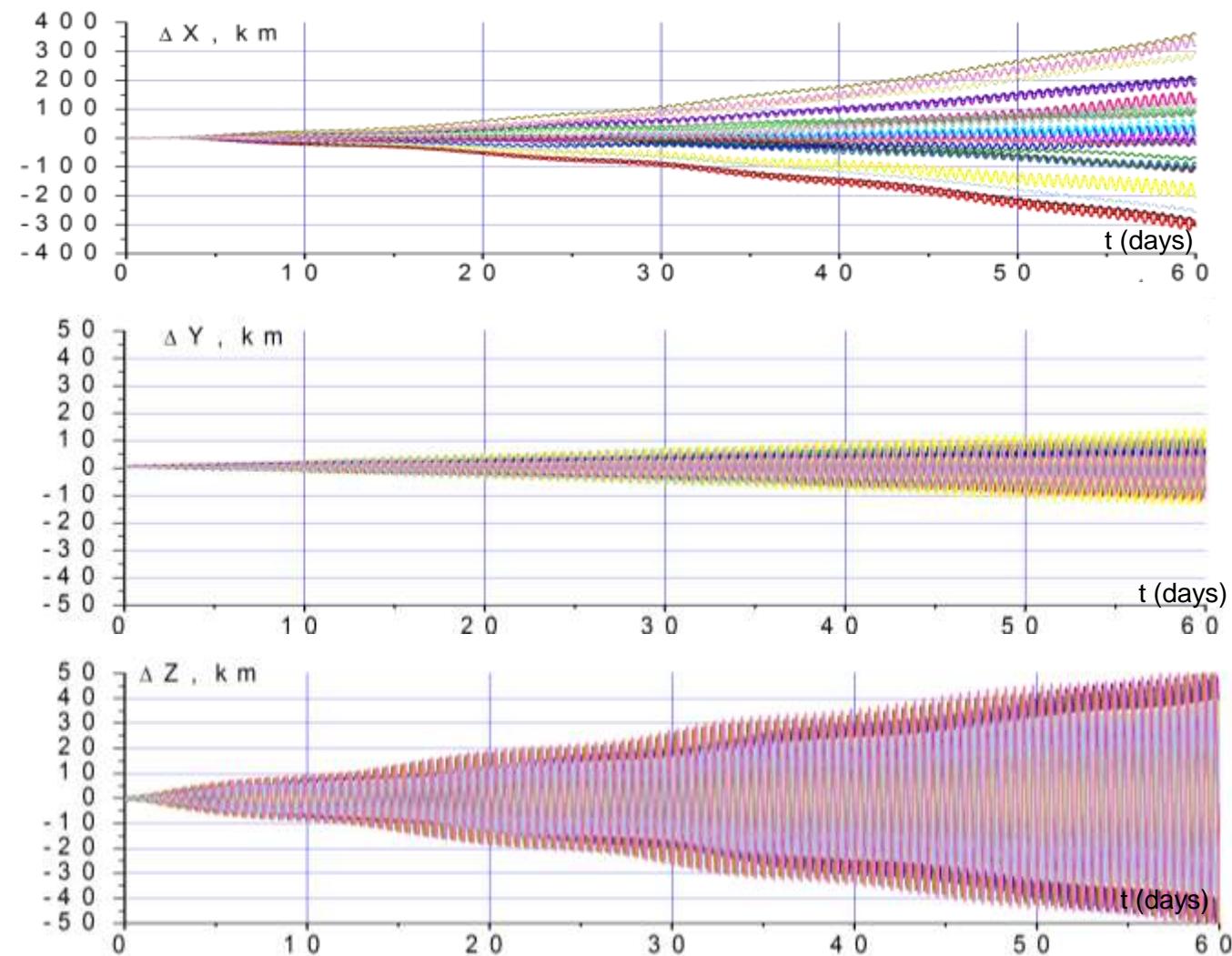


Рис. 5.1 Ошибки двухмесячного прогноза альманахов *GPS*.

Ошибки, приведённые на указанных графиках, представлены в ОСК. Из графиков следует, что ошибки прогнозируемых координат по осям X , Y , Z ОСК в течение первых двух дней от T_{oe} не превышают 2 км. К концу первой недели от T_{oe} ошибка возрастает по продольной дальности до 18 км, по боковой дальности до 8 км. К концу первого месяца ошибки возрастают до 100 км по продольной дальности и 30 км по боковой дальности. Ошибка по высоте не превышает 7 км. К концу второго месяца ошибки возрастают до 350 км по продольной дальности, 50 км по боковой дальности и 15 км по высоте. Пять спутников из тридцати в течение двух месяцев выполняли коррекцию орбиты. Из-за коррекции точность прогноза для этих спутников заметно ухудшается и доходит до 1÷2 тыс. км. Графики ошибок прогноза для этих НС исключены из рис. 5.1. Таким образом можно считать, что "время жизни" альманахов *GPS*, в течение которой точность прогноза координат НС составляет 1-2 км, не превышает двух дней. Вне "времени жизни" начинается достаточно резкий рост ошибок прогноза, хотя в течение недели ошибки по координатам не превышают 20 км.

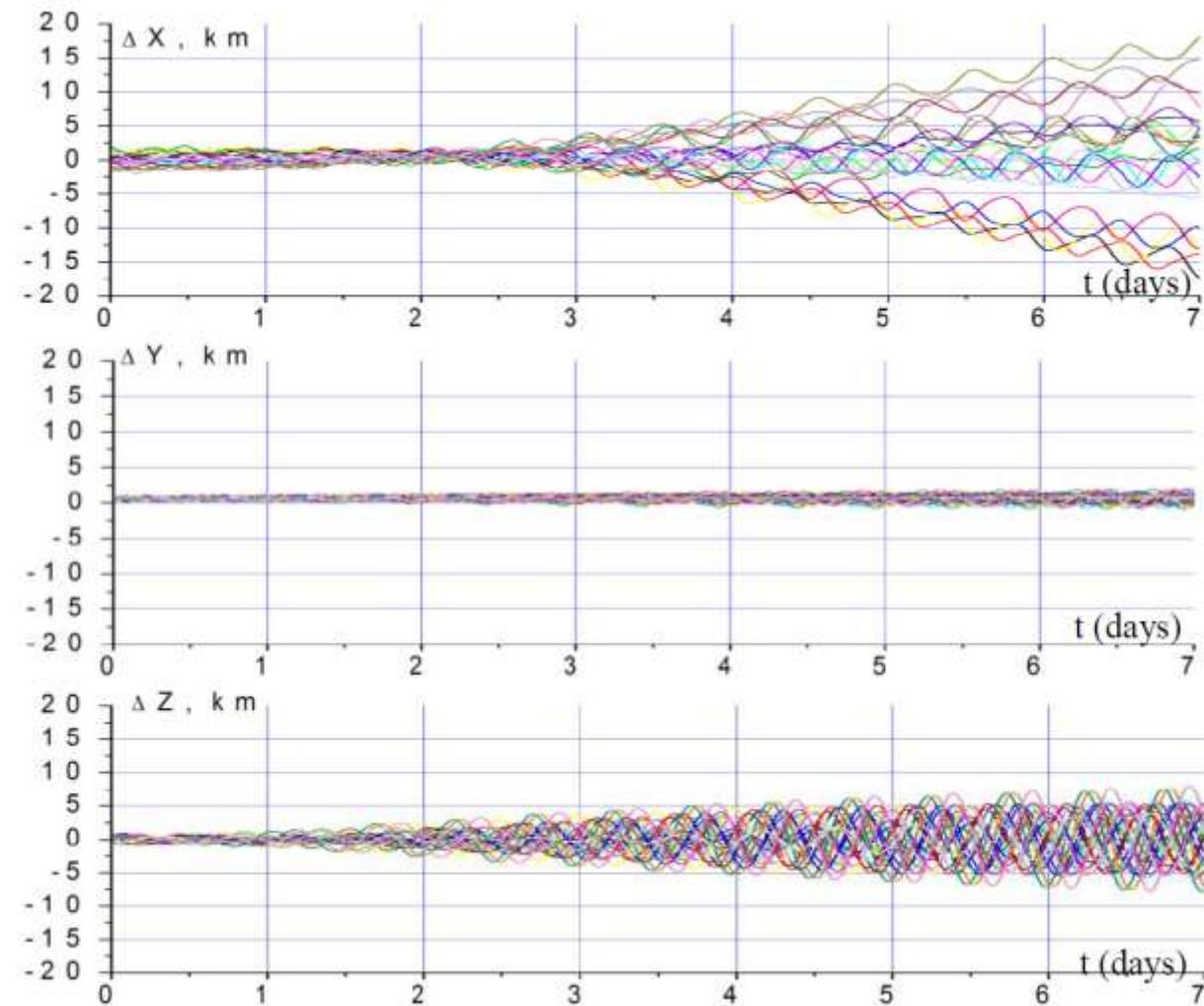


Рис. 5.2 Ошибки недельного прогноза альманахов *GPS*.

Графики, приведенные на рис. 5.1, 5.2, позволяют пользователю оценивать возможность использования эфемерид разного возраста для решения тех или иных функциональных задач. Например, альманах, заложенный в АСН на Земле за 2 месяца до старта КА может использоваться для оценки видимости НС и организации "теплого" старта АСН. "Свежий", двухдневный альманах может использоваться для решения задач высокоточной относительной навигации и ориентации.

Рассмотренный выше прогноз орбит НС по данным альманаха выполняется по простым алгоритмам, не требующим высокого быстродействия вычислителя. Этот алгоритм вполне может быть реализован на бортовых вычислительных средствах, имеющих существенные ограничения по быстродействию.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

5.2 Алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным эфемерид GPS. Точность формируемых координат и скорости

Эфемериды *GPS*, представляющие собой оперативную информацию о параметрах движения НС, содержат аналогичные по составу параметры, как и альманах *GPS*. Кроме этого в состав параметров эфемерид входит ряд поправок, обеспечивающих возможность прогноза орбиты НС с метровыми точностями на время порядка двух часов. Состав эфемерид следующий:

- M_0 – средняя аномалия на время эфемерид t_{0e} ;
- Δn – поправка к вычисляемому среднему движению;
- e – эксцентриситет;
- \sqrt{a} – корень из большой полуоси;
- Ω_0 – долгота восходящего узла на начало текущей недели;
- i_0 – угол наклонения на момент t_{0e} ;
- ω – аргумент перигея;
- $\dot{\Omega}$ – скорость восходящего узла;
- $IDOT$ – скорость угла наклонения;
- C_{ic} – косинусная поправка аргумента широты;
- C_{is} – синусная поправка аргумента широты;
- C_{rc} – косинусная поправка радиуса орбиты;
- C_{rs} – синусная поправка радиуса орбиты;
- C_{ic} – косинусная поправка наклонения;
- C_{is} – синусная поправка наклонения;

- t_{0e} – эфемеридное время, на которое даны параметры орбиты;
- *IODE* – выпуск данных. Смена номера *IODE* означает обновление эфемерид в передаваемом сообщении.

Легко видеть, что по отношению к данным альманаха в данных эфемерид имеются следующие изменения:

- дополнительно введена поправка Δn к вычисляемому среднему движению;
- в эфемеридах передается значение угла наклонения i_0 на момент t_{0e} , тогда как в альманахе передается поправка Δi к среднему значению наклонения 54° ;
- дополнительно введена скорость угла наклонения *IDOT*, тогда как в альманахе изменением наклонения пренебрегают;
- в эфемеридах не передается номер недели. Предполагается, что текущее время t и t_{0e} относятся к одной текущей неделе;
- дополнительно введены шесть косинусно-синусных поправок $C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}$, уточняющих значения аргумента широты, радиуса и наклонения.

Приведем алгоритм расчета координат и скорости НС в момент времени t , рекомендуемый основным контрольным интерфейсным документом *IS-GPS-200* [95]:

- $a = (\sqrt{a})^2$ – формирование большой полуоси;
- $n_0 = \sqrt{\mu / a^3}$ – формирование вычисленного среднего движения;
- $n = n_0 + \Delta n$ – формирование среднего движения с учетом поправки;
- $t_k = t - t_{0e}$ – формирование интервала прогноза от t_{0e} ;
- $M_k = M_0 + nt_k$ – средняя аномалия на момент t_k ;

- $M_k = E_k - e \sin E_k$ – решается уравнение Кеплера для эксцентрической аномалии E_k на момент t_k ;
- $\sin \vartheta_k = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E_k}{1-e \cos E_k}; \cos \vartheta_k = \frac{\cos E_k - e}{1-e \cos E_k}$ – формирование истиной аномалии ϑ_k по значениям $\sin \vartheta_k$ и $\cos \vartheta_k$;
- $\Phi_k = \vartheta_k + \omega$ – формирование аргумента широты;
- $\rho_k = a(1-e \cos E_k)$ – формирование текущего радиуса орбиты;
- $i_k = i_0 + IDOT \cdot t_k$ – формирование текущего наклонения;
- $\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \Omega_3) t_k - \Omega_3 t_{0e}$ – формирование долготы восходящего узла;
- $\delta u_k = C_{uc} \cos 2\Phi_k + C_{us} \sin 2\Phi_k$ – поправка аргумента широты;
- $\delta \rho_k = C_{pc} \cos 2\Phi_k + C_{ps} \sin 2\Phi_k$ – поправка радиуса орбиты;
- $\delta i_k = C_{ic} \cos 2\Phi_k + C_{is} \sin 2\Phi_k$ – поправка к наклонению;
- $u_k = \Phi_k + \delta u_k$ – коррекция аргумента широты;
- $\rho_k = \rho_k + \delta \rho_k$ – коррекция радиуса орбиты;
- $i_k = i_k + \delta i_k$ – коррекция наклонения.

Расчет координат X, Y, Z НС в ГСК:

- $X_k = \rho_k (\cos U_k \cos \Omega_k - \sin U_k \sin \Omega_k \cos i_k)$
- $Y_k = \rho_k (\cos U_k \cos \Omega_k + \sin U_k \sin \Omega_k \cos i_k)$
- $Z_k = \rho_k \sin U_k \sin i_k$

К сожалению, в контрольном документе *IS-GPS-200* не приведены рекомендуемые формулы для вычисления скорости НС в ГСК. С высокой точностью можно определять скорость НС по разности координат:

$$\bar{V}_k = \frac{\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_{k-1}}{2}. \quad (5.3)$$

Для вычисления вектора скорости по алгоритму (5.3) в момент времени t_k необходимо вычислять координаты НС в предшествующую и последующую секунды по отношению к времени t_k , что требует дополнительных вычислений. Однако расчет вектора скорости может быть выполнен и по следующему алгоритму, аналогичному алгоритму вычисления скорости по данным альманаха:

- формирование параметров Кеплера для скорости:

$$\Phi_v = n \cdot \sqrt{1 - e^2} / (1 - e \cos E)^2;$$

$$u_v = \Phi_v \cdot [1 + 2(C_{us} \cos 2\Phi_k - C_{us} \sin 2\Phi_k)];$$

$$\rho_v = a \sin E \cdot n \cdot e / (1 - e \cos E + 2\Phi_v (C_{rs} \cos 2\Phi_k - C_{rc} \sin 2\Phi_k));$$

$$i_v = IDOT + 2\Phi_v (C_{is} \cos 2\Phi_k - C_{ic} \sin 2\Phi_k);$$

$$\Omega_{0v} = \dot{\Omega} - \Omega_3.$$

- положение и скорость в орбитальной плоскости:

$$x_p = \rho_k \cos u_k;;$$

$$y_p = \rho_k \sin u_k;;$$

$$x_{pv} = \rho_v \cos u_k - \rho_k \sin u_k \cdot u_v;;$$

$$y_{pv} = \rho_v \sin u_k + \rho_k \cos u_k \cdot u_v;;$$

– положение и скорость в WGS 84:

$$X = x_0 \cos \Omega_k - y_p \sin \Omega_k \cos i_k;;$$

$$Y = x_p \sin \Omega_k + y_p \cos \Omega_k \cos i_k;;$$

$$Z = y_p \sin i_k;;$$

$$V_x = x_{pv} \cdot \cos \Omega_k - y_{p_v} \cos i_k \sin \Omega_k - x_p \sin \Omega_k \cdot \Omega_{0v} - y_p (-\sin i_k \sin \Omega_k \cdot i_v + \cos i_k \cos \Omega_k \cdot \Omega_{0v});$$

$$V_y = x_{p_v} \sin \Omega_k + y_{pv} \cos i_k \cos \Omega_k + x_p \cdot \cos \Omega_k \cdot \Omega_{0v} + y_p (-\sin i_k \cos \Omega_k i_v - \cos i_k \sin \Omega_k \cdot \Omega_{0v});$$

$$V_z = u_{pv} \sin i_k + y_p \cos i_k \cdot i_v.$$

На рис. 5.3 приведены типовые графики ошибок проекций скорости ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z для спутников *GPS* в ГСК. Графики получены путем сравнения вектора скорости, полученного по приведенным выше алгоритмам, с опорными высокоточными значениями скорости, полученными путем постобработки лазерных измерений и представленных в *Internet* на сайте *IGS* [с. 3]. Ошибки опорных векторов скорости оцениваются величиной порядка сотых долей мм/с. Из приведенных графиков видно, что ошибки скорости на интервале $\sim 1,5$ часа от t_{0e} составляют величину $0,1 \div 0,3$ мм/сек, после чего резко возрастают. Через ~ 5 час от t_{0e} ошибки уже составляют величину порядка 1 см/сек.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

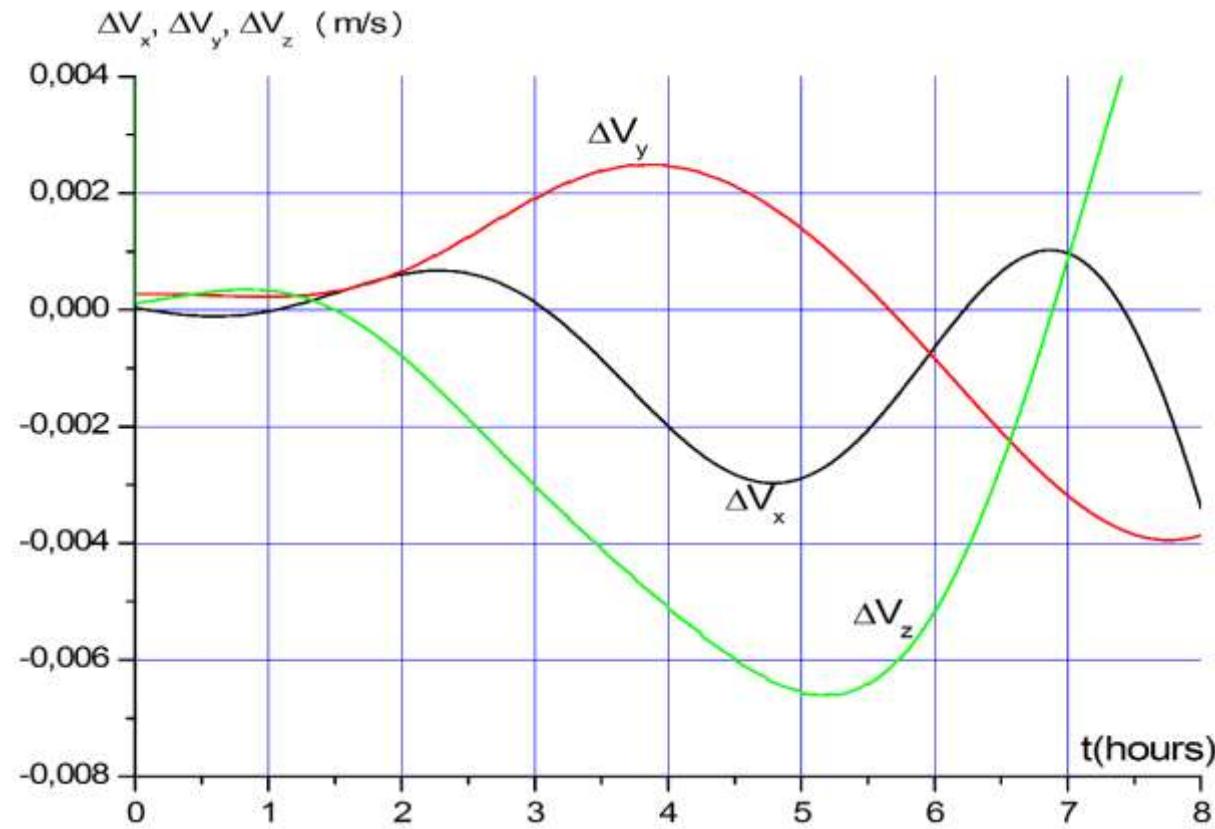


Рис. 5.3 Ошибки прогноза эфемерид *GPS* по скорости на интервале 8 часов.

Оценим точность координат спутников *GPS*, получаемых по приведенным выше официальным алгоритмам в зависимости от времени. На рис. 5.4, 5.5 приведены графики ошибок прогноза орбит *GPS* по данным эфемерид для разных интервалов времени. На рис. 5.4 указанные графики приведены для интервала – сутки, на рис. 5.5 те же графики в более

крупном масштабе – для интервала 3 часа. Прогноз выполнен по эфемеридам, выбранным на произвольную дату. Ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по эфемеридам координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС для этого же интервала времени, представленных в *Internet* [с. 3]. Эфемериды получены в результате постобработки высокоточных лазерных измерений. Декларируемая точность по координатам – 3 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.4, 5.5 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным эфемерид, если прогноз реализуется по рекомендуемым официальным алгоритмам.

Ошибки, приведенные на указанных графиках, представлены в ОСК. Из графиков следует, что ошибки прогнозируемых координат X , Y , Z по осям ОСК в течение первых двух часов от t_{0e} лежат в диапазоне ± 2 м. Затем начинается быстрый "разлет", и к концу суток ошибки по продольной и боковой дальности достигают 1 км, по высоте – 300 м

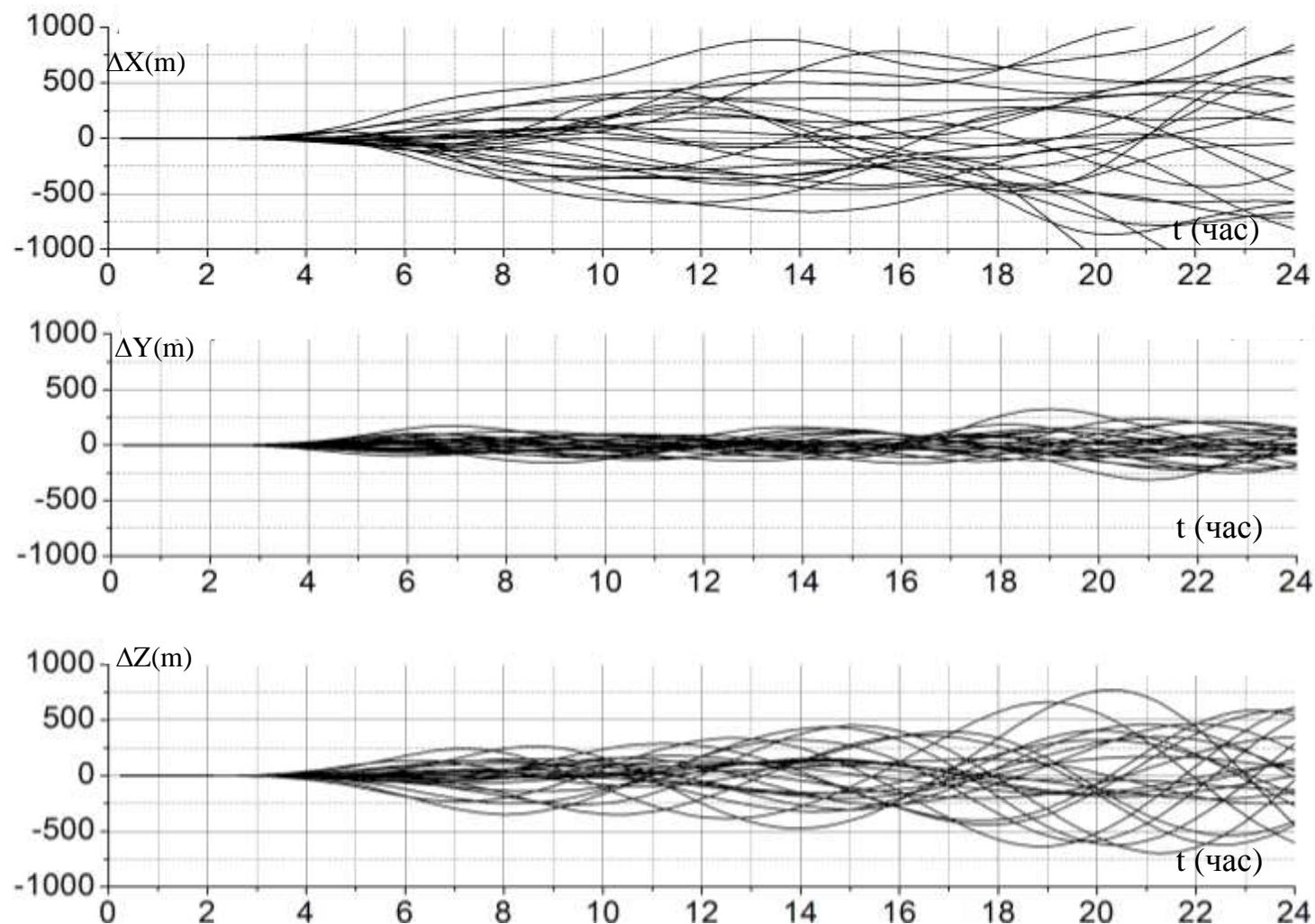


Рис. 5.4 Ошибки суточного прогноза эфемерид *GPS*.

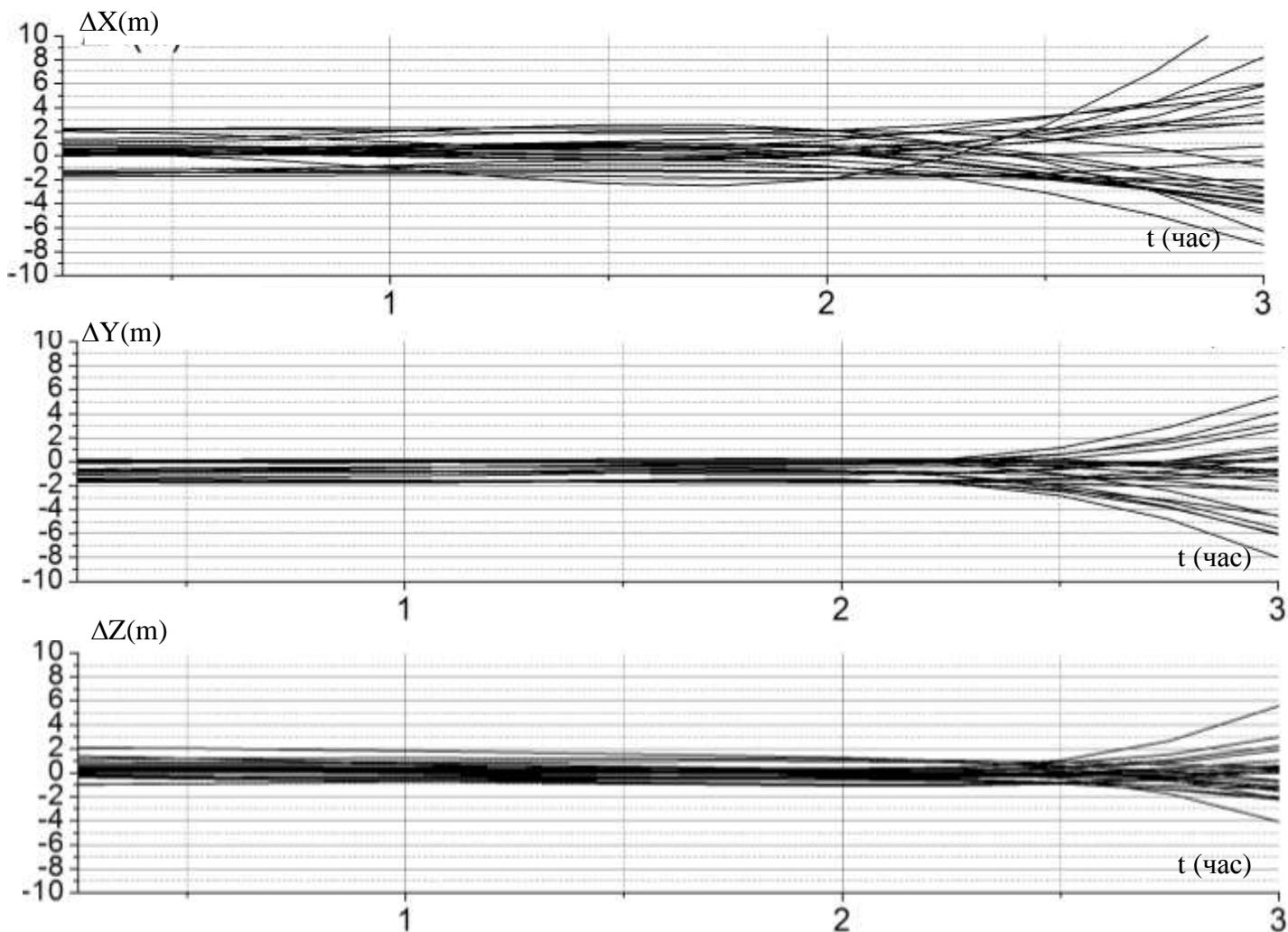


Рис. 5.5 Ошибки трехчасового прогноза эфемерид GPS.

5.3 Алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным альманаха ГЛОНАСС. Точность формируемых координат

Альманах ГЛОНАСС, передаваемый потребителю, для каждого НС в информационных сообщениях содержит следующие параметры:

- N_A – номер суток, на которые дан альманах;
- t_A – московское декретное время прохождения восходящего узла, ближайшего к началу суток N_A ;
- λ – долгота восходящего узла на момент t_A ;
- Δi – поправка к наклонению $i_{CP} = 63^\circ$;
- ΔT_A – поправка к среднему драконическому периоду $T_{CP} = 43200$ на момент t_A ;
- T' – скорость изменения периода обращения;
- e – эксцентриситет;
- ω – аргумент перигея на момент t_A .

Рекомендуемые алгоритмы вычисления векторов координат и скорости НС на любой заданный момент времени по данным альманаха приведены в Интерфейсном контролльном документе (ИКД) ГЛОНАСС [42]. По сравнению с рекомендуемыми алгоритмами для альманаха *GPS*, где рассматривается Кеплерово движение НС в прецессирующей плоскости орбиты, в рекомендуемых алгоритмах для альманаха ГЛОНАСС рассматривается движение НС вне прецессирующей плоскости, учитываются вековые и периодические возмущения от второй зональной гармоники C_{20} в разложении геопотенциала, характеризующей полярное сжатие Земли. В результате рекомендуемые алгоритмы являются необоснованно громоздкими.

При этом не достигается какое-либо повышение точности алгоритма, так как не учитывается основное возмущение – гравитационное влияние от Луны и Солнца, обуславливающее значительно большую ошибку прогноза орбиты по сравнению с учтываемыми в алгоритме поправками. Поэтому здесь приводятся значительно более простые алгоритмы расчета векторов координат и скорости НС, которые обеспечивают практически такую же точность прогноза, но требуют для своей реализации в несколько раз меньший объем вычислений:

$i = i_{CP} + \Delta i$ – наклонение $i_{CP} = 63^\circ$;

$T_{dp} = T_{CP} + \Delta T$ – начальный драконический период, $T_{CP} = 43200$;

$n = 2\pi/T_{dp}$ – среднее движение;

$a = \sqrt[3]{\mu/n^2}$ – большая полуось, $\mu = 398600,44 \text{ км}^3/\text{с}^2$;

$\Delta t_\Pi = 86400 (N_{mek} - N_A) + t_{mek} - t_A$ – время от прохождения экватора в момент t_A до текущего момента;

N_{mek} – текущая неделя;

t_{mek} – текущее время в текущую неделю.

$\dot{\lambda} = -10 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} \cos i \frac{\pi}{180 \cdot 86400}$ – скорость прецессии орбиты, $a_e = 6378136$ м – экваториальный радиус Земли;

$\dot{\omega} = 5 \left(\frac{a_e}{a} \right)^{7/2} (5 \cos^2 i - 1) \frac{\pi}{180 \cdot 86400}$ – скорость прецессии перигея;

$E_\Pi = -2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right) \right)$ – эксцентрисическая аномалия в момент прохождения экватора;

$M_{\Pi} = E_{\Pi} - e \sin E_{\Pi}$ – средняя аномалия в момент прохождения экватора;

$\delta T_{\Pi} = -\frac{M_{\Pi}}{n} + \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \pi \\ T_{\text{оп}} & \text{при } \omega > \pi \end{cases}$ – время пролета от экватора до перигея;

$M_k = n(\Delta t_{\Pi} - \delta T_{\Pi}) - \frac{\pi}{T_{\text{оп}}^3} T' (\Delta t_{\Pi} - \delta T_{\Pi})^2$ – средняя аномалия в текущий момент;

$M_k = E_k - e \sin E_k$ – уравнение Кеплера для вычисления эксцентрисической аномалии E_k на текущий момент;

$\sin \vartheta_k = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E_k}{1 - e \cos E_k} \quad \cos \vartheta_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e \cos E_k}$ соотношения для вычисления истинной аномалии на текущий момент;

$\omega_k = \omega + \omega \Delta t_{\Pi}$ – аргумент перигея на текущий момент;

$\Omega_k = \lambda + (\dot{\lambda} - \omega) \Delta t_{\Pi}$ – угол восходящего узла на текущий момент;

$u_k = \vartheta_k + \omega_k$ – аргумент широты на текущий момент;

$\rho_k = a(1 - e \cos E_k)$ – радиус орбиты на текущий момент;

$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{e \sin \vartheta_k}{\sqrt{1 - e^2}}$ – радиальная составляющая скорости на текущий момент;

$V_u = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1 + e \cos \vartheta_k}{\sqrt{1 - e^2}}$ – нормальная составляющая скорости на текущий момент;

$$X_k = \rho_k (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i)$$

$$Y_k = \rho_k (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i)$$

$$Z_k = \rho_k \sin u_k \sin i$$

– текущие координаты НС в ГСК;

$$V_{xk0} = V_r (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cdot \cos i) - V_u (\sin u_k \cos \Omega_k + \cos u_k \sin \Omega_k \cdot \cos i),$$

$$V_{yk0} = V_r (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cdot \cos i) - V_u (\sin u_k \sin \Omega_k - \cos u_k \cos \Omega_k \cdot \cos i),$$

$$V_{zk0} = V_r \sin u_k \sin i + V_u \cos u_k \sin i$$

– компоненты абсолютной скорости НС в ГСК;

$$V_{xk} = V_{xk0} + \omega_3 Y_k$$

$$V_{yk} = V_{yk0} - \omega_3 X_k \quad \text{– компоненты скорости НС в ГСК.}$$

$$V_{zk} = V_{zk0}$$

Приведенный алгоритм вполне может использоваться в АСН для вычисления координат и скорости НС ГЛОНАСС вместо официально рекомендуемых алгоритмов. Точность координат НС, формируемых по данным альманаха ГЛОНАСС с использованием этих алгоритмов, демонстрируют графики, приведенные на рис. 5.6 и 5.7.

На рис. 5.6 приведены графики ошибок прогнозируемых координат группировки ГЛОНАСС по данным альманаха для произвольно выбранного времени t_A для интервала 60 дней. Верхние графики относятся к ошибкам по продольной дальности, средние – по высоте, нижние – по боковой дальности относительно ОСК.

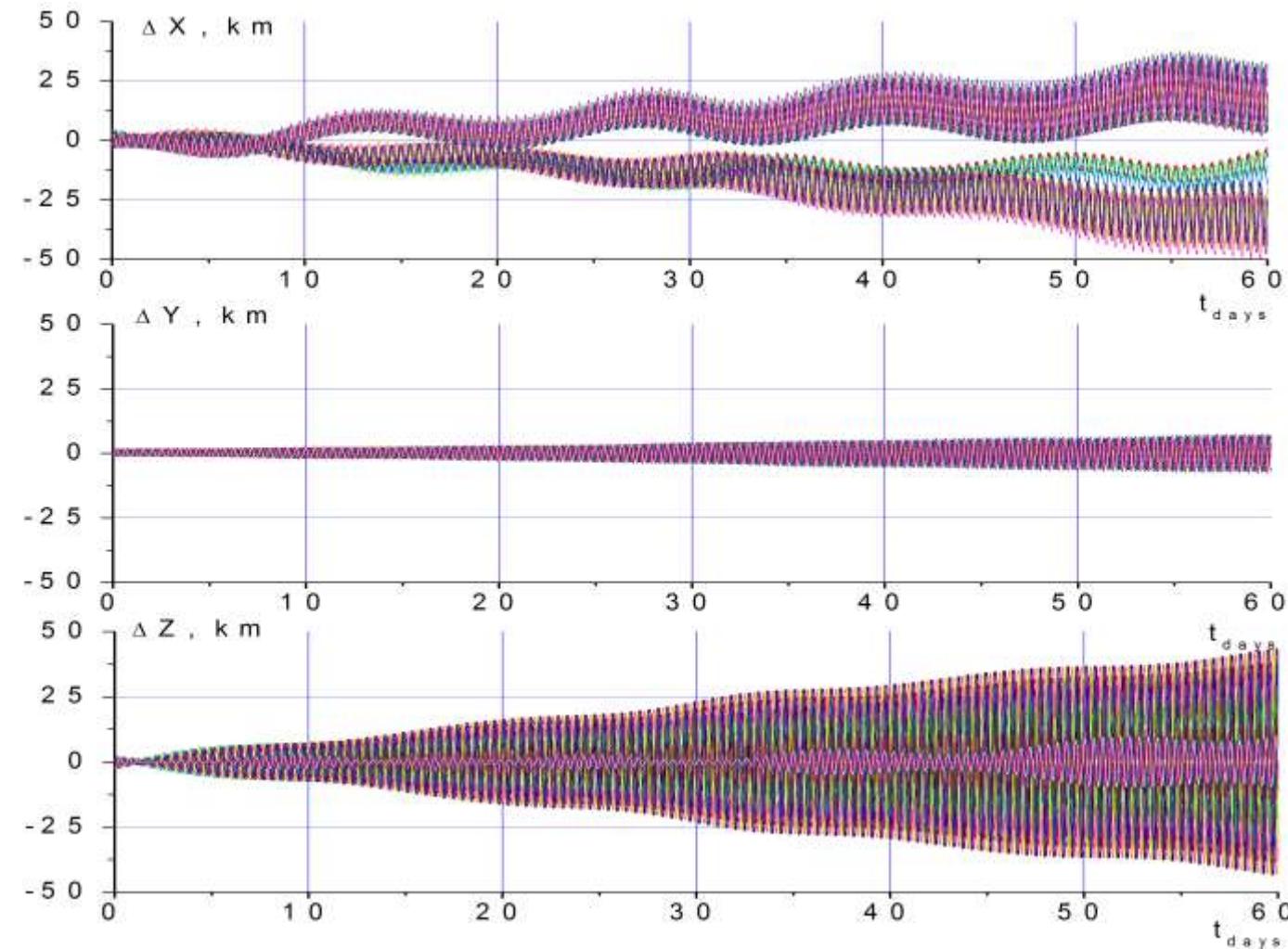


Рис. 5.6 Ошибки двухмесячного прогноза альманаха ГЛОНАСС.

На рис. 5.7 приведены эти же графики в более крупном масштабе для интервала 7 дней. Ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по приведенному алгоритму координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС для этого же интервала времени, представленные в Интернете Международной службой глобальных навигационных спутниковых систем [с. 3]. Декларируемая точность прецизионных эфемерид по координатам – 5 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.6, 5.7 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным альманаха ГЛОНАСС с использованием рассмотренного алгоритма. Из графиков следует, что ошибки прогнозируемых координат по осям YZ ОСК в течение первых двух дней от T_A не превышают 2,5 км, по продольной оси X – 4 км. К концу первой недели ошибка возрастает по продольной и боковой дальностям до 7 км, по вертикали – до 3 км. К концу первого месяца ошибки возрастают по продольной и боковой дальности – до 25 км, по вертикали – до 5 км. К концу второго месяца – по продольной и боковой дальности – 50 км, по вертикали – 8 км.

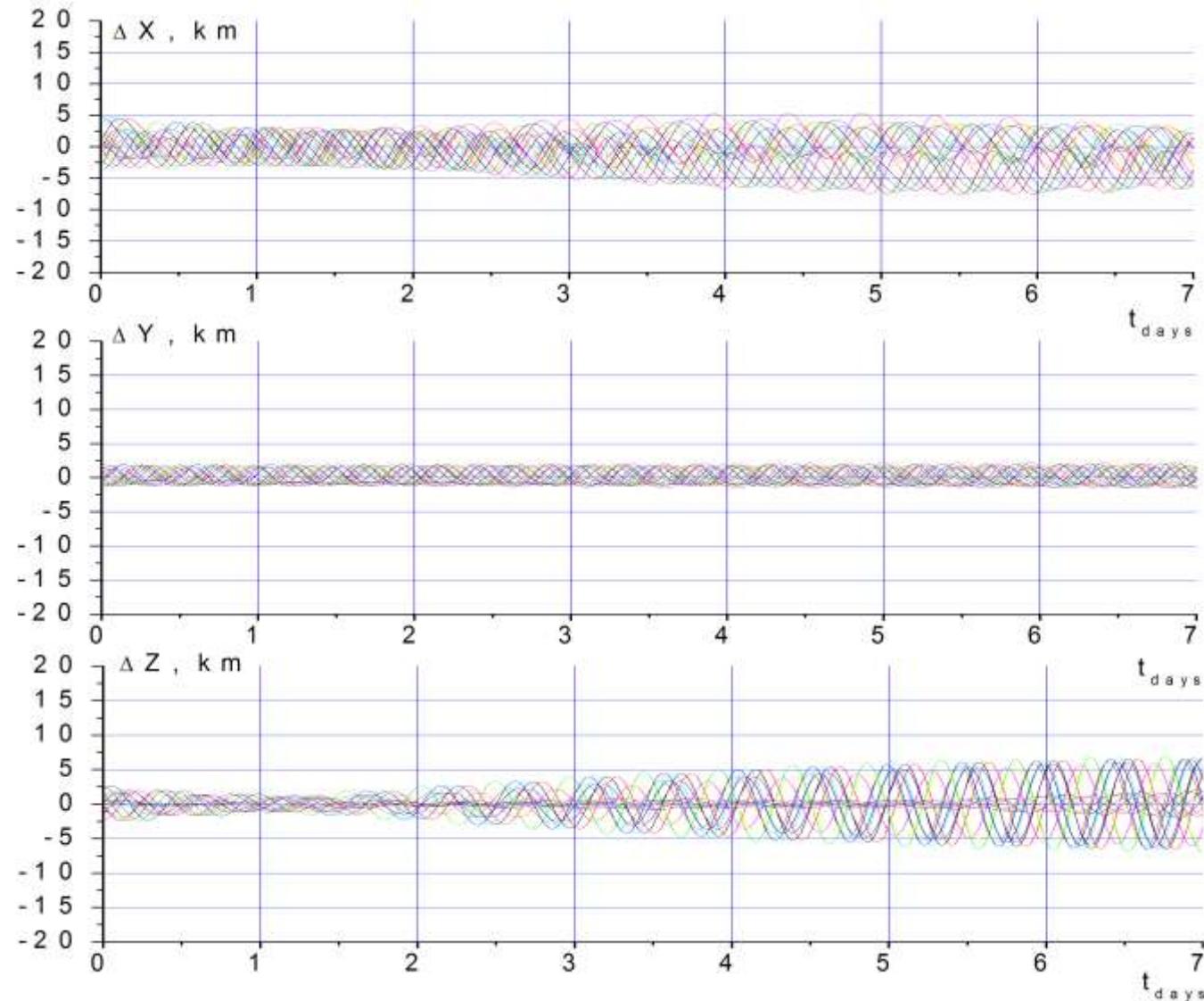


Рис. 5.7 Ошибки недельного прогноза альманаха ГЛОНАСС.

Сравнение приведенных графиков ошибок прогноза координат ГЛОНАСС по данным альманаха с аналогичными графиками для спутников *GPS* (см. рис. 5.1, 5.2) показывает, что в целом графики ошибок ГЛОНАСС аналогичны графикам ошибок *GPS* с той лишь разницей, что точность прогнозируемых координат ГЛОНАСС на длительный срок значительно выше, чем для *GPS*. Для интервала прогноза 60 дней ошибки прогноза по продольной дальности *GPS* составляют ~400 км, а ГЛОНАСС – 50 км. Поэтому для решения многих навигационных задач данные альманаха ГЛОНАСС могут использоваться в течение 1÷2 месяцев при условии отсутствия коррекции орбиты НС.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

5.4 Алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным эфемерид ГЛОНАСС. Точность формируемого вектора состояния

В состав оперативной информации навигационного сообщения ГЛОНАСС входят следующие параметры, позволяющие определить векторы координат и скорости НС для любого момента времени:

- t_b – время, к которому относятся передаваемые данные;
- X, Y, Z – координаты НС в ГСК на момент t_b ;
- $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ – скорость НС в ГСК на момент t_b ;
- $\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$ – возмущающие ускорения от Луны и Солнца в момент t_b .

Передаваемые от НС эфемериды, как правило, обновляются каждые 30 мин через 15 мин после очередного значения t_b . Расчет эфемерид на заданный момент t заключается в интегрировании уравнений движения КА в диапазоне ± 15 мин. от времени t_b .

В ИКД рекомендуются два алгоритма расчета координат НС, первый из которых, называемый "упрощенный", заключается в интегрировании методом Рунге-Кутта четвертого порядка приближенных уравнений движения НС в гринвичской системе координат:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V \\ \dot{Y} &= V_y \\ \dot{Z} &= V_z\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= -\frac{\mu}{r^3}X + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}X\left(1-\frac{5Z}{r^2}\right) + \omega_3^2 X + 2\omega V_y + \ddot{X}; \\ \dot{V}_y &= -\frac{\mu}{r^3}Y + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}Y\left(1-\frac{5Z}{r^2}\right) + \omega_3^2 Y - 2\omega V_x + \ddot{Y}; \\ \dot{V}_z &= -\frac{\mu}{r^3}Z + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}Z\left(3-\frac{5Z}{r^2}\right) + \ddot{Z},\end{aligned}$$

где

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$\mu = 398600,4418 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$ – константа гравитационного поля Земли;

$a_e = 6378136 \text{ м}$ – экваториальный радиус Земли;

$C_{20} = -1082625,75 \cdot 10^{-9}$ – вторая зональная гармоника разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям;

$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли;

$\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$ – гравитационные возмущения от Луны и Солнца, передаваемые с НС в составе эфемерид.

Начальными условиями интегрирования системы уравнений (5.4) являются векторы координат X, Y, Z и скорости V_x, V_y, V_z НС на момент времени t_b , передаваемые в составе эфемерид

Алгоритм формирования векторов координат и скорости путем интегрирования уравнений движения (5.4) является простым и удобным. Учитывая, что шаг интегрирования, как показано в разделе 2.5, здесь может быть выбран в несколько сотен секунд, на решение

задачи тратится минимальное время даже при использовании бортовых вычислителей. Оценим точность формируемых координат НС.

Выше было отмечено, что уравнения (5.4) являются приближенными. Поэтому, даже если на момент t_b от НС были получены абсолютно точные координаты НС, при интегрировании уравнений (5.4) возникли бы ошибки, обусловленные неучётом в этих уравнениях ряда возмущающих факторов. Рассмотрим эти факторы в порядке степени их влияния на точность формируемых координат.

Основным источником ошибок прогнозируемых с использованием данного алгоритма координат является некорректность учета гравитационного воздействия от Луны и Солнца. Значения этих возмущений передаются от НС потребителю в виде констант на весь 30 минутный интервал прогнозирования с дискретностью 10^{-6} м/с².

Вторым по значимости возмущением, как ни странно, является смещение оси вращения Земли относительно оси Z ГСК.

Третьим возмущением является не учёт аномальной части гравитационного поля Земли.

Четвертым возмущением является неучет влияния сил солнечного давления.

Точность координат НС, формируемых по данным эфемерид ГЛОНАСС с использованием рассмотренного алгоритма, демонстрируют графики, приведенные на рис. 5.8, 5.9. На рис. 5.8 приведены графики ошибок прогнозируемых координат группировки ГЛОНАСС по данным эфемерид для произвольно выбранного времени t_b на интервале ± 12 часов относительно t_b . Ошибки представлены в ОСК. Верхние графики представляют собой ошибки по продольной дальности, средние – по высоте, нижние – по боковой дальности.

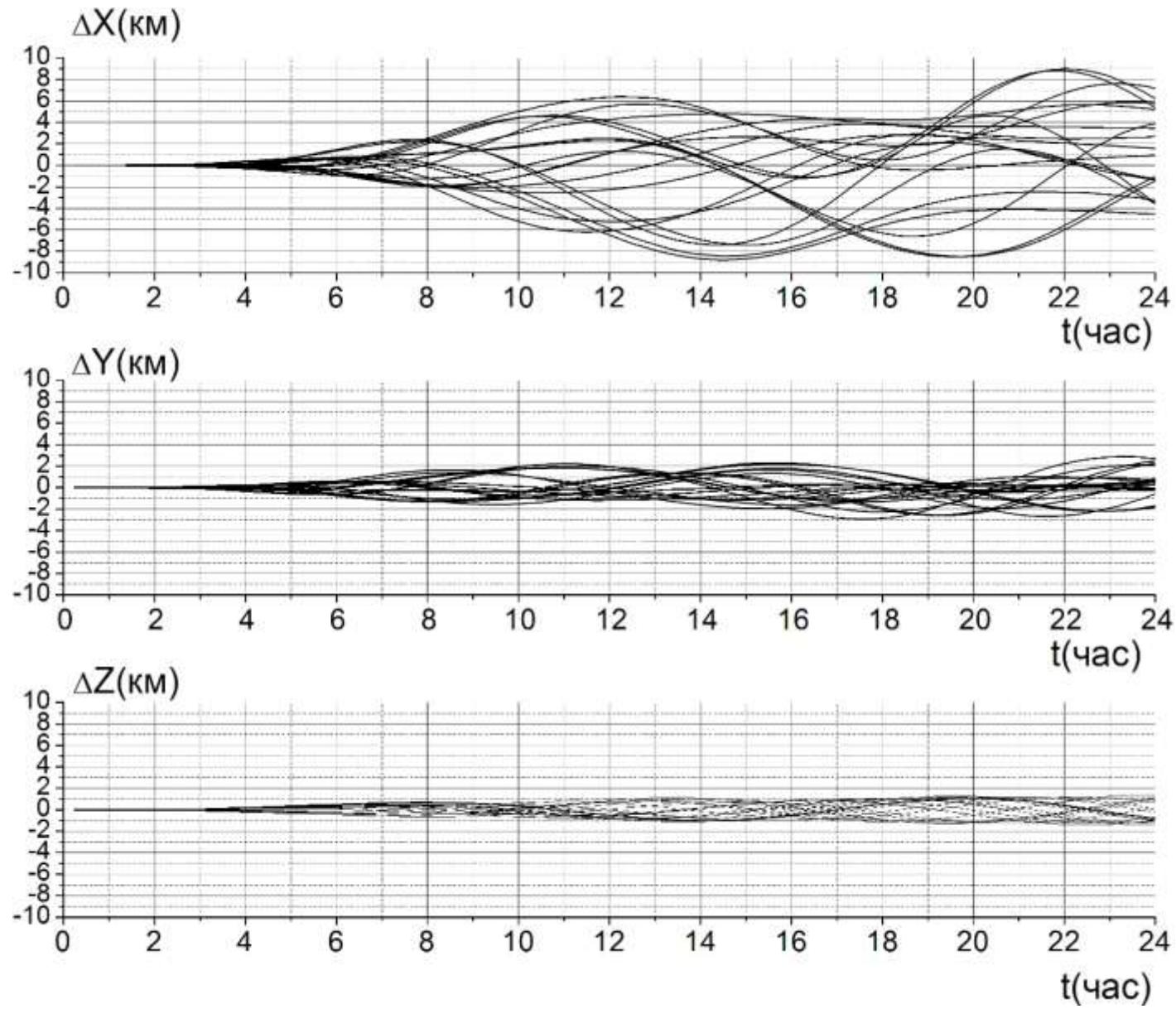


Рис. 5.8 Ошибки суточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС.

На рис. 5.9 приведены эти же графики в более крупном масштабе для интервала три часа относительно времени t_b . Ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по приведенному алгоритму координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС, для этого же интервала времени, представленных в Интернете Международной службой глобальных навигационных спутниковых систем [с. 3]. Декларируемая точность прецизионных эфемерид по координатам – 5 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.8, 5.9 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным эфемерид ГЛОНАСС с использованием рассмотренного алгоритма. Из графиков следует, что в течение 0,5 мин. от t_b ошибки прогнозируемых координат по трем осям X , Y , Z составляют 3÷6 м. При $|t - t_b| > 1$ час ошибки начинают превышать уровень 5÷8 м, при $|t - t_b| > 1,5$ час ошибки составляют 20÷30 м. Отсюда можно сделать вывод, что интервал времени, на котором прогнозируемые ошибки остаются на уровне ошибок координат в момент t_b (3÷5 м) для НС ГЛОНАСС составляет всего 30 мин. от времени t_b . Этот интервал можно назвать "временем жизни" эфемерид, на котором обеспечивается максимальная точность прогноза координат. Вне интервала "времени жизни" ошибки прогнозируемых координат резко возрастают.

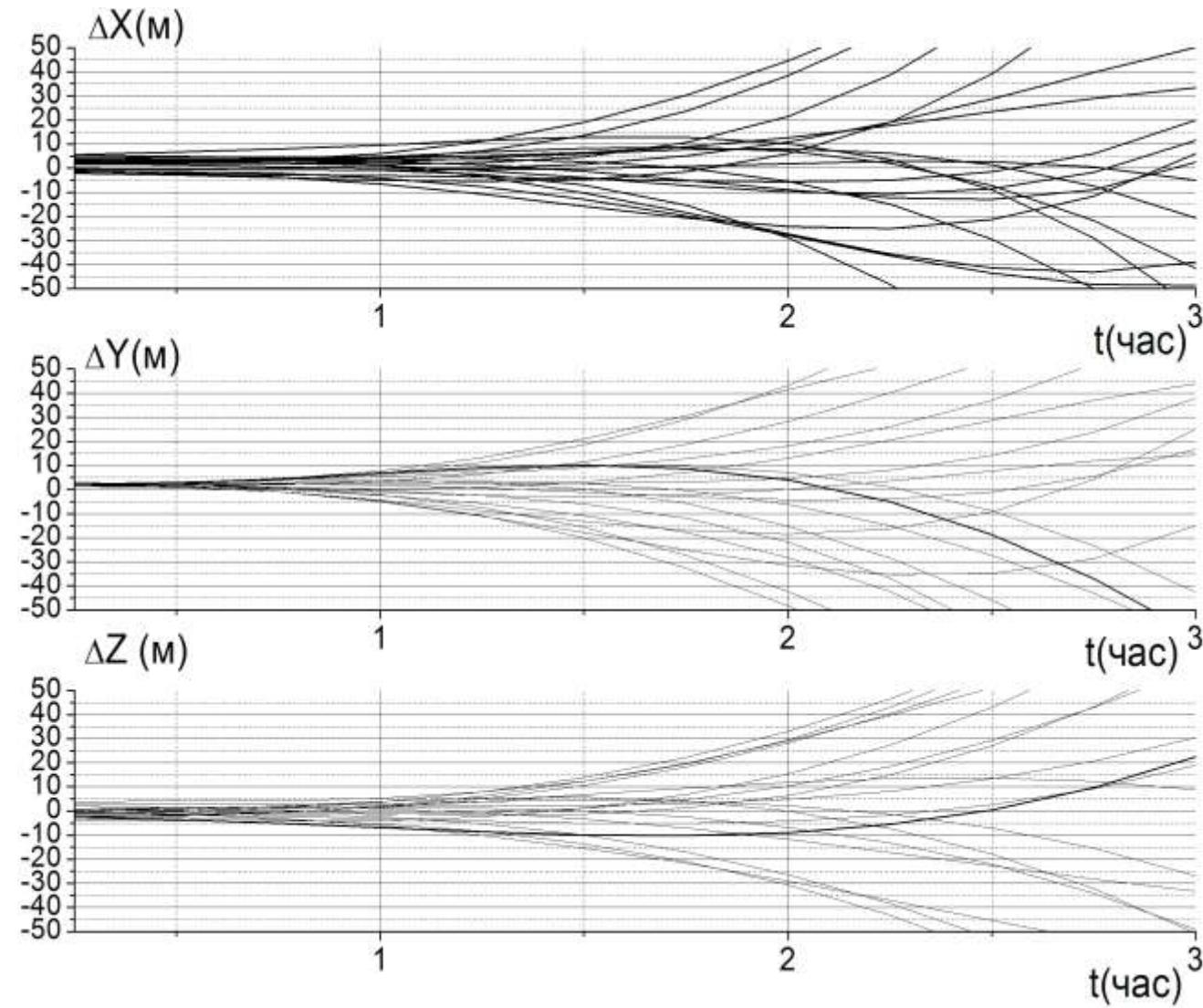


Рис. 5.9 Ошибки трехчасового прогноза эфемерид ГЛОНАСС.

Интересно сравнить точность прогнозируемых эфемерид ГЛОНАСС с ошибками прогноза эфемерид *GPS*, приведенными на рис. 5.4, 5.5. Из приведенных на этих рисунках графиках видно, что ошибки эфемерид *GPS* в момент t_{0e} составляют ~ 2 м по трем координатам, т.е. точность эфемерид *GPS* несколько выше точности эфемерид ГЛОНАСС в момент t_b , хотя и имеют одинаковый порядок. Однако точность эфемерид *GPS* на этом же уровне сохраняется в течение интервала времени ± 2 часа от t_{0e} . То есть, "время жизни" эфемерид *GPS* составляет ± 2 часа – в 4 раза дольше "времени жизни" ГЛОНАСС. Объяснение этому дано в разделе 5.2. Передаваемые в составе данных эфемерид *GPS* поправки C_{ij} учитывают кроме сжатия Земли влияние аномальной части гравитационного поля Земли, гравитационное влияние Луны и Солнца, модель сил солнечного давления и реальное смещение полюса Земли.

В течение суток "разлет" орбит *GPS* составляет $\sim 0,5$ км (см. рис. 5.4), а "разлет" орбит ГЛОНАСС составляет ~ 10 км. Отмеченная разность объясняется тем, что приближенные алгоритмы прогноза орбит ГЛОНАСС не предназначены для прогноза на интервал более чем 30-60 мин, так как передаваемые для расчета прогноза гравитационные возмущения от Луны и Солнца даны в виде приближенных констант, ошибки которых на интервале прогноза более одного часа существенно ухудшают точность прогноза. Некоторое повышение точности прогноза на суточном интервале обеспечивает второй алгоритм прогноза эфемерид ГЛОНАСС, рекомендуемый потребителям в ИКД, начиная с пятой редакции этого документа [42].

По этому алгоритму выполняется перевод вектора состояния НС с ИСК, для ИСК приводятся алгоритмы формирования гравитационных возмущений от Луны и Солнца, в ИСК осуществляется интегрирование уравнений движения КА с учетом второй зональной

гармоники разложения геопотенциала Земли по сферическим функциям. Сформированные в результате интегрирования векторы координат и скорости НС вновь переводятся в ГСК.

На рис. 5.10 приведены графики "разлета" координат ГЛОНАСС, прогнозируемых по этому алгоритму. Из графиков видно, что точность прогноза на суточный интервал для этого алгоритма стала такой же, как и для прогноза эфемерид *GPS*: ~1,5 км по продольной дальности, ~200 км по вертикали и 300-500 м по боковой дальности. На коротком интервале прогноза (± 30 мин) точность прогноза ГЛОНАСС, обеспечиваемого обоими алгоритмами, практически одинакова.

По объему вычислений основной рекомендуемый алгоритм прогноза эфемерид в ~10 раз превосходит рассмотренный выше приближенный алгоритм. Однако, по сути, между двумя алгоритмами нет никакой разницы. В обоих алгоритмах на всем интервале прогноза гравитационные возмущения от Луны и Солнца рассматриваются как константы, в обоих алгоритмах не учитывается смещение полюса и аномальная часть гравитационного поля Земли, в обоих алгоритмах не учитываются силы солнечного давления. Единственная разница заключается в том, что в приближенном алгоритме возмущения от Луны и Солнца передаются потребителю с дискретностью 10^{-6} м/с², а во втором алгоритме они рассчитываются более точно, хотя и рассматриваются далее, как константы на всем интервале прогноза. Учитывая, что в обоих алгоритмах при интегрировании уравнений движения НС не учитываются одни и те же возмущающие факторы, оба алгоритма имеют практически одну и ту же точность. Но с учетом того, что приближенный алгоритм существенно проще основного рекомендуемого, целесообразно (по крайней мере, в бортовых навигационных приемниках) использовать приближенный алгоритм прогноза координат НС по данным эфемерид ГЛОНАСС.

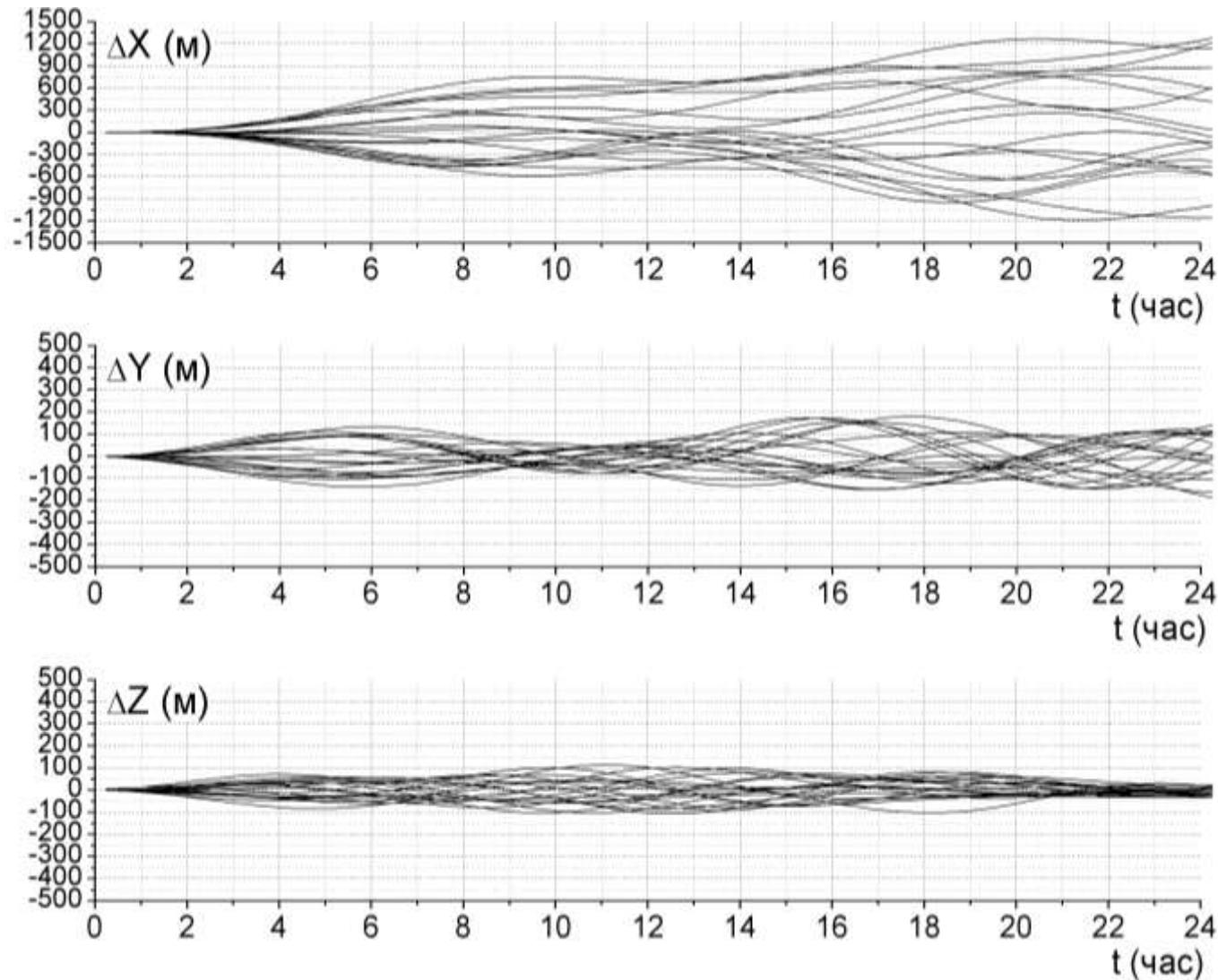


Рис. 5.10 Ошибки суточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС.

Сегодня в Интернете существует много сайтов, на которых представлены программные функции, реализующие рассмотренный выше упрощенный алгоритм прогноза координат НС по данным эфемерид ГЛОНАСС. Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный точный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

5.5 Исследование возможностей повышения точности прогноза и увеличения "времени жизни" эфемерид ГЛОНАСС и *GPS*

В предыдущем разделе проведен анализ точности прогнозирования эфемерид ГЛОНАСС и *GPS* по официально рекомендуемым алгоритмам прогноза, представленным в соответствующих ИКД [42], [95]. Проведенный анализ показал, что на момент задания эфемерид их точность составляет по координатам для *GPS* ~2 м по трем осям, для ГЛОНАСС: по продольной и боковой дальности ~6 м, по высоте – ~4 м.

Эта точность незначительно снижается в течение времени жизни эфемерид, которая для *GPS* составляет ± 2 часа; для ГЛОНАСС – $\pm 0,5$ часа. По истечении "времени жизни" происходит резкое снижение точности. Через 5-6 часов после соответствующего эфемеридного времени ошибки по координатам составляют сотни метров, через сутки – превышают километр.

Чем можно объяснить такое короткое "время жизни" эфемерид и такую низкую точность прогноза на время, превышающее "время жизни". Прежде всего, это объясняется сложностью точных алгоритмов прогноза и большим требуемым объемом вычислений и памяти вычислительных средств, реализующих эти алгоритмы. Тем не менее, система *GPS* взяла на

себя расчет и передачу потребителю поправок C_{ij} , учитывающих влияние большинства основных возмущающих факторов, хотя и на ограниченный интервал времени (два часа). В результате в системе *GPS* хотя бы на два часа, но обеспечивается высокая точность прогноза эфемерид. Система ГЛОНАСС ничем не помогает потребителю в плане прогноза эфемерид, если не считать грубый расчет (с точностью 20%) гравитационных возмущений от Луны и Солнца, передаваемых потребителю в виде констант на весь интервал прогноза. В результате в системе ГЛОНАСС потребителю требуется обновлять эфемериды каждые 30 мин.

Для повышения точности прогноза необходимо использовать более точную модель движения КА, учитывающую возмущения, заметно влияющие на орбиту НС на интервале прогноза. Например, если требуется обеспечить интервал прогноза сутки и точность прогноза на этом интервале несколько метров, то в модели движения КА требуется учитывать все возмущения, которые на интервале прогноза вносят ошибку по координатам более метра. В разделе 2 проведено детальное исследование влияния различных возмущающих факторов на орбиты спутников ГЛОНАСС и *GPS*. Перечислим все возмущающие факторы, вносящие на суточном интервале возмущение орбиты, превышающее 1 м с указанием порядка возмущения орбиты для каждого из перечисленных возмущений:

- сжатие Земли – 30 км/сутки;
- аномальная часть гравитационного поля Земли для гармоник порядка 8×8 включительно – 400 м/сут;
- гравитационное возмущение от Луны – 1500 м/сут;
- гравитационное возмущение от Солнца – 400 м/сут;
- смещение полюсов Земли – 300 м/сут;
- солнечное давление – 150 м/сут;

- прецессия и нутация Земной оси – 12 м/сут;
- неравномерность вращения Земли – 4 м/сут.

Шаг интегрирования уравнений движения КА методом Рунге-Кутта четвертого порядка при этом не должен превышать 150 сек.

Для всех перечисленных возмущений в настоящее время разработаны модели, которые легко могут быть реализованы на вычислительных средствах современных навигационных приемников, включая вычислительные средства бортовых АСН, предназначенных для работы в космосе. Например, в АСН-М МКС реализована модель аномальной части гравитационного поля Земли порядка 72×72 , требующая для своей реализации на каждой секунде в ~300 раз меньше вычислительных операций по сравнению с классической моделью на базе разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям.

Разработаны также программные функции, моделирующие возмущающие ускорения от Луны и Солнца. При более высокой точности моделирования они требуют для своей реализации в ~5 раз меньше вычислительных операций по сравнению с алгоритмами, рекомендуемыми в ИКД ГЛОНАСС.

Для спутников ГЛОНАСС и *GPS* разработана самонастраивающаяся модель солнечного давления, автоматически определяющая текущее возмущение по данным *broadcast* – эфемерид, даже если это реальное возмущение переменное во времени. Как показали исследования, приведенные в разделе 4, точность рассмотренной самонастраивающейся модели не хуже 1% от номинального возмущения.

Разработаны также точные модели, описывающие смещения полюсов Земли, прецессию и нутацию Земной оси и неравномерность вращения Земли. Единственным неудобством использования этих моделей является необходимость знания дополнительной внешней

информации: о текущем смещении полюса и о текущей поправке к времени $dUT1$. Текущая поправка к времени $dUT1$, а также ее производная сегодня передаются в составе неоперативной информации НС ГЛОНАСС. Для реализации точных моделей движения КА было бы полезно также передавать потребителю текущие значения смещения полюса Земли. Как альтернативный вариант, эти данные можно получать через Интернет [с. 2]. Поэтому в аппаратуре потребителя вполне может быть реализована точная модель движения спутников ГЛОНАСС и *GPS*, обеспечивающая существенное повышение точности прогноза орбиты на время, значительно превышающее время жизни эфемерид ГЛОНАСС и *GPS*. На рис. 5.11 и 5.12 приведены графики ошибок суточного прогноза координат ΔX , ΔY , ΔZ в ОСК для созвездия спутников ГЛОНАСС и *GPS*. В качестве начального вектора состояния взяты *broadcast* – эфемериды соответствующих спутников на моменты времени t_{0e} (для *GPS*) и t_b (для ГЛОНАСС). Из представленных графиков видно, что ошибки прогноза *GPS* на сутки с использованием предложенных моделей не превышают 160 м по продольной дальности, 20 м по высоте и 3 м по боковой дальности, а ошибки прогноза ГЛОНАСС, соответственно, по продольной дальности – 400 м, по высоте – 40 м, по боковой дальности – 5 м.

Сравнение полученного прогноза с прогнозом, выполненным с использованием официально рекомендуемых алгоритмов (в соответствии с ИКД), показывает (см. рис. 5.4 и 5.10), что для *GPS* по продольной дальности и высоте точность увеличилась в 10 раз, по боковой дальности – в 300 раз. Для ГЛОНАСС – по продольной дальности точность увеличилась в четыре раза, по вертикали – в пять раз, по боковой дальности – в 20 раз.

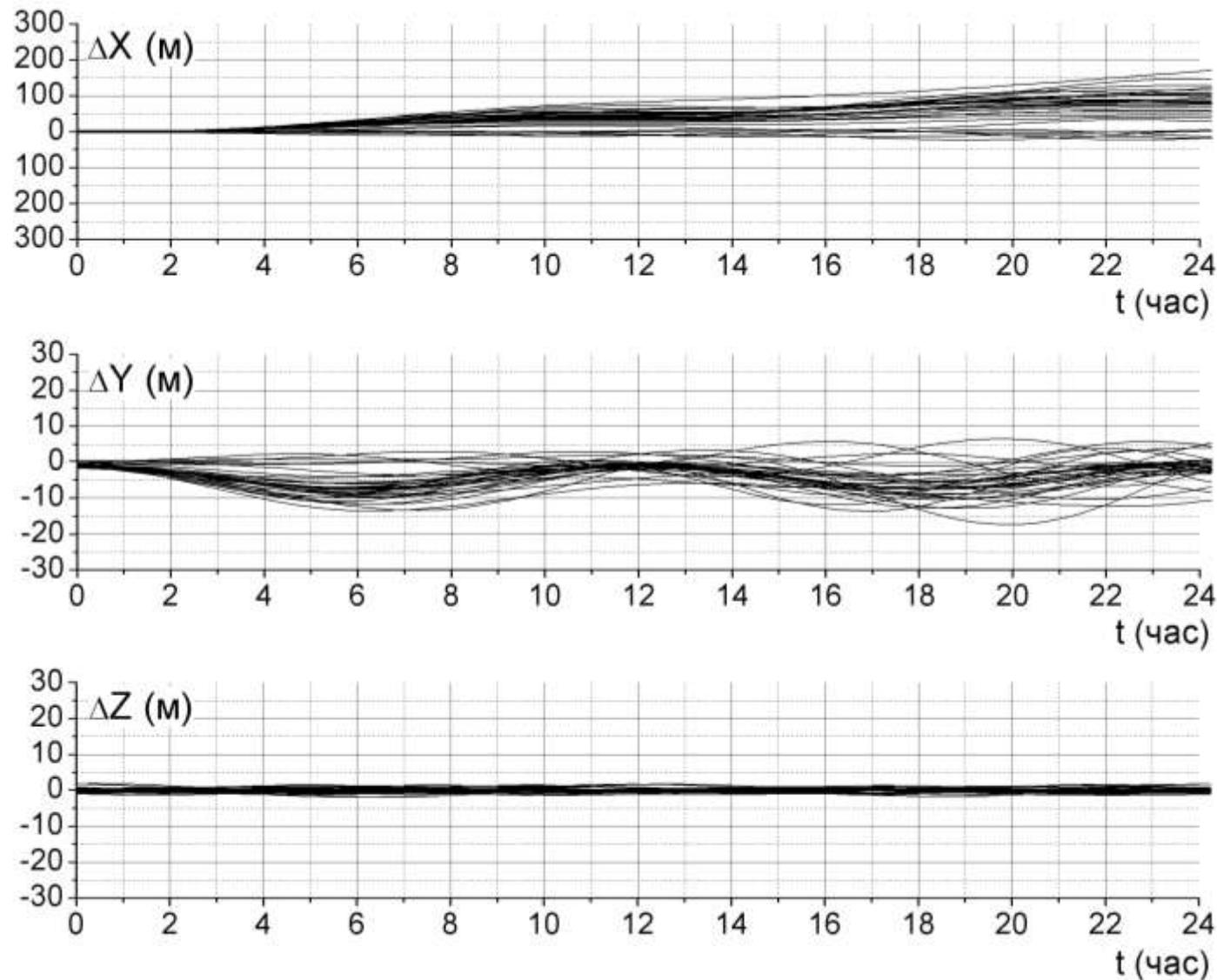


Рис. 5.11 Ошибки суточного прогноза эфемерид *GPS* с использованием точной модели движения КА.

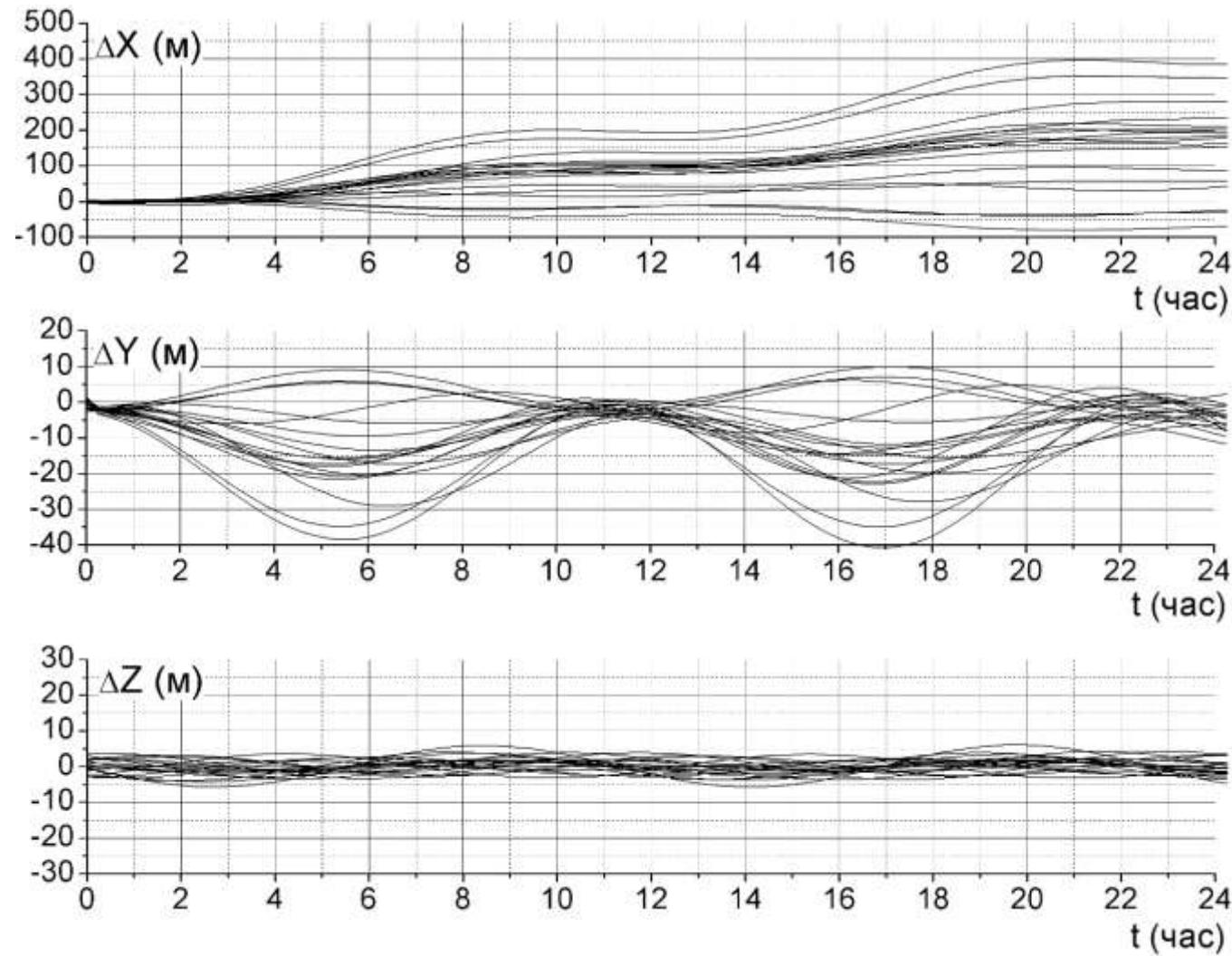


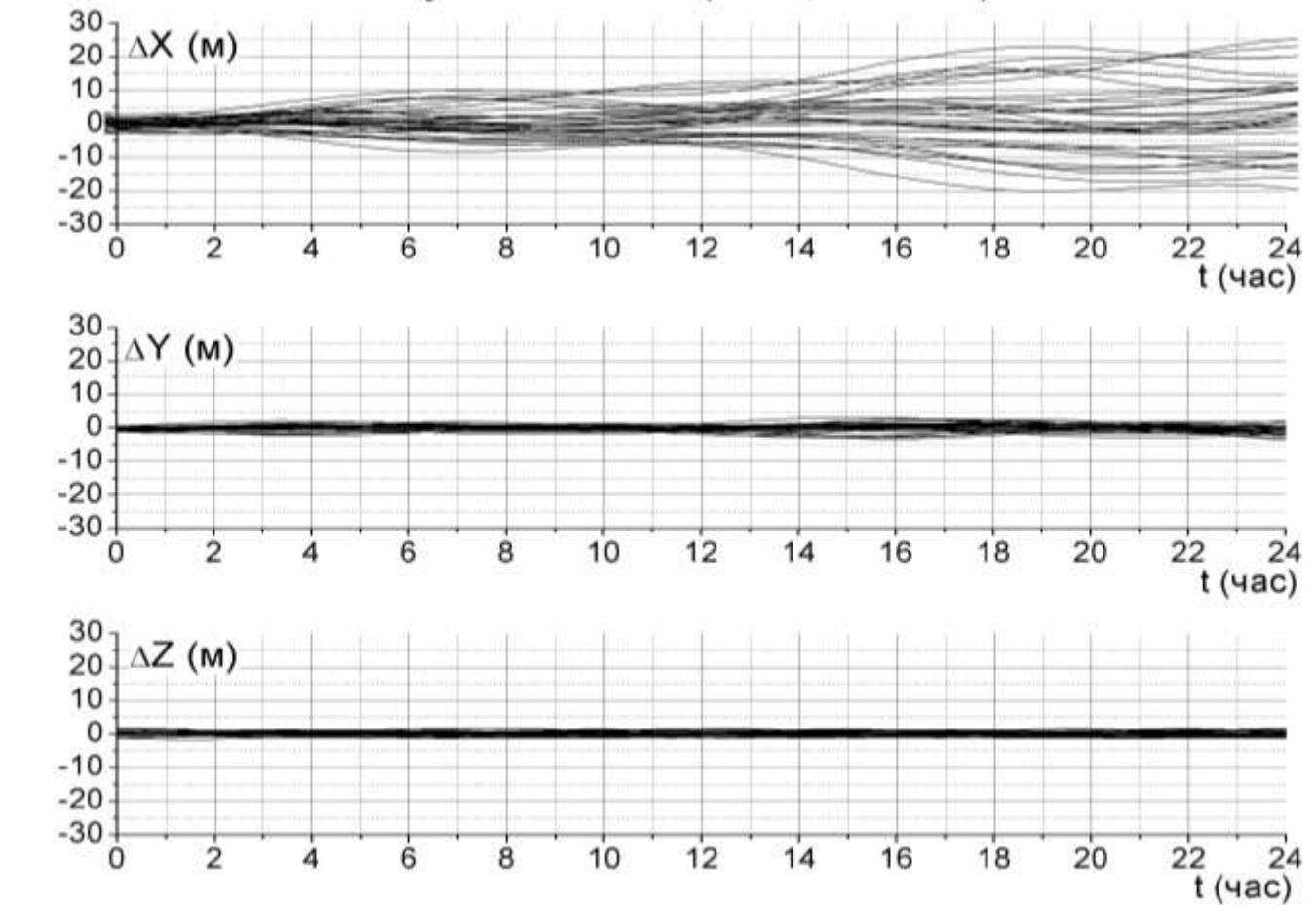
Рис. 5.12 Ошибки суточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС с использованием точной модели движения КА.

Многократное повышение точности прогноза обеспечено за счет использования более точной модели движения КА. Тем не менее, по некоторым компонентам, например, по продольной дальности наблюдаются достаточно большие ошибки прогноза – до 400 м для ГЛОНАСС и 160 м для *GPS*. Причиной таких ошибок являются ошибки начального вектора состояния КА, за который принимались *broadcast* эфемериды. Для повышения точности начального вектора состояния был предложен метод динамической фильтрации *broadcast* – эфемерид, заключающийся в том, что орбита НС с начальным вектором состояния, полученным по данным *broadcast* – эфемерид, прогнозируется с использованием рассмотренной точной модели движения КА, а в моменты формирования очередных *broadcast* – эфемерид по определенным алгоритмам корректируется по этим новым эфемеридам. Предложенный метод динамической фильтрации *broadcast* – эфемерид будет рассмотрен в следующей главе. Здесь отметим, что выполнение динамической фильтрации *broadcast* – эфемерид в течение суток, предшествующих точке начала прогноза, позволило заметно повысить точность орбиты НС, что в свою очередь обеспечило значительное повышение точности прогноза эфемерид на последующие сутки. На рис. 5.13 и 5.14 приведены графики ошибок суточного прогноза эфемерид *GPS* и ГЛОНАСС для созвездия НС. в качестве начального вектора состояния использовалась оценка орбиты КА, полученная в результате динамической фильтрации соответствующих *broadcast* – эфемерид. Суточная динамическая фильтрация и последующий суточный прогноз орбиты выполнялся с использованием рассмотренных высокоточных моделей движения НС. Из представленных графиков видно значительное повышение точности прогноза НС по продольной дальности и высоте по сравнению с прогнозом, выполненным без предварительной динамической фильтрации *broadcast* – эфемерид. Для *GPS* точность по продольной дальности повысилась с 160 м до 30 м,

по вертикали – с 15 до 10 м. Для ГЛОНАСС по продольной дальности точность повысилась с 400 м до 25 м, по вертикали – с 40 до 10 м.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

Рис. 5.13 Суточный прогноз эфемерид *GPS* с использованием точной модели движения КА и предварительной фильтрацией *broadcast* эфемерид.



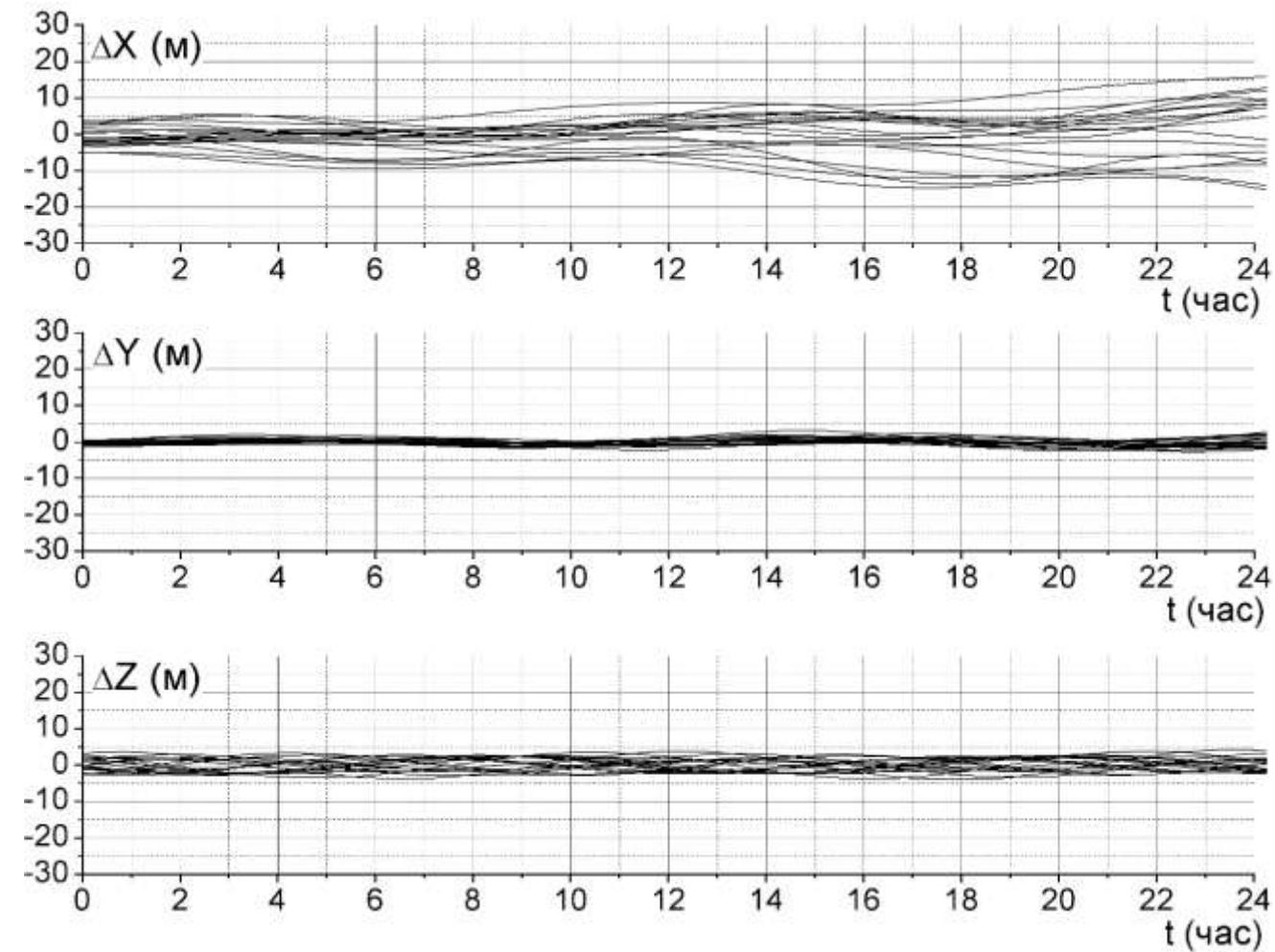


Рис. 5.14 Суточный прогноз эфемерид ГЛОНАСС с использованием точной модели движения КА и предварительной фильтрацией *broadcast* эфемерид.

Для удобства сравнения точности суточного прогноза с использованием разных методов прогнозирования в таблице 5.2 приведены ошибки прогноза по продольной дальности (ΔX), по вертикали (ΔY) и боковой дальности (ΔZ) для трех рассмотренных выше методов прогноза.

Таблица 5.2

	GPS			ГЛОНАСС		
	ΔX (м)	ΔY (м)	ΔZ (м)	ΔX (м)	ΔY (м)	ΔZ (м)
Прогноз на сутки по официально рекомендуемым алгоритмам	1500	300	700	1500	150	130
Прогноз на сутки с использованием разработанной модели движения НС	160	20	15	400	40	7
Прогноз на сутки с использованием разработанной модели движения НС и предварительной динамической фильтрации <i>broadcast</i> – эфемерид	25	4	3	15	3	4

Таблица 5.2 демонстрирует, что предложенные методы повышения точности прогноза эфемерид позволили в десятки раз повысить точность суточного прогноза и в результате получить точность эфемерид, позволяющую в течение суток без обновления эфемерид формировать PVt с достаточно высокой точностью. Точности передаваемых в составе эфемеридной информации параметров ошибок часов НС также достаточно для суточного прогноза смещения часов, обеспечивающего возможность формирования PVt с высокой точностью. Например, точность суточного прогноза смещения часов спутников ГЛОНАСС составляет $0,3 \div 0,6 \cdot 10^{-8}$ сек, для GPS $0,1 \div 0,3 \cdot 10^{-8}$ сек, что соответствует ошибкам определения псевдодальностей соответственно 1-2 м для ГЛОНАСС и 0,5-1 м для GPS. Понятно, что такие

ошибки не могут внести существенный вклад в ошибки PVt . Заметим, что ошибки продольной дальности НС, в несколько раз превосходящие по величине ошибки по вертикали и боковой дальности, приводят к значительно меньшим ошибкам псевдодальностей, чем ошибки по вертикали. Это объясняется тем, что угол между вектором скорости НС и направлением от НС на потребителя, как правило, больше 70° . Соответственно, проекция ошибки по вертикали на направление от НС на потребителя близка к единице, а проекция ошибки продольной дальности на это направление обычно не превышает $1/3$ от величины ошибки продольной дальности. Поэтому повышенные ошибки эфемерид НС по продольной дальности не приводят к большим ошибкам PVt . На рис. 5.15 приведены графики ошибок PVt по координатам в ГСК, полученные путем моделирования работы АСН на МКС. Из всего возможного бюджета ошибок измерений АСН учитывались только эфемеридные ошибки, соответствовавшие спрогнозированным эфемеридным ошибкам *GPS* в течение последних двух часов интервала прогноза, приведенных на рис. 5.13. Полученный на графиках результат подтверждает сказанное выше: при ошибках эфемерид НС по продольной дальности до 25 м и ошибках эфемерид по вертикали до 10 м ошибки PVt по координатам в среднем составляют величину ~ 8 м, а максимальные ошибки не превышают 16 м. Такая точность соответствует обычной работе АСН.

АСН, установленная на КА, часто имеет и значительно большие ошибки. Например, на рис. 5.26 приведены графики ошибок PVt , полученных на МКС при работе АСН-М. Из графиков видно, что ошибки PVt по координатам иногда достигают величины $30 \div 40$ м. Из всего следует, что спрогнозированные предложенным методом на суточный интервал эфемериды вполне могут использоваться для формирования PVt , а это означает, что предложенный метод повышения точности прогноза *broadcast* – эфемерид позволяет

увеличить время жизни эфемерид ГЛОНАСС с 0,5 часа до суток, а эфемерид *GPS* с двух часов до суток.

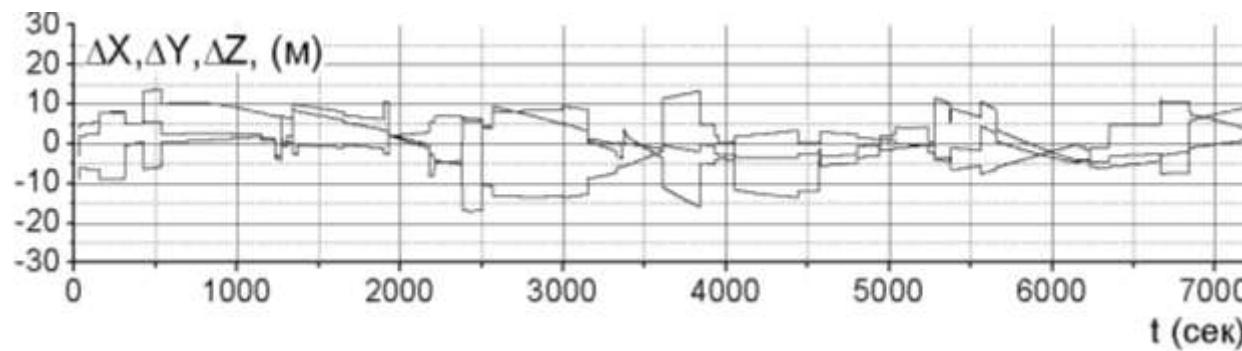


Рис. 5.15 График ошибок PV_t при использовании спрогнозированных на сутки эфемерид.

Предложенный метод обработки *broadcast* – эфемерид путем динамической фильтрации обеспечивает не только увеличение "времени жизни" эфемерид, но и повышает точность эфемерид в начальный момент времени. Например, на рис. 5.16 приведены графики ошибок по координатам ΔX , ΔY , ΔZ в ОСК *broadcast* – эфемерид в момент t_b одного из НС ГЛОНАСС на интервале две недели. На приведенных графиках отчетливо видны периодические и шумовые составляющие ошибок. Периодические составляющие имеют период ~ 11 час. (один виток) и 24 часа (сутки). Максимальные величины ошибок по продольной дальности составляют 7 м, по высоте – 7 м, по боковой дальности – 5 м. На рис. 5.17 приведены графики ошибок по скорости ΔV_x , ΔV_y , ΔV_z в ГСК *broadcast* – эфемерид в момент t_b НС ГЛОНАСС на интервале 10 дней. Здесь также видны периодические и шумовые составляющие. Максимальные ошибки по продольной скорости и вертикали достигают величины $\sim 0,005$ м/с, по боковой скорости – 0,003 м/с.

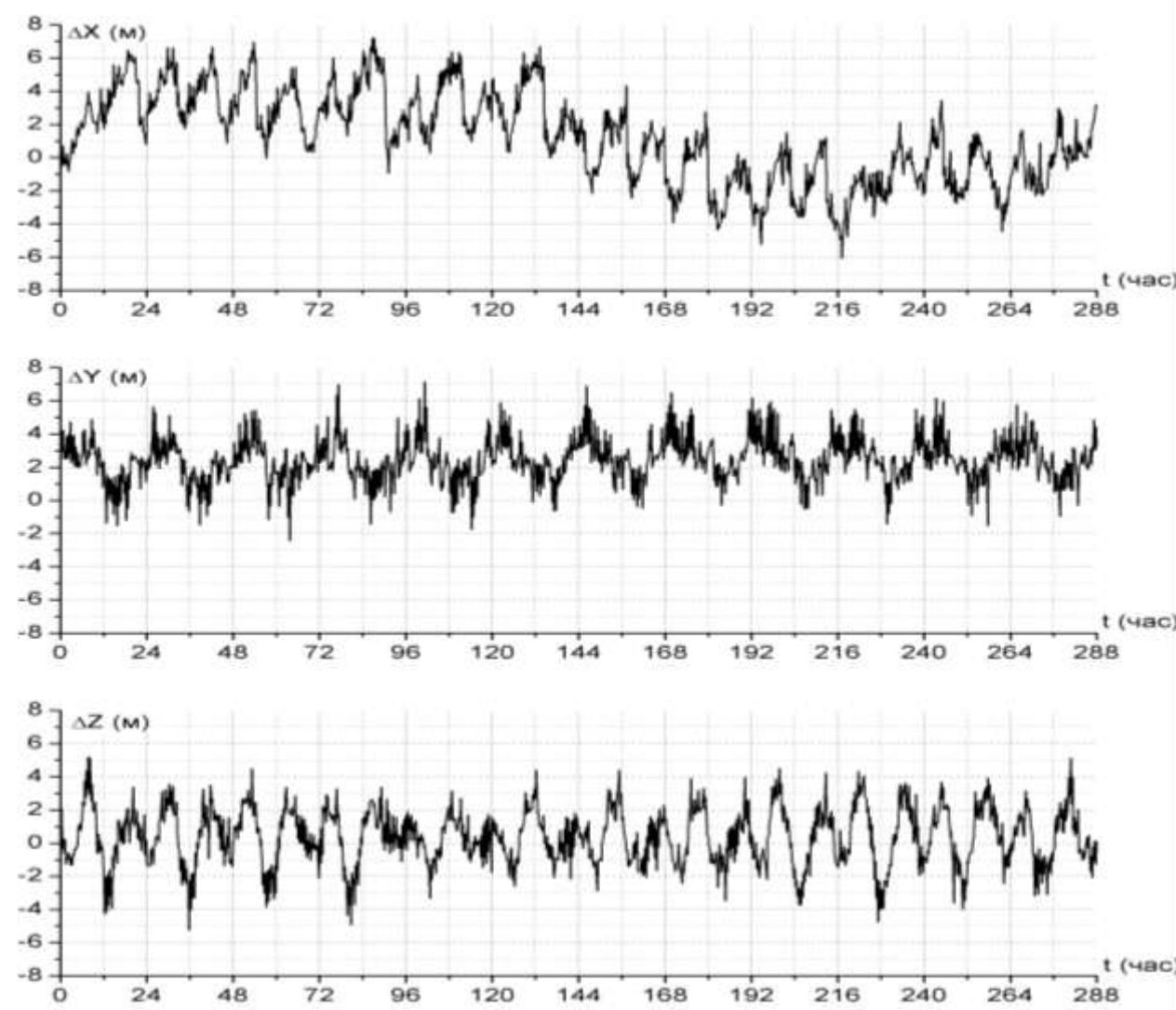


Рис. 5.16 График ошибок *broadcast*-эфемерид ГЛОНАСС по координатам в ОСК одного из НС в моменты t_b .

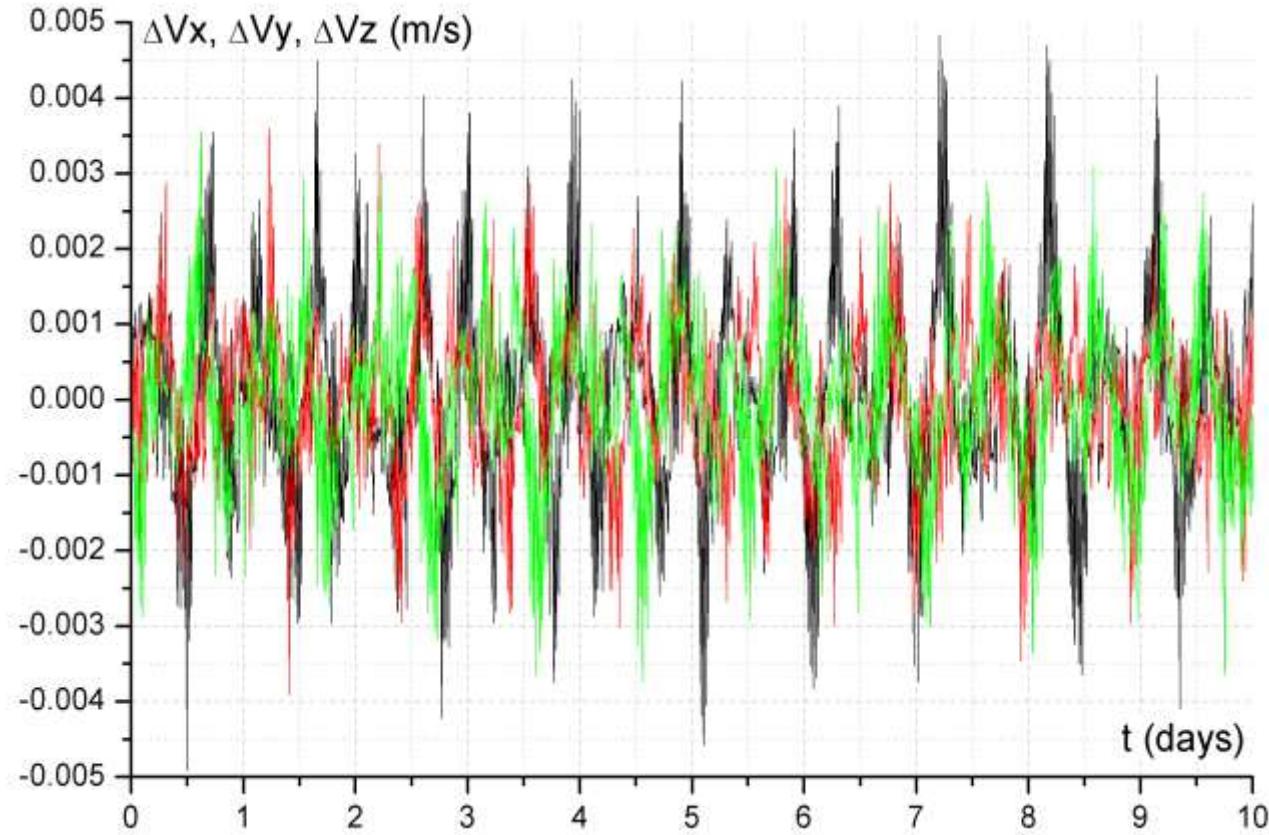


Рис. 5.17 Графики ошибок *broadcast*-эфемерид ГЛОНАСС по скорости в моменты t_b .

На рис. 5.18, 5.19 приведены графики ошибок оценки орбиты НС, формируемой в результате динамической фильтрации *broadcast* – эфемерид.

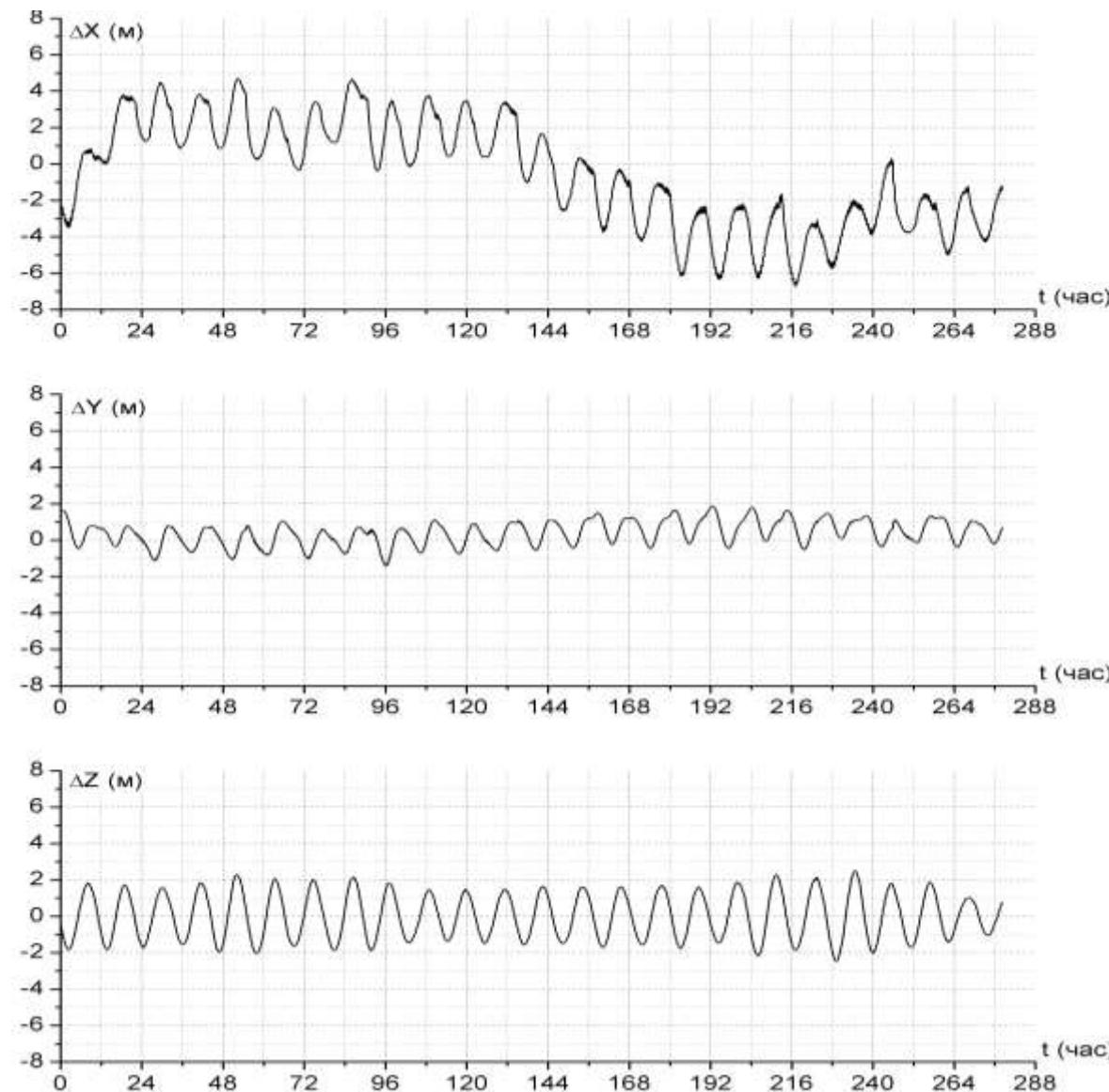


Рис. 5.18 Графики ошибок оценки орбиты по координатам, формируемой в результате динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид.

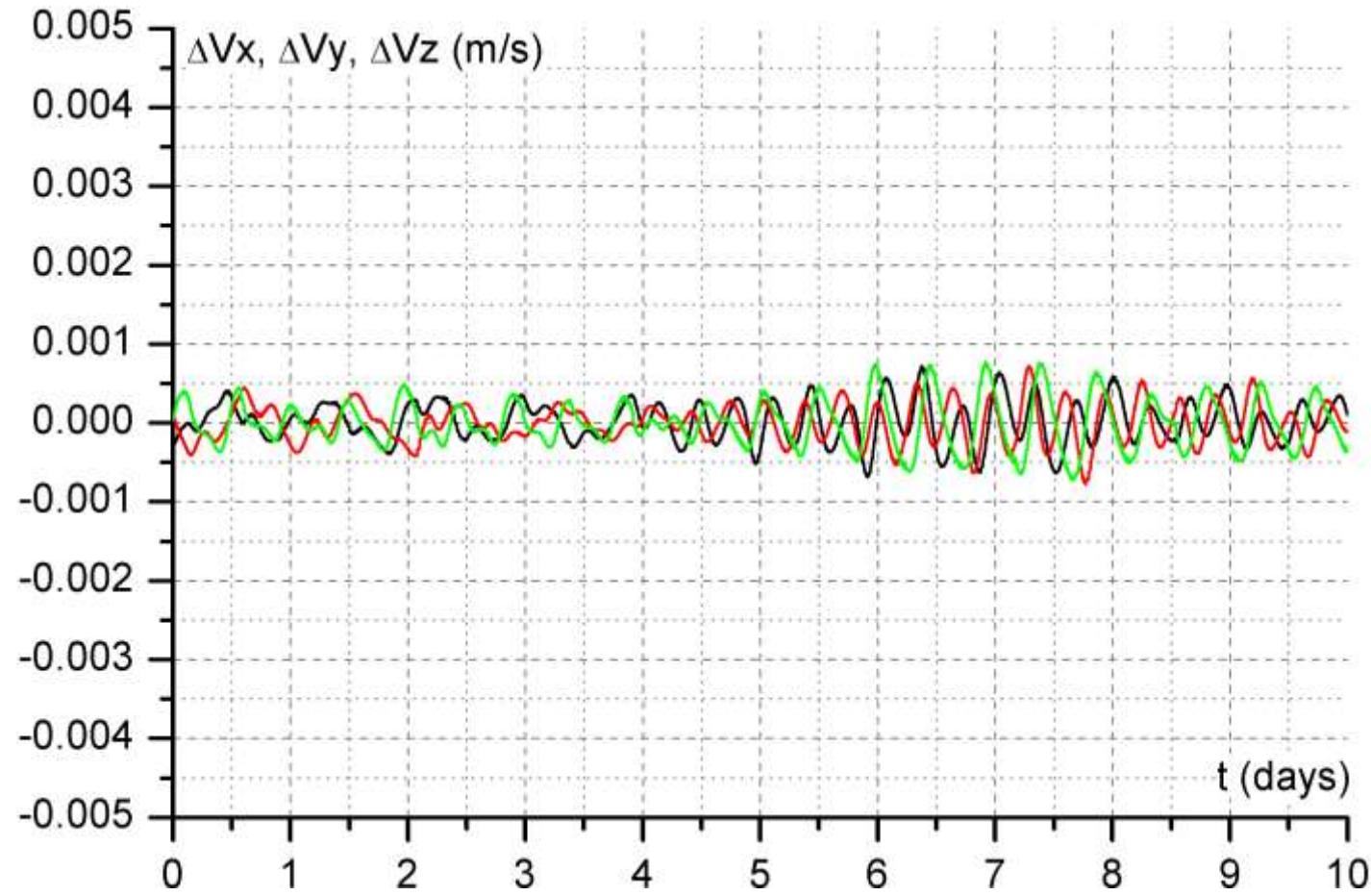


Рис. 5.19 Графики ошибок оценки орбиты по скорости, формируемой в результате динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид.

Из графиков видно, что шумовая составляющая ошибок практически исчезла. Периодическая составляющая имеет орбитальную частоту. Существенно уменьшились амплитуды периодических составляющих ошибок по вертикали и боковой дальности. Ошибка по вертикали стала составлять величину $1 \div 1,5$ м, по боковой дальности – ± 2 м. Ошибка по продольной дальности лежит в диапазоне ± 6 м. Значительно уменьшились ошибки по скорости. Они стали соизмеримы с ошибками скорости эталонных эфемерид, относительно которых оцениваются полученные результаты.

Напомним, что декларируемая точность эталонных эфемерид по координатам составляет 3 – 5 см, по скорости - 0,1 – 0,2 мм/с. Таким образом предложенный метод динамической фильтрации *broadcast* – эфемерид использования какой-либо дополнительной информации, а только за счет математической обработки передаваемых потребителю от НС ГЛОНАСС *broadcast* – эфемерид, позволил существенно повысить точность передаваемых эфемерид на момент t_b . Так, основная составляющая ошибки координат НС по вертикали уменьшилась более чем в четыре раза, а остальные составляющие – в $1,5 \div 2$ раза. Можно предположить, что в этом случае составляющая ошибок PVt , обусловленная ошибками эфемерид ГЛОНАСС, уменьшится в ~ 3 раза, а составляющая ошибок PVt , обусловленная ошибками скорости НС, уменьшится в ~ 10 раз.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

Глава 6 Алгоритмы формирования навигационных определений в АСН

После формирования "сырых" измерений, векторов координат и скорости НС, а также поправок к "сырым" измерениям по оперативной информации, поступающей от НС, можно приступить к решению навигационной задачи, заключающейся в определении векторов положения и скорости антенны АСН потребителя.

В различных навигационных приемниках может формироваться разный состав "сырых" измерений, может быть реализована различная временная привязка измерений к внутренним или системным часам. Все эти особенности должны быть учтены при реализации алгоритмов решения навигационных задач, которые также могут быть различными.

В первую очередь рассмотрим алгоритмы компенсации различного рода возмущений псевдодальностей, по которым определяется вектор координат потребителя.

6.1 Расчет поправок к измерениям псевдодальностей

Вектор координат потребителя определяется по значениям всех достоверных псевдодальностей PR_i , сформированных на данной секунде, при условии наличия достоверных эфемерид соответствующих НС. В первую очередь составляется список таких НС, для каждого НС формируются поправки, соответствующие ошибкам часов НС относительно системного времени (для *GPS* – по формуле (4.39), для ГЛОНАСС – по формуле (4.37)), для *GPS* формируются релятивистские поправки по формуле (4.40). Для ГЛОНАСС в режиме *GPS+ГЛОНАСС* формируются также поправки на расхождение системных шкал времени *GPS* и ГЛОНАСС (по формуле (4.36)).

Следующим этапом расчета поправок псевдодальностей является расчет векторов перемещения НС за время распространения сигнала от НС потребителю. Расчет выполняется по алгоритму:

- вычисляются координаты НС на момент приема сигнала в АСН и проведения измерения. Допустим, измерение выполнено в целую секунду внутренних часов приемника. В процессе измерений определяется смещение τ_p шкалы приемника относительно системной шкалы. Если в начальный момент это смещение неизвестно, то его можно считать равным нулю. С учетом знания τ_p определяется момент приема сигнала в системном времени t_c . По алгоритмам, приведенным в разделах 3.5.2 и 3.5.4 определяются координаты $\bar{X}_c(t_c)$ соответственно для ГЛОНАСС и GPS.

При проведении измерений АСН обычно положение потребителя известно с какой-либо точностью, например, вектор предыдущего решения, который может использоваться для расчета времени распространения. Если этот вектор вообще не известен, то время распространения принимается равным 0,08 с., иначе определяется по формуле:

$$\tau_p = \frac{|\bar{X}_n(t_c) - \bar{X}_c(t_c)|}{c}, \quad (6.1)$$

где $\bar{X}_n(t_c)$ – оценка координат потребителя.

Координаты НС в момент излучения сигнала определяются по формуле:

$$\bar{X}_c(t_c - \tau_p) = \bar{X}_c(t_c) - \tau \bar{V}_u(t_c), \quad (6.2)$$

где $\bar{V}_u(t_c) = \bar{V}_c(t_c) + [\bar{\omega}_3 + \bar{X}_c]$

$\bar{V}_c(t_c)$ – скорость НС в ГСК, полученная по алгоритмам, приведенным в разделе 3.5.2 для *GPS* и 3.5.4 для ГЛОНАСС;
 $\bar{V}_u(t_c)$ – скорость НС относительно ИСК в проекциях на оси ГСК.

Сформированные векторы координат НС $\bar{X}_c(t_c - \tau_p)$ с учетом поправок на время распространения сигнала должны использоваться для расчета координат потребителя.

Существенное возмущение в величину псевдодальности вносит ионосфера Земли. Ошибки, вносимые ионосферой Земли, составляют величину от нескольких метров до нескольких десятков метров. Величина ионосферного возмущения зависит от состояния ионосферы, координат потребителя и координат НС. Для компенсации ионосферной погрешности в системе *GPS* разработана модель влияния ионосферы на "сырые" измерения. В этой модели параметры, характеризующие текущее состояние ионосферы, передаются в составе неоперативной информации сообщений *GPS*. Эта информация включает восемь параметров, каждый из которых передается восьмью битами информации:

- $\alpha_0(\text{sec}); \alpha_1(\text{sec/semi-circle}); \alpha_2(\text{sec/semi-circle})^2; \alpha_3(\text{sec/semi-circle})^3;$
- $\beta_0(\text{sec}); \beta_1(\text{sec/semi-circle}); \beta_2(\text{sec/semi-circle})^2; \beta_3(\text{sec/semi-circle})^3.$

Алгоритм расчета ионосферной поправки с использованием коэффициентов α_i , β_i приведен в Интерфейсном документе *IS-GPS-200*.

Для расчета ионосферной поправки входной информацией кроме перечисленных параметров являются:

- \bar{X} – вектор координат потребителя;

- \bar{X}_i – вектор координат НС.

Алгоритм расчета ионосферной поправки выполняется в следующей последовательности:

- по вектору координат потребителя \bar{X} вычисляются географические долгота L , широта B и высота H над геоидом Земли, используя алгоритмы, приведенные в разделе 1.3. Размерность формируемых углов L, B – полуцикли (π рад);
- по вектору координат потребителя \bar{X} и НС \bar{X}_i с использованием географических координат потребителя определяется азимут A и угол E восхождения НС:

$$\Delta\bar{r} = \bar{X}_i - \bar{X} = (dX, dY, dZ);$$

$$dN = -\sin B \cos L dX - \sin B \sin L dY + \cos B dZ;$$

$$dE = -\sin L dX + \cos L dY;$$

$$dU_p = \cos B \cos L dX + \cos B \sin L dY + \sin B dZ;$$

$$A = a \tan \left(\frac{dE}{dN} \right); \text{ – азимут;}$$

$$E = a \tan \frac{dU_p}{\sqrt{dN^2 + dE^2}} \text{ – угол восхождения.}$$

Размерность углов A и E – полуцикли (π рад).

$t=4.32 \cdot 10^4 \lambda_i + GPS\ time\ (sec)$ – местное время,

где $0 \leq t < 86400$

Поэтому, если $t \geq 86400$ $t = t - 86400$, если $t < 0$, то $t = t + 86400$ (sek)

$$\psi = \frac{0.0137}{E + 0.11} - 0.022 \text{ -- (полуцикли);}$$

$$\phi_i = \begin{cases} B + \psi \cos A, |\phi_i| \leq 0.416 \\ \text{если } \phi_i > 0.416, \text{то } \phi_i = 0.416 \\ \text{если } \phi_i < -0.416, \text{то } \phi_i = -0.416 \end{cases} \quad \text{-- полуцикли} \quad (6.3)$$

$$\lambda_i = L + \frac{\psi \sin A}{\cos \phi_i} \text{ -- (полуцикли);}$$

$$\phi_m = \phi_i + 0.064 \cos(\lambda_i - 1.617) \text{ -- (полуцикли).}$$

$$F = 1 + 16.0[0.53 - E]^3$$

$$PER = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^3 \beta_n \phi_m^n, PER \geq 72000 \\ \text{if } PER < 72000, \text{то } PER = 72000 \end{array} \right\} \text{ (сек);}$$

$$x = \frac{2\pi(t - 50400)}{PER} \text{ -- радианы;}$$

$$AMP = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^3 \alpha_n \phi_m^n, AMP \geq 0 \\ \text{если } AMP < 0, \text{то } AMP = 0 \end{array} \right\} \text{ (сек)}$$

$$T_{iono} = \left\{ \begin{array}{ll} F \cdot \left[5 \cdot 10^{-9} + AMP \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right], & |x| < 1.57 \\ F \cdot 5 \cdot 10^{-9} & |x| \geq 1.57 \end{array} \right\} \text{ (сек)}$$

Коррекция псевдодальности выполняется по формуле:

$$PR = PR - T_{iono} \cdot c \quad (6.4)$$

Следует отметить, что приведенная модель справедлива для потребителей, находящихся на Земле. Для КА с высотой 350 – 400 км ионосферные ошибки отличаются от ошибок, формируемых по рассмотренным алгоритмам. Но, например, эмпирически выявлено, что для АСН, установленной на МКС, ионосферные поправки можно формировать по приведенным алгоритмам с коэффициентом 0,5.

В Интернете существует много сайтов, на которых представлены программные функции, реализующие различные, в том числе и приведенный выше алгоритм определения ионосферных поправок.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

Кроме ионосферы возмущение в величину псевдодальности вносит тропосфера. Алгоритмы компенсации тропосферной погрешности не приведены в Интерфейсных документах *GPS* и ГЛОНАСС. Тем не менее, существуют алгоритмы формирования тропосферной задержки различной сложности. Мы приведем один из наиболее удачных алгоритмов, приведённых в работе A.E. Neil "*Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths*"(1996).

Входной информацией для алгоритма является:

- \bar{X}_i – координаты НС;
- \bar{X} – координаты пользователя;

- время в формате N дня от начала года (*Do Y* от 0 до 364).

На выходе формируется тропосферная задержка сигнала.

По выходным данным аналогично, как и при формировании ионосферной задержки, вычисляются:

- B – широта пользователя;
- H – высота пользователя над геоидом;
- E – угол восхождения над спутником.

Тропосферная задержка, согласно модели Нейлли, равна:

$$tropospheric_delay = D_d^z m_d'(E) + D_w^z m_w(E) \quad (6.5)$$

D_d^z – гидростатическая тропосферная задержка в зените (часто её называют «сухая» задержка, *dry*). Означает задержку при прохождении сигнала через тропосферу, находящуюся в гидростатическом равновесии, по направлению из зенита, может быть определена с высокой точностью, т.к., исходя из предположения гидростатического равновесия, к тропосфере применяют законы идеального газа;

D_w^z – влажная тропосферная задержка в зените (*wet*). Гораздо сложнее поддаётся моделированию, т.к. для её учёта требуется знать распределение водяных паров по высоте, что проблематично из-за неравновесности происходящих в атмосфере процессов. Данная задержка составляет порядка 10% всей тропосферной задержки;

$m_d(E)$ – функция учёта возвышения (*mapping function*) для гидростатической задержки. Данная функция нужна для учёта угла восхождения на спутник, в данной модели угол восхождения может составлять более трёх градусов;

$m_w(E)$ – функция учёта возвышения (*mapping function*) для влажной задержки;

$$D_d^z = 1.013 * 2.27 e^{-0.116^3 H}$$

$$D_w^z = 0.1$$

$$m_d(E) = \frac{1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + \frac{c}{\sin E + \frac{a}{\sin E + \frac{b}{\sin E + c}}}}}}{\sin E + \frac{b}{\sin E + c}} = f(E, a, b, c) \quad (6.6)$$

$$m_w(E) = \frac{1 + \frac{a_w}{1 + \frac{b_w}{1 + \frac{c_w}{\sin E + \frac{a_w}{\sin E + \frac{b_w}{\sin E + c_w}}}}}}{\sin E + \frac{b_w}{\sin E + c_w}} = f(E, a_w, b_w, c_w) \quad (6.7)$$

Коэффициенты для (2) и (3) выражаются через табличные значения следующим образом:

$$a = a_{avg} - a_{amp} \cos\left(2\pi \frac{DoY - DoY_0}{365.25}\right); b = b_{avg} - b_{amp} \cos\left(2\pi \frac{DoY - DoY_0}{365.25}\right);$$

$$c = c_{avg} - c_{amp} \cos\left(2\pi \frac{DoY - DoY_0}{365.25}\right)$$

DoY_0 равно 28, если пользователь в северном полушарии, и равно 221, если пользователь в южном полушарии.

Таблица 6.1 – Коэффициенты для гидростатической функции учета угла возвышения.

Коэффициенты для широт меньше и равных 15° берутся из таблицы 6.1 для значения 15° , коэффициенты для широт больше или равных 75° берутся из таблицы 3.3 для значения широты 75° . Коэффициенты для широт, принадлежащих диапазону от 15 до 75 градусов вычисляются с помощью линейной интерполяции табличных значений, например:

Если широта равна 22° , то

$$a_{avg} = \left(a_{avg}(30^\circ) - a_{avg}(15^\circ) \right) * \frac{22 - 15}{30 - 15}$$

Далее производится высотная коррекция гидростатической функции учета возвышения:

$$\Delta m_d = \frac{dm(E)}{dh} H, \text{ где } H \text{ выражается в километрах.}$$

$$\frac{dm(E)}{dh} = \frac{1}{\sin E} - f(E, a_{ht}, b_{ht}, c_{ht}), \text{ где } f \text{ – функция в выражениях (6.6) и (6.7).}$$

Таким образом

$$m'_d = m_d + \Delta m_d, \text{ где } m'_d \text{ – откорректированное значение.}$$

Таблица 6.1

Коэффициент	Широта				
	15°	30°	45°	60°	75°
	<i>avg</i>				
a_{avg}	$1.2769934e-3$	$1.2683230e-3$	$1.2465397e-3$	$1.2196049e-3$	$1.2045996e-3$
b_{avg}	$2.9153695e-3$	$2.9152299e-3$	$2.9288445e-3$	$2.9022565e-3$	$2.9024912e-3$
c_{avg}	$62.610505e-3$	$62.837393e-3$	$63.721774e-3$	$63.824265e-3$	$64.258455e-3$
	<i>amp</i>				
a_{amp}	0.0	$1.2709626e-5$	$2.6523662e-5$	$3.4000452e-5$	$4.1202191e-5$
b_{amp}	0.0	$2.1414979e-5$	$3.0160779e-5$	$7.2562722e-5$	$11.723375e-5$
c_{amp}	0.0	$9.0128400e-5$	$4.3497037e-5$	$84.795348e-5$	$170.37206e-5$
	<i>height</i>				
a_{ht}			$2.53e-5$		
b_{ht}			$5.49e-3$		
c_{ht}			$1.14e-3$		

Аналогичным образом вычисляется влажная функция учёта угла возвышения, отличие от вычисления гидростатической функции угла возвышения состоит в том, что для коэффициентов нет amp значений (они равны 0) а также не производится высотная коррекция:

Таблица 6.2 – Коэффициенты для влажной функции учёта угла возвышения.

Коэффициент	Широта				
	15°	30°	45°	60°	75°
a_w	$5.8021897e-4$	$5.6794847e-4$	$5.8118019e-4$	$5.9727542e-4$	$6.1641693e-4$
b_w	$1.4275268e-3$	$1.5138625e-3$	$1.4572752e-3$	$1.5007428e-3$	$1.7599082e-3$
c_w	$4.3472961e-2$	$4.6729510e-2$	$4.3908931e-2$	$4.4626982e-2$	$5.4736038e-2$

На рис. 5.12 – 5.15 приведены графики тропосферных ошибок в зависимости от различных параметров, позволяющие оценить величину и диапазон изменения этих ошибок. На рис. 6.1 приведен график зависимости тропосферной ошибки от угла возвышения, показывающий, что при углах возвышения выше 20° тропосферная ошибка не превышает 5 м. Дальнейшее уменьшение угла возвышения приводит к резкому возрастанию этой ошибки, достигающей в окрестности нулевого возвышения величины ~35 м.

На рис. 6.2 приведен график зависимости тропосферной ошибки от высоты потребителя над уровнем земного эллипсоида. График показывает, что тропосферная ошибка почти линейно уменьшается с высотой, и на уровне 5 км составляет ~50 % от ошибки на нулевой высоте.

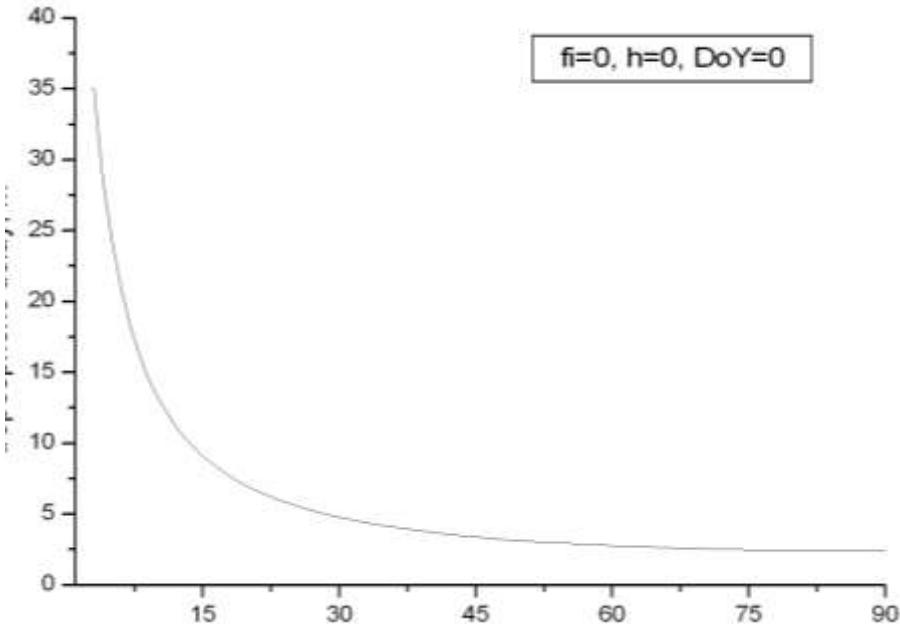


Рис. 6.1 Графики зависимости тропосферной ошибки от угла возвышения.

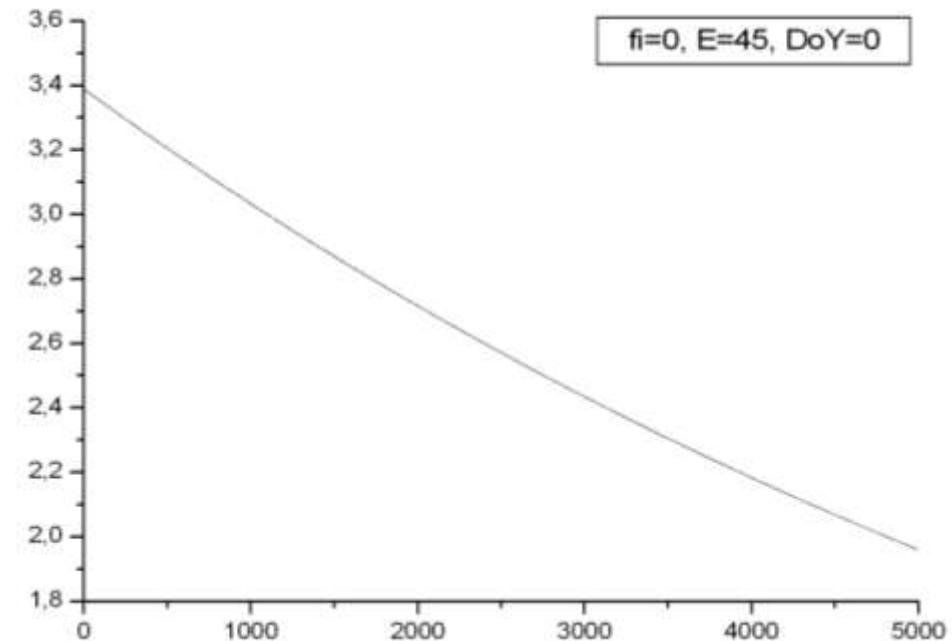


Рис. 6.2 График зависимости тропосферной ошибки от высоты потребителя над уровнем земного эллипсоида.

На рис. 6.3 приведен график зависимости тропосферной ошибки от широты. График показывает, что тропосферная ошибка слабо зависит от широты. С увеличением широты тропосферная ошибка возрастает относительно уровня широты не более, чем на 1%.

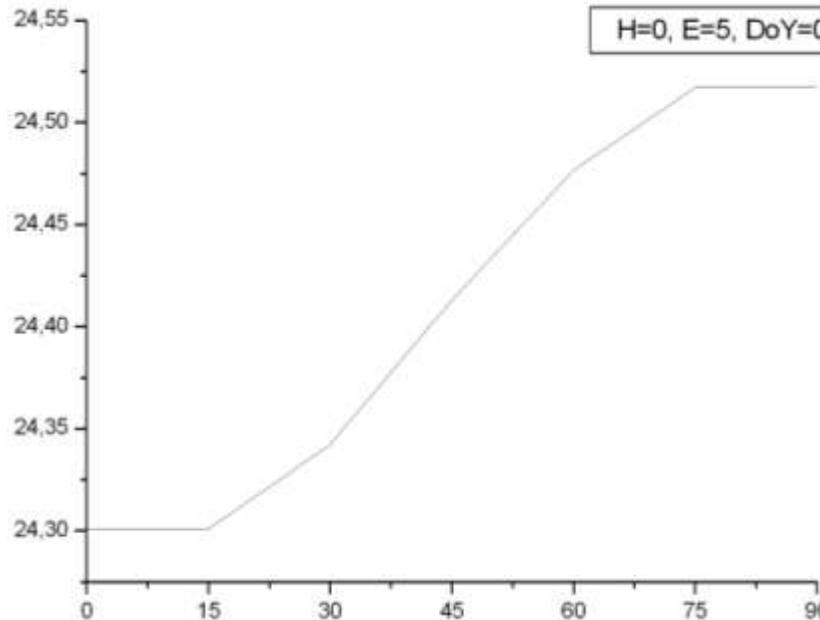


Рис. 6.3 График зависимости тропосферной ошибки от широты.

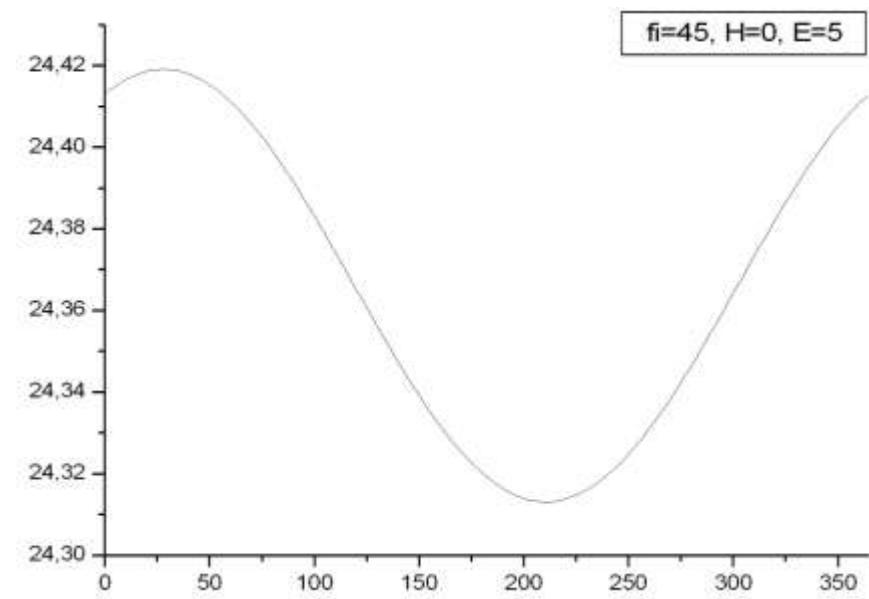


Рис. 6.4 График зависимости тропосферной ошибки от номера дня в году.

На рис. 6.4 приведен график зависимости тропосферной ошибки от номера дня в году. График показывает, что в течение года изменение ошибки не превышает 1%. Поэтому можно считать, что тропосферная ошибка практически не зависит от времени и географического положения, а зависит только от угла возвышения НС и высоты потребителя над уровнем земного эллипсоида.

Графики, приведенные на рис. 6.1 - 6.4 демонстрируют значительную ошибку, вносимую тропосферой в измеряемые значения псевдодальностей. Особенно эта ошибка проявляется в измерениях псевдодальностей пригоризонтных спутников для наземных потребителей. При нулевых углах возвышения НС она может достигать 30 – 60 м. Сказанное демонстрируют

графики, приведенные на рис. 6.5, представляющие собой ошибки псевдодальностей, формируемые АСН, установленной на поверхности Земли. Верхние графики соответствуют нулевому углу маски (т.е. в обработку включаются все НС, находящиеся выше местного горизонта), нижние – углу маски 5° .

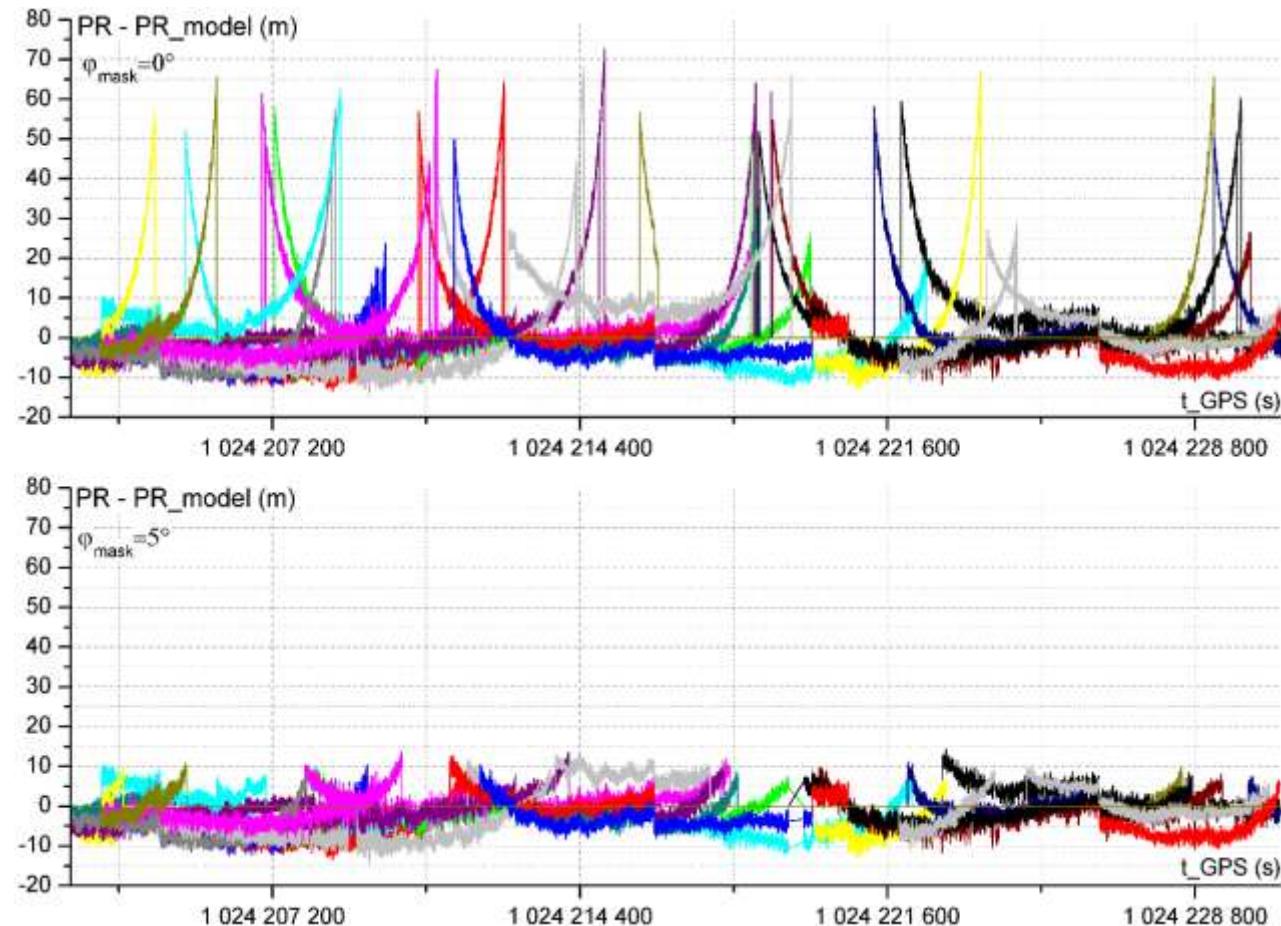


Рис. 6.5 Тропосферные ошибки АЧН у поверхности Земли для углов маски 0° (верхние графики) и 5° (нижние графики).

Из приведенных графиков видно, что ошибки псевдодальностей резко возрастают у восходящих и заходящих спутников. Величины этих ошибок при нулевом угле маски превосходят 70 м.

Выбор маски 5° обеспечивает существенное снижение тропосферных ошибок, которые в этом случае не превышают ~ 10 м. Оставшиеся тропосферные ошибки могут быть скомпенсированы с использованием рассмотренных в настоящем разделе алгоритмов, моделирующих тропосферные ошибки. Точность приведенных алгоритмов для маски 5° составляет ~ 1 м. Следует отметить также, что для АСН, установленной на КА и работающей по НС с положительным возвышением, тропосферные ошибки в измерениях псевдодальностей практически равны 0. Если АСН работает с отрицательной маской, и линия КА - НС проходит у поверхности Земли, тропосферная ошибка может достигать величины $150 \div 200$ м.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

6.2 Алгоритмы формирования вектора координат потребителя

После выполнения коррекции измеренных псевдодальностей и вычисления координат НС на момент излучения сигнала, принятого приемником в момент t , можно приступить к вычислению вектора координат потребителя.

Для определяемых векторов координат и скорости по измерениям АСН существует устоявшийся международный термин – *PVt - posin, velocity, time*. По-русски сообщение АСН с векторами координат и скорости называется КСВ – координаты, скорость, время. *PVt* (или КСВ) представляют собой навигационные определения АСН, получаемые по "сырым" измерениям -псевдодальностям (*pseudorang - PR*) и интегральным фазам (*carear phase-CP*).

Вычисление может проводиться по формулам, аналогичным формулам (3.6)÷(3.9). Однако эти формулы демонстрируют принцип определения координат потребителя по измерениям АСН и не учитывают возмущающие факторы, влияющие на величину измеренной псевдодальности, а также наличие ошибки часов потребителя, без знания которой алгоритмы (3.6)÷(3.9) не могут быть использованы для определения вектора координат.

Алгоритмы компенсации основных возмущающих факторов, влияющих на псевдодальность, были рассмотрены в предыдущем разделе. Поэтому будем считать, что в сформированном массиве псевдодальностей PR_i (i – номер НС из числа отслеживаемых НС на данной секунде) учтены все необходимые поправки, а массив векторов \bar{X}_i координат НС относится к моментам времени излучения сигналов, принятых приемником в текущий момент t . С учетом ошибки часов приемника для псевдодальности можно записать уравнения:

$$PR_i + c\tau = \sqrt{(\bar{X}_i - \bar{X})^T (\bar{X}_i - \bar{X})}, \quad (6.8)$$

где τ – ошибка часов приемника;

\bar{X} – неизвестный искомый вектор координат потребителя.

После возвведения правой и левой частей уравнения (6.8) в квадрат и ряда преобразований для i -го НС получим уравнение:

$$PR_i^2 + c^2\tau^2 - \bar{X}_i^T \bar{X}_i = -2\bar{X}_i^T \bar{X} - 2PR_i c\tau + \bar{X}^2 \quad (6.9)$$

Вычтя из уравнения для i -го НС аналогичное уравнение для j -го НС, получим:

$$(PR_i^2 - PR_j^2) - (\bar{X}_i^2 - \bar{X}_j^2) = -2(\bar{X}_i^T - \bar{X}_j^T) \bar{X} - 2(PR_i - PR_j)c\tau \quad (6.10)$$

Для n НС можно записать систему из n уравнений, аналогичных уравнению (6.10):

$$\begin{aligned} (PR_1^2 - PR_2^2) - (\bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2) &= -2(\bar{X}_1^T - \bar{X}_2^T) \bar{X} - 2(PR_1 - PR_2)c\tau \\ (PR_2^2 - PR_3^2) - (\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2) &= -2(\bar{X}_2^T - \bar{X}_3^T) \bar{X} - 2(PR_2 - PR_3)c\tau \\ &\cdots \\ (PR_n^2 - PR_1^2) - (\bar{X}_n^2 - \bar{X}_1^2) &= -2(\bar{X}_n^T - \bar{X}_1^T) \bar{X} - 2(PR_n - PR_1)c\tau \end{aligned} \quad (6.11)$$

Введем обозначения:

$$U = \begin{pmatrix} (PR_1^2 - PR_2^2) - (\bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2) \\ \cdots \\ (PR_n^2 - PR_1^2) - (\bar{X}_n^2 - \bar{X}_1^2) \end{pmatrix}; n \text{ мерный вектор измерений}; \quad (6.12)$$

$B = -2 \begin{pmatrix} \bar{X}_1^T - \bar{X}_2^T & PR_1 - PR_2 \\ \cdots & \cdots \\ \bar{X}_n^T - \bar{X}_1^T & PR_n - PR_1 \end{pmatrix}$ – матрица размерности $n \times 4$, все компоненты которой известны;
 $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ c\tau \end{pmatrix}$ – неизвестный 4-х мерный вектор.

Тогда система уравнений (6.12) может быть представлена в виде:

$$\bar{U} = B\bar{\xi} \quad (6.13)$$

Решение уравнения (6.13) требует обращения матрицы $(B^T B)$. Компоненты этой матрицы достаточно большие – порядка радиуса орбиты НС. Для вычисления детерминанта такой матрицы в БЦВМ может не хватать разрядности. Поэтому нормируем уравнение (6.13). Введем обозначения:

$$\bar{u} = \frac{1}{R_0} \bar{U}; b = \frac{1}{R_0} B, \quad (6.14)$$

где R_0 – константа $R_0 = 25000 \cdot 10^3$ м

Тогда уравнение (3.58) примет вид:

$$\bar{u} = b\bar{\xi} \quad (6.15)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{\xi} = (b^T b)^{-1} b^T \bar{u} \quad (6.16)$$

Учитывая, что компоненты матрицы b имеют величину порядка единицы, при вычислении детерминанта матрицы $b^T b$ не может быть каких-либо вычислительных проблем. Другое дело

– обращаемость матрицы $b^T b$. Для того, чтобы решение существовало, необходимо, чтобы существовала матрица $(b^T b)^{-1}$. Необходимым условием существования матрицы $(b^T b)^{-1}$ является наличие в текущем созвездии НС как минимум четырех спутников, а необходимым и достаточным условием – неравенство нулю детерминанта этой матрицы:

$$\det(b^T b) \neq 0 \quad (6.17)$$

К сожалению, как показывает анализ, $\det(b^T b)$ оказывается всегда близок к нулю. В результате при малых ошибках измерений псевдодальностей возникают большие ошибки вектора искомых координат \bar{X} . Поэтому, несмотря на вычислительную простоту рассмотренного алгоритма, приходится использовать более сложные с точки зрения объема вычислений алгоритмы, обеспечивающие более точное решение.

Рассмотрим один из таких алгоритмов.

Пусть известно начальное приближение \bar{X}_0 вектора \bar{X} . Тогда для псевдодальности i -го НС справедливо равенство

$$PR_i + c\tau = \sqrt{(\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X})^T (\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X})}, \quad (6.18)$$

где $\Delta\bar{X}$ – искомая ошибка начального приближения \bar{X}_0 .

При малых значениях ошибки $\Delta\bar{X}$ ($|\Delta\bar{X}| \ll |\bar{X}_i|$) уравнение (6.18) можно преобразовать к виду:

$$PR_i - D_{0i} = -\frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_0)^T}{D_{0i}} \Delta\bar{X} - c\tau, \quad (6.19)$$

где D_0 – нулевое приближение дальности до НС, рассчитанное через нулевое приближение \bar{X}_0 .

Для n НС можно записать систему из n уравнений, аналогичных уравнению (6.19):

$$PR_1 - D_{01} = -\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)^T}{D_{01}} \Delta \bar{X} - c\tau$$

$$PR_n - D_{0n} = -\frac{(\bar{X}_n - \bar{X}_0)^T}{D_n} \Delta \bar{X} - c\tau$$
(6.20)

Введем обозначения:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} PR_1 - D_{01} \\ \vdots \\ PR_n - D_{0n} \end{pmatrix} \quad \text{— } n\text{-мерный вектор измерений;}$$

$$B = -\begin{pmatrix} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)^T}{D_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{(\bar{X}_n - \bar{X}_0)^T}{D_n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{— матрица направляющих косинусов на НС размерности } n \times 4;$$

$$\Delta \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \Delta \bar{X} \\ c\tau \end{pmatrix} \quad \text{— искомый вектор.}$$

С учетом введенных обозначений система уравнений (6.20) может быть представлена в виде:

$$\bar{U} = -B \Delta \bar{\xi} \quad (6.21)$$

Решение уравнения (3.66) имеет вид:

$$\Delta \bar{\xi}^* = -\left(B^T B\right)^{-1} B^T \bar{U} \quad (6.22)$$

Решение (3.67) существует, если существует матрица $(B^T B)^{-1}$, то есть, если $\det(B^T B) \neq 0$.

Необходимым условием существования решения (6.22) является наличие в созвездии НС, по которым выполняются измерения, не менее 4-х спутников.

Решение (6.22) дает первую итерацию определения вектора $\Delta \bar{\xi}$, по которой определяется первое приближение вектора \bar{X} и τ :

$$\begin{aligned} \bar{X}^1 &= \bar{X}_0^* + \Delta \bar{X} \\ \tau^1 &= \frac{c \tau^*}{c} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Подставив значение первого приближения векторов \bar{X}^1 и τ^1 в первоначальную систему уравнений, по тому же алгоритму (6.23) получим второе приближение $\bar{X}^2, \bar{\tau}^2$.

Завершается итерационный процесс тогда, когда

$$|\bar{X}^i| + |c\tau^i| - |\bar{X}^{i+1}| - |c\tau^{i+1}| < \varepsilon$$

Значение ε обычно выбирается величиной 0,5–1 м.

Неудобством рассмотренного алгоритма является необходимость знания начального приближения вектора координат \bar{X}_0 , которое часто бывает неизвестным.

В качестве первого приближения можно использовать, например, нулевой вектор ($X_0=0$), однако в этом случае, как отмечалось выше, детерминант матрицы $B^T B$, будет близок к нулю и решение может разойтись. Удобно в качестве нулевого приближения использовать точку на

поверхности Земли, лежащую на одном из векторов \bar{X}_i координат НС видимого созвездия. В этом случае вектор начального приближения определяется по формуле:

$$\bar{X}_0 = R_3 \frac{\bar{X}_i}{|\bar{X}_i|} \quad (6.24)$$

При таком начальном приближении алгоритм сходится очень быстро. Несмотря на большую начальную погрешность нулевого приближения, обычно достаточно 3-5 итераций для завершения счета.

При наличии ошибок измерений псевдодальностей возникают ошибки в определении вектора $\Delta\bar{\xi}^*$, величина которой пропорциональна ошибкам измерений. Но эти ошибки также зависят от того, насколько хорошо обращается матрица $B^T B$. Критерием такой обратаемости мог бы служить ее детерминант. Чем больше детерминант, тем лучше обратаемость, тем меньше ошибки определений координат и времени при одних и тех же ошибках измерений псевдодальности. Однако в мировой практике введен другой параметр, характеризующий обратаемость матрицы $B^T B$ – так называемый *GDOP* – *Geometric Dilution of Precision* (по-русски – геометрический фактор), который равен:

$$GDOP = \sqrt{t_race(B^T B)^{-1}}, \quad (6.25)$$

где $t_race()$ – обозначение следа матрицы, заключенной в скобках.

В навигационных приемниках решение считается достоверным, если $GDOP < GDOP_0$, где $GDOP_0$ – пороговое значение, обычно лежащее в диапазоне: $5 \leq GDOP_0 \leq 10$.

В некоторых случаях удобно использовать алгоритм определения вектора координат по разностям псевдодальностей. В этом случае неизвестное значение смещения часов

исключается из состава уравнений, а число неизвестных параметров уменьшается до трех (три координаты вектора \bar{X}). Рассмотрим этот алгоритм.

Запишем уравнение для разности псевдодальностей i -го и j -го НС:

$$PR_i - PR_j = \sqrt{(\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X})^T (\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X})} - \sqrt{(\bar{X}_j - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X})^T (\bar{X}_j - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X})}, \quad (6.26)$$

где \bar{X}_0 – нулевое приближение координат НС;

$\Delta\bar{X}$ – искомый вектор ошибки нулевого приближения.

В уравнении (6.26) неизвестная ошибка часов приемника τ взаимно уничтожилась, так как она является одинаковой для всех НС.

При малых значениях ошибок $\Delta\bar{X}$ ($|\Delta\bar{X}| \ll |\bar{X}_i|$) уравнение (6.26) можно преобразовать к виду:

$$(PR_i - PR_j) - (D_{0i} - D_{0j}) = - \left[\frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_0)^T}{D_{0i}} - \frac{(\bar{X}_j - \bar{X}_0)^T}{D_{0j}} \right] \Delta\bar{X}, \quad (6.27)$$

где D_{0i} , D_{0j} – нулевые приближения дальности до НС, рассчитанные через нулевое приближение \bar{X}_0 .

Для n НС можно записать систему из n уравнений, аналогичных уравнению (6.27):

$$\begin{aligned}
 (PR_1 - PR_2) - (D_{01} - D_{02}) &= -\left[\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)^T}{D_{01}} - \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_0)^T}{D_{02}} \right] \Delta \bar{X} \\
 (PR_2 - PR_3) - (D_{02} - D_{03}) &= -\left[\frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_0)^T}{D_{02}} - \frac{(\bar{X}_3 - \bar{X}_0)^T}{D_{03}} \right] \Delta \bar{X}, \\
 \cdots &
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$(PR_n - PR_1) - (D_{0n} - D_{01}) = -\left[\frac{(\bar{X}_n - \bar{X}_0)^T}{D_{0n}} - \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)^T}{D_{01}} \right] \Delta \bar{X}$$

Введем обозначения:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} (PR_1 - PR_2) - (D_{01} - D_{02}) \\ \cdots \\ (PR_n - PR_1) - (D_{0n} - D_{01}) \end{pmatrix} \quad - n\text{-мерный вектор измерений};$$

$$B = -\begin{pmatrix} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)^T}{D_1} - \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_0)^T}{D_2} \\ \cdots \\ \frac{(\bar{X}_n - \bar{X}_0)^T}{D_n} - \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_0)^T}{D_1} \end{pmatrix}$$

С учетом введенных обозначений система уравнений (6.28) может быть представлена в виде:

$$\bar{U} = -B \Delta \bar{X} \quad (6.29)$$

Решение уравнения (6.29) имеет вид:

$$\Delta \bar{X}^* = -\left(B^T B\right)^{-1} B^T \bar{U} \quad (6.30)$$

Решение уравнения (6.30) существует, если $\det(B^T B) \neq 0$. Необходимым условием существования решения (6.30) является наличие в созвездии НС, по которым выполняются измерения, не менее 4-х спутников. Действительно, несмотря на то, что в системе уравнений (6.30) имеется только три неизвестных компоненты вектора $\Delta \bar{X}$, при наличии в измеряемом созвездии только трех НС ранг матрицы B будет равен двум, так как ее третья строка будет равна сумме двух предыдущих, следовательно детерминант матрицы B при $n < 4$ всегда равен нулю.

Решение (6.30) дает первую итерацию для определения вектора $\Delta \bar{X}$. Дальше, как и при реализации предыдущего алгоритма выполняется итерационный процесс последовательного уточнения вектора $\Delta \bar{X}$. В качестве нулевого приближения вектора положения \bar{X}_0 также как и для предыдущего алгоритма может быть взята точка на поверхности Земли с координатами, определяемыми соотношением (6.25). Решение тогда сходится к точному значению как и в предыдущем алгоритме за 3÷5 итераций.

Рассмотренные два алгоритма определения вектора координат \bar{X} потребителя дают практически одинаковые решения и оба алгоритма используются в тех или иных навигационных приемниках. С точки зрения быстродействия они примерно одинаковы. Поэтому оба алгоритма могут использоваться в космических системах. Но в первом алгоритме оценка смещения часов σt^* входит в состав искомого вектора, и формируемое по алгоритму (6.22) решение кроме искомого вектора координат содержит оценку смещения часов. Во

втором алгоритме оценивается вектор координат, получив который можно оценить смещение часов по формуле:

$$c\tau^* = \frac{\sum_{i=1}^n [PR_i - D_i(\bar{X}_1^* \bar{X}_i)]}{n} \quad (6.31)$$

На рисунке 6.6 приведены типовые графики ошибок измерений АСН, установленной на низкоорбитальном КА, по координатам ΔX , ΔY , ΔZ в ГСК. Графики получены путем моделирования формирования координат в АСН и их сравнения с точными координатами КА. На графиках четко видно влияние ионосферы – периодическое повышение ошибок на светлой части орбиты и уменьшение ошибок на теневой части орбиты. Можно отметить зашумленность ошибки, обусловленной шумом измеряемой псевдодальности. В последующих разделах будет показана возможность фильтрации этого шума при использовании фазовых измерений совместно с псевдодальнотью для определения вектора координат.

Как следует из вида решений (6.22), (6.30) для двух рассмотренных алгоритмов, основное время реализации этих алгоритмов затрачивается на вычисление обратной матрицы $(B^T B)$. Существуют различные алгоритмы вычисления обратных матриц, отличающиеся своим быстродействием. Для матриц четвертого порядка эта разница небольшая, но как будет показано ниже, в задачах навигации часто возникает необходимость обращения матриц высокого порядка, например, порядка 16×16 . Обращение таких матриц требует значительных вычислительных ресурсов. Выбор алгоритмов, обеспечивающих высокое быстродействие, особенно для реализации навигационных задач на бортовых вычислительных средствах, приобретает первостепенное значение. Поэтому ниже приводится "быстрый" алгоритм обращения определенного вида матриц, наиболее часто встречающихся в задачах навигации.

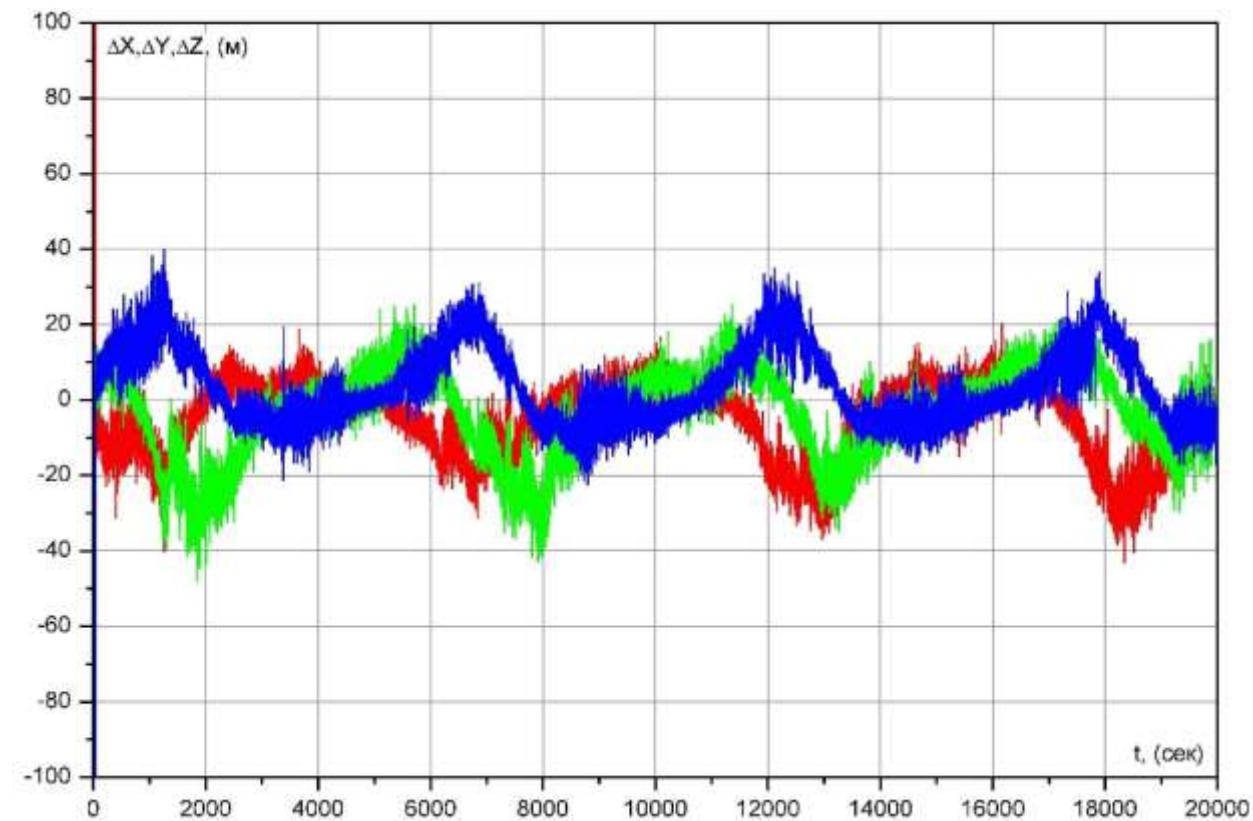


Рис. 6.6 Типовые графики ошибок измерений АЧН, установленной на низкоорбитальном КА.

Рассмотрим алгоритмы вычисления детерминанта и обратной матрицы для симметрической матрицы A , представляемой в виде: $A=B^T B$, где B – прямоугольная матрица размерности $m \times n$, $m \geq n$.

Приведем матричное соотношение, на основе которого разработан данный алгоритм. Представим обращаемую матрицу A размерности 4×4 в виде

$$A = \begin{pmatrix} D & \bar{b} \\ \bar{b}^T & d \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

где d – число, не равное нулю, если $\det(A) \neq 0$;

D – квадратная симметрическая матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$;

\bar{b} – вектор размерности $n-1$.

Предположим, что $\det(A) \neq 0$ и существует обратная матрица A^{-1} , которую представим в виде:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & \bar{b}_1 \\ \bar{b}_1^T & d_1 \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

где d_1 – число, не равное нулю;

D_1 – квадратная симметрическая матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$;

\bar{b}_1 – вектор размерности $n-1$.

Для вычисления детерминанта матрицы A справедлива формула:

$$\det A = (\det d) \det \left(D - \frac{\bar{b} \bar{b}^T}{d} \right) \quad (6.34)$$

То есть, $\det A$ равен произведению элемента d на детерминант матрицы $D - \frac{\bar{b} \bar{b}^T}{d}$ порядок которой на единицу ниже. Последовательное понижение порядка матрицы по алгоритму (6.34), выделение ее углового элемента, и последующее перемножение всех n угловых элементов позволяет определить детерминант матрицы A .

Для элементов матрицы A^{-1} : D_1, \bar{b}_1, d_1 справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{d - \bar{b}^T D^{-1} \bar{b}} \\ \bar{b}_1 &= -d_1 D^{-1} \bar{b} \\ A_1 &= A^{-1} + \frac{\bar{b}_1 \bar{b}_1^T}{d_1} \end{aligned} \tag{6.35}$$

Формулы (6.35) позволяют построить итерационный процесс вычисления матрицы D_1 , начиная с размерности 1 с последовательным повышением размерности. Например, взяв в качестве матрицы D первый элемент матрицы A , по формулам (3.80) определяем обратную матрицу для размерности 2×2 , для матрицы, стоящей в левом верхнем углу матрицы A . Аналогичным образом определяем обратную матрицу размерности 3×3 и т.д. для соответствующей угловой матрицы, стоящей в левом верхнем углу матрицы A . Процесс завершается определением обратной матрицы A^{-1} . Если матрица A может быть представлена в виде (6.32) и ее детерминант не равен 0, то при реализации итерационного процесса вычисления матрицы A^{-1} исключены операции деления на 0.

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

6.3 Алгоритмы формирования вектора скорости потребителя

В ГСНС определение скорости потребителя основано на эффекте Доплера – изменение частоты принимаемого потребителем сигнала относительно частоты излучаемого сигнала НС. Скорость измерения дальности между НС и потребителем в этом случае определяется по формуле:

$$\dot{D}_{dop} = \frac{f_n - f_u}{f_0} c, \quad (6.36)$$

где c – скорость света;

f_0 – номинальная частота излучаемого несущего сигнала НС;

f_n – частота принятого сигнала потребителем в момент t ;

f_u – частота излученного сигнала от НС в момент излучения сигнала, принятого потребителем в момент t .

Зная \dot{D}_i для трех и более НС, можно определить вектор скорости потребителя. Однако здесь нужно иметь ввиду, что :

- излучаемый каждым НС сигнал имеет смещение от номинальной частоты f_0 .

Величина этого смещения передается в составе оперативной информации от НС;

- принимаемый сигнал измеряется средствами приемника, генератор частоты которого имеет заметную ошибку (обычно 10^{-6} с/с $\div 10^{-7}$ с/с);

- частота передаваемого сигнала зависит от среды распространения.

Все перечисленные факторы необходимо учитывать при расчете реальной скорости изменения дальности.

Напомним, что в составе оперативной информации *GPS* передаются параметры:

- t_{0c} – время, к которому относятся передаваемые параметры;
- a_{f1} – относительное смещение частоты передаваемого сигнала;
- a_{f2} – производная относительного смещения частоты передаваемого сигнала.

Поправка частоты передаваемого сигнала в системе *GPS* определяется по формуле:

$$\Delta f = a_{f1} \cdot f_0 + 2a_{f2} \cdot f_0 (t - t_{0c}) \quad (6.37)$$

где t – текущее время;

f_0 – номинальная частота излучаемого сигнала.

Заметим, что передаваемый параметр a_{f2} , как правило, равен 0. Поэтому величину смещения частоты определяет первое слагаемое равенства (6.37). Эта величина остается константой в течение всего времени действия эфемерид.

В составе оперативной информации ГЛОНАСС передаются параметры:

- t_b – время, к которому относится передаваемая оперативная информация;
- γ_n – относительное отклонение прогнозируемого значения несущей частоты излучаемого сигнала n -м НС от номинального значения на момент t_b .

Сдвиг частоты передаваемого сигнала ГЛОНАСС от номинального значения определяется по формуле:

$$\Delta f = \gamma_n (t_b) \cdot f_0 \quad (6.38)$$

где f_0 – номинальная частота передаваемого сигнала.

Коррекция частоты сигнала, передаваемого НС, осуществляется по формуле:

$$f = f_0 - \Delta f \quad (6.39)$$

С учетом коррекции частоты передаваемого сигнала, частота принимаемого сигнала будет равна:

$$f_n = f + f_D, \quad (6.40)$$

где f_n – частота на входе в приемник;

f_D – доплеровское смещение частоты, обусловленное относительной скоростью НС и антенны приемника.

Принимаемая частота измеряется средствами приемника. Пусть в приемнике задающий генератор имеет номинальную частоту f_{0g} и дрейф Δf_g . Обычно $\frac{\Delta f_g}{f_{0g}}$ находится в диапазоне $10^{-6}\text{-}10^{-7}$ с/с. В этом случае частота генерируемого сигнала будет равна:

$$f_g = f_{0g} + \Delta f_g \quad (6.41)$$

хотя для генератора эта частота является номинальной f_{0g} .

Далее в приемнике "снимается" несущая частота и остается только доплеровская частота. Для снятия несущей определяется коэффициент K , на который надо умножить частоту внутреннего генератора, чтобы эта частота стала равной номинальной частоте несущего сигнала:

$$K = \frac{f_0}{f_{0g}} \quad (6.42)$$

На этот коэффициент K умножается частота реального сигнала генератора, и полученная частота вычитается из частоты принятого сигнала. В результате формируется частота псевдодоплеровского смещения:

$$f_{\text{ПД}} = f_0 + f_D - (f_{0e} + \Delta f_e) \frac{f_0}{f_{0e}} = f_D - \frac{\Delta f_e}{f_{0e}} f_0 \quad (6.43)$$

Эта частота также оценивается средствами приемника, т.е., с помощью генератора приемника. Дрейф 10^{-6} приводит к ошибке измерения скорости на величину:

$$\Delta V = \bar{V}_{\max} \cdot 10^{-6} \approx 7 \text{ мм/с} \quad (6.44)$$

Обычно такой ошибкой определения скорости в навигационных приемниках пренебрегают, хотя путем еще одной итерации эту ошибку можно исключить. Например, если величина дрейфа генератора известна из предыдущего шага, то величина измеренного псевдодоплеровского смещения будет связана с доплеровской частотой f_D и дрейфом генератора $\frac{\Delta f_e}{f_{0e}} f_0$ соотношением:

$$f_{\text{ПД}} = \left(f_D - \frac{\Delta f_e}{f_{0e}} f_0 \right) \left(1 - \frac{\Delta f_e^*}{f_{0e}} \right), \quad (6.45)$$

где Δf_e^* – оценка смещения генератора, полученная на предыдущем шаге.

Из равенства (6.44) и (6.45) получим уточненное значение псевдодоплеровского смещения:

$$f_{\text{ПД}} = f_{\text{ПД}} \left(1 + \frac{\Delta f_e^*}{f_{0e}} \right) \quad (6.46)$$

Величина $f_{\text{ПД}}$ выражена в герцах. Умножением ее на скорость света и делением на номинальную частоту несущего сигнала получим псевдодоплеровское смещение в метрах в секунду:

$$ПДС = f_{ПД} \cdot \frac{c}{f_0}, \quad (6.47)$$

Параметр ПДС является измерением навигационного приемника, по которому определяют скорость потребителя. Он включает как истинную скорость изменения дальности между НС и потребителем, а также дрейф генератора частоты приемника.

Аппаратная схема получения этого параметра в разных навигационных приемниках может быть реализована по-разному. В некоторых случаях он представляет собой результат интегрирования набегающей фазы после снятия номинальной частоты на некотором интервале времени меньшем или равном 1 с, отнесенными к времени. В некоторых приемниках выполняется непрерывное интегрирование набегающей фазы (формирование так называемой интегральной фазы – *carrier phase*), а под доплеровским смещением понимается ее секундный набег. Во всех этих случаях важно понимать, что моментом времени измерения этого псевдодоплеровского смещения является середина интервала измерения. Например, если измерением является приращение интегральной фазы за секунду, то моментом измерения является не начало и не конец секунды, а ее середина. Четкое понимание момента привязки измерения псевдодоплеровского сдвига важно для космических аппаратов, где за 0,5 с скорость КА меняется на ~5 м/с.

Рассмотрим алгоритмы формирования скорости потребителя по измерениям ПДС. Дальность между КА и потребителем определяется по формуле:

$$D = \sqrt{(\bar{X}_i - \bar{X})^T (\bar{X}_i - \bar{X})}, \quad (6.48)$$

где \bar{X}_i – координаты НС в момент излучения сигнала;

\bar{X} – координаты потребителя в момент измерения.

Если в равенстве (6.48) использовать значения координат НС в момент измерения, то формула (6.48) преобразуется к виду:

$$D = \sqrt{(\bar{X}_i - \bar{X})^T (\bar{X}_i - \bar{X})} - \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^T}{D_i} (\bar{V}_i + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_i]) \tau_i, \quad (6.49)$$

Учитывая, что $\frac{D_i}{\tau_i} = c$, получим выражение для дальности до НС в момент излучения сигнала:

$$D = \sqrt{(\bar{X}_i - \bar{X})^T (\bar{X}_i - \bar{X})} - \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^T}{c} (\bar{V}_i + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_i]) \quad (6.50)$$

В выражении (6.50) все параметры относятся к моменту приема сигнала (т.е., моменту измерения). Продифференцировав выражение (6.50), получим выражение для скорости изменения дальности:

$$\begin{aligned} \dot{D}_i = & \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^T}{D_i} (\bar{V}_i - \bar{V}) - \frac{(\bar{V}_i - \bar{V})^T}{c} (\bar{V}_i + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_i]) - \\ & - \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^T}{c} (\bar{a}_i + [\bar{\omega}_3 \times \bar{V}_i]) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Ускорение НС \bar{a}_i , входящее в последнее слагаемое правой части равенства (6.51), определяется по формуле:

$$\bar{a}_i = -\frac{\mu_3 \bar{X}_i}{|\bar{X}_i|^3} - \Omega^2 \bar{X}_i + 2\Omega \bar{V}_i, \quad (6.52)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица вращения Земли.

В выражении (6.51) для \dot{D} все параметры также относятся к моменту измерения. Первое слагаемое является основным. Величина его для низкоорбитальных КА может достигать 7 км/с. Вторые два слагаемых незначительны. Их величина составляет сантиметры в секунду. Однако для определения скорости потребителя с высокой точностью эти члены необходимо учитывать.

Дальнейшие выкладки существенно зависят от того, какие измерения и в какие моменты времени выполняются в навигационном приемнике для определения скорости потребителя. Лучшими характеристиками обладают навигационные приемники, измеряющие интегральную фазу (*carrier phase – CP*). Такие приемники обладают наиболее высокой точностью в решении навигационной задачи, позволяют решать задачи относительной навигации и ориентации. Поэтому будем предполагать, что в приемнике ежесекундно измеряется интегральная фаза. Измерения выполняются в моменты целой секунды внутренних часов приемника. Известно также текущее значение τ_0 смещения внутренней шкалы времени приемника относительно системной шкалы времени. Этую поправку также надо учитывать при вычислении скорости.

В принятом предположении моментами измерения интегральной фазы являются целые секунды системной шкалы времени. Моментом измерения приращения интегральной фазы является 0,5 сек внутренней шкалы. Величиной измерения будет значение Доплера:

$$D_{opij+0.5} = CP_{ij+1} - CP_{ij} = \dot{D}_{ij+0.5} - c \frac{\Delta f_{ej+0.5}}{f_{0e}} f_0 \quad (6.53)$$

В равенстве (6.53) индекс i относится к номеру НС, а индекс j – к номеру измерения.

Как отмечалось выше, моментом измерения $D_{0pij+0.5}$ является середина $j+1$ секунды. К этому же моменту должны относиться $D_{ij+0.5}$ и $\Delta f_{ej+0.5}$. Для скорости изменения дальности, отнесенной к середине $j+1$ -й секунды можно записать равенство:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{ij+0.5} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\bar{X}_{ij+1} - \bar{X}_{j+1} \right)^T}{D_{ij+1}} + \frac{\left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_j \right)^T}{D_{ij}} \right] \left(\frac{\bar{V}_{ij+1} + \bar{V}_{ij}}{2} - \bar{V}_{j+0.5} \right) + \\ & + \frac{\left(\bar{V}_{ij} - \bar{V}_j \right)^T}{c} \left(\bar{V}_{ij} + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_{ij}] \right) - \frac{\left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_j \right)^T}{c} \left(\bar{a}_{ij} + [\bar{\omega}_3 \times \bar{V}_{ij}] \right) \end{aligned} \quad (6.54)$$

В равенстве (6.54) неизвестным является вектор скорости потребителя на момент $t_{j+0.5}$.

Введем обозначения:

$$\bar{b}_{ij+0.5}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{X}_{ij+1} - \bar{X}_{j+1}}{D_{ij+1}} + \frac{\bar{X}_{ij} - \bar{X}_j}{D_{ij}} \right)^T \quad \text{— значение векторов направляющих косинусов от потребителя на } i\text{-й НС на момент } j+0.5 \text{ сек.};$$

$$\bar{V}_{j+0.5} = \frac{\bar{V}_{ij+1} + \bar{V}_{ij}}{2} \quad \text{— значение вектора скорости } i\text{-го НС на момент } j+0.5 \text{ сек.};$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{D}_i = & \frac{\left(\bar{V}_{ij+1} - \bar{V}_j \right)^T}{c} \left(\bar{V}_{ij} + [\bar{\omega}_3 \times \bar{X}_{ij}] \right) - \\ & - \frac{\left(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_j \right)^T}{c} \left(\bar{a}_{ij} + [\bar{\omega}_3 \times \bar{V}_{ij}] \right) \end{aligned} \quad \text{— поправка к } \dot{D}_i \text{ на время распространения сигнала.}$$

Тогда равенство (6.54) можно привести к виду:

$$\dot{D}_{ij+0.5} - \bar{b}_{ij+0.5}^T \bar{V}_{ij+0.5} - \Delta \dot{D}_i = -\bar{b}_{ij+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5} \quad (6.55)$$

Выразив значение $\dot{D}_{ij+0.5}$ через измерения CP_{ij} , используя уравнение (6.53), получим уравнение для определения неизвестного вектора $\bar{V}_{j+0.5}$ и величины смещения частоты:

$$CP_{ij+1} - CP_{ij} - \bar{b}_{ij+0.5}^T \bar{V}_{ij+0.5} - \Delta \dot{D}_i = -b_{ij+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5} - c \frac{\Delta f_{ej+0.5}}{f_{0e}} \cdot f_0 \quad (6.56)$$

Обозначим $\dot{d} = c \frac{\Delta f_{ej+0.5}}{f_{0e}} f_0$ – неизвестное значение смещения относительной частоты, выраженное в м/с.

Уравнение (6.56) содержит в левой части измеренные составляющие интегральной фазы и известные поправки. Правая часть содержит искомый вектор скорости потребителя $\bar{V}_{j+0.5}$ и неизвестное смещение относительной частоты \dot{d} .

Обозначим

$$U_{ij+0.5} = CP_{ij+1} - CP_{ij} - \bar{b}_{ij+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5} - \Delta \dot{D}_i, \quad (6.58)$$

тогда уравнение (6.56) может быть представлено в виде:

$$U_{ij+0.5} = -\bar{b}_{ij+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5} - \dot{d}. \quad (6.59)$$

Для серии из n одновременных измерений можно записать систему уравнений:

$$U_{1j+0.5} = -\bar{b}_{1j+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5} - \dot{d} \\ \cdots \quad . \quad (6.60)$$

$$U_{nj+0.5} = -\bar{b}_{nj+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5} - \dot{d}$$

Далее, также как и при вычислении координат, система может быть решена двумя способами:

- определение вектора $\bar{V}_{j+0.5}$ и \dot{d} ;
- исключение \dot{d} из системы, определение $\bar{V}_{j+0.5}$ с последующим определением \dot{d} .

Для решения первым способом введем обозначения:

$$\bar{U}_{j+0.5} = \begin{pmatrix} U_{1j+0.5} \\ \cdots \\ U_{nj+0.5} \end{pmatrix}, \bar{\xi}_{j+0.5} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{j+0.5} \\ \cdots \\ \dot{d} \end{pmatrix}, B_{j+0.5} = - \begin{pmatrix} b_{1j+0.5}^T & 1 \\ \cdots & \cdots \\ b_{nj+0.5}^T & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.61)$$

Тогда система уравнений (6.60) может быть представлена в виде:

$$\bar{U}_{j+0.5} = B_{j+0.5} \bar{\xi}_{j+0.5}. \quad (6.62)$$

Решение уравнения (6.62) имеет вид:

$$\bar{\xi}_{j+0.5}^* = (B_{j+0.5}^T B_{j+0.5})^{-1} B_{j+0.5}^T \bar{U}_{j+0.5}. \quad (6.63)$$

Решение (6.63) может быть получено при условии существования матрицы $(B_{j+0.5}^T B_{j+0.5})^{-1}$.

Но матрица $B_{j+0.5}$ формируется из матриц B_j и B_{j+1} , использовавшихся при определении векторов координат в моменты j и $j+1$. Эти решения также существовали при условии обращаемости матриц $(B_j^T B_j)$ и $(B_{j+1}^T B_{j+1})$. Таким образом, если были определены векторы \bar{X}_j и \bar{X}_{j+1} координат потребителя в моменты времени t_j и t_{j+1} , то матрица $(B_{j+0.5}^T B_{j+0.5})$ также является обращаемой, и решение (6.63) существует. Обратим внимание, что вектор скорости, полученный в соответствии с решением (6.63) относится к середине $j+1$ -й секунды. Для наземных объектов смещение привязки скорости на 0,5 сек., как правило, не играет принципиальной роли. В

космосе, например, низкоорбитальные КА движутся с ускорением \bar{g} . При таком ускорении смещение времени на 0,5 сек. приводит к ошибке скорости величиной 5 м/с. Для исключения этой ошибки необходимо привести полученное значение вектора скорости к моменту измерения $j+1$, для которого определен вектор \bar{X}_{j+1} . Такое приведение может быть сделано по формуле:

$$\bar{V}_{j+1} = \bar{V}_{j+0.5} + (0.5) \bar{a}_i, \quad (6.64)$$

где \bar{a}_i – вектор ускорения КА в ГСК, формируемый в соответствии с формулой (6.52).

Для решения системы уравнений (6.60) методом исключения \dot{d} введем обозначения:

$$U_{j+0.5} = \begin{pmatrix} U_{1j+0.5} - U_{2j+0.5} \\ U_{2j+0.5} - U_{3j+0.5} \\ \cdots \\ U_{nj+0.5} - U_{1j+0.5} \end{pmatrix} \quad B_{j+0.5} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{1j+0.5}^T - \bar{b}_{2j+0.5}^T \\ \bar{b}_{2j+0.5}^T - \bar{b}_{3j+0.5}^T \\ \cdots \\ \bar{b}_{nj+0.5}^T - \bar{b}_{1j+0.5}^T \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Тогда система (6.60) может быть представлена в виде:

$$U_{j+0.5} = B_{j+0.5} \bar{V}_{j+0.5}. \quad (6.66)$$

Решение уравнения (6.66) имеет вид:

$$\bar{V}_{j+0.5}^* = (B_{j+0.5}^T B_{j+0.5})^{-1} B_{j+0.5}^T \bar{U}_{j+0.5}. \quad (6.67)$$

Вектор скорости, полученный по второму решению, практически совпадает с вектором скорости, полученным по первому решению. После определения вектора скорости получим оценку вектора смещения частоты приемника:

$$\dot{d}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\bar{b}_{i,j+0.5}^T \bar{V}_{j+0.5}^* - U_{i,j+0.5} \right). \quad (6.68)$$

Оценка вектора смещения частоты приемника, полученная по второму решению, также практически совпадает с данными, полученными по первому решению.

Найденное решение, также как и решение, полученное первым способом, относится к моменту середины текущей секунды $j+0.5$ сек. Приведение решения к целой секунде может быть выполнено по формуле (6.64).

Неформальное описание программной функции, реализующей рассмотренный алгоритм, а также описание интерфейса этой функции приведено в Главе 8 Книги 2 настоящего курса лекций. Там же указан сайт, на котором можно найти программную реализацию этой функции.

6.4 Ошибки определения векторов координат и скорости. Методы повышения точности навигационных определений АСН

Графики ошибок PVt приведенные на рис. 6.6, содержат ионосферные и эфемеридные погрешности измерений АСН, а также ошибки, обусловленные шумовой составляющей измерений псевдодальностей. Сегодня, практически во всех навигационных приемниках реализован так называемый *hatch filter*, снимающий эту шумовую составляющую ошибок PVt , а также обеспечивающий фильтрацию кратковременных "всплесков" ошибок, обусловленных рядом других возмущающих факторов, влияющих на точность навигационных определений. Свойства *hatch filter* основаны на том, что истинное приращение псевдодальности за секунду практически равно приращению интегральной фазы (CP) за секунду или псевдо доплеровскому смещению, измеренному в середине интервала между измерениями псевдодальности. То есть, если в качестве "сырых" измерений в приемнике формируется PR и CP , измеренные в одни и

те же моменты времени, но для идеально измеренного приращения псевдодальности ΔPR_0 (без шумовой составляющей, величина которой достигает нескольких метров) справедливо равенство:

$$\Delta PR_0 = \Delta CP, \quad (6.69)$$

где ΔCP – приращение интегральной фазы за этот же промежуток времени.

Равенство (6.69) справедливо с точностью до шумов CP , величина которых составляет несколько миллиметров, а также изменения за секунду ионосферной погрешности, величина которого не превышает несколько сантиметров.

Целью фильтра является формирование на каждом i -м шаге измерений оценки псевдодальности PR_i^* более точной по сравнению с измеренной псевдодальностью PR_i , которая затем используется в формировании PVt . В *hatch filter* оценка псевдодальности формируется по следующему алгоритму:

$$PR_i^* = PR_{i-1}^* + \frac{T-1}{T}(CP_i - CP_{i-1}) + \frac{1}{T}(PR_i - PR_{i-1}^*), \quad (6.70)$$

где T – постоянная времени фильтра.

Постоянная времени T характеризует время схождения фильтра.

Обычно постоянную времени выбирают величиной ~ 100 сек. Тогда в ~ 100 раз уменьшается шумовая составляющая ошибки PR , т.е. эта ошибка практически исключается из бюджета ошибок PR и, соответственно, PVt .

На рис. 6.7 приведены типовые графики измерений гринвичских координат антенны АСН, неподвижно установленной на поверхности Земли (в окрестности Москвы). Так как антенна покоятся, то графики должны соответствовать постоянным координатам X , Y , Z антенны. Однако они представляют собой три кривые с диапазоном отклонений от некоторого

среднего значения величиной ± 10 м. Благодаря *hatch filter*, на графиках отсутствует шумовая составляющая, как на рис. 6.6.

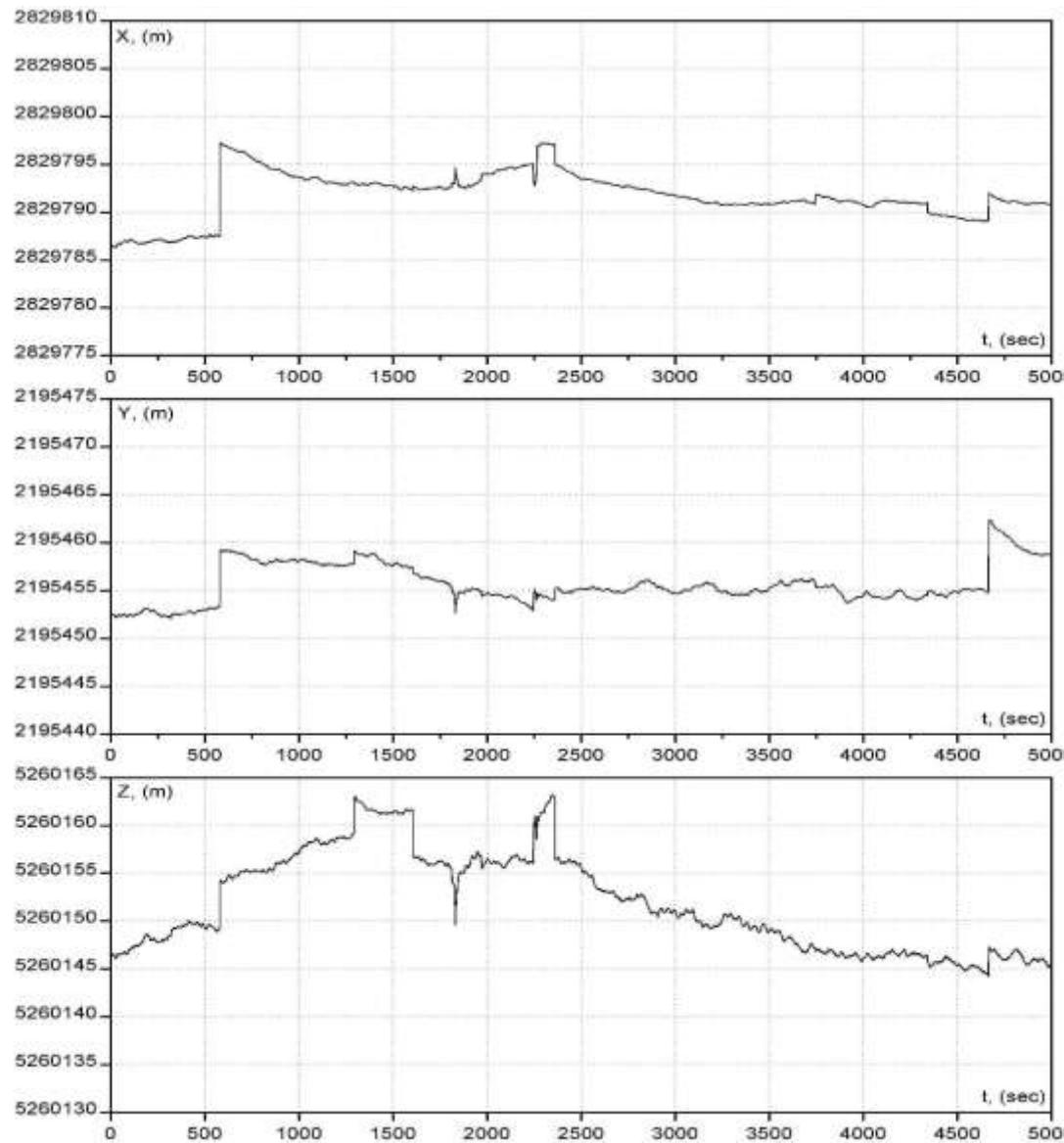


Рис. 6.7 Типовые графики измерений гринвичских координат антенны АЧ, неподвижно установленной на поверхности Земли (в окрестности г. Москвы).

Приведенные графики получены при работе АСН в режиме без использования ионосферной и тропосферной коррекции ошибок псевдодальностей. Поэтому здесь хорошо видны моменты смены созвездий НС - при исчезновении или появлении нового НС происходит резкий скачок ошибок координат, обусловленный наличием у исчезнувшего или нового НС ионосферной и тропосферной ошибок. Для сравнения, на рис. 6.8 приведены аналогичные графики при работе АСН в режиме ионосферной и тропосферной коррекции измерений. Из рисунка видно существенное снижение диапазона отклонения формируемых координат от их среднего значения. Они не превышают величины ± 3 м. То есть, благодаря ионосферной и тропосферной коррекции обеспечивается существенное повышение точности PVt . При смене созвездий НС практически отсутствуют скачкообразные изменения формируемых координат. Это означает, что реализованные в АСН алгоритмы ионосферной и тропосферной коррекции измерений АСН, рассмотренные в разделе 3.6.1, с высокой точностью моделируют и компенсируют ионосферные и тропосферные погрешности измерений АСН. Благодаря этому точность PVt приемников *GPS*, работающих на Земле, сегодня составляет величину ± 5 м.

Однако для АСН, установленной на космических аппаратах, рассмотренные модели ионосферной и тропосферной коррекции практически перестают соответствовать действительности. Поэтому на КА, как правило, АСН работает без реализации режима ионосферной и тропосферной коррекции. И хотя на орbitах КА тропосферные погрешности отсутствуют, ионосферные ошибки достаточно велики и иногда достигают десятков метров (как правило, для пригоризонтных НС).

Кроме ионосферных ошибок на КА имеют место ошибки, обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции КА. Особенно эти ошибки характерны для крупногабаритных КА, таких как, например, МКС. Типовые графики ошибок

PVt для МКС, полученные по результатам обработки реальных данных АСН-М МКС, приведены на рис. 6.9.

Графики ошибок ΔX , ΔY , ΔZ представляют собой разность относительно ОСК текущих измерений АСН-М и текущей оценки координат центра масс МКС, полученной по 5000 измерений PVt , предшествовавших текущему измерению. Расчетная точность сформированной орбиты центра масс МКС по координатам составляет ± 5 м. На графиках наблюдаются всплески ошибок амплитудой до 40 м. Именно эти всплески представляют собой ошибки, обусловленные переотражениями сигналов от элементов конструкции КА. Для обозначения этих ошибок в мире установился общепринятый термин "*multipath*", который в дальнейшем будет использоваться в настоящей работе. Формируемые АСН PVt можно принимать за вектор состояния КА, точность которого составляет 20-40 м по положению и 3-5 см/с по скорости. Однако такая точность оказывается недостаточной для решения многих задач космической навигации. Необходимость повышения точности потребовала изменения идеологии построения АСН космического назначения по сравнению с идеологией построения традиционной АСН для наземного использования. Особенности АСН космического назначения рассматриваются в следующих главах настоящего курса лекций.

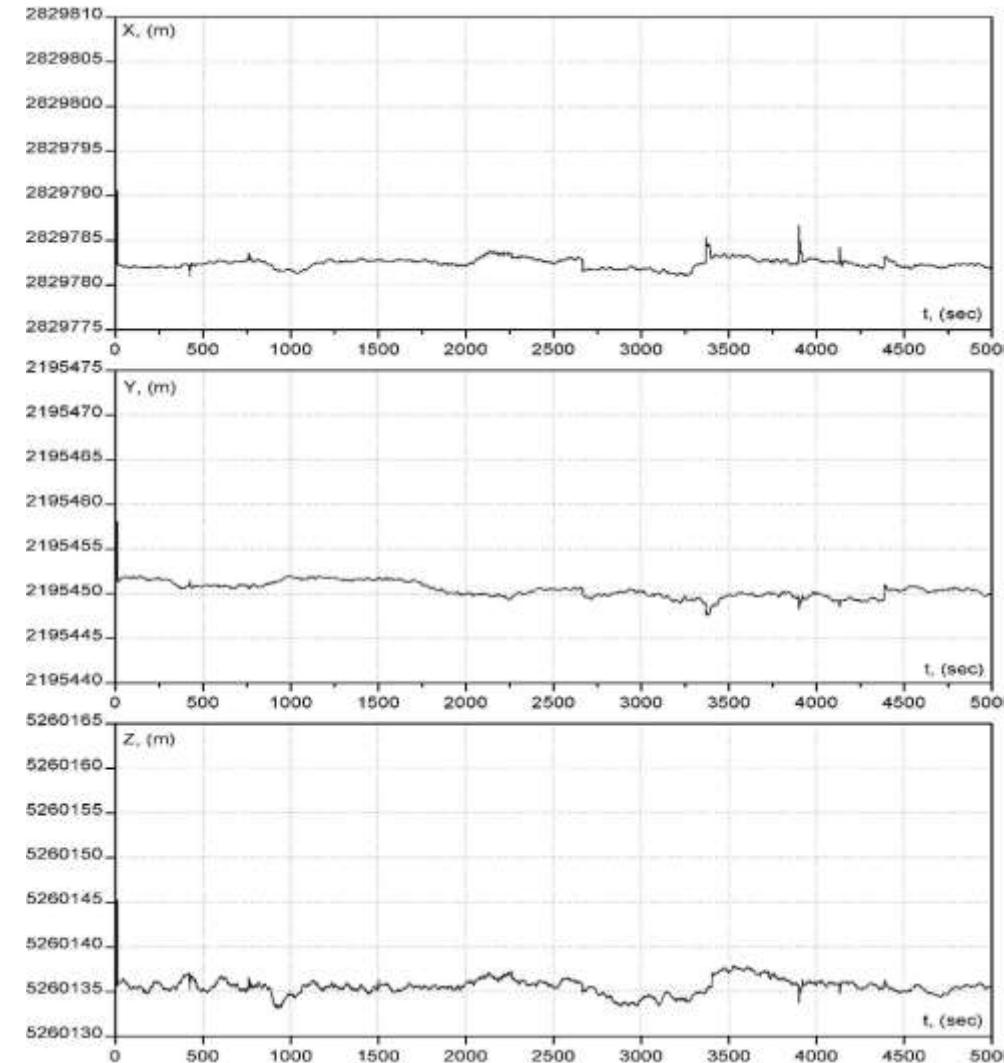


Рис. 6.8 Графики гринвичских координат неподвижной антенны при работе АСН в режиме ионосферной и тропосферной коррекции.

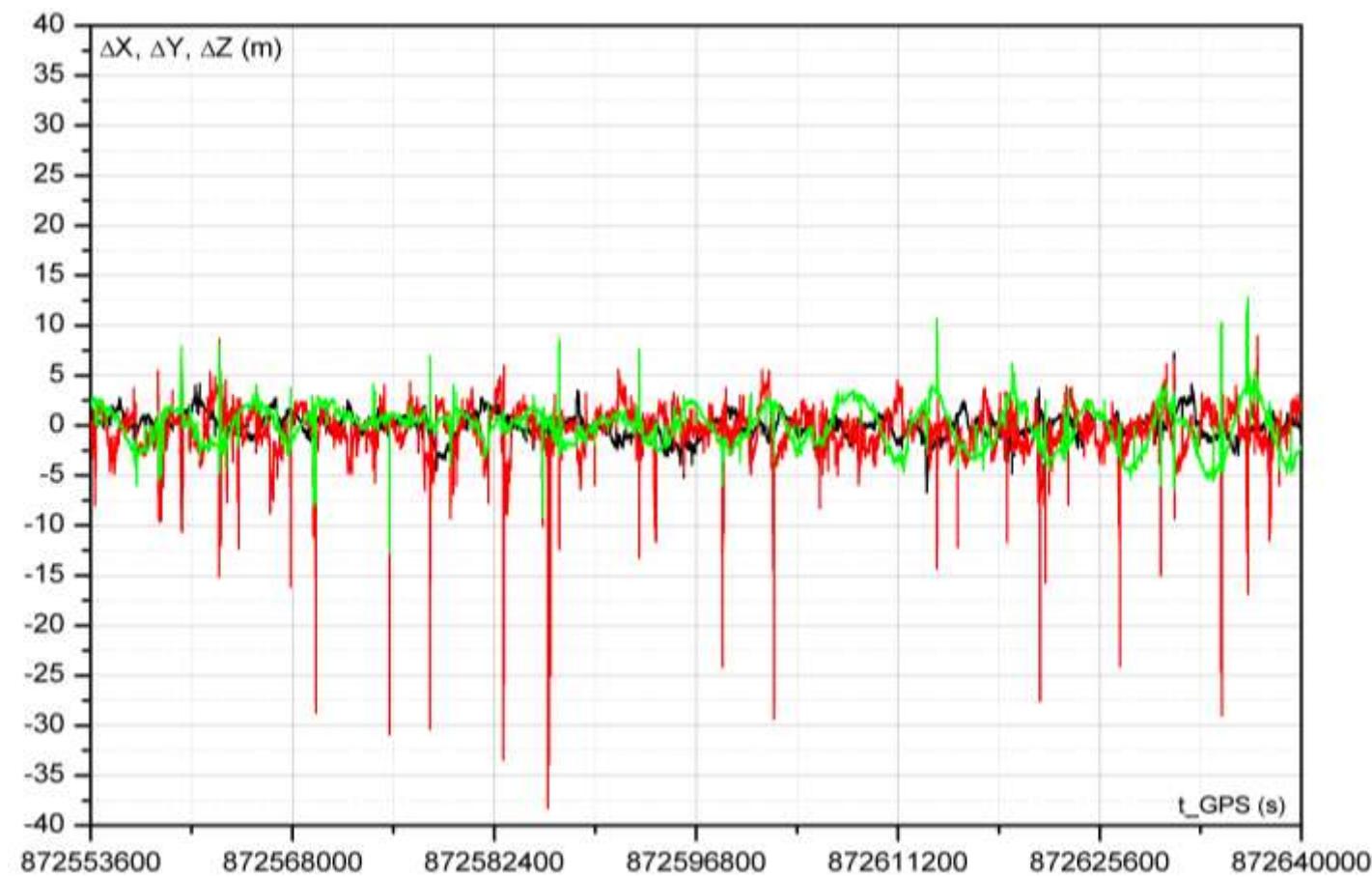


Рис. 6.9 Типовой график ошибок измерений координат АЧН-М МКС.

Глава 7 Формирование оценки орбиты низкоорбитальных КА по измерениям координат АСН

По измерениям ГСНС принципиально может осуществляться навигация любых КА, находящихся в зоне действия ГСНС, то есть аппаратура АСН которая способна принимать и обрабатывать сигналы НС. Область использования ГСНС определяется мощностью излучаемого НС сигнала и чувствительностью существующей АП. В настоящее время соотношение между мощностью излучаемого сигнала и чувствительностью АП такова, что навигация по измерения ГСНС может выполняться для КА с высотами орбит до ~50000 км. При этом измерения возможны только в том случае, если КА находится в области диаграммы направленности излучающей антенны НС. С учетом сказанного, с точки зрения методов навигации по измерениям ГСНС орбиты КА можно разделить на три класса:

- низкие орбиты (НО);
- высокоэллиптические орбиты (ВЭО);
- геостационарные (или высокие) орбиты (ГСО).

Для перечисленных трех классов орбит КА принципиальной является видимость НС антенной АСН, установленной на соответствующем КА. Типовые графики числа видимых НС для этих орбит приведены на рис. 7.1-7.3

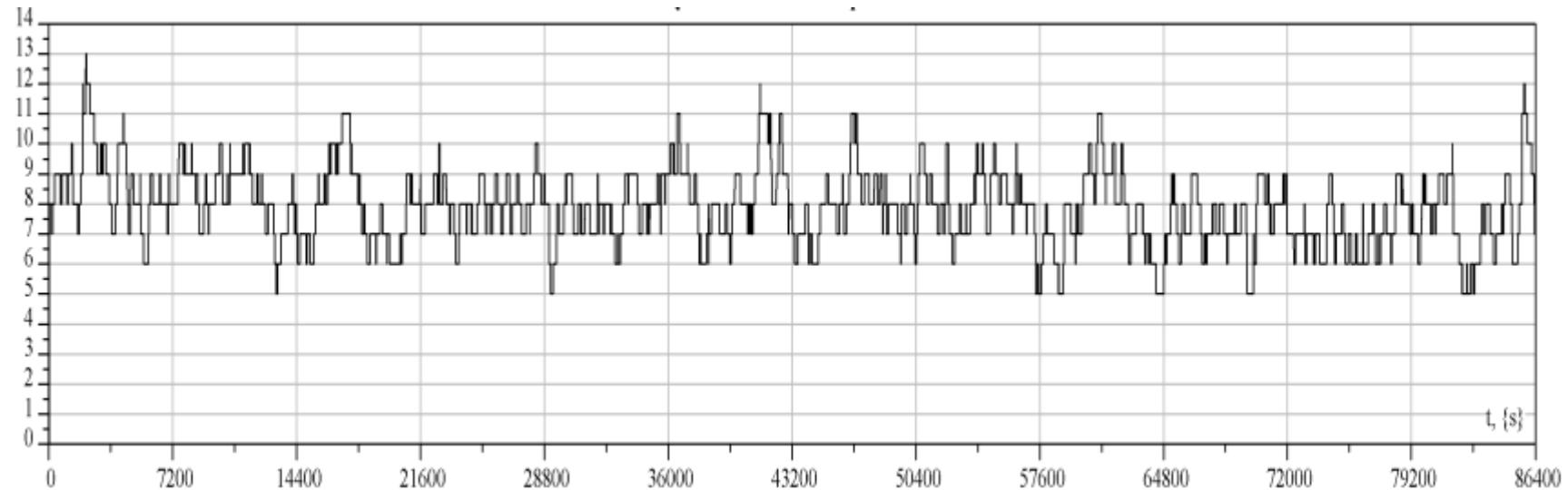


Рис. 7.1 Видимость прямых НС *GPS* на МКС.

Рис. 7.1 на примере АСН-М МКС демонстрирует видимость НС для НО. Из графика видно, что число видимых спутников составляет 6-9 НС. Такое количество НС достаточно для формирования КСВ с достаточно высокой точностью: 20-30 м по положению и 5-15 см/сек по скорости.

Для ВЭО число НС в окрестности перигея также достаточно для формирования КСВ. Длительность участка орбиты с уровнем $GDOP < 5$ составляет примерно 20 мин при периоде орбиты 12 час. На остальном участке орбиты АСН не может формировать КСВ.

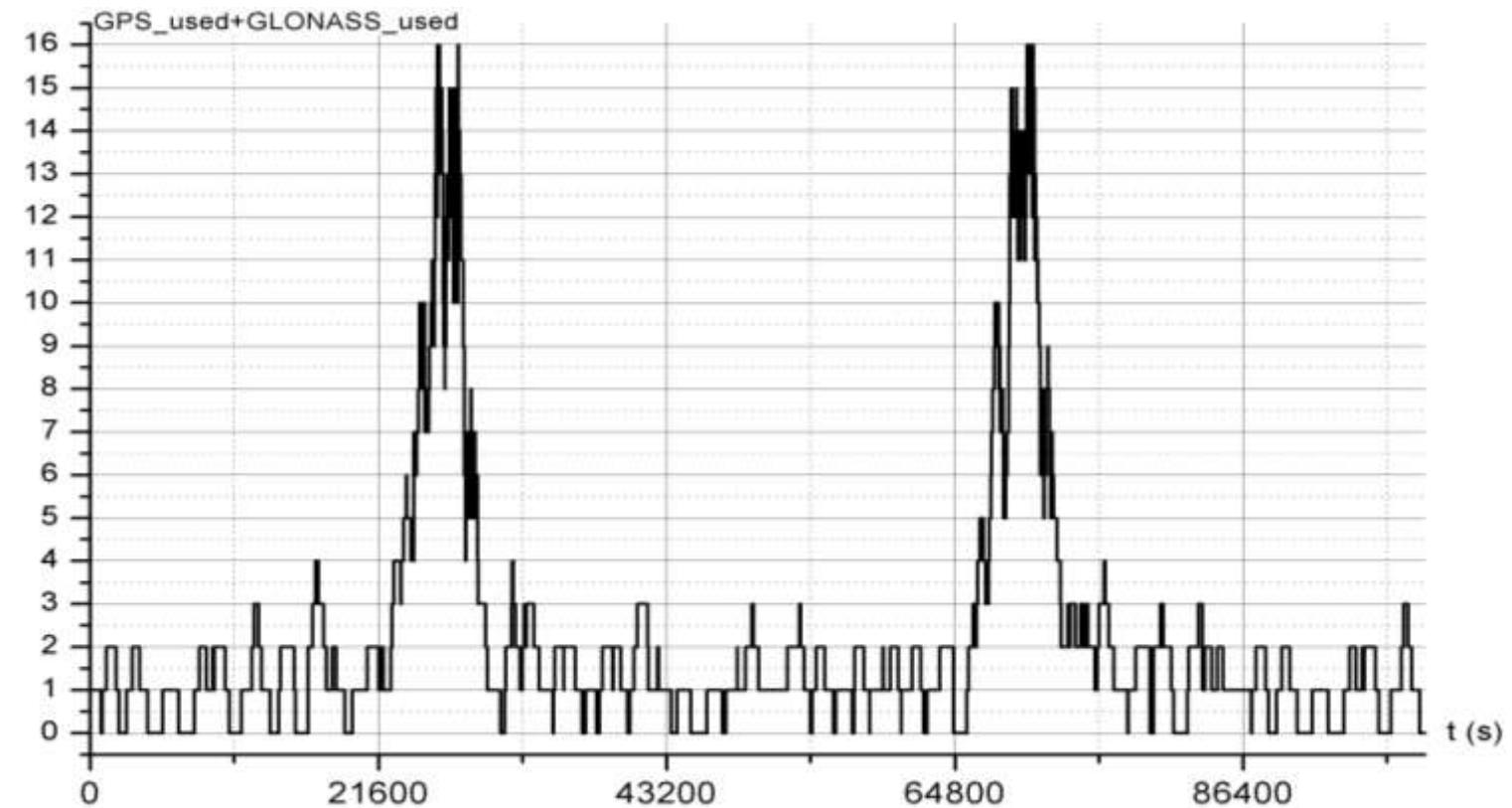


Рис. 7.2 Видимость прямых и обратных НС на ВЭО.

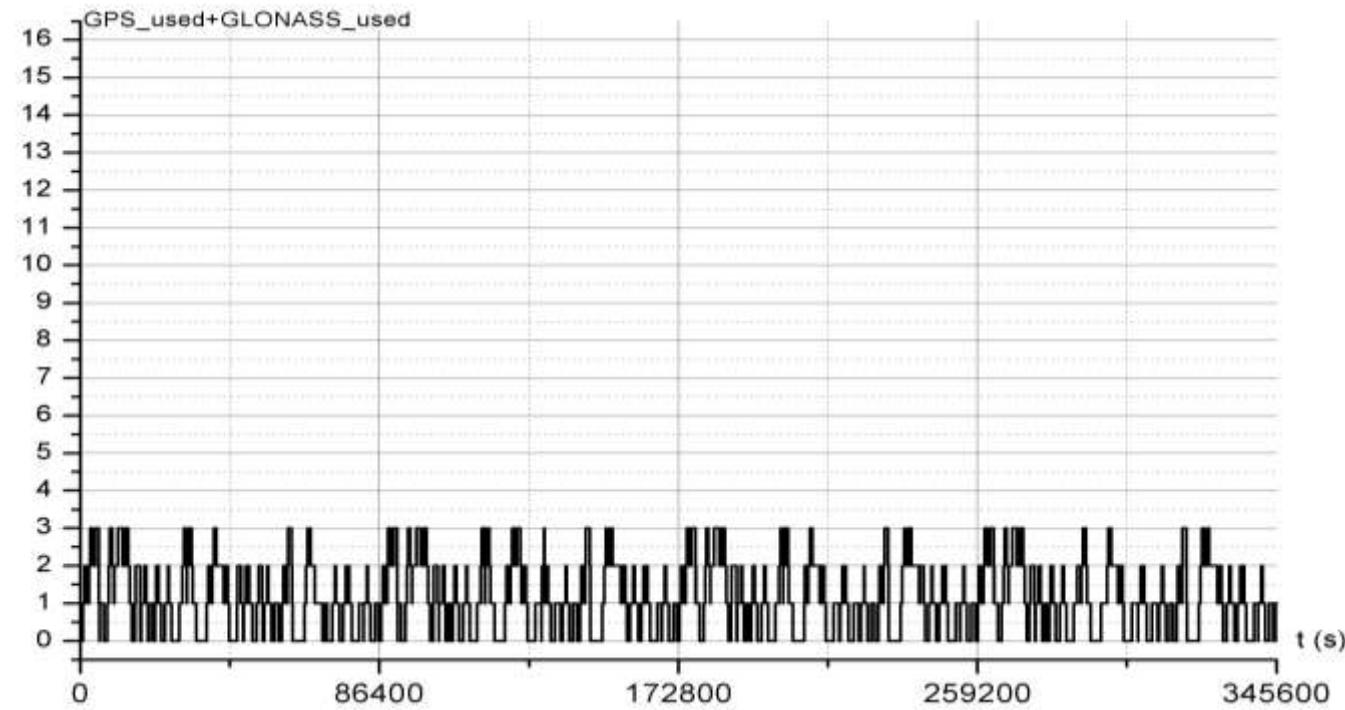


Рис. 7.3 Видимость обратных НС *GPS* для ГСО.

Для ГСО число видимых спутников на всей орбите не превышает трёх НС. Поэтому АСН вообще не может одномоментно формировать КСВ на ГСО. Навигация КА в таком случае должна выполняться по «сырым» измерениям АСН – по измерениям псевдодальностей и доплеровских сдвигов.

В первую очередь рассмотрим навигацию низкоорбитальных КА.

7.1 Обоснование необходимости вторичной обработки измерений АСН. Структура АСН космического назначения

Выше мы отмечали, что вектор координат \bar{X} и скорости $\dot{\bar{X}}$, полученные на какой либо момент времени и являются параметрами движения КА. По ним можно определить вектор состояния КА на любой момент времени. При этом следует отметить, что аппаратура спутниковой навигации КА определяет векторы \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$ в составе сообщения с КСВ с достаточно высокой точностью: погрешность по положению составляет 20-30 м, по скорости 5-15 см/сек. Такой точности бывает достаточно для решения многих задач КА. Поэтому первые образцы АСН, использовавшиеся на низкоорбитальных КА в качестве формируемой оценки орбиты КА выдавали векторы \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$ из состава сообщения КСВ.

На рис. 7.4 приведено фото и структурная схема первой российской АСН (АСН-2401 П разработки Российского института радионавигации и времени, г. Санкт-Петербург), работавшей в космосе в составе КА «Союз-ТМ 28» и орбитальной станции «Мир».

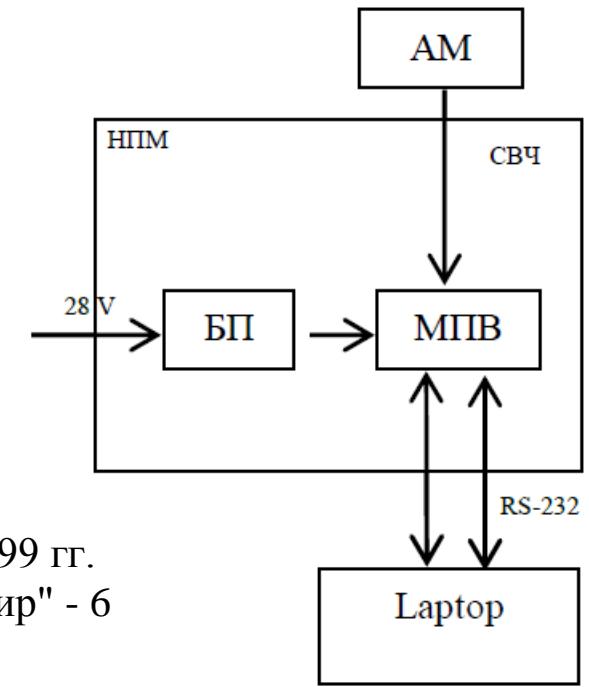
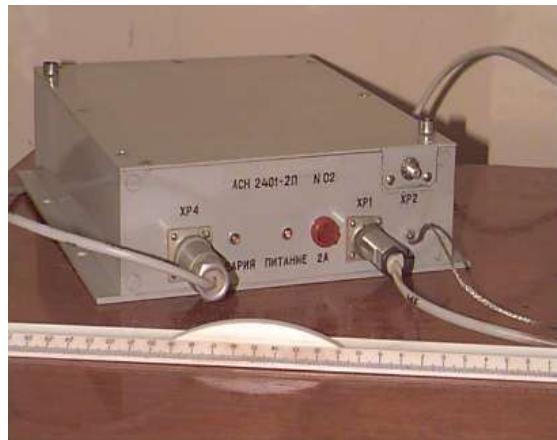


Рис. 7.4 Первый опыт эксплуатации АСН в космосе 1998-1999 гг.
 АСН-2401П - разработки РИРВ "Союз-ТМ 28" - станция "Мир" - 6
 месяцев работы на борту.

В состав АСН-2401П (НПМ) входил антенный модуль (AM), модуль приемово-числительный (МПВ) и блок питания (БП).

МПВ представлял собой навигационную плату-приемник АСН-22 с резервированным информационным интерфейсом RS-232, по которому формируемые в МПВ КСВ передавались в управляющий *Laptop*, где накапливались для последующего наземного анализа.

По результатам наземного анализа данных АСН был сделан вывод о необходимости выполнения вторичной обработки данных КСВ, обеспечивающей непрерывное формирование высокоточной текущей орбиты КА. Необходимость выполнения дополнительной вторичной обработки данных КСВ обусловлено рядом факторов:

- наличием достаточно большого количества сбоев в данных;
- наличие эпизодических всплесков ошибок формируемых векторов \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$, обусловленных переотражениями сигналов НС от элементов конструкции КА;
- потерей навигационных решений при угловых маневрах КА;
- низкой точностью прогноза вектора состояния КА по измерениям КСВ.

Сказанное иллюстрируется рисунками 7.5-7.8. На рис. 7.5 приведены графики сбоев КСВ (недостоверных данных), полученные в реальном полете АСН-М МКС и американского приемника *GPS SIGI*, установленного на американском сегменте МКС. Приведенные графики являются типичными для аппаратуры ГЛОНАСС или *GPS*, работающей на низкоорбитальных КА.

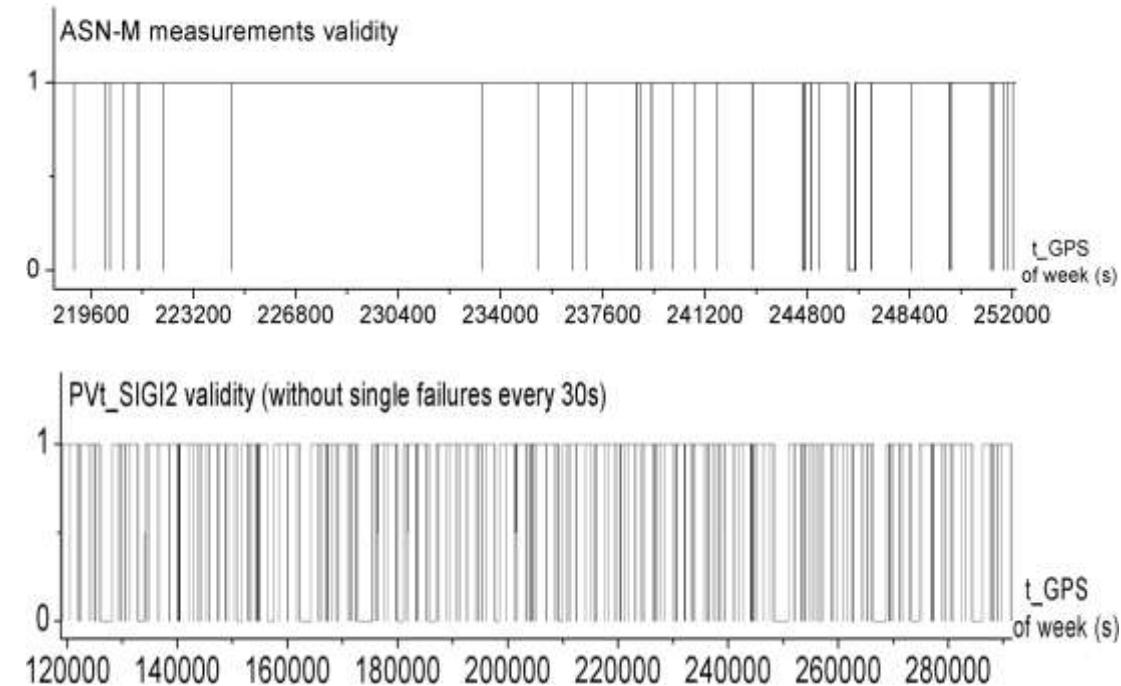


Рис. 7.5 Графики сбоев в измерениях КСВ.

На рис. 7.6 и 7.7 приведены графики ошибок измерений КСВ АЧН-М МКС и *GPS SIGI* МКС. Из графиков видно (особенно по измерениям *SIGI*), что наблюдаются интервалы отсутствия измерений (видимо – отбраковка по уровню *GDOP*), а также достаточно большие всплески ошибок, обусловленных переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС, достигающие по положению величины 100 м, по скорости 30 см/сек. Наблюдаемое на графике постоянное смещение ошибки КСВ *SIGI* по продольной дальности (ΔX) обусловлено смещением антенны *SIGI* относительно антенны АЧН по продольной дальности на 40 м.

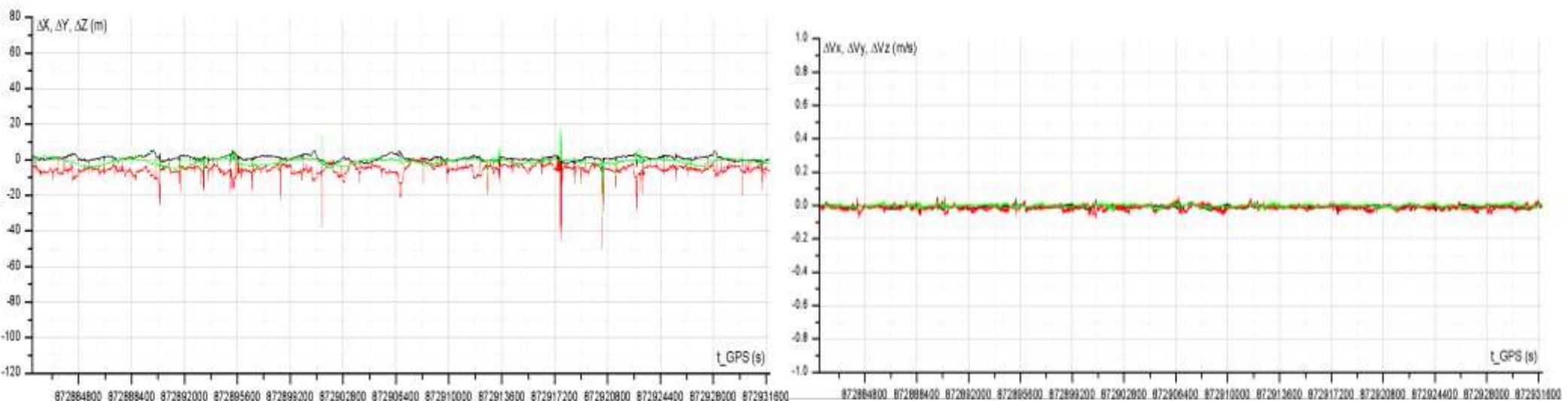


Рис. 7.6 Графики ошибок измерений КСВ АЧН-М МКС.

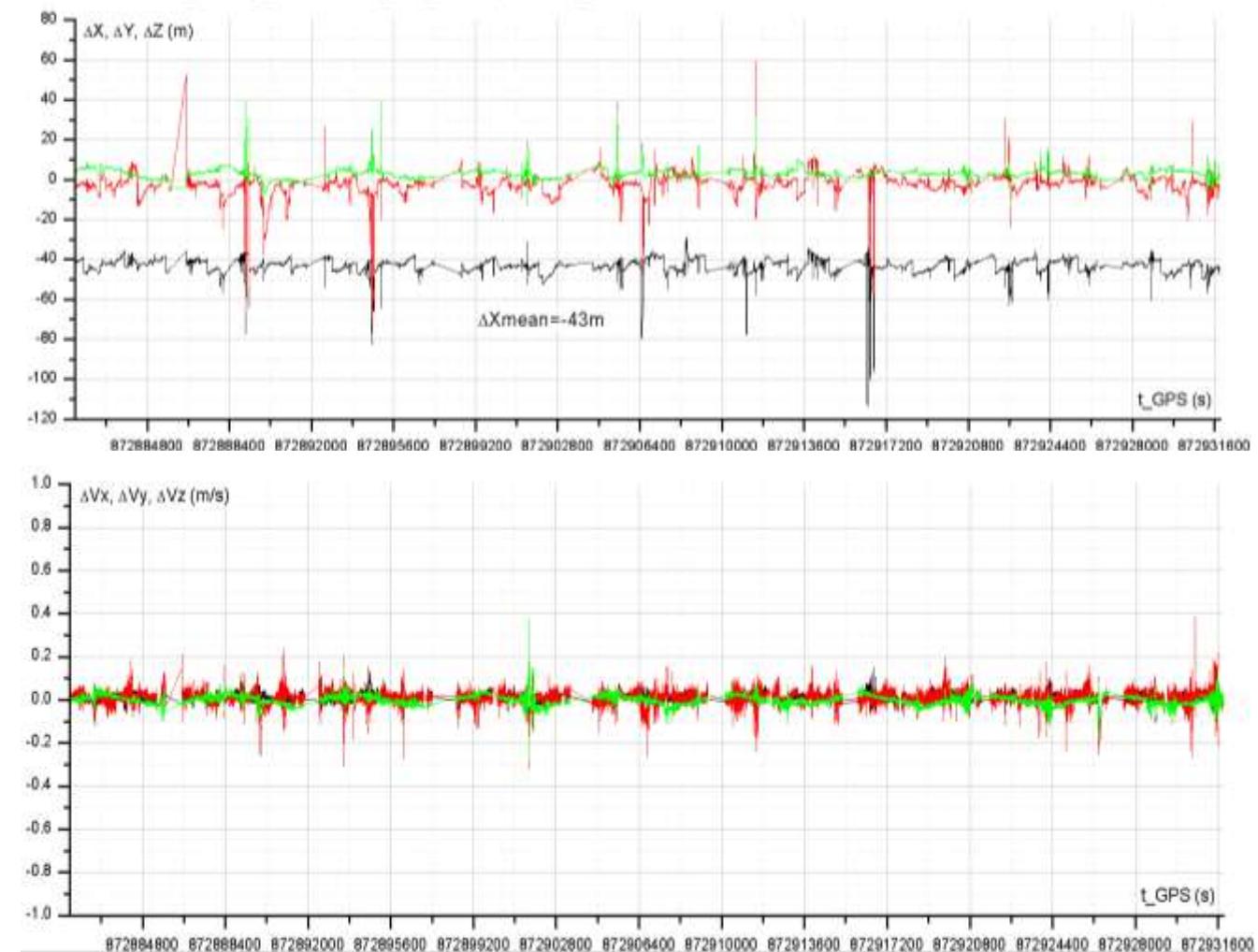


Рис. 7.7 Ошибки измерений КСВ американского приемника *SIGI*, установленного на МКС.

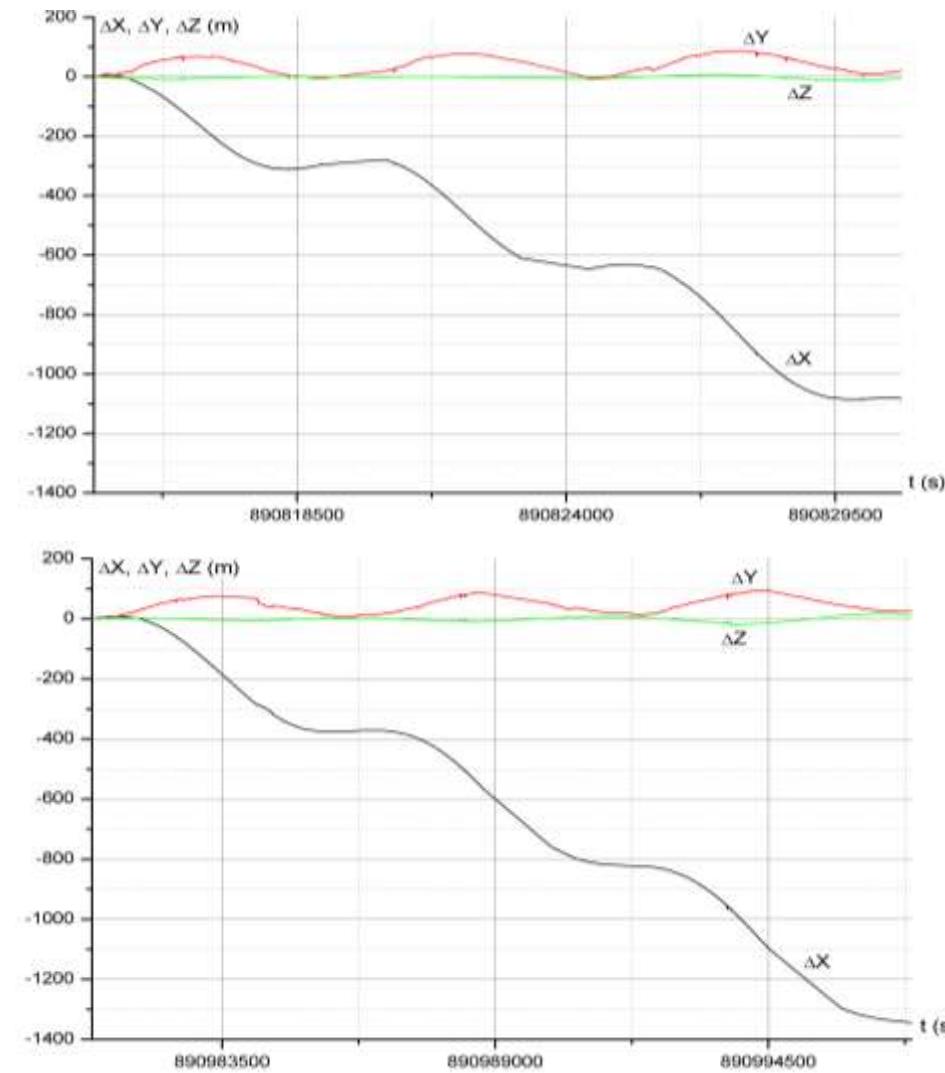


Рис. 7.8 Ошибки прогноза орбиты МКС на три витка, выполненные по данным КСВ.

На рис. 7.8 приведены графики ошибок прогноза орбиты МКС на три витка, выполненные по данным КСВ.

Для сравнения на рисунке 4.9 приведены графики ошибок прогноза орбиты МКС на три витка, выполненного по оценке орбиты, полученной после вторичной обработки данных КСВ. Из графиков видно, что ошибки прогноза орбиты на три витка, выполненного по данным КСВ составляет по положению 1-1,5 км, а прогноза, выполненного по оценке орбиты, полученной после вторичной обработки данных КСВ составляет ~ 50 м. То есть точность прогноза возрастает в десятки раз. Кроме того, оценка орбиты, полученная после вторичной обработки данных КСВ, непрерывна, не имеет ни сбоев, ни всплесков ошибок.

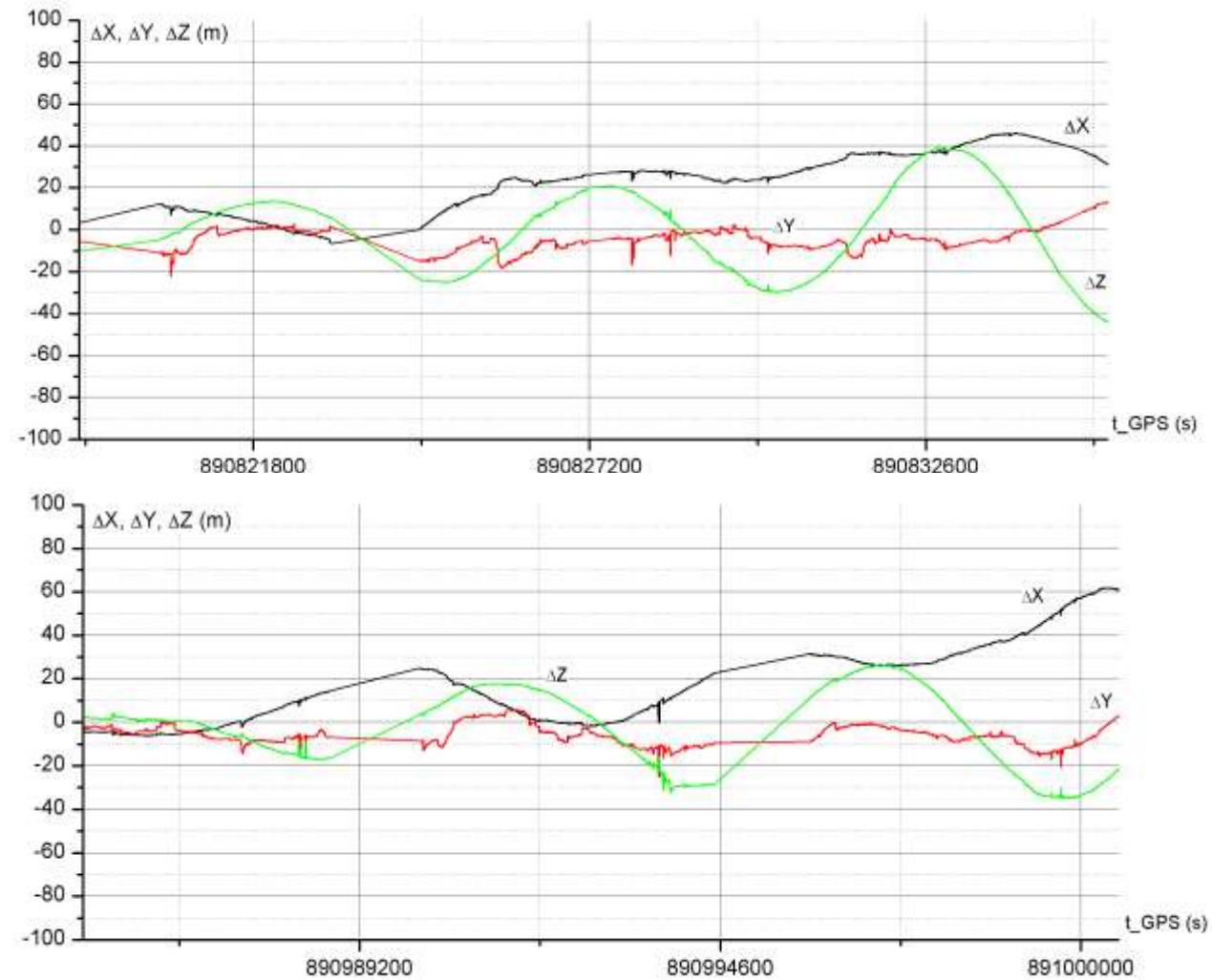


Рис. 7.9 Ошибки прогноза орбиты МКС на три витка, выполненные по оценке орбиты, полученной после вторичной обработки данных КСВ.

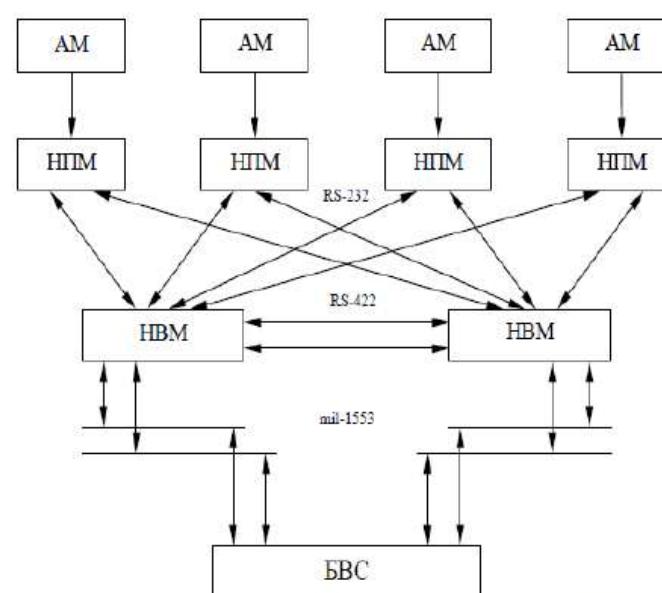
С учетом опыта работы с первыми навигационными приемниками, устанавливавшимися на КА, в РКК «Энергия» была разработана аппаратура АСН-М для МКС, обеспечивающая вторичную обработку данных КСВ. Внешний вид блоков этой аппаратуры, структура системы в целом и структура блоков, а также основные характеристики элементов системы приведены на рис. 7.9.

АСН-М включает:

- четыре антенных модуля (АМ);
- четыре навигационных приёмных модуля (НПМ);
- два навигационных вычислительных модуля (НВМ);

Каждый НПМ включает плату-приемник МПВ с соответствующим блоком питания. МПВ формирует КСВ и имеет интерфейс RS-232.

НВМ предназначен для выполнения вторичной обработки данных НПМ и передачи формируемых данных в бортовую вычислительную систему (БВС) по интерфейсу MIL-1553.



Блок-схема АЧН-М



Внешний вид блоков АЧН-М: антенный блок, НПМ и НВМ
 антенный блок – вес 0,4 кг, потребление 1 Вт;
 НПМ – вес 0,9 кг; потребление 5 Вт;
 НВМ – вес 1,8 кг, потребление – 15 Вт

Рис. 7.10 Аппаратура АЧН-М МКС.

В АСН-М МКС вторичная обработка данных в основном заключалась в динамической фильтрации измерений \bar{X} и $\dot{\bar{X}}$, содержащихся в сообщениях КСВ НПМ, и формировании высокоточной оценки орбиты.

Характерной особенностью АСН-М являлась ее модульная реализация. Каждый из модулей АМ, НПМ, НВМ был выполнен в виде отдельного прибора, который в случае отказа благодаря наличию экипажа, мог легко быть заменен на новый, доставленный с Земли прибор. Хотя такая компоновка системы с точки зрения веса не была оптимальной, однако на этапе освоения аппаратуры спутниковой навигации космического назначения она себя оправдала. За 12 лет эксплуатации АСН-М имели место три отказа НВМ и пять отказов НПМ, которые, по-видимому, были связаны с воздействием радиации на электронику.

Внешние проявления отказов НВМ и НПМ были различны, но для каждого из типов приборов отказы были совершенно идентичны. Все три отказа НВМ начинались с возникновения неустойчивой работы системы, периодические пропадания и появления измерений. Эта неустойчивость работы усиливалась в течение 1 - 2 недель, после чего работа НВМ прекращалась. Интересны были попытки проведения анализа причины отказов. Для этого приборы возвращали на Землю. Но на Земле все три прибора работали без замечаний. Визуальный контроль также не дал результатов. К сожалению, возвращенные приборы, повторно прошедшие весь цикл наземных испытаний, не удалось отправить вновь на МКС для дальнейших наблюдений за их работоспособностью – таковы правила эксплуатации космической техники – отказавший прибор с неустановленной причиной отказа не допускается к летной эксплуатации.

Все пять отказов НПМ были связаны с отказом программного обеспечения (ПО). После доставки на Землю и переустановки ПО приборы работали без замечаний. Все они вновь были

доставлены на МКС и проработали от трех до восьми лет до замены АСН на новую модификацию. Полученный опыт эксплуатации АСН показал, что архитектура системы должна быть спроектирована таким образом, чтобы в случае отказа ПО любого из модулей, ПО этого модуля могло бы быть переустановлено непосредственно в полете. Такой подход существенно повысил надежность последующих новых разработок АСН, работающих на КА в условиях повышенной радиации.

Следует отметить также, что кроме отмеченных пяти отказов НПМ периодически один раз в 2 -3 месяца наблюдались отказы ПО НПМ другого типа, которым дали название «нефатальные отказы». Они также проявились в «зависании» ПО, но устраивались путем перезапуска питания аппаратуры. Отказы, которые устраивались путем переустановки ПО назывались «фатальными» отказами ПО.

Аппаратура АСН-К была предназначена для решения задач временного обеспечения КА, навигации, ориентации, дальнего и ближнего сближения. В перспективе предполагается с помощью этой аппаратуры решать и задачи причаливания к станции вплоть до касания и выполнения стыковки.

На рис. 7.11 приведена структурная схема АСН-К, включающая:

- устройство антенное (УА) – 4 шт.;
- устройство усилительное (УУ) – 4 шт.;
- делитель СВЧ-сигнала на 2 (ДС) – 4 шт.;
- навигационный модуль (НМ) – 2 шт.

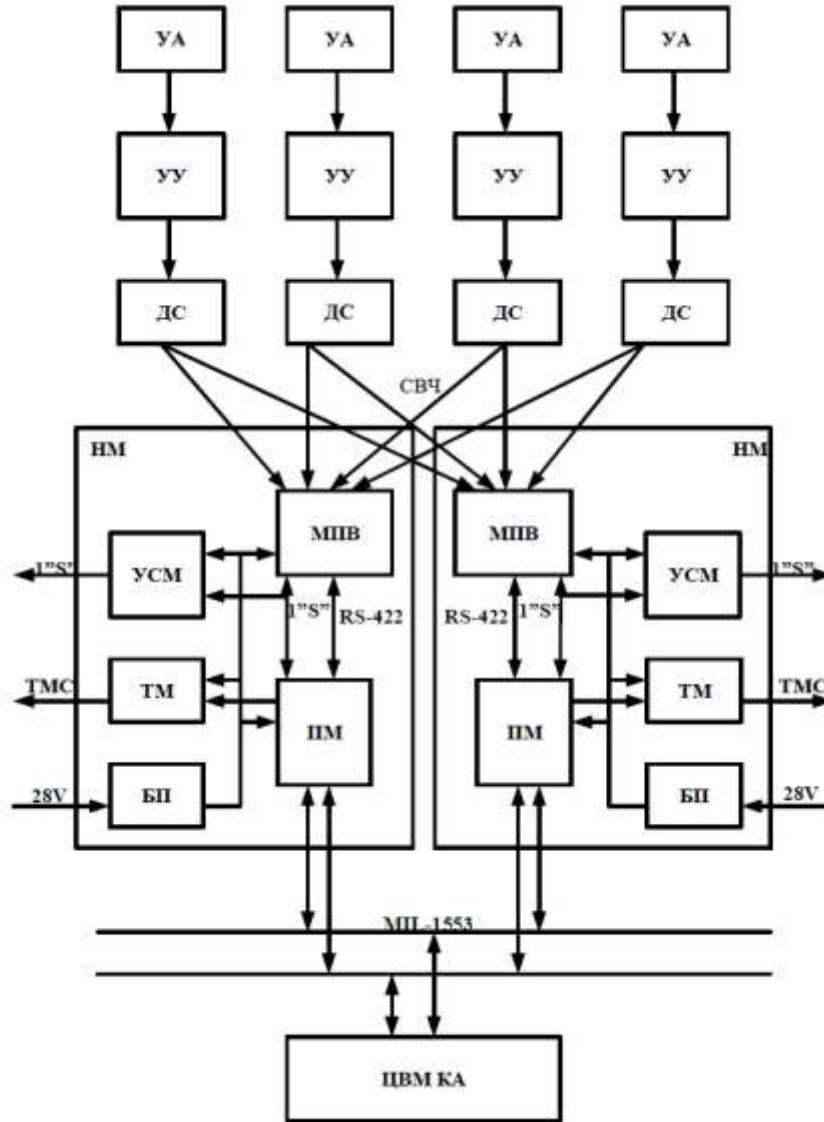


Рис. 7.11 Структурная схема АЧН-К.



Рис. 7.12 КА «Прогресс М-25 М»

Новая базовая модификация АСН-К была разработана для кораблей «Союз», «Прогресс» и для МКС. Первые летные испытания этой аппаратуры были проведены в 2014 году.

Четыре антенны (УА) АСН-К разработки РКК «Энергия» устанавливались в определенных точках поверхности КА под определенными углами друг к другу. Оси антенн образовывали своеобразный «ежик» в пространстве, благодаря чему при любой ориентации КА в поле зрения антенн попадало достаточное количество НС для решения задачи навигации. Благодаря разнесению УА в пространстве обеспечивалась возможность решения задачи ориентации. На рис. 7.12 приведена фотография корабля «Прогресс М-25М», стартовавшего 29 октября 2014 года, на котором был проведен первый испытательный полет АСН-К.

На грузовом отсеке корабля отчетливо видны три антенны (под белыми радиопрозрачными кожухами). В первых испытательных полетах на грузовых кораблях устанавливались по три антенны. Затем при штатной эксплуатации на КА устанавливались четыре антенны.

Четыре УУ (разработки ОАО «РИРВ» г. Санкт-Петербург) в АСН-К выполнены не встроенными в антенны, как это было сделано в АСН-М, а в виде отдельных модулей, соединенных с УА СВЧ-кабелями. Такая конструктивная особенность обусловлена требованиями более жесткого рабочего температурного режима УУ по сравнению с УА. Благодаря наличию кабеля УУ может быть установлено под более значительным слоем теплоизоляции. Питание УУ обеспечивается по центральной жиле СВЧ-кабеля от включенного НМ.

Делители сигналов (ДС) предназначены для деления СВЧ-сигнала каждой из антенн на два одинаковых сигнала, поступающих на соответствующие входы двух НМ.

Навигационные модули (НМ) предназначены для приема и обработки сигналов НС, поступающих в НМ от четырех УА на четыре антенных входа модуля первичной обработки сигналов – модуля приемоизчислительного (МПВ).

МПВ осуществляет прием кодовой информации от НС, проводит первичные измерения псевдодальностей и интегральных фаз НС и передает эту информацию по интерфейсу RS-422 в модуль вторичной обработки информации – процессорный модуль (ПМ).

ПМ через интерфейс MIL-1553 осуществляет обмен информацией с ЦВМ КА. Второй комплект НМ предназначен для резервирования и может работать как в холодном, так и в горячем резерве.

На рис. 7.13 приведены фотографии УА, УУ, ДС и НМ АСН-К. УА и УУ устанавливаются на внешней поверхности КА под теплоизоляцией. ДС и НМ установлены в корабле «Прогресс» в грузовом отсеке, в корабле «Союз» - в бытовом отсеке, на МКС – на модуле «Звезда» (Служебный модуль).



Антенна (УА) АСН-К
изготовитель –
ПКК «Энергия»



Усилитель (УУ) АСН-К
изготовитель – ОАО «РИРВ»



Делитель сигнала (ДС)
АСН-К
изготовитель – ПКК «Энергия»



Навигационный модуль (НМ)
АСН-К изготовитель ПКК «Энергия»

Рис. 7.13 Аппаратура АСН-К кораблей «Союз»,
«Прогресс», МКС.

7.2 Динамическая фильтрация измерений АСН, алгоритмы динамической фильтрации

В космической навигации для повышения точности решения задачи навигационной задачи широко используются статистические методы обработки навигационной информации, к таким методам относятся, например, метод максимума правдоподобия и метод наименьших квадратов [1]. Основным недостатком этих методов является то, что они имеют дело со всем обрабатываемым массивом измеренных величин. Поскольку точность обработки увеличивается с увеличением массива выборки, то получение удовлетворительной точности связано, во-первых, с увеличением времени измерения и, следовательно, с увеличением объема требуемой памяти цифровых вычислительных машин [11]. Очевидно, что для автономного решения такой задачи на борту КА, учитывая ограниченные возможности бортовых ЦВМ, эти методы неприменимы.

Одним из наиболее широко известных методов обработки навигационной информации, не имеющих указанных недостатков, является метод динамической фильтрации Р. Калмана [7], который характеризуется следующими особенностями: оценки проводятся последовательно по мере нарастания объема выборки измерений; при определении каждой последующей оценки используется предыдущая, т.е. реализуются итерационные методы обработки информации. Однако для фильтра Калмана по мере увеличения числа измерений, начиная с некоторого измерения, ошибка формируемой оценки начинает монотонно возрастать [11]. Это объясняется тем, что для обеспечиваемой точности моделирования движения КА существует оптимальный интервал измерений, обеспечивающий минимум ошибки оценки. Если интервал измерений начинает превышать оптимальное значение, то превалирующими составляющими ошибки формируемой оценки орбиты становятся ошибки, обусловленные ошибками модели движения

КА, возрастающие с увеличением интервала измерений. Указанный недостаток фильтра Калмана существенно затрудняет его использование для непрерывной длительной фильтрации измерений АСН.

Для обеспечения непрерывной динамической фильтрации измерений АСН в РКК «Энергия» был разработан метод динамической фильтрации [58], [59], [62], [73], который условно можно назвать следующим образом: «Модифицированный итерационный метод наименьших квадратов с подвижным заданным интервалом осреднения измерений». Предложенный метод обеспечивает непрерывное формирование оценки орбиты в реальном времени по серии измерений, выполненных на заданном интервале времени T , предшествующем текущему моменту. Интервал времени осреднения измерений перемещается (относительно моментов измерений) вместе с текущим временем. Величина интервала времени T представляет собой постоянную времени данного фильтра, являющуюся его важной характеристикой. От выбора постоянной времени фильтра зависит точность формируемой оценки орбиты.

Предложенный фильтр в настоящее время реализован в АСН-М МКС. Ниже показано, что точность формируемой фильтром оценки орбиты МКС по измерениям АСН-М составляет по положению $3 \div 5$ м. Такая точность, достигаемая по измерениям одночастотного приемника АСН, работающего в диапазоне $L1$, является уникальной для объектов такого класса, как МКС.

Рассмотрим алгоритмы формирования оценки орбиты предложенным методом динамической фильтрации.

Пусть в начальный момент измерений известно начальное приближение оценки вектора состояния \bar{X}_0^* , \bar{V}_0^* . Пусть также $i=1 \div n$ - моменты измерений. Для этих моментов времени

известны значения вектора состояния \bar{X}_{0i}^* , \bar{V}_{0i}^* и измеренные значения вектора положения \bar{X}_{ui}^* .

Пусть \bar{X}_i , \bar{V}_i - точные значения вектора состояния КА. Введем обозначения:

$\Delta\bar{X}_{ui} = \bar{X}_{ui} - \bar{X}_{0i}^*$ - вектор измерений АСН относительно известной оценки \bar{X}_{0i}^* ,

$\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{0i}^*$, $\Delta\bar{V}_i = \bar{V}_i - \bar{V}_{0i}^*$ - неизвестные ошибки вектора состояния КА относительно известной оценки \bar{X}_{0i}^* , \bar{V}_{0i}^* .

Пусть $\Delta\bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \Delta\bar{X}_i \\ \Delta\bar{V}_i \end{pmatrix}$ - расширенный вектор состояния КА, оценку которого требуется определить по серии из n измерений. Тогда для серии измерений с точностью до ошибок измерений $\delta\Delta\bar{X}_{ui}$ можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{X}_{u1} &= A\Delta\bar{\xi}_1 \\ &\dots, \\ \Delta\bar{X}_{un} &= A\Delta\bar{\xi}_n \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $A = (E_3 0_3)$ - матрица размерности 3×6 ;

E_3 - единичная матрица размерности 3×3 ;

0_3 - нулевая матрица размерности 3×3 .

Пусть в результате динамической фильтрации требуется определить поправку к оценке вектора состояния $\Delta\bar{\xi}_n^*$ на момент n . Неизвестные векторы $\Delta\bar{\xi}_i$ связаны между собой соотношениями:

$$\Delta\bar{\xi}_j = B_{ij}\Delta\bar{\xi}_i, \tag{7.2}$$

где B_{ij} - известные матрицы преобразования ошибок вектора состояния, определяемые соотношениями:

$$B_{ij} = \frac{\partial \Delta \bar{\xi}_j}{\partial \Delta \bar{\xi}_i}. \quad (7.3)$$

Матрица B_{ij} для Кеплеровой орбиты известна в явном виде [1]. В общем случае для произвольной орбиты эта матрица рассчитывается численным путем: семикратным интегрированием уравнений движения КА от момента i до момента j с последовательным варьированием вектора $\Delta \bar{\xi}_i$. Такая процедура, например, реализована в АСН-М МКС.

Из равенства (7.2) получим:

$$\Delta \bar{\xi}_i = B_{ii}^{-1} \Delta \bar{\xi}_j. \quad (7.4)$$

С учетом равенства (7.4) систему уравнений (7.1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{X}_{u1} &= A B_{1n}^{-1} \Delta \bar{\xi}_n, \\ \Delta \bar{X}_{u2} &= A B_{2n}^{-1} \Delta \bar{\xi}_n, \\ &\dots \\ \Delta \bar{X}_{un} &= A \Delta \bar{\xi}_n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Введем вектор и матрицу:

$$\bar{U}_{un} = \begin{pmatrix} \Delta \bar{X}_{u1} \\ \dots \\ \Delta \bar{X}_{un} \end{pmatrix} \quad - \text{вектор размерности } 3n; \quad (7.6)$$

$$B_n = \begin{pmatrix} AB_{1n}^{-1} \\ AB_{2n}^{-1} \\ \dots \\ A \end{pmatrix}$$

- матрица размерности $6 \times 3n$;

тогда уравнение (7.5) запишется в виде:

$$\bar{U}_{un} = B_n \Delta \bar{\xi}_n. \quad (7.7)$$

Уравнения (7.7) – это система из $3n$ уравнений с неизвестным шестимерным вектором $\Delta \bar{\xi}_n$. Оптимальная с точки зрения минимизации модуля ошибки оценка вектора $\Delta \bar{\xi}_n$ определяется по формуле:

$$\Delta \bar{\xi}_n^* = (B_n^T B_n)^{-1} B_n^T \bar{U}_{un}. \quad (7.8)$$

Введем обозначения:

$$\bar{P}_n = B_n^T \bar{U}_{un} \quad - \text{вектор размерности } 6; \quad (7.9)$$

$$W_n = B_n^T B_n \quad - \text{матрица размерности } 6 \times 6.$$

В этом случае соотношение (7.8) принимает вид:

$$\Delta \bar{\xi}_n^* = W_n^{-1} \bar{P}_n. \quad (7.10)$$

Из соотношений (7.6) и (7.9) получим итерационный алгоритм формирования вектора \bar{P}_n и матрицы W_n :

$$\bar{P}_n = \sum_{i=1}^n B_i^{-1T} A^T \Delta \bar{X}_{ui}; \quad (7.11)$$

$$W_n = \sum_{i=1}^n B_{in}^{-1T} A^T A B_{in}^{-1}.$$

Учитывая, что $B_{in+1} = B_{nn+1} B_{in}$, из выражений (4.11) получим:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{n+1} &= B_{nn+1}^{-1T} \bar{P}_n + A^T \Delta \bar{X}_{un+1}; \\ W_{n+1} &= B_{nn+1}^{-1T} W_n B_{nn+1}^{-1} + A^T A.\end{aligned}\tag{7.12}$$

В начальный момент (до первого измерения) накапливаемые вектор \bar{P} и матрица W равны нулю. Далее на каждом шаге измерений определяется матрица B_{ij+1} и формируются \bar{P}_{i+1} и W_{i+1} по алгоритму (7.12).

После проведения n измерений по формулам (7.12) и (7.10) определим поправку $\Delta \bar{\xi}_n^*$ к начальному приближению оценки орбиты $\bar{X}_{0n}^*, \bar{V}_{0n}^*, (\xi_{0n}^*)$, \bar{V}_{0n}^* и сформируем текущую оценку орбиты:

$$\bar{\xi}_n^* = \bar{\xi}_{0n}^* + \Delta \bar{\xi}_n^*. \tag{7.13}$$

При переходе к текущей оценке накопленный вектор ошибок измерений \bar{P}_n обнуляется. При последующих измерениях на каждом шаге осуществляется переход к текущей оценке вектора состояния. В этом случае реализуется следующий алгоритм формирования текущей оценки на $(n+1)$ -м шаге.

На n -м шаге имеем:

- $\bar{\xi}_n^*$ - текущая оценка вектора состояния по серии из n измерений;
- W_n - накопленная матрица измерений.

На $(n+1)$ -м шаге получено $(n+1)$ -е измерение вектора координат КА \bar{X}_{un+1} .

С помощью высокоточной модели движения КА осуществляется интегрирование уравнений движения от момента t_n до момента t_{n+1} . В результате формируется вектор оценки орбиты КА $\hat{\xi}_{n+1}^*$ на момент t_{n+1} по серии из n измерений. Рассчитывается матрица B_{nn+1} путем семикратного интегрирования уравнений движения КА от момента t_n до момента t_{n+1} с последовательной вариацией начального вектора состояний $\bar{\xi}_n^*$. При выполнении этой серии интегрирования может использоваться приближенная модель движения КА, например, без учета аномальной части гравитационного поля Земли (с целью экономии вычислительных ресурсов БЦВМ). Формируется вектор \bar{P}_{n+1} и матрица W_{n+1} по алгоритму:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{n+1} &= A^T (\bar{\xi}_{un+1} - \hat{\xi}_{n+1}^*); \\ W_{n+1} &= B_{nn+1}^{-1T} W_n B_{nn+1}^{-1} + A^T A.\end{aligned}\tag{7.14}$$

Формируется поправка к вектору состояния $\hat{\xi}_{n+1}^*$ по $(n+1)$ -му измерению:

$$\Delta \xi_{n+1}^* = W_{n+1}^{-1} \bar{P}_{n+1}.\tag{7.15}$$

Формируется оценка вектора состояния по серии из $n+1$ измерения:

$$\bar{\xi}_{n+1}^* = \hat{\xi}_{n+1}^* + \Delta \xi_{n+1}^*.\tag{7.16}$$

В приведенном алгоритме оценка вектора состояния $\bar{\xi}_n^*$ формируется по полной выборке из n измерений независимо от величины n . Чем больше n , тем меньше ошибки измерений $\Delta \xi_n^*$ влияют на точность формируемого вектора состояния. Однако при этом возрастает влияние ошибок модели движения КА, которые, в зависимости от точности модели, начиная с некоторого значения n , становятся определяющими в бюджете ошибок формируемого вектора состояния и могут существенно превосходить ошибки, обусловленные ошибками измерений. В зависимости от ошибок измерений и точности модели существует некоторое оптимальное

значение n_0 числа выборки, обеспечивающей минимум ошибки формируемой оценки вектора состояния. Предположим, мы определили интервал времени T , для которого ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН одного порядка с ошибками используемой модели движения КА. Алгоритмы формирования оценки $\bar{\xi}_{n+1}^*$ (7.14), (7.15), (7.16) могут легко быть модифицированы таким образом, чтобы эта оценка формировалась в основном по серии последних измерений на интервале времени T . Введем коэффициент λ :

$$\lambda = \frac{T}{T+1} \quad (7.17)$$

Алгоритм формирования оценки $\bar{\xi}_{n+1}^*$ (7.14), (7.15), (7.16) представим в виде:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+1} &= A^T (\bar{\xi}_{un+1} - \hat{\xi}_{n+1}^*), \\ W_{n+1} &= \lambda^2 B_{nn+1}^{-1T} W_n B_{nn+1}^{-1} + A^T A, \\ \Delta \bar{\xi}_{n+1}^* &= W_{n+1}^{-1} \bar{P}_{n+1}, \\ \bar{\xi}_{n+1}^* &= \hat{\xi}_{n+1}^* + \Delta \bar{\xi}_{n+1}^*. \end{aligned} \quad (7.18)$$

В алгоритме (7.18) накапливаемая матрица W на каждом шаге уменьшается в λ^2 раз. Легко показать, что введение коэффициента λ^2 в алгоритм накопления матрицы W преобразует исходную систему уравнений (7.1) к виду:

$$\begin{aligned}
 \lambda^n \Delta \bar{X}_{u1} &= \lambda^n A \Delta \xi_1, \\
 \lambda^{n-1} \Delta \bar{X}_{u2} &= \lambda^{n-1} A \Delta \xi_2, \\
 \dots & \\
 \lambda \Delta \bar{X}_{un-1} &= \lambda A \Delta \xi_{n-1}, \\
 \Delta \bar{X}_{un-1} &= A \Delta \xi_n.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

В системе уравнений (7.19) все измерения учитываются с разным весом. Чем дальше отстоит измерение от текущего момента n , тем с меньшим весом это измерение учитывается в общей системе уравнений. Измерение, отстоящее от текущего момента на T сек., учитывается с весом

$$\left(\frac{T}{T+1} \right)^T = \frac{1}{e} \tag{7.20}$$

Соответственно, измерения, отстоящие от текущего момента на $2T$ сек., учитываются с весом $\frac{1}{e^2}$ и т.д. Таким образом, коэффициент λ^2 в алгоритмах (7.18) обеспечивает «стирание» предыстории и учет для формирования оценки текущей орбиты КА в основном измерений на интервале T , предшествующем текущему моменту. Выбор оптимального значения T является определяющим в обеспечении максимальной точности формируемой оценки орбиты. Оптимальное значение T зависит как от ошибок измерений АСН, так и от точности модели движения КА, используемой при динамической фильтрации измерений. Использование более точной модели движения позволяет увеличить постоянную времени фильтра T и тем самым уменьшить влияние ошибок измерений. Для выбора оптимального значения постоянной времени необходимо провести анализ зависимости ошибок оценки орбиты, обусловленных

ошибками измерений АСН и ошибками модели движения КА, от постоянной времени фильтра. Данное исследование в настоящей работе проведено для низкоорбитальных КА (на примере МКС), высокоэллиптических и высокоорбитальных КА (на примере геостационарных КА). Определено оптимальное значение постоянной времени фильтра для этих КА, определены возмущающие факторы, которые необходимо учитывать в бортовой модели движения КА при выполнении динамической фильтрации, определены достигаемые точности навигации. Для МКС полученные результаты исследования подтверждены реальными летными данными.

7.3 Исследование зависимости ошибок формируемой оценки орбиты от различных возмущающих факторов

Ошибка оценки орбиты, формируемой фильтром, определяется ошибками измерений АСН, ошибками модели движения КА, реализуемой в фильтре, и постоянной времени фильтра. Ошибки измерений АСН в основном определяются системными ошибками спутниковых навигационных систем *GPS*, ГЛОНАСС и ошибками среды – ионосферными ошибками и ошибками, обусловленными переотражениями сигналов от элементов конструкции КА. Уменьшение этих ошибок можно достигнуть заданием определенных режимов и параметров АСН, например, задав режим работы одновременно по спутникам *GPS* и ГЛОНАСС. Снижение переотражений сигналов от элементов конструкции может быть обеспечено заданием определенной конфигурации КА. Например, при сближении *ATV* с МКС солнечные батареи и радиаторы системы терморегулирования МКС устанавливались в специальное положение. Тем не менее, после реализации всех возможных мероприятий по снижению ошибок измерений, определенные ошибки все-таки остаются. Точность модели движения КА определяется как методом моделирования, определяющим методические ошибки модели, так и возможностями бортового вычислителя, реализующего эти модели. Выбор постоянной времени фильтра осуществляется в процессе отработки системы из условия минимизации суммарной ошибки оценки орбиты, обусловленной всеми перечисленными возмущениями. В процессе выполнения данной работы такое исследование было проведено на специальном математическом стенде, обеспечивающем возможность моделирования движения КА различного назначения с установленной на нем АСН. Основным элементом этого стенда является программный пакет *MODASN*, моделирующий системы *GPS* и ГЛОНАСС, работу аппаратуры АСН с учетом влияния внешней среды, линейное и угловое движение МКС. Этот

программный пакет разработан РКК «Энергия» совместно с Европейским космическим Агентством (ЕКА) для наземной отработки системы сближения европейского КА ATV с МКС. Эта модель с высокой точностью отражает многочисленные детали работы АСН, включая влияние на формируемые параметры затенений и переотражений сигналов НС от элементов конструкции МКС. О сложности этой модели говорит тот факт, что ее входной - выходной интерфейс включает более миллиона различных параметров. Модель тщательно верифицировалась РКК «Энергия» и ЕКА, проводились специальные верификационные эксперименты на МКС, показавшие соответствие моделируемых результатов реальным летным данным. Приведем результаты выполненного исследования.

7.3.1 Зависимости точности формируемой оценки орбиты от ошибок измерений

На рис. 7.14 представлены графики модуля составляющей ошибок оценки орбиты $(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2})$, формируемой фильтром, обусловленных ошибками измерений АСН для трех значений постоянной времени фильтра $T=0,5T_0$, $T=T_0$, $T=2T_0$ где $T_0=5500$ сек – период орбиты МКС.

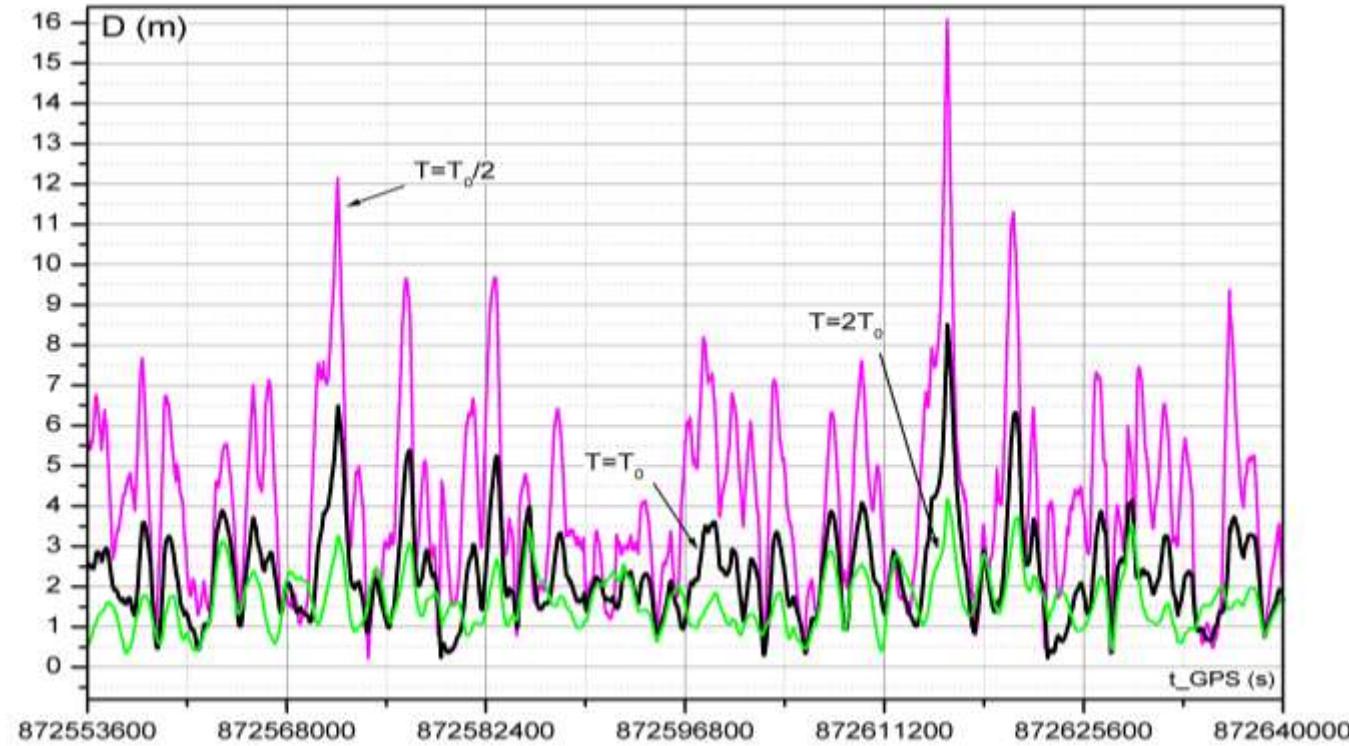


Рис. 7.14 Графики модуля составляющей ошибок оценки орбиты, обусловленной ошибками измерений АСН для разных значений постоянной времени фильтра.

В процессе моделирования рассматривалась суточная орбита МКС от 31 августа 2007 г., задавался режим работы АСН только по спутникам *GPS*, моделируемая ориентация соответствовала реальной ориентации МКС на указанный интервал времени, моделируемый альманах *GPS* соответствовал реальному альманаху. В процессе моделирования «бортовая» модель движения КА фильтра идеально совпадает с моделью движения КА. Из приведенных графиков видно, что для постоянной времени фильтра $T=0.5T_0$ ошибки оценки орбиты,

обусловленные ошибками измерений АСН, составляют в основном $5 \div 10$ м, для $T=T_0$ - $3 \div 6$ м, для $T=2T_0$ - $2 \div 4$ м. Учитывая незначительную разность по точности формируемых оценок орбиты для постоянной времени $T=T_0$ и $T=2T_0$, учитывая при этом более быструю сходимость фильтра при $T=T_0$ и более слабую зависимость точности формируемой оценки от ошибок модели движения КА, для МКС была выбрана постоянная времени фильтра, равная одному периоду. Поэтому, ниже исследование зависимости точности формируемой фильтром оценки орбиты от ошибок модели движения КА выполняется для фильтра с постоянной времени $T=T_0=5500$ сек.

7.3.2 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля Земли

Основное влияние на точность оценки орбиты, формируемой рассмотренным фильтром, оказывают ошибки модели гравитационного поля Земли. Модель гравитационного поля Земли высокого порядка требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому в бортовых вычислительных системах, имеющих не очень большую производительность по сравнению с наземными вычислительными средствами, ограничиваются моделированием гравитационного поля Земли не высокого порядка. Например, в бортовой вычислительной системе (БВС) МКС моделируется гравитационное поле Земли порядка 8×8 . Точность такой модели оказывается недостаточной для достижения сколь либо высокой точности оценки орбиты. На рис. 7.15 для модели порядка 8×8 приведен график ошибок оценки орбиты, формируемой рассмотренным выше фильтром с постоянной времени $T=1$ виток, обусловленных ошибками модели. Ошибки приведены в проекциях на оси орбитальной системы координат (ΔX - по вектору скорости, ΔY

- по местной вертикали). При моделировании в качестве «идеальной» модели гравитационного поля принималась модель порядка 144×144 . Предполагалось, что ошибки измерений АСН равны нулю, и какие-либо другие возмущения модели движения КА отсутствуют.

Из приведенных графиков видно, что при использовании модели гравитационного поля Земли порядка 8×8 ошибки оценки орбиты, формируемой рассмотренным фильтром, составляет 40-50 м, то есть значительно превышают ошибки измерений.

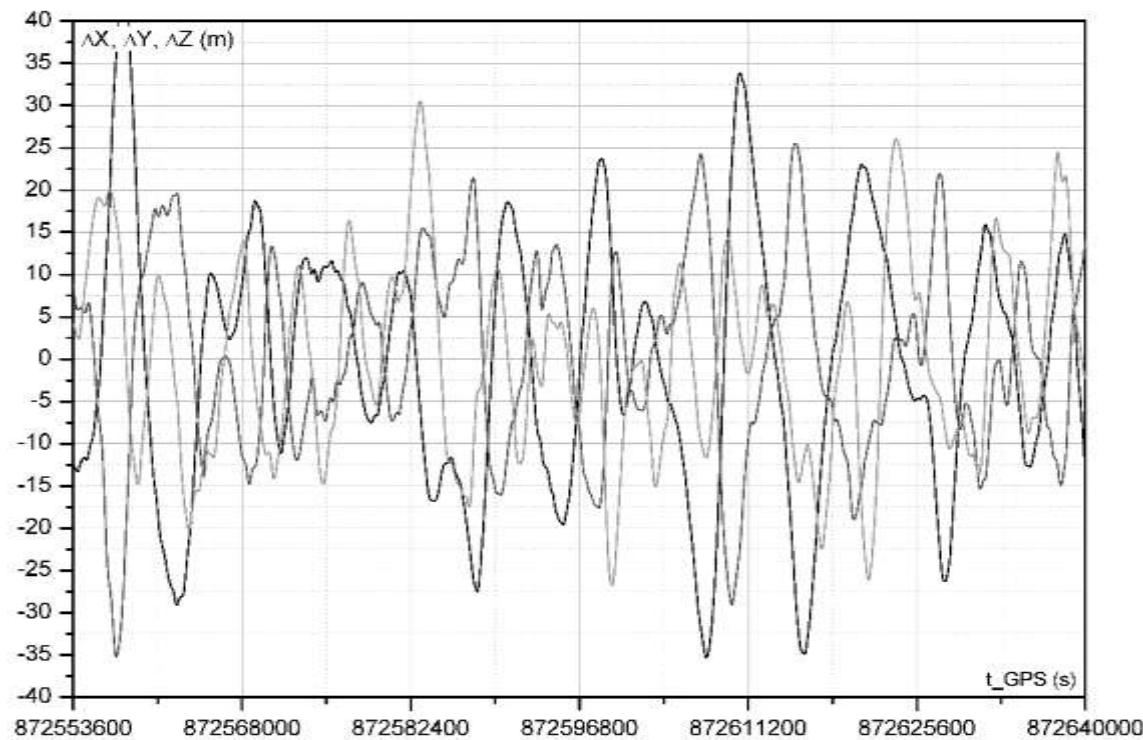


Рис. 7.15 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 8×8 .

Для исследования влияния точности модели гравитационного поля Земли на точность формируемой оценки орбиты аналогичное моделирование было проведено для моделей порядка 36×36 и 72×72 . Результаты моделирования приведены на рис. 7.16, 7.17.

Из приведенных на этих рисунках графиков следует, что для модели порядка 36×36 ошибки оценки орбиты достигают 10 м, а для модели 72×72 не превышают 2 м.

Из графиков, приведенных на рис. 7.15 и 7.16, следует, что ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками моделей гравитационного поля Земли порядка 8×8 и 36×36 , значительно превышают оценки, обусловленные ошибками измерений АСН. Для достижения метровых точностей формируемой оценки орбиты требуется в бортовой модели движения КА использовать модель гравитационного поля Земли порядка не ниже 72×72 . Однако реализация такой модели классическим методом разложения геопотенциала Земли по сферическим функциям требует в ~ 200 раз больше вычислительных операций, чем реализация модели порядка 8×8 , что в настоящее время нереально для бортовой вычислительной техники. Тем не менее, в РКК «Энергия» был разработан метод моделирования гравитационного поля Земли высокого порядка, требующий для своей реализации в сотни раз меньше вычислительных операций по сравнению с классическим методом. Этот метод в настоящее время реализован в АСН-М МКС. Суть метода рассмотрена выше в разделе 2.1.3.

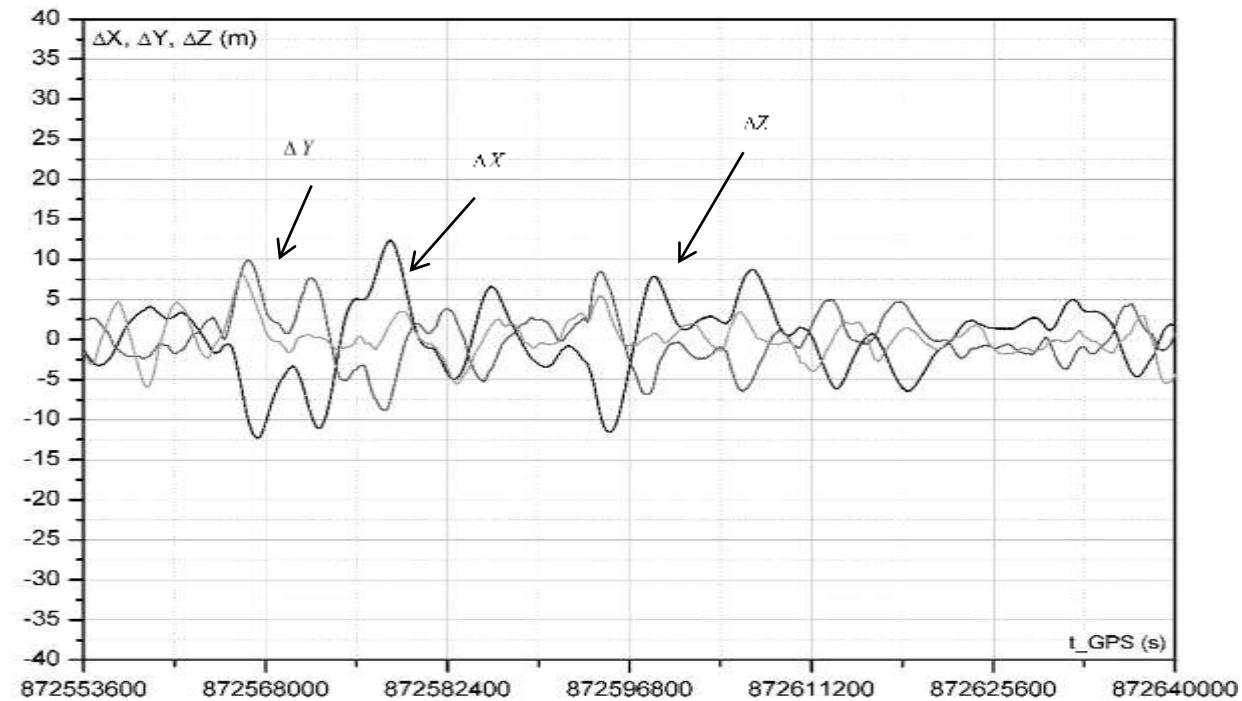


Рис 7.16 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленной ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 36×36 .

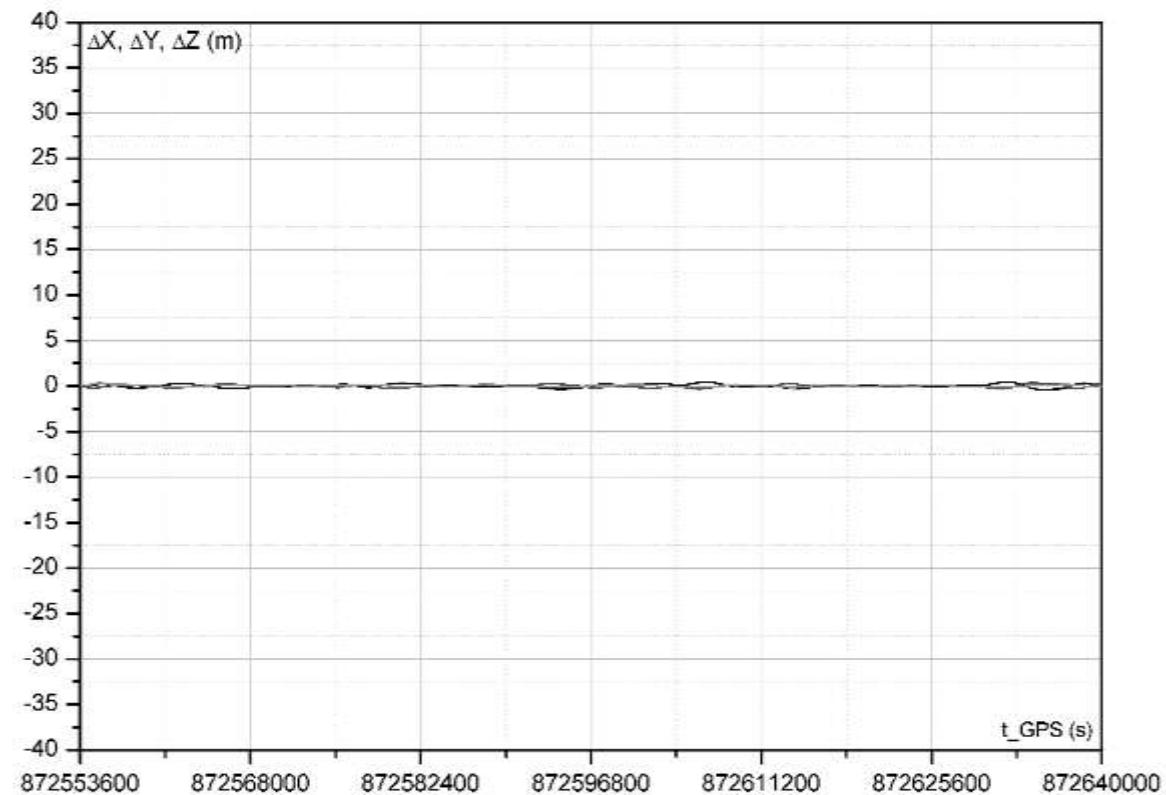


Рис. 7.17 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленной ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 72×72 .

7.3.3 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от аэродинамического торможения КА

Второй по влиянию на точность формируемой оценки орбиты составляющей бортовой модели низкоорбитального КА является аэродинамическое торможение. Особенно оно оказывается для КА с высотами орбит в диапазоне 200÷500 км. Для МКС среднее за виток аэродинамическое торможение находится в диапазоне $0,5 \cdot 10^{-6} \div 1,5 \cdot 10^{-6}$ м/с². При этом на солнечной стороне орбиты оно в ~1,5 раза больше среднего, а в тени – в ~1,5 раза меньше среднего. В моделирующем стенде аэродинамическое торможение формируется по формуле:

$$\bar{a}_{aero} = \bar{V}_{ep} |\bar{V}_{ep}| b \frac{\rho}{2}, \quad (7.21)$$

\bar{V}_{ep} – вектор скорости КА в гринвичской системе координат;

$b = \frac{c_x S_M}{m}$ – баллистический коэффициент;

c_x – коэффициент аэродинамического торможения;

S_M – площадь миделевого сечения КА;

ρ – плотность атмосферы в рассматриваемой точке орбиты.

Плотность атмосферы ρ формируется в соответствии с моделью, разработанной в РКК «Энергия». Индексы солнечной активности и баллистический коэффициент закладываются во входном файле. Результаты исследования влияния аэродинамического торможения на точность формируемой оценки орбиты приведены на рис. 7.18. Из приведенных на этом рисунке графиков следует, что аэродинамическое торможение приводит к статическому смещению оценки орбиты по продольной дальности на ~20 м и по высоте на ~15 м. По боковой дальности ошибки равны нулю. Колебания плотности атмосферы на светлой и затененной

частях орбиты приводят к колебаниям ошибок по продольной дальности Δx и по вертикали Δy с орбитальной частотой и амплитудой 1,5-2 м.

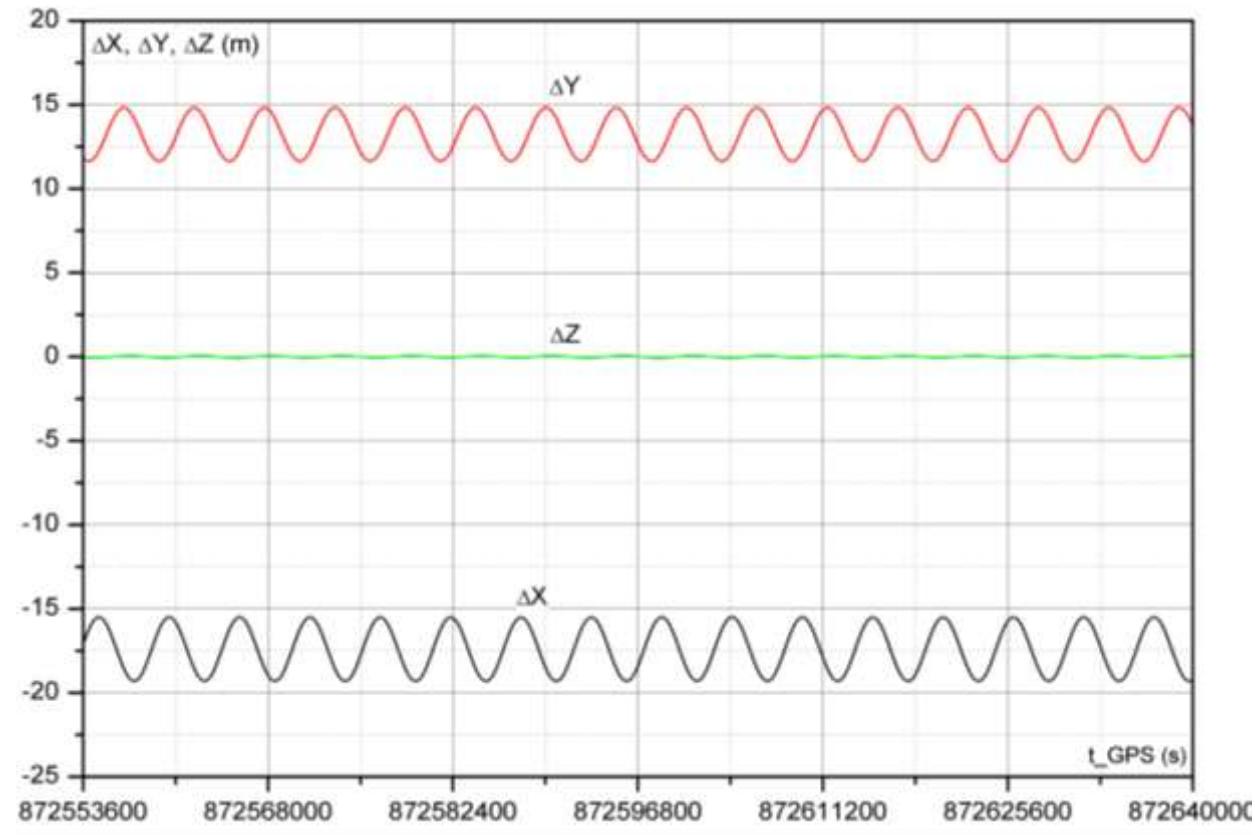


Рис. 7.18.
 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная аэродинамическим торможением МКС в атмосфере Земли.

Полученный результат показывает, что для обеспечения метровых точностей формируемой оценки орбиты бортовая модель движения КА должна включать модель аэродинамического торможения КА, точность которой должна составлять, по крайней мере, 10% от величины торможения.

7.3.4 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от гравитационного воздействия Луны и Солнца и солнечного давления

Следующим по значимости возмущениями модели движения КА, влияющими на точность формируемой оценки орбиты КА, являются гравитационные воздействия Луны и Солнца на орбиту КА и силы солнечного давления. На рис. 7.19 и 7.20 для МКС приведены соответственно графики модулей ошибок формируемой рассматриваемым фильтром оценки орбиты, обусловленных этими возмущениями. Из приведенных графиков следует, что ошибки оценки орбиты, обусловленные воздействием Луны и Солнца не превышают 1,5 м, а силами солнечного давления – не превышают 0,3 м.

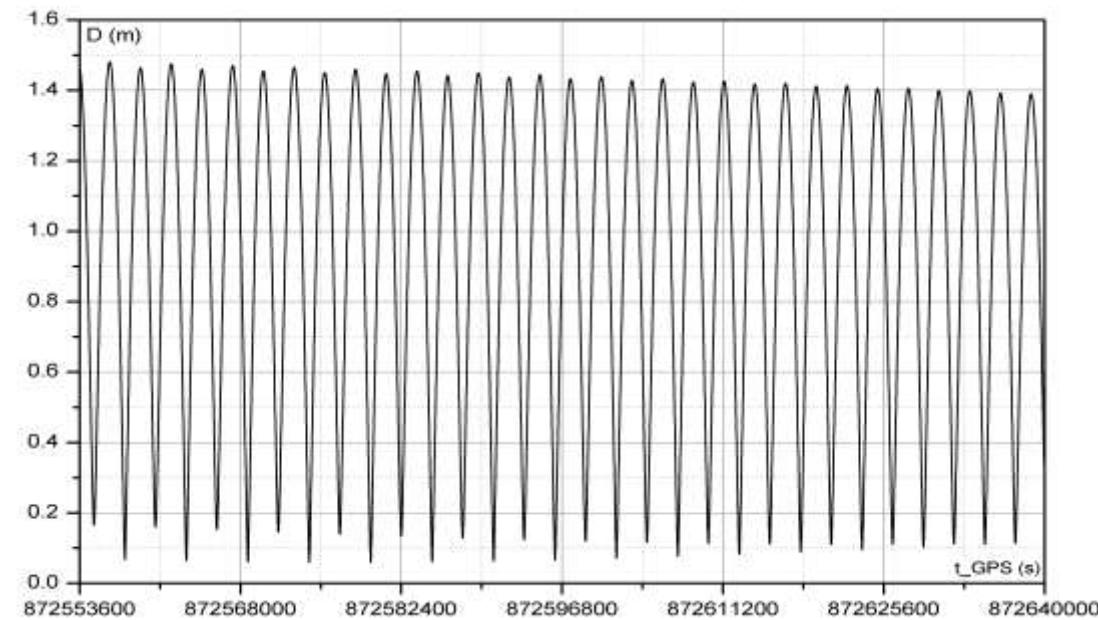


Рис. 7.19 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная гравитационным воздействием Луны и Солнца на орбиту МКС.

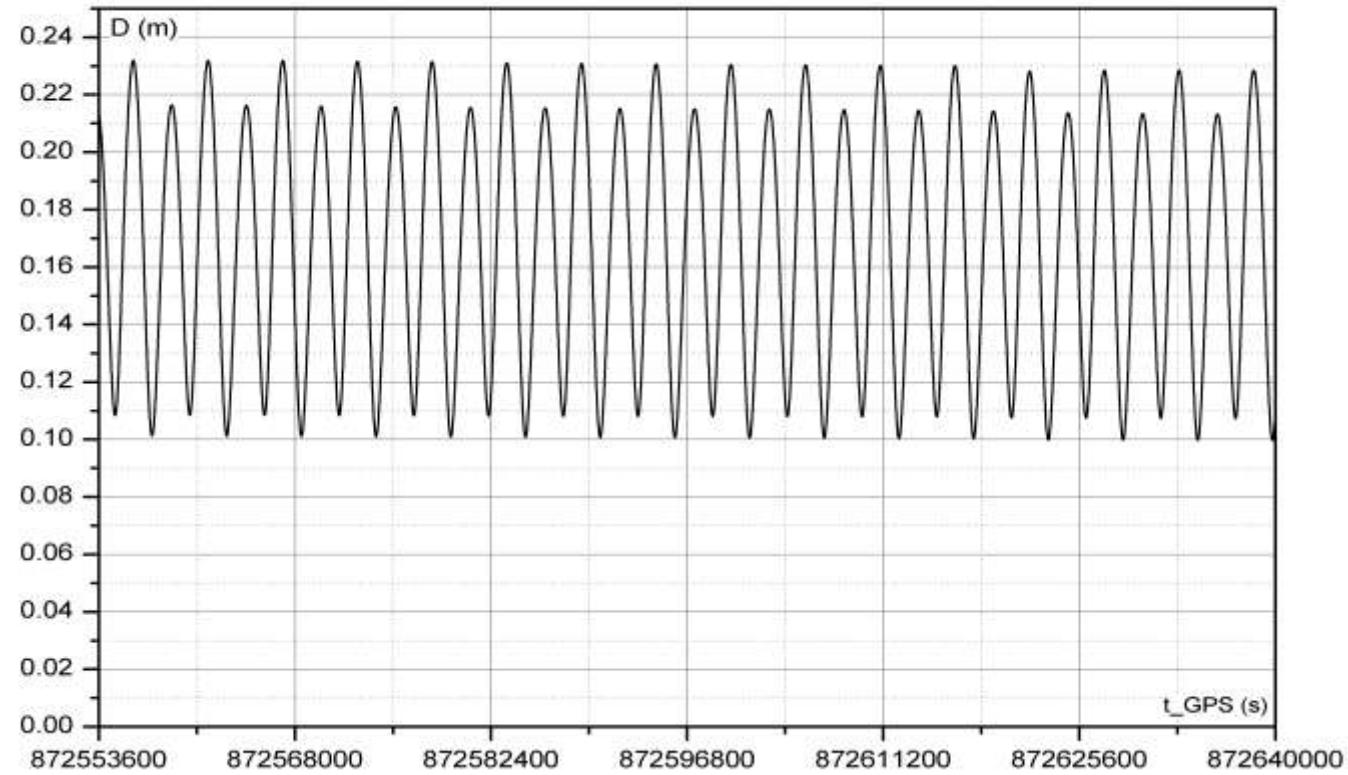


Рис. 7.20 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная влиянием сил солнечного давления на МКС.

То есть, можно сказать, что для низкоорбитальных КА, точность оценки орбиты, которая должна составлять величину порядка 5 м, этими возмущениями в бортовой модели движения КА можно пренебречь.

7.3.5 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от параметров вращения Земли

В разделе 2.5 отмечено, что на орбиту КА в ГСК существенное влияние оказывают параметры вращения Земли. На низкие орбиты заметно влияют смещение полюса Земли относительно оси Z ГСК, а также прецессия и нутация оси вращения Земли в ИСК. На рис. 7.21 и 7.22 соответственно приведены графики моделей ошибок, формируемых рассматриваемым фильтром оценки орбиты, обусловленных этими возмущениями. Из приведенных графиков следует, что ошибки оценки орбиты, обусловленные смещением полюса Земли для низкоорбитальных КА (при постоянной времени фильтра 1 виток) составляют ~ 3 м, что соизмеримо с ошибками, обусловленными гравитационным влиянием Луны и Солнца (см. рис. 7.19). Ошибки, обусловленные прецессией и нутацией оси вращения Земли на порядок меньше и составляют ~ 5 см, что соизмеримо, например, с влиянием сил солнечного давления на оценку орбиты МКС (см. рис. 7.20).

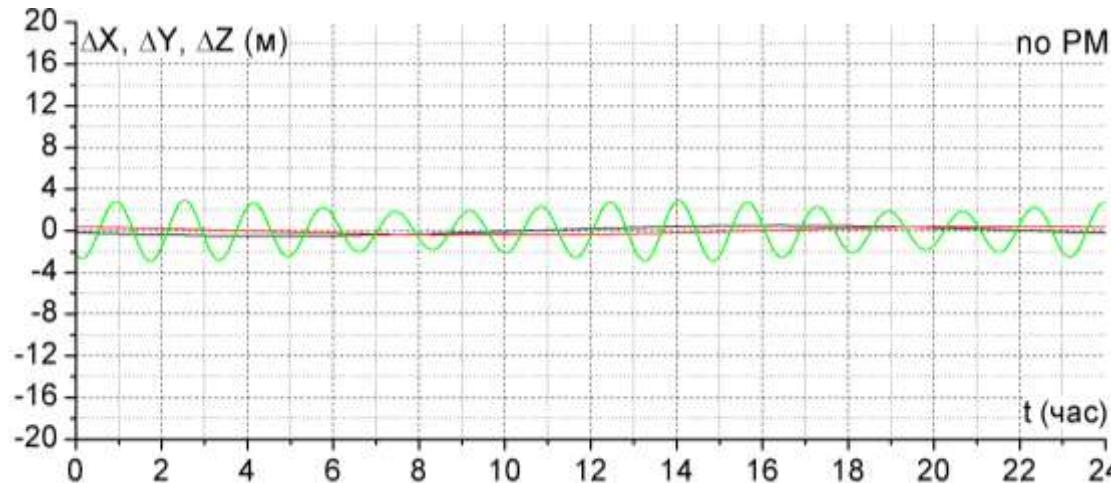
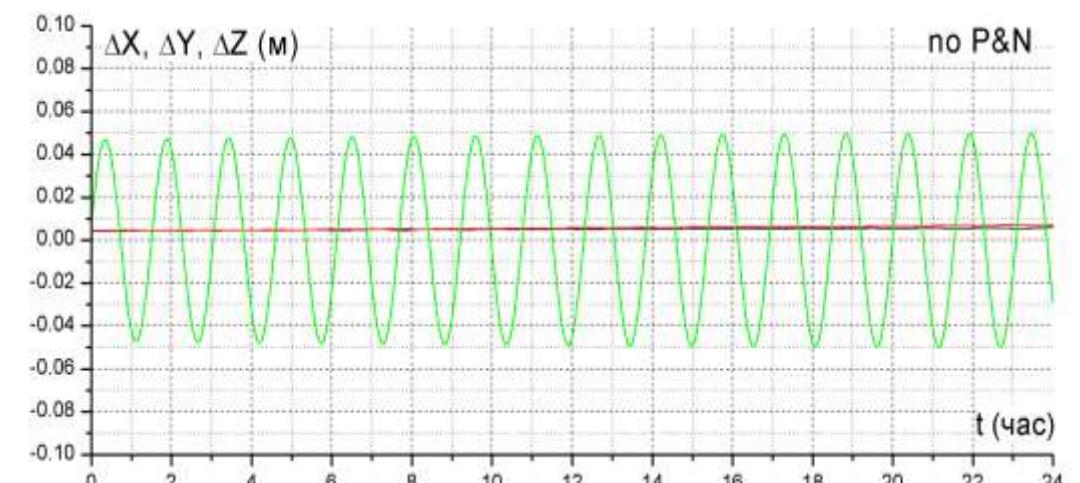


Рис. 7.21 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная влиянием смещения полюса Земли относительно оси Z ГСК.

Рис. 7.22 Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная влиянием прецессии и нутации оси вращения Земли в ИСК.



7.4 Динамическая фильтрация измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение

В предыдущем разделе показано влияние ошибок измерений АСН и различных факторов, возмущающих движение КСВ, на точность формируемой оценки орбиты. При этом ошибки измерений АСН в основном определяются системными ошибками (эфемеридными ошибками, ошибками временного обеспечения, числом одновременно видимых НС и т.п.) и ошибками среды (ионосферные, переотражения и пр.). Уменьшить влияние этих ошибок на точность формируемой оценки орбиты можно путем увеличения постоянной времени фильтра. Как показали результаты моделирования, на МКС при постоянной времени фильтра один виток ошибки оценки орбиты по положению, обусловленные ошибками измерений, составляют 3-5 м. Но увеличение постоянной времени фильтра приводит к увеличению составляющих ошибок оценки орбиты, обусловленных ошибками модели движения КА, используемой при реализации динамической фильтрации. Например, как показывают графики, приведенные на рис. 7.15, при моделировании движения КА с использованием модели гравитационного поля Земли только до восьмого порядка (8×8) ошибки формируемой оценки орбиты достигают по положению величины 40 м.

Повышение точности может быть достигнуто за счет повышения точности модели движения КА. В разделе 2 отмечалось, что моделирование таких возмущающих факторов, как аномальная часть гравитационного поля Земли, гравитационное влияние Луны и Солнца, смещение полюса Земли, прецессия и нутация оси вращения Земли, неравномерность вращения Земли могут моделироваться с большой точностью.

Плохо моделируемыми возмущениями являются аэродинамическое торможение и солнечное давление. Но, как следует из графиков, приведенных на рис. 7.20, для

низкоорбитальных КА силами солнечного давления можно пренебречь. А вот аэродинамическое торможение (см. рис. 7.18) обуславливает ошибку оценки орбиты величиной порядка 20 м. Уменьшить эту ошибку можно путем включения модели аэродинамического торможения в модель движения КА, реализуемую в фильтре. Однако модель аэродинамического торможения является чрезвычайно сложной с точки зрения алгоритмической реализации, так как должна учитывать геометрию КА, его ориентацию, плотность атмосферы, зависящую от множества факторов, включая солнечную активность и т.п. Многие из этих факторов сложно моделировать, а некоторые из них просто неизвестны в текущий момент времени. Например, сложно моделировать текущую геометрию КА, часто включающую большое количество подвижных элементов (солнечные батареи, антенны, подвижные платформы и т.п.). А такие факторы, как параметры солнечной активности вообще являются непрогнозируемыми и становятся известными по факту, спустя некоторое время.

А так как величина аэродинамического возмущения превышает многие из рассмотренных выше возмущающих факторов, то при неучете аэродинамического торможения становится бессмысленным моделирование более мелких возмущений в модели движения КА.

Уменьшение аэродинамической ошибки в формируемой оценке орбиты может быть достигнуто путем уменьшения постоянной времени фильтра. Однако при этом пропорционально возрастают ошибки оценки, обусловленные ошибками измерений. Здесь может быть достигнут некоторый оптимум, при котором точность формируемой оценки будет составлять 10-15 м. Однако во многих случаях аэродинамическое торможение КА может быть непосредственно оценено по измерениям АСН. Очевидно, что аэродинамическое торможение КА в течение витка достаточно сильно меняется из-за изменения плотности атмосферы на ночном и дневном участках орбит, а также из-за изменения геометрии и ориентации КА.

Однако для многих КА среднее за виток аэродинамическое торможение является медленно изменяемым параметром, так как чаще всего КА находится в постоянной (например, орбитальной) ориентации, а его геометрия в течение витка меняется одинаково от витка к витку. Например, солнечные батареи, отслеживая Солнце, повторяют одни и те же движения от витка к витку.

Рассмотрим алгоритм формирования оценки аэродинамического торможения по измерениям АСН. Обозначим искомый параметр среднего за виток аэродинамического торможения через a_{aero} и рассмотрим расширенный вектор состояния КА в виде:

$$\Delta \bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \Delta \bar{X}_i \\ \Delta \bar{V}_i \\ a_{aero} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

где $\Delta \bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{0i}^*$, - неизвестные ошибки вектора состояния КА относительно известной оценки $\bar{X}_{0i}^*, \bar{V}_{0i}^*$.

Тогда для серии измерений с точностью до ошибок измерений $\delta \Delta \bar{X}_{ui}$ можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{X}_{u1} &= A \Delta \bar{\xi}_1 \\ &\dots, \\ \Delta \bar{X}_{un} &= A \Delta \bar{\xi}_n \end{aligned} \quad (7.23)$$

где

- $A = (E_3 0_{3 \times 4})$ - матрица размерности 3×7 ;
 E_3 - единичная матрица размерности 3×3 ;

$0_{3 \times 4}$ - нулевая матрица размерности 3×4 .

Система уравнений (7.23) аналогична системе уравнений (7.1) с той лишь разницей, что векторы $\Delta\bar{\xi}_i$ имеют размерность не 6, а 7, а матрица A_i – размерность не (3×3) , а (3×4) .

Для разных моментов времени связь между векторами $\Delta\bar{\xi}_i$ и $\Delta\bar{\xi}_j$, определяется соотношением, аналогичным соотношению (7.2)

$$\Delta\bar{\xi}_j = B_{ij}\Delta\bar{\xi}_i, \quad (7.24)$$

где матрица связи $B_{i,j}$ имеет размерность (7×7) .

Матрица $B_{i,j}$ в процессе динамической фильтрации определяется численным методом – путем восьмикратного интегрирования уравнений движения КА от момента i до момента j с последовательным варьированием вектора $\Delta\bar{\xi}_i$.

В процессе интегрирования уравнений движения аэродинамическое ускорение КА формируется по формуле:

$$\bar{a}_a = -\frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} a_{aero}^*, \quad (7.25)$$

где a_{aero}^* - текущая оценка аэродинамического торможения;

\bar{V} - вектор скорости КА в ГСК.

Дальнейший вывод алгоритмов динамической фильтрации с дополнительной оценкой аэродинамического торможения аналогичен выводу алгоритма формирования оценки орбиты без оценивания влияния атмосферы в соответствии с формулами (4.4)÷(4.18). Конечный алгоритм аналогичен алгоритму (7.18) и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{n+1} &= A^T (\bar{\xi}_{un+1} - \hat{\xi}_{n+1}^*), \\
 W_{n+1} &= \lambda^2 B_{nn+1}^{-1T} W_n B_{nn+1}^{-1} + A^T A, \\
 \Delta \bar{\xi}_{n+1}^* &= W_{n+1}^{-1} \bar{P}_{n+1}, \\
 \bar{\xi}_{n+1}^* &= \hat{\xi}_{n+1}^* + \Delta \bar{\xi}_{n+1}^*.
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Отличие алгоритма (7.26) от алгоритма (7.18) заключается в размерности вектора \bar{P}_i и матриц A , B_{ii+1} , W_i . Если в алгоритме (7.18) их размерность равна соответственно 6 и 6×6 , то в алгоритме (7.26) она равна 7 и 7×7 .

Использование алгоритма динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на аэродинамическое торможение позволяет исключить достаточно громоздкую и грубую модель расчета оценки аэродинамического торможения из модели движения КА и практически полностью компенсировать постоянную (точнее, медленно изменяющуюся) составляющую аэродинамического торможения и, тем самым, значительно уменьшить аэродинамическую составляющую ошибки формируемой оценки орбиты.

На рис. 7.23 приведены графики аэродинамической составляющей оценки орбиты, полученные путем моделирования, при использовании рассмотренных алгоритмов самонастройки динамического фильтра. Сравнив приведенные графики с графиками на рис. 7.18 (без аэродинамической самонастройки), можем видеть, что алгоритмы самонастройки практически полностью компенсируют постоянные составляющие ошибок оценки, а оставшиеся периодические составляющие, обусловленные различием плотности атмосферы на светлой и темной частях орбиты, по амплитуде не превышают 2 м.

Таким образом, исследование точности формируемой с использованием предложенного динамического фильтра оценки орбиты от различных возмущающих факторов показало, что максимальное влияние на точность оценки оказывает точность моделирования аномальной части гравитационного поля Земли. Учет при моделировании аномальной части составляющей гравитационного поля Земли только до восьмого порядка обеспечивает точность формируемой оценки по координатам ~ 40 м (см. рис. 7.15). Учет в аномальной части составляющих гравитационного поля Земли до 32-го порядка обеспечивает точность оценки по координатам ~ 10 м (см. рис. 7.16). При учете в аномальной части гравитационного поля Земли составляющих до 72 порядка ошибка оценки по координатам не превышает одного метра (см. рис. 7.17).

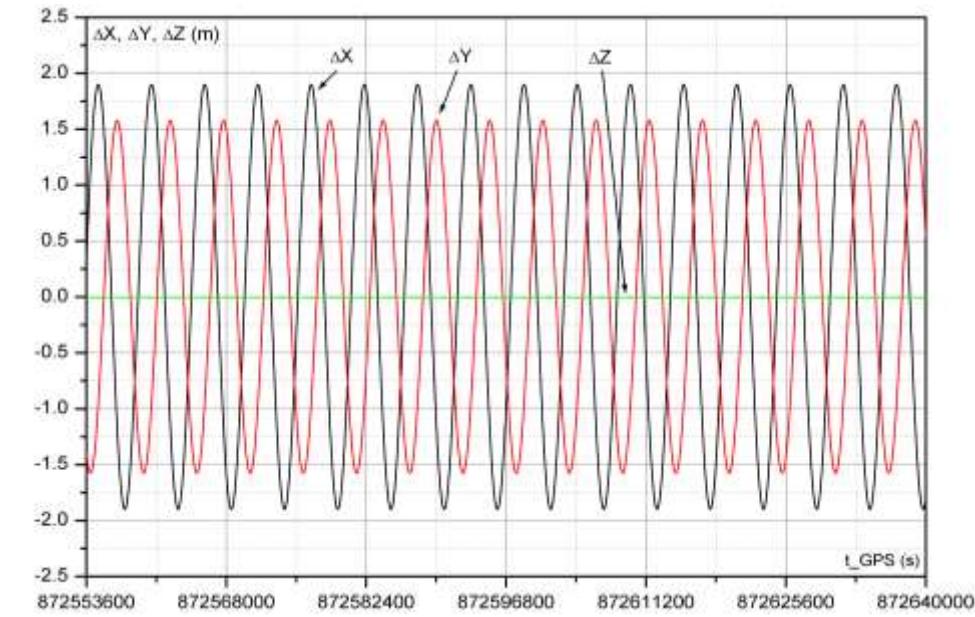


Рис. 7.23 Аэродинамическая составляющая ошибки оценки с компенсацией.

Вторым по степени влияния на точность формируемой оценки орбиты возмущающим фактором является аэродинамическое торможение КА. При величине аэродинамического ускорения 10^{-6} м/с² ошибка аэродинамической составляющей формируемой оценки орбиты по координатам достигает 20 м (см. рис. 7.18). Предложенный алгоритм самонастройки фильтра на реальное аэродинамическое торможение позволил исключить постоянную составляющую аэродинамической ошибки формируемой оценки орбиты, а оставшаяся переменная составляющая по амплитуде не превышает 2 м (см. рис. 7.23).

Составляющие ошибки оценки, обусловленные смещением полюса Земли и гравитационным влиянием Луны и Солнца, по величине составляют 2-3 м. Их учет в модели движения КА необходим только в тех случаях, когда требуется более высокая точность формируемой оценки.

Составляющие ошибки оценки, обусловленные солнечным давлением и прецессией земной оси составляют 0,2-0,5 м. Их влияние вряд ли следует учитывать в модели движения низкоорбитального КА, так как ошибки, обусловленные этими составляющими, во-первых, меньше ошибок, обусловленных ошибками измерений АСН, во-вторых, меньше ошибок, обусловленных нескомпенсированной в результате самонастройки фильтра аэродинамической ошибкой оценки, а в-третьих, она соизмерима с ошибками, обусловленными другими возмущающими факторами, не рассмотренными в настоящем разделе, такими, как приливные аномалии гравитационного поля Земли и пр.

Исследование влияния ошибок измерений АСН на точность формируемой оценки орбиты показало, что при постоянной времени динамического фильтра $T=5500$ с (один виток) эта ошибка оценки орбиты составляет величину $3\div 5$ м.

С учетом сказанного можно сделать вывод, что для низкоорбитальных КА при использовании рассмотренных алгоритмов динамической фильтрации измерений АСН точность формируемой оценки орбиты по координатам составляет величину $3\div 5$ м. При этом в модели движения КА необходимо учитывать аномальную часть гравитационного поля Земли с точностью до 72 порядка, а также в алгоритмах фильтрации реализовывать самонастройку на текущее аэродинамическое торможение. Целесообразно также в модели движения КА учитывать смещение полюса Земли от оси Z ГСК и гравитационное влияние на движение КА Луны и Солнца. В этом случае точность может быть несколько повышенна.

Другие, более мелкие возмущающие факторы, такие как солнечное давление, прецессия оси вращения Земли и т.п. в модели движения КА могут не учитываться.

7.5 Метод определения возмущений, действующих на НС *GPS* и ГЛОНАСС, обусловленных силами солнечного давления

В предыдущем разделе было отмечено, что для низкоорбитальных КА основным плохо прогнозируемым возмущающим фактором является аэродинамическое торможение. Для его определения был рассмотрен метод динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение. При этом отмечалось, что возмущением от сил солнечного давления можно пренебречь. Для высокоорбитальных КА аэродинамическое торможение отсутствует, а основным, плохо прогнозируемым возмущающим фактором, являются силы солнечного давления.

В разделе 5.5 рассматривались алгоритмы высокоточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС и *GPS*, реализуемых за счет точного моделирования возмущений, действующих на НС. Реализация этих алгоритмов возможна, если возмущения от сил солнечного давления оцениваются с достаточно высокой точностью. В разделе 2.4 приведен алгоритм (2.30) расчета ускорения, обусловленного силами солнечного давления, для КА, основными отражающими солнечный свет конструкциями которого являются солнечные батареи (СБ), ориентируемые на Солнце. Навигационные спутники ГЛОНАСС и *GPS* относятся к таким КА. Они имеют СБ, площадь которых существенно больше площади Миделя самого спутника, и эти СБ ориентируются на Солнце. Однако в алгоритме (2.30) имеется достаточно неопределенный коэффициент k , зависящий от многих факторов. Этот коэффициент является разным для разных КА и может медленно меняться во времени. Поэтому оценить его заранее с точностью выше 20% обычно не удается, из-за чего возмущение от сил солнечного давления для НС

ГЛОНАСС и *GPS* является основным неопределенным фактором, затрудняющим точный прогноз орбиты НС.

В настоящем разделе мы рассмотрим метод оценки этого коэффициента в полете по эфемеридам НС, передаваемым потребителю (*broadcast*-эфемеридам). Рассматриваемый метод может быть реализован, если в модели движения КА учтены все другие более значительные возмущения. Для навигационных НС такими возмущениями являются:

- возмущение от аномальной части гравитационного поля Земли до порядка, не ниже 8×8 ;
- гравитационные возмущения от Луны и Солнца;
- возмущения, обусловленные смещением полюса Земли;
- нутация и прецессия оси вращения Земли;
- неравномерность вращения Земли.

В качестве измеряемых параметров будем брать векторы координат НС, формируемые на моменты времени t_i по данным соответствующих эфемерид, а искомый коэффициент k введем в состав оцениваемых параметров.

$$\bar{\xi}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_i^* \\ \bar{V}_i^* \\ k^* \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

Пусть на момент t_i известен вектор измерений \bar{X}_{ui} . По оценке вектора состояния $\bar{\xi}_i^*$ может быть сформирована оценка вектора измерения по формуле:

$$\bar{X}_u^* = A\bar{\xi}_i^*, \quad (7.28)$$

где $A=(E_0)$, E – единичная матрица размерности 3×3 ;

0 – нулевая матрица размерности 3×4 .

Пусть $\bar{\xi}_i$ – истинный вектор состояния КА:

$$\bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{V}_i \\ k \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Представим также ошибки вектора измерений и вектора состояния в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{X}_{ui} &= \bar{X}_{ui} - \bar{X}_u^*; \\ \Delta \bar{\xi}_i &= \bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i^*. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Тогда для n измерений можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{X}_{u1} &= A \Delta \bar{\xi}_1 \\ \cdots & \\ \Delta \bar{X}_{un} &= A \Delta \bar{\xi}_n \end{aligned} \quad (7.31)$$

В системе уравнений (7.31) для разных моментов времени связь между векторами $\Delta \bar{\xi}_i$ и $\Delta \bar{\xi}_j$ определяется соотношением (7.24). При этом в процессе интегрирования уравнений движения как при вычислении матрицы преобразования ошибок B_{ij} , так и при прогнозе вектора состояния КА от момента t_i к моменту t_{i+1} возмущающее ускорение от сил солнечного давления определяется по формуле:

$$\bar{a}_{CD} = \frac{\bar{X}^* - \bar{X}_C}{|\bar{X}^* - \bar{X}_C|} \frac{S_{CB} + S_M}{m} k^*, \quad (7.32)$$

где \bar{X}^* – текущая оценка координат КА;

\bar{X}_C – вектор координат Солнца в ГСК;

S_{CB} – площадь солнечных батарей;

S_M – площадь Миделя КА;

m – масса КА;

k^* – текущая оценка коэффициента k .

В формуле (7.32) величину $\frac{S_{CB} + S_M}{m}$ можно задать в виде постоянного коэффициента,

точность расчета которого не важна, так как при его любом приближенном соответствии указанным в формуле величинам в процессе динамической фильтрации оценка коэффициента k^* выйдет на уровень, при котором оценка ускорения \bar{a}_{CD}^* с большой точностью соответствует его истинному значению.

После формирования матрицы B_{nn+1} на текущем $n+1$ -м шаге оценка вектора состояния $\bar{\xi}_{n+1}^*$ на $n+1$ -м шаге формируется в соответствии с алгоритмом (7.26).

Рассмотренный алгоритм был реализован в модели движения НС ГЛОНАСС и *GPS* при формировании высокоточного прогноза этих спутников, рассмотренных в разделе 5.5. Графики ошибок суточного прогноза реальной группировки спутников ГЛОНАСС и *GPS*, реализованного с использованием упомянутой модели движения, приведены на рис. 5.13 и 5.14. Обеспечение такого прогноза с метровыми точностями подтверждает высокую точность формируемой оценки сил солнечного давления.

На рис. 7.24 приведен график оценки ускорения от сил солнечного давления одного из спутников *GPS*. Оценка получена рассмотренным выше методом динамической фильтрации по передаваемым этим спутником эфемеридам. График демонстрирует процесс настройки формируемой оценки. Нулевое приближение оценки было задано величиной 10^{-7} м/с². Коррекция оценки выполнялась по *broadcast*-эфемеридам, обновлявшимися каждые 2 часа. Длительность процесса настройки составила ~24 часа, после чего установилось

постоянное значение величины ускорения от сил солнечного давления, равное $8,9 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}^2$. Полученная величина согласуется с данными, приведенными в таблице 2.1 (10^{-7} м/с^2). О точности полученной оценки можно судить по результатам исследования, проведенного в Главе 2. На рис. 2.1 приведены графики "разлета" реальной и моделируемой орбит спутника *GPS*. При этом моделирование выполнялось с использованием рассмотренных выше моделей возмущений, действующих на КА, в том числе и с использованием оценки ускорения от сил солнечного давления, формируемой рассматриваемым в настоящем разделе методом. Приведенные графики показали, что точность прогноза орбиты на трое суток составила величину $\sim 3\text{м}$ по продольной дальности и $\sim 2\text{м}$ по высоте и боковой дальности. Выполненный в Главе 2 анализ показал, что такая точность прогноза может быть достигнута, если суммарная ошибка моделей всех возмущающих факторов не превышает величину $2 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2$. Это означает, что даже если демонстрируемые графиками рис. 2.1 ошибки прогноза обусловлены исключительно ошибкой оценки ускорения от сил солнечного давления, то величина этой ошибки составляет $\sim 2\%$ от номинального значения ускорения. Поэтому в дальнейшем будем предполагать точность рассмотренного метода формирования оценки возмущающего ускорения от сил солнечного давления спутников ГЛОНАСС и *GPS* составляет 2%.

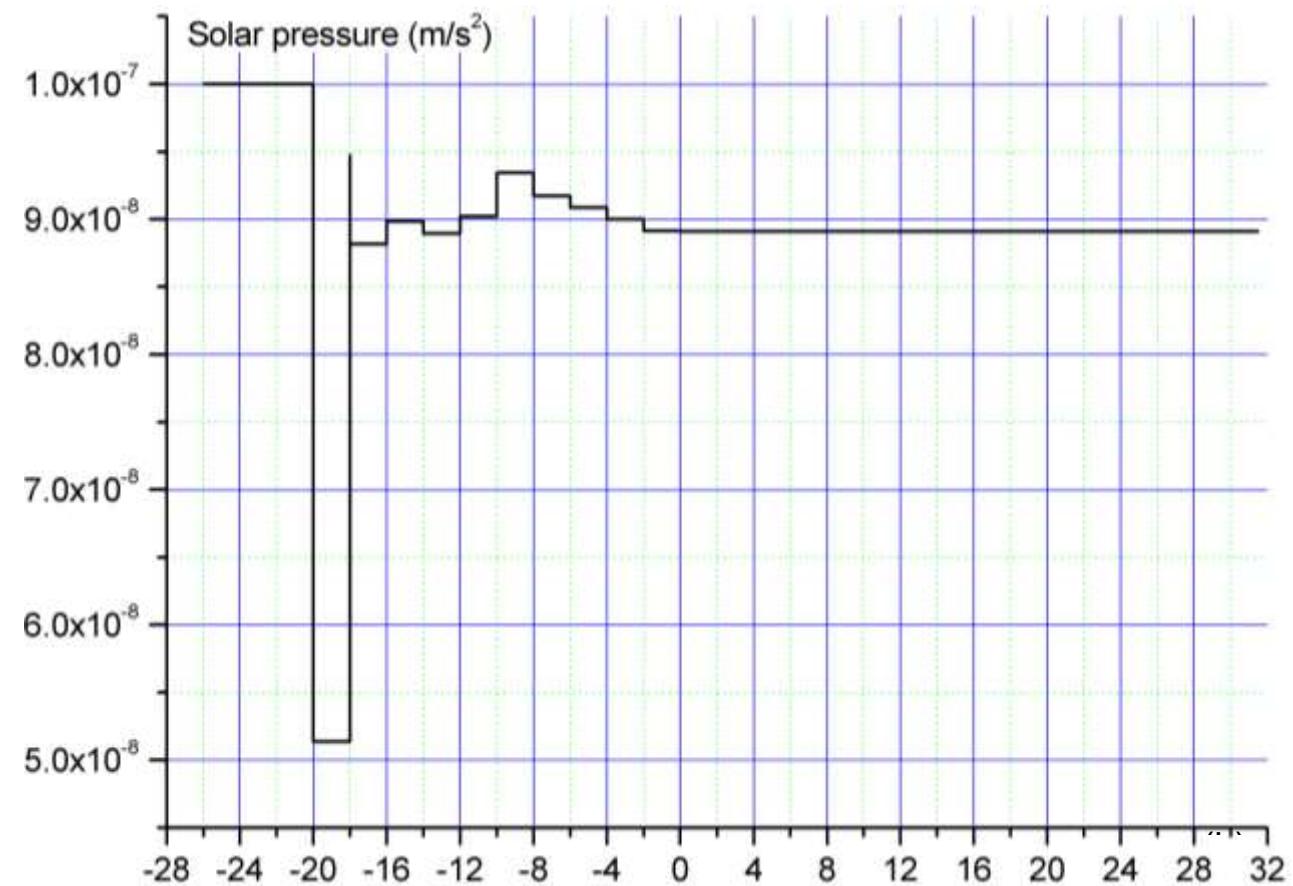


Рис. 7.21 Оценка ускорения от сил солнечного давления для одного из спутников *GPS*, полученная в результате обработки реальных *broadcast*-эфемерид.

Глава 8 Анализ ошибок формируемой оценки орбиты по реальным измерениям АСН-М МКС

Результаты влияния различных возмущений на точность орбиты, формируемой по предложенным алгоритмам динамической фильтрации основаны на моделировании измерений АСН и орбиты КА. В настоящем разделе полученные результаты моделирования подтверждаются реальными летными измерениями АСН-М, выполненными на МКС при проведении в 2010 - 2011 г. г. специальных летных экспериментов по исследованию достигаемой точности навигации низкоорбитальных КА.

8.1 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок измерений

Чтобы оценить влияние реальных ошибок измерений АСН на точность формируемой оценки орбиты, на МКС были проведены измерения на трех независимых приёмниках АСН, антенны которых были установлены под различными углами к местной вертикали.

Одна из антенн была направлена в зенит, а две другие отклонены от вертикали вокруг продольной оси МКС на углы соответственно $+40^\circ$ и -40° . Поэтому все три приёмника работали по разным созвездиям спутников *GPS* и имели различные ошибки КСВ. На рис. 8.1 приведены графики ошибок измерений координат центра масс МКС каждого приемника. Графики ошибок построены относительно оценок орбиты, полученных по этим измерениям путем динамической фильтрации с постоянной времени – виток. Из приведенных графиков видно, что ошибки измерений приемников практически не коррелированы между собой. Минимальные ошибки наблюдаются у первого приёмника, антenna которого направлена в зенит. Следовательно, в ее поле зрения находится максимальное число НС.

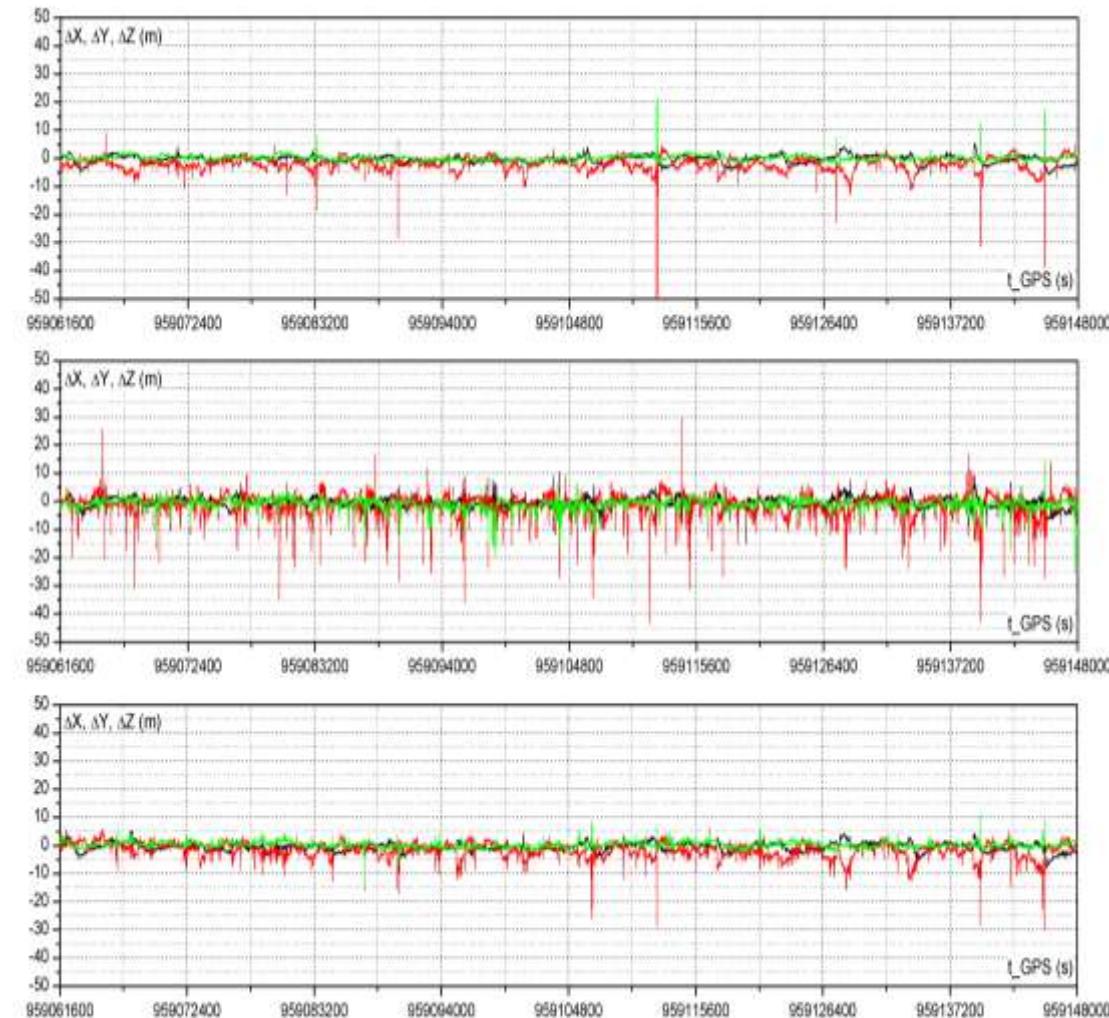


Рис. 8.1 Ошибки измерений координат трёх навигационных приёмников МКС.

Видимость НС "боковыми" антеннами МКС существенно хуже, чем "зенитной", и т.к. они развернуты в противоположные стороны, то созвездия видимых этими антеннами спутников существенно отличаются друг от друга. Кроме того, в поле зрения каждой из антенн попадают переотраженные сигналы от различных элементов конструкции МКС. В результате ошибки измерений, обусловленные этими переотраженными сигналами, различны для каждого навигационного приёмника. Ошибки измерений приёмников обуславливают ошибки формируемых по этим измерениям оценок орбиты МКС. Поэтому составляющие ошибок этих оценок, обусловленные ошибками измерений, отличаются друг от друга. Составляющие ошибок оценок, обусловленные неточностью модели движения КА равны для всех трёх оценок, так как при формировании этих оценок используются одинаковые модели движения КА. В итоге разности оценок, формируемых по измерениям каждого из приёмников, близки к составляющим ошибок оценок, обусловленных ошибками измерений приёмников.

На рис. 8.2 и 8.3 приведены графики попарных разностей координат и скоростей оценок орбит, полученных по измерениям приёмников, ошибки которых приведены на рис. 8.1.

На верхних графиках рис. 8.2 и 8.3 приведены графики разности ошибок оценок первого и второго приёмников, на средних – второго и третьего приёмников, на нижних – третьего и первого приёмников. Из графиков видно, что попарные разности имеют одинаковый порядок величины и по координатам отличаются не более, чем на 2 м, а по скорости – не более чем на 3 мм/с. Это означает, что ошибки оценок орбиты МКС, обусловленные ошибками измерений, составляют величину ~ 2 м по координатам и 3 мм/с по скорости.

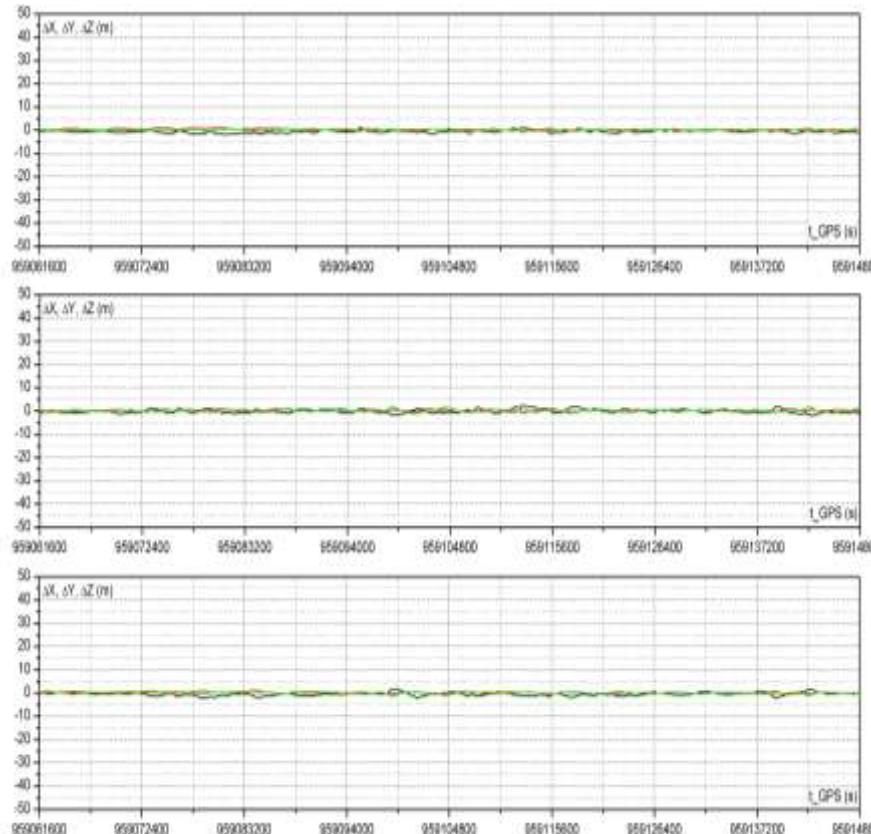


Рис. 8.2 Попарные разности координат оценок орбит, полученных по измерениям трёх навигационных приёмников МКС.

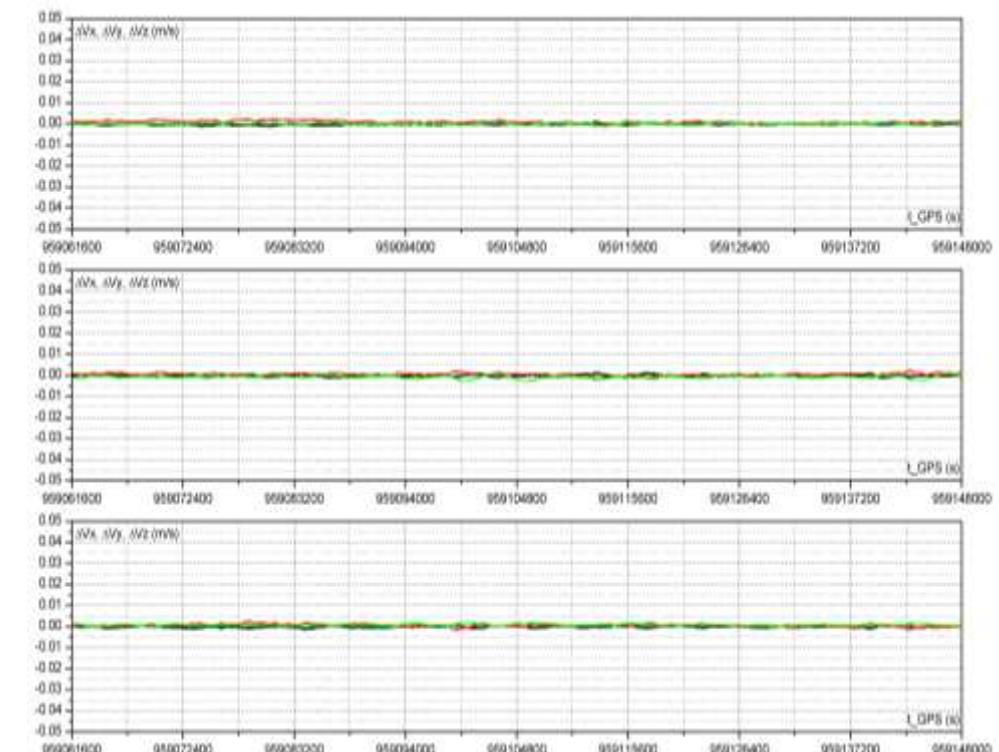


Рис. 8.3 Попарные разности составляющих скорости оценок орбит, полученных по измерениям трёх навигационных приёмников МКС.

8.2 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля Земли

Для исследования влияния точности моделирования гравитационного поля Земли на точность формируемой оценки по полученным на МКС измерениям АСН были сформированы оценки орбиты для моделей порядка 8×8 , 36×36 , 72×72 и построены графики разностей измеренных координат и их оценок.

На рис. 8.4 приведены графики разностей измерений КСВ с оценкой, полученной с использованием модели порядка 8×8 (верхние графики). Для сравнения на этом же рисунке приведены графики ошибок оценки орбиты, полученной путем моделирования с использованием модели порядка 8×8 (нижние графики).

Графики ошибок, полученные по реальным измерениям, включают как ошибки, обусловленные ошибками модели, так и ошибки измерений. Последние имеют вид высокочастотной шумовой составляющей и резких кратковременных всплесков. Ошибки, обусловленные ошибками модели, соответствуют низкочастотной, достаточно плавной составляющей ошибок, приведенных на указанном графике.

Сравнивая верхние и нижние графики рис. 8.4, можно отметить, что графики ошибок оценки орбиты, полученной путем моделирования, практически совпадают с графиками ошибок оценки орбиты, полученной по реальным данным. То есть, если отвлечься от ошибок, обусловленных ошибками измерений, то верхние графики будут практически совпадать с нижними.

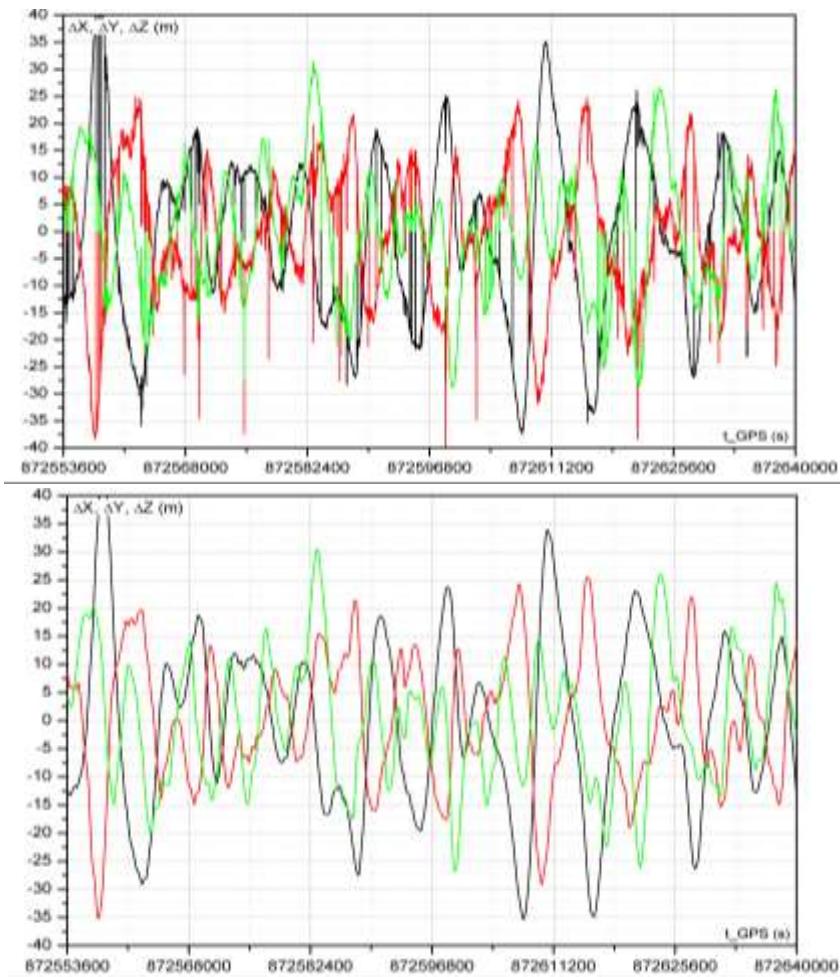


Рис. 8.4 Сравнение точности оценок орбиты, полученных по реальным измерениям и путём моделирования при реализации в фильтре модели гравитационного поля порядка 8×8 .

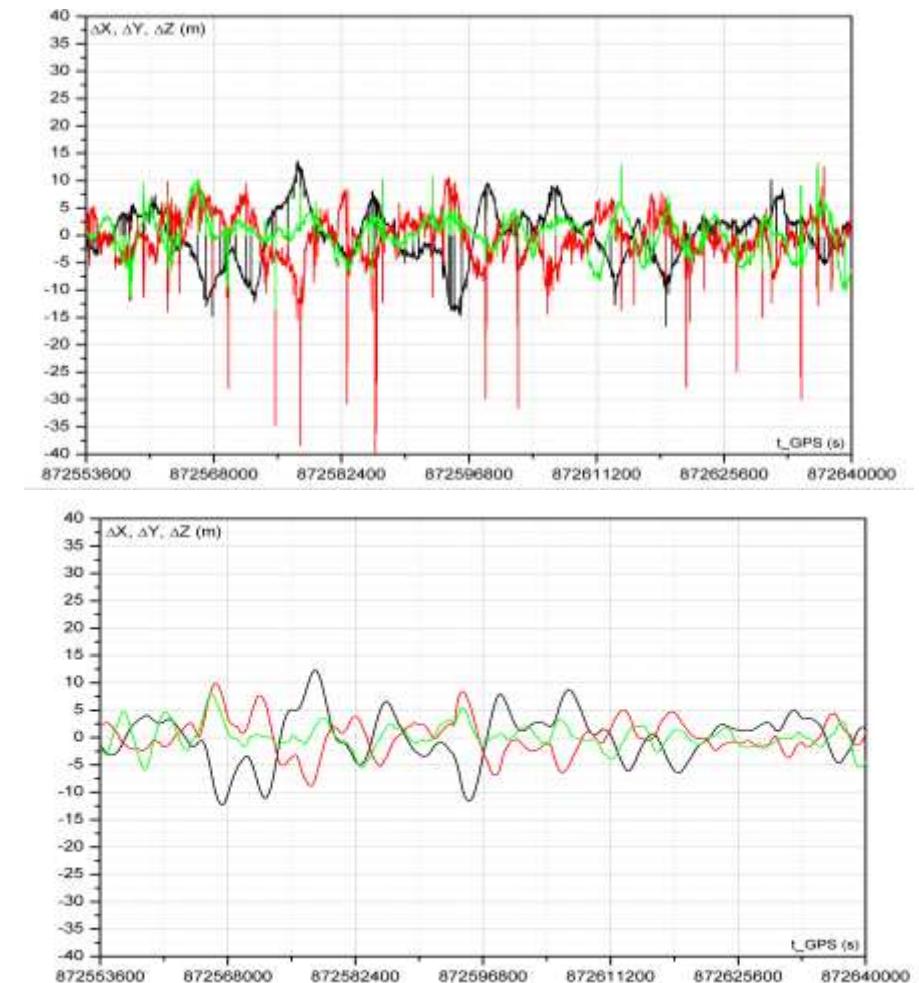


Рис. 8.5 Сравнение точности оценок орбиты, полученных по реальным измерениям и путём моделирования при реализации в фильтре модели гравитационного поля порядка 36×36 .

На рис. 8.5 приведена аналогичная пара графиков для модели гравитационного порядка 36×36 . Здесь также можно констатировать, что и для модели поля порядка 36×36 графики ошибок оценки орбиты, полученной путем моделирования, практически совпадают с графиками ошибок оценки орбиты, полученной по реальным данным.

На рис. 8.6 приведена пара графиков для модели гравитационного поля порядка 72×72 . Для этой модели ошибки, полученные путем моделирования, составляют величину порядка 0,3 м. Оценить эту составляющую на графиках для реальных измерений не представляется возможным, так как эта ошибка существенно меньше ошибки измерений, а также ошибок оценки орбиты, обусловленных неучтенными возмущениями: гравитационным влиянием Луны и Солнца, некомпенсированными ошибками аэродинамического торможения, смещением полюса Земли и т.п.

Тем не менее, если отвлечься от больших всплесков ошибок измерений, обусловленных переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС, то можно констатировать, что разность измерений и оценки орбиты, полученной по этим измерениям по трем координатам ΔX , ΔY , ΔZ , находится в трубке ± 5 м. Такое совпадение может быть только в том случае, если точность большинства измерений АСН и точность оценки орбиты не хуже 5 м. Это означает, что предложенные алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН при реализации в модели движения КА модели гравитационного поля Земли порядка 72×72 обеспечивают формирование оценки орбиты, точность которой имеет величину порядка 5 м.

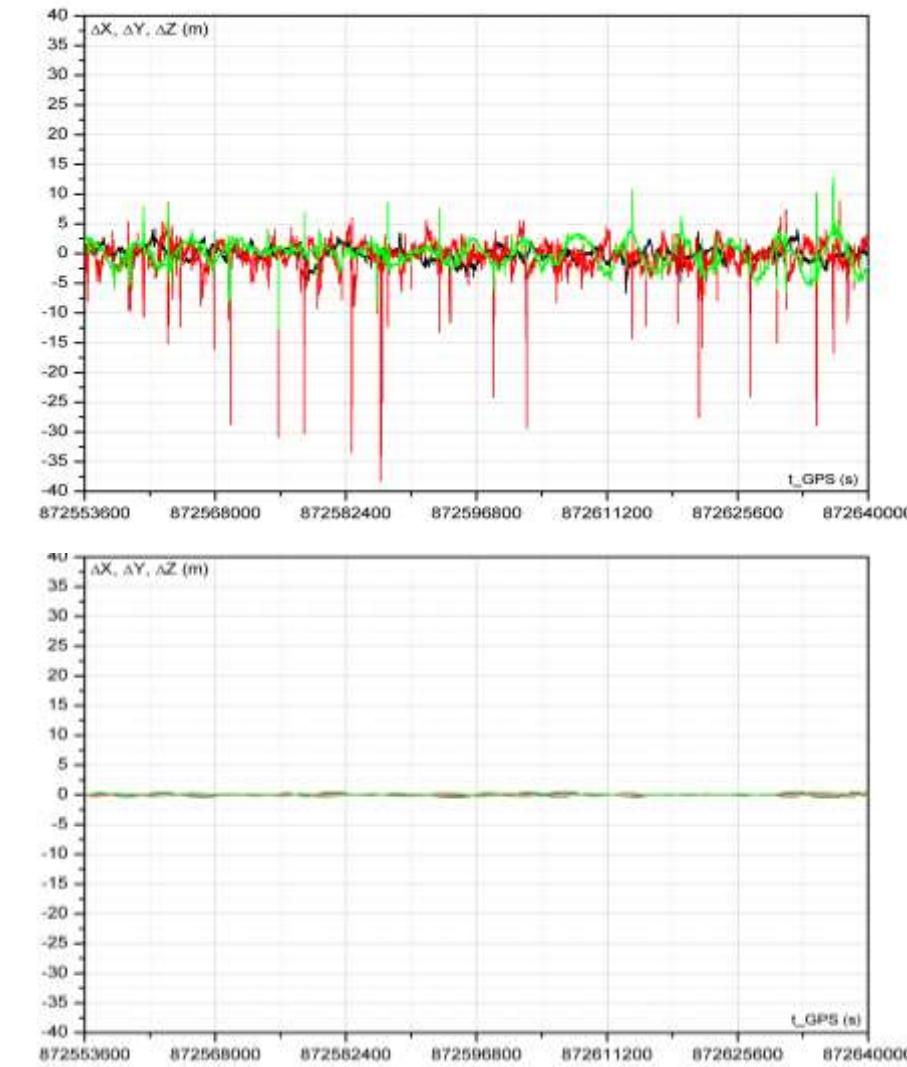


Рис. 8.6 Сравнение точности оценок орбиты, полученных по реальным измерениям и путём моделирования при реализации в фильтре модели гравитационного поля порядка 72×72 .

Полученный результат обеспечивается только в том случае, если в алгоритмах динамической фильтрации реализованы алгоритмы самонастройки на аэродинамическое торможение КА.

8.3 Зависимость точности формирования оценки орбиты от аэродинамического торможения КА

В предыдущем разделе отмечалось, что аэродинамические возмущения орбиты существенно влияют на точность формируемой оценки орбиты. Для предложенных алгоритмов фильтрации измерений АСН аэродинамическая составляющая оценки орбиты достигает 20 м (см. рис. 7.15). Предложенный алгоритм самонастройки фильтра на реальное аэродинамическое торможение обеспечивает компенсацию постоянной составляющей среднего за виток аэродинамического торможения. При этом нескомпенсированная величина аэродинамической составляющей ошибки оценки орбиты не превышает 2 м (см. рис. 7.23).

Приведённые на рис. 7.18 и 7.23 графики аэродинамических составляющих ошибок оценки орбиты получены путем моделирования. Аналогичный анализ влияния аэродинамического торможения был выполнен по реальным летным измерениям АСН-М МКС, полученным в одном из летных экспериментов. На рис. 8.7 приведены графики разности измерений АСН (по координатам X , Y , Z относительно ОСК) с соответствующей оценкой орбиты, полученной по предлагаемому алгоритму без аэродинамической компенсации (с учетом возмущений аномальной части гравитационного поля Земли). Из графиков видна постоянная составляющая аэродинамической ошибки оценки по осям X (продольная ось) и Y (вертикальная ось). Смещение по оси X достигает величины ~ 5 м, по $Y - \sim 3$ м. Смещение по оси Z практически отсутствует.

Рис. 8.7 Разность реальных измерений координат и их оценки, полученной по алгоритмам фильтрации без самонастройки на аэродинамическое торможение.

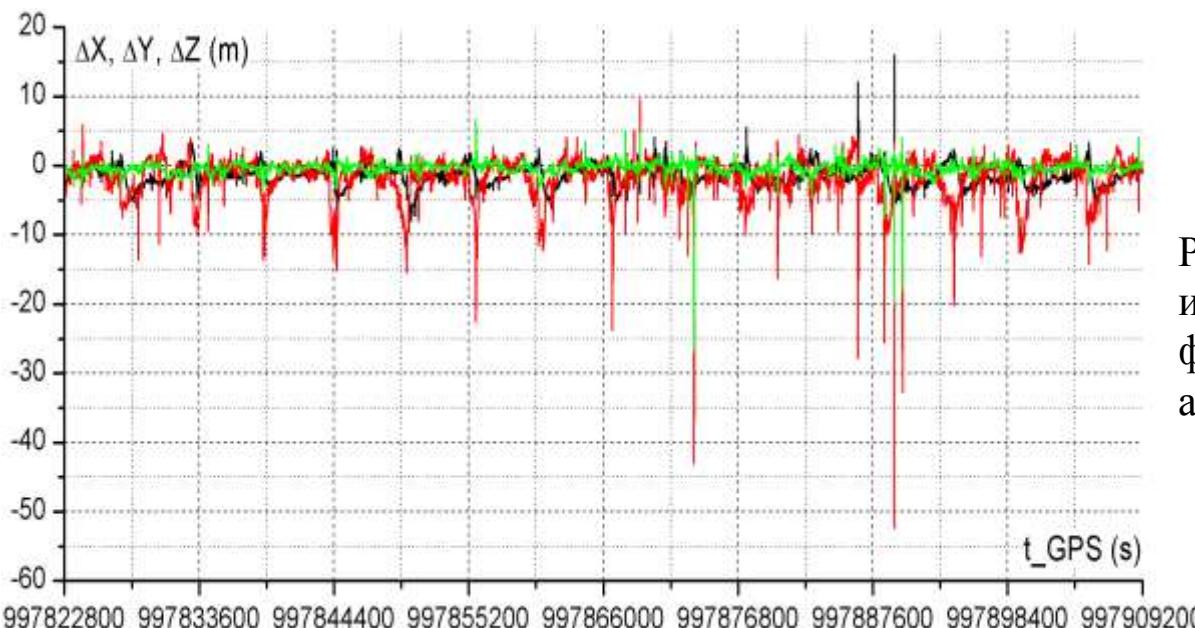
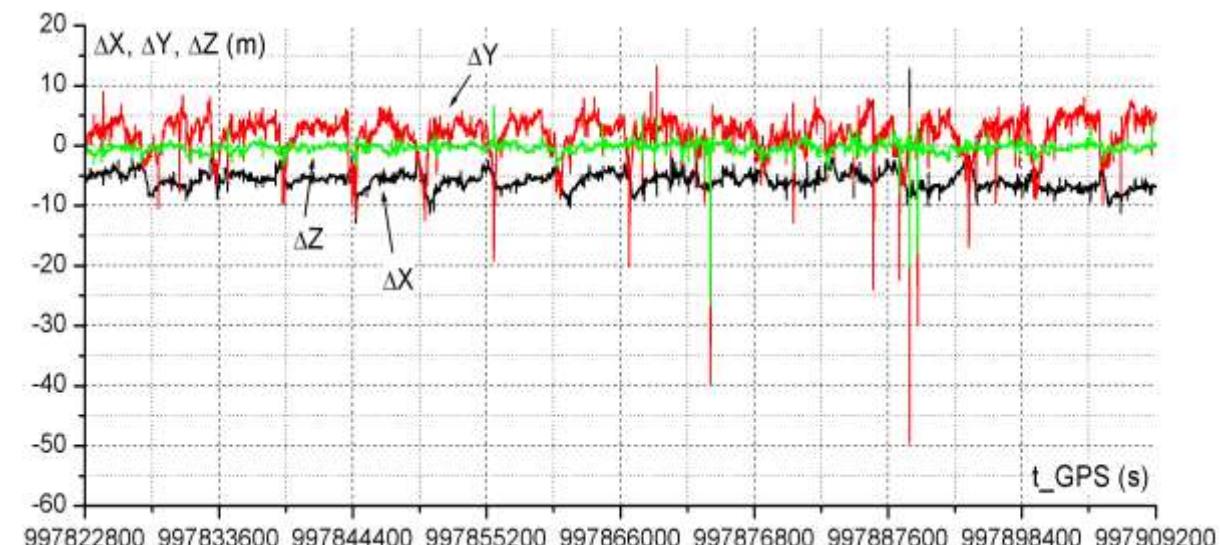


Рис. 8.8 Разность измерений координат и их оценки, полученной по алгоритмам фильтрации с самонастройкой на аэродинамическое торможение.

На рис. 8.8 приведены аналогичные графики для оценки орбиты, полученной по аналогичным алгоритмам, но с аэродинамической компенсацией. Из приведенных графиков видно, что аэродинамическое смещение полностью компенсировано и большая часть измерений лежит в трубке ± 5 м по всем трём осям.

Следует отметить, что предложенный алгоритм аэродинамической компенсации не только устраняет постоянную составляющую аэродинамической ошибки в формируемой оценке орбиты, но также позволяет оценить величину аэродинамического торможения в реальном времени. На рис. 8.9 приведен график оцененной величины аэродинамического торможения для того же участка орбиты МКС. Из графика видно, что среднее значение аэродинамического торможения составляет величину $\sim 2,5 \cdot 10^{-7}$ м/с². Ошибки оценки (отклонения от среднего значения) имеют амплитуду $\sim 0,5 \cdot 10^{-7}$ м/с² и обусловлены влиянием на оценку аэродинамического торможения ионосферных ошибок измерений АСН, которые хорошо просматриваются на графиках рис. 8.8.

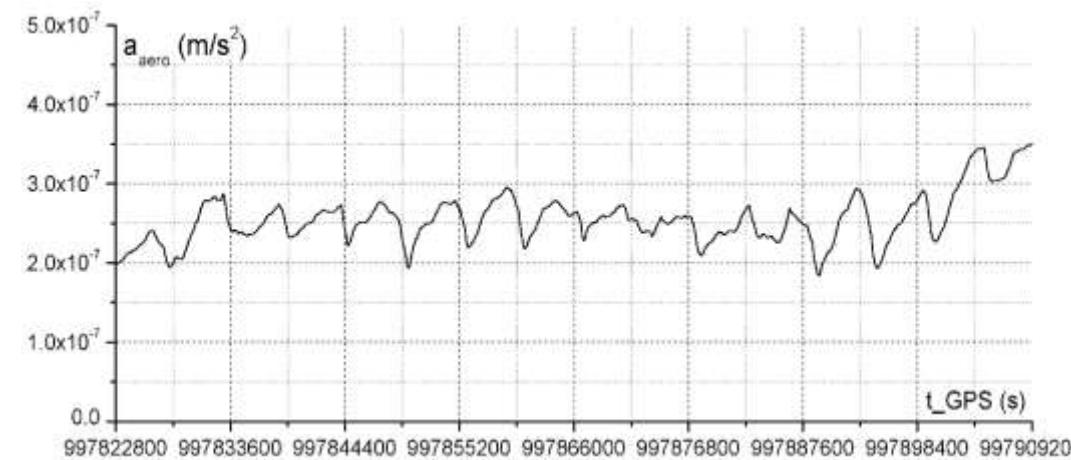


Рис. 8.9 Оценка аэродинамического торможения МКС, полученная по измерениям АСН-М.

Таким образом, предложенный алгоритм динамической фильтрации измерений с аэродинамической компенсацией позволяет не только исключить постоянную составляющую аэродинамического торможения КА на точность формируемой оценки орбиты, но и с достаточно высокой точностью в реальном времени оценивать аэродинамическое торможение КА, величина которого имеет порядок $10^{-8}g$.

В соответствии с результатами моделирования, полученными в предыдущем разделе, следующими (и близкими) по степени влияния на точность формируемой оценки орбиты возмущающими факторами являются смещение полюса Земли и гравитационное воздействие на КА Луны и Солнца. Оценим эти ошибки в оценке орбиты, полученной по реальным измерениям АСН-М на МКС. Графики, приведенные на рис. 8.6 представляют собой разности координат в ОСК реальных измерений АСН и оценки орбиты, полученной по этим измерениям с использованием модели гравитационного поля Земли порядка 72×72 и аэродинамической компенсации. В полученную разность входят ошибки измерений АСН, нескомпенсированная часть аэродинамического возмущения и все неучтенные в модели движения КА возмущения, в том числе возмущения, обусловленные смещением полюса Земли и гравитационным влиянием Луны и Солнца. На графиках, приведенных на рис. 8.6 для значений ΔX , ΔY ΔZ , трудно выделить какие-либо закономерности в поведении ошибок. Однако, на рис. 8.10 приведен график для значений ΔZ из графиков рис. 8.6 в более крупном масштабе. Из графика видно, что разность между измерениями АСН и формируемой оценкой в проекции на ось Z ОСК имеет колебательный характер с амплитудой 2-4 м и частотой - один виток. Эти регулярные колебания обусловлены влиянием смещения полюса Земли и гравитационным влиянием на орбиту МКС от Луны и Солнца. Они могут быть скомпенсированы путем моделирования этих возмущений в модели движения КА при фильтрации измерений АСН.

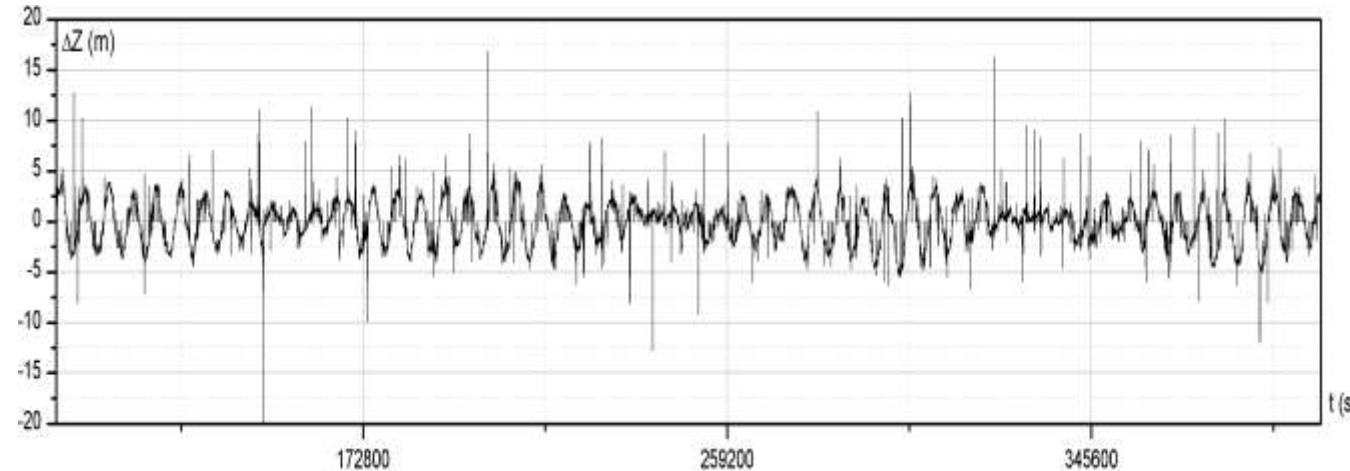


Рис. 8.10 Ошибка оценки орбиты без учета влияния Луны, Солнца и смещения оси вращения Земли.

8.4 Зависимость формируемой оценки орбиты от гравитационного воздействия на КА Луны и Солнца и смещения полюса Земли

На рис. 8.11 и 8.12 приведены аналогичные графики рассогласования между измерениями АСН и формируемой оценкой в проекции на ось Z ОСК для случая учета в модели движения КА смещения полюса Земли (рис. 8.11) и одновременного учета смещения полюса и гравитацию от Луны и Солнца (рис. 8.12).

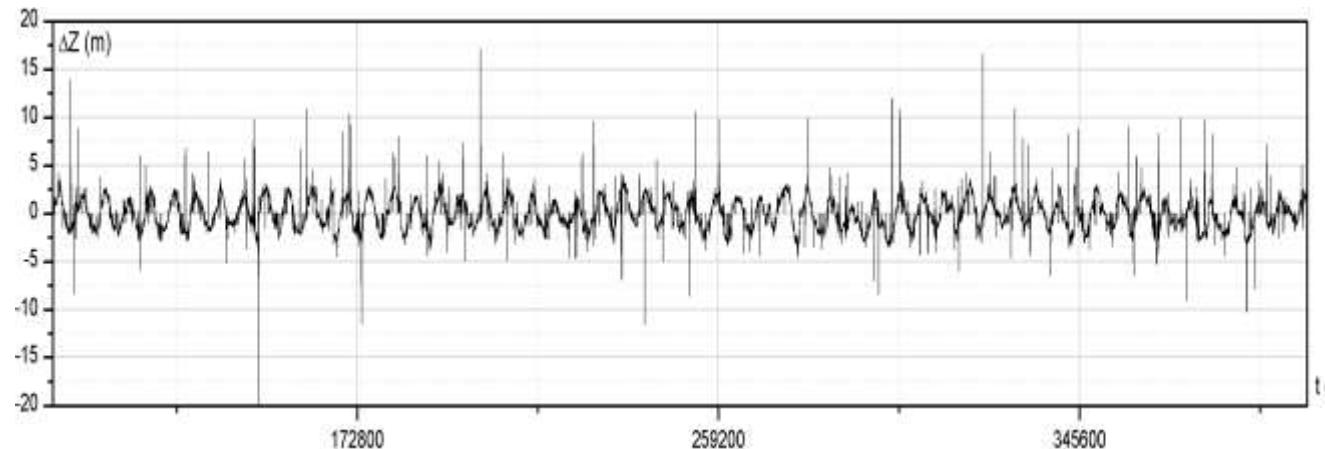


Рис. 8.11 Ошибка оценки орбиты без учета влияния Луны и Солнца, с учетом смещения оси вращения Земли.

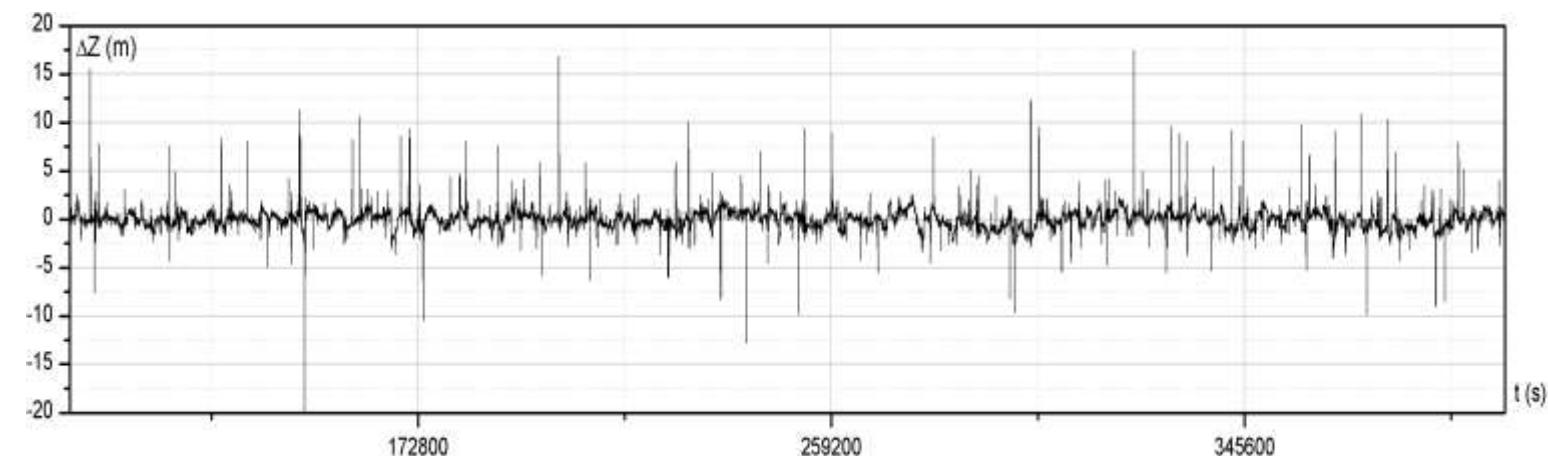


Рис. 8.12 Ошибка оценки орбиты с учетом влияния Луны, Солнца, смещения оси вращения Земли.

Из приведенных графиков следует, что учет смещения полюса приводит к уменьшению амплитуды рассогласования ΔZ с ~ 4 м до ~ 2 м, а дополнительный учет влияния Луны и Солнца обеспечивает пропадание колебаний рассогласования измерений и оценки.

Влияние на точность формируемой оценки орбиты сил солнечного давления и прецессии оси вращения Земли незначительное. Выделить это влияние на фоне ошибок измерений проблематично.

На графике, приведенном на рис. 8.11 рассогласование между большинством измерений и оценкой орбиты (полученной с учетом смещения полюса Земли и влиянием Луны и Солнца) лежит в трубке $\pm 1 \div 2$ м. Это экспериментально подтверждает, что при учете в модели движения КА гравитационного поля Земли с точностью до порядка 72×72 , смещение полюса Земли и влияние Луны и Солнца, самонастройке фильтра на реальное аэродинамическое торможение для низкоорбитальных КА может быть достигнута точность формируемой оценки орбиты по положению величиной ~ 2 м.

8.5 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от постоянной времени фильтра

Полученные выше результаты точности оценки орбиты низкоорбитального КА по измерениям АСН не учитывают возмущение орбиты от работы двигателей КА. Анализ точности формируемой оценки орбиты проведен для постоянной времени фильтра $T = 5500$ с (~ 1 виток). Такая постоянная времени может быть выбрана для участков орбиты, на которых не работают двигатели. Например, МКС большую часть времени полета находится в околоорбитальной ориентации, поддерживаемой с помощью гироскопов. При этом разгрузка гироскопов выполняется с помощью гравитационного момента путем незначительных

отклонений осей МКС от равновесного положения. Двигатели ориентации в этом случае не используются. Коррекция орбиты МКС проводится периодически для подъёма орбиты в среднем с частотой ~ 1 раз в месяц. При работе двигателей возникает возмущение орбиты, приводящее к значительному расхождению реальной орбиты и ее оценки. Уменьшение этого расхождения может быть достигнуто путем уменьшения постоянной времени фильтра. Поэтому интерес представляет исследование зависимости точности формируемой оценки орбиты КА от величины этой постоянной времени.

Ниже приводятся результаты такого исследования, полученные по лётным данным АСН-М МКС. Анализ проводился путём сравнения оценок орбиты, полученных для постоянных времени $T = 0$, $T = 30$ с, $T = 100$ с и $T = 1000$ с, с идеальной орбитой, за которую принималась оценка орбиты с постоянной времени - виток. На рис. 8.13 представлены графики ошибок координат ΔX , ΔY , ΔZ сформированных оценок в ОСК, а на рис. 8.14 – графики ошибок скорости ΔV_X , ΔV_Y , ΔV_Z .

Верхние графики на каждом рисунке относятся к ошибкам измерений АСН ($T = 0$). Из этих графиков видно, что в некоторых случаях ошибки измерений по положению превышают 20 м, по скорости – 20 см/с.

При постоянной времени фильтра $T = 30$ с (второй график сверху) ошибки оценки по координатам в целом близки к ошибкам измерений. При этом несколько "обрезаются" кратковременные всплески ошибок, в результате чего максимальные ошибки не превышают величины ~ 15 м.

В графиках ошибок оценки скорости появляется множество дополнительных всплесков амплитудой до 20 см/с, отсутствующих в графиках ошибок измерений скорости. Эти всплески

обусловлены ошибками измерений координат, которые переходят в ошибки оценки скорости при малых постоянных времени фильтра.

При постоянной времени фильтра $T = 100$ с (третий график сверху) ошибки оценки по координатам в целом остаются близкими к ошибкам измерений. При этом наблюдается "сглаживание" кратковременных всплесков ошибок, максимальные значения которых составляют 10-12 м.

В графиках ошибок оценки скорости "сглаживаются" кратковременные всплески, величина ошибок на большей части траектории находится в трубке ± 3 см/с, максимальные ошибки составляют величину $5 \div 7$ см/с.

При постоянной времени фильтра 1000 с (нижний график) всплески ошибок оценки по координатам "сглаживаются", величина ошибок на большей части траектории находится в трубке ± 5 м, максимальные ошибки не превышают 8 м.

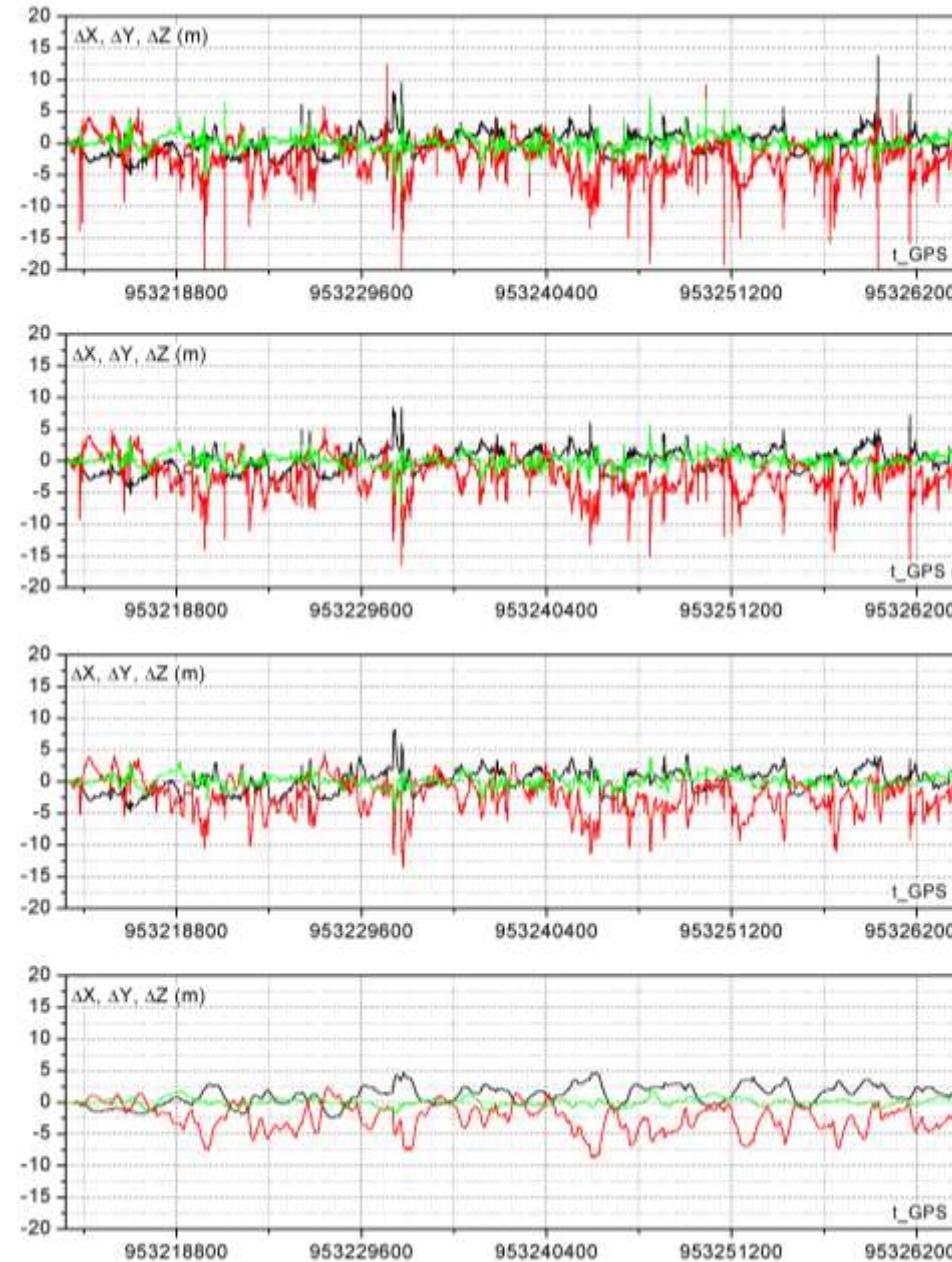


Рис. 8.13 Ошибки оценки орбиты по координатам для разных значений постоянной времени ($T=0$, $T=30$ с, $T=100$ с, $T=1000$ с).

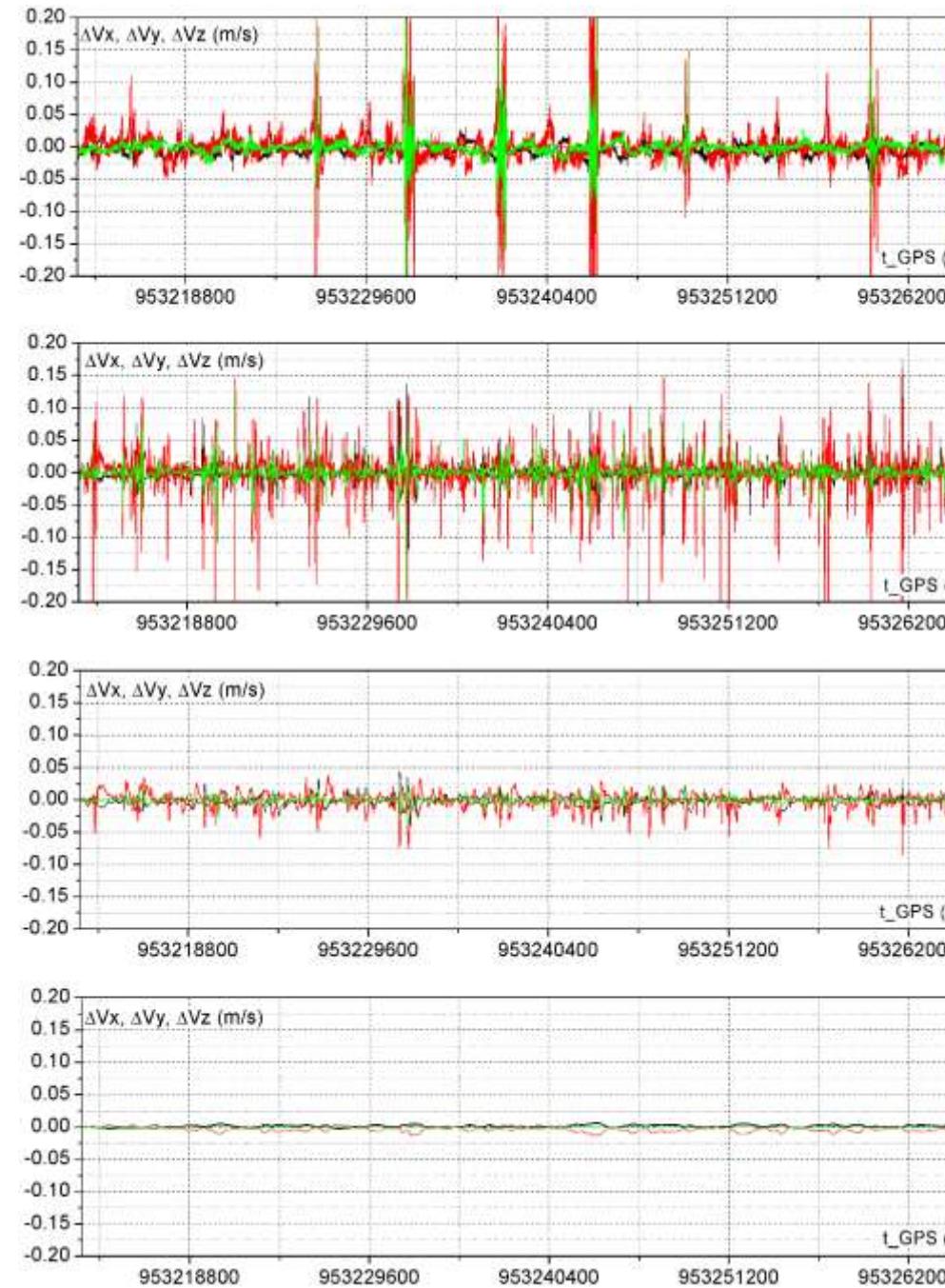


Рис. 8.14
 Ошибки оценки
 орбиты по
 скорости для
 разных значений
 постоянной
 времени ($T=0$,
 $T=30$ с, $T=100$ с,
 $T=1000$ с).

Ошибки оценки скорости на большей части траектории находятся в трубке ± 1 см/с, максимальные ошибки не превышают 2 см/с.

Таким образом, приведенные выше графики демонстрируют уровень ошибок формируемой оценки орбиты по координатам и скорости в зависимости от величины постоянной времени фильтра, выбор которой является важным элементом проектирования системы автономной навигации.

Глава 9 Динамическая фильтрация "сырых" измерений АСН. Исследование зависимости точности формируемой по "сырым" измерениям оценки орбиты от возмущающих факторов

9.1 Алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальности

Выше рассматривалась динамическая фильтрация измерений АСН, в которой в качестве измерений использовался вектор координат КА, формируемый в АСН одномоментно по измерениям видимых в этот момент НС. При этом, если число видимых НС меньше четырёх, то вектор координат потребителя не формируется. Для процесса фильтрации это означает, что измерение в данный момент отсутствует. Кроме того, при неблагоприятных конфигурациях видимых НС с большим уровнем *GDOP* возникают повышенные ошибки формируемых координат даже при хорошем качестве измерений псевдодальностей. Эти повышенные ошибки приводят к снижению точности формируемой оценки орбиты. Поэтому целесообразно исключить промежуточный этап формирования оценки орбиты – формирование КСВ, а в качестве измеряемых параметров для выполнения фильтрации использовать непосредственно псевдодальности, являющиеся первичными измерениями в АСН. Однако в состав ошибок псевдодальностей входит большая составляющая, обусловленная ошибкой часов приёмника. Исключить эту ошибку можно, взяв разность псевдодальностей двух НС. То есть, в качестве измерений будем использовать разность псевдодальностей. Если текущее созвездие видимых НС состоит из n спутников, то в качестве текущего вектора измерения $\bar{\xi}_u$ будем использовать n -мерный вектор попарных разностей псевдодальностей:

$$\bar{\xi}_u = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ PR_2 - PR_3 \\ \cdots \\ PR_n - PR_1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Если известна некоторая начальная оценка вектора состояния КА $\bar{\xi}_0^*$, а также известны эфемериды НС, то легко могут быть определены оценки псевдодальностей PR_i^* и, соответственно, оценка вектора измерения:

$$\bar{\xi}_u^* = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ PR_2^* - PR_3^* \\ \cdots \\ PR_n^* - PR_1^* \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Разность вектора измерения и его оценки обозначим:

$$\delta\bar{\xi}_u = \bar{\xi}_u - \bar{\xi}_u^* \quad (9.3)$$

Искомую поправку вектора состояния представим в виде, аналогичном (7.22):

$$\Delta\bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \Delta\bar{X}_i \\ \Delta\bar{V}_i \\ a_{aero} \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

где $\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{0i}^*$ и $\Delta\bar{V}_i = \bar{V}_i - \bar{V}_{0i}^*$ – искомые ошибки вектора состояния КА относительно известной оценки $\bar{X}_{0i}^*, \bar{V}_{0i}^*$;

a_{aero} – искомое среднее за виток аэродинамическое торможение.

Чтобы составить систему уравнений для определения поправки к текущему вектору состояния, необходимо определить связь между расширенным вектором состояния $\Delta\bar{\xi}$ и вектором измерений. Приращение псевдодальности PR_i связано с приращением вектора положения КА следующим соотношением:

$$\Delta PR_i = \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^T}{D_i} \Delta \bar{X}, \quad (9.5)$$

где \bar{X}_i – вектор координат НС в момент излучения сигнала, принятого приемником в момент измерения;

\bar{X} – вектор координат КА;

$D_i = |\bar{X}_i - \bar{X}|$ – расстояние между НС и КА.

Из соотношений (9.1), (9.2), (9.3), (9.4), (9.5) получим уравнение связи между вектором измерения и ошибкой вектора координат:

$$\delta\bar{\xi}_u = \begin{pmatrix} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}^*)^T}{D_1^*} - \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}^*)^T}{D_2^*} \\ \vdots \\ \frac{(\bar{X}_n - \bar{X}^*)^T}{D_n^*} - \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}^*)^T}{D_1^*} \end{pmatrix} \Delta \bar{X}, \quad (9.6)$$

где \bar{X}^* – оценка вектора координат КА $D_i^* = |\bar{X}_i - \bar{X}^*|$

Обозначим:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}^*)^T}{D_1^*} & -\frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}^*)^T}{D_2^*} \\ \hline & \\ \frac{(\bar{X}_n - \bar{X}^*)^T}{D_n^*} & -\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}^*)^T}{D_1^*} \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Матрица направляющих косинусов C имеет размерность $n \times 3$. Тогда уравнение (9.6) можно представить в виде:

$$\bar{\xi}_u = C \Delta \bar{X} \quad (9.8)$$

Учитывая, что $\Delta \bar{X} = A \Delta \bar{\xi}$, уравнение (9.8) можно записать в виде:

$$\delta \bar{\xi}_u = C A \Delta \bar{\xi}, \quad (9.9)$$

где $A = (E_3 0_{3 \times 4})$ – матрица размерности 3×7 ;

E_3 – единичная матрица размерности 3×3 ;

$0_{3 \times 4}$ – нулевая матрица размерности 3×4 ;

Уравнение (9.9) определяет связь между вектором измерений, выполненных в один момент времени, и ошибкой вектора состояния. Для серии из m измерений можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\xi}_{u1} &= C_1 A \Delta \bar{\xi}_1 \\ &\cdots \\ \delta \bar{\xi}_{um} &= C_m A \Delta \bar{\xi}_m \end{aligned} \quad (9.10)$$

Система уравнений (9.10) аналогична системе уравнений (7.23) с той лишь разницей, что в правой части каждого уравнения системы (9.10) дополнительно появляется матрица направляющих косинусов C_i .

Если в системе уравнений (7.23) связь между вектором измерений и вектором состояния обеспечивает матрица A , то в системе уравнений (9.10) эту связь обеспечивают матрицы $C_i A$. Поэтому решение системы (9.10) может быть выполнено по алгоритму, аналогичному алгоритму (4.25) с заменой матрицы A на матрицу $C_i A$. Тогда алгоритм формирования оценки вектора состояния на $m+1$ -й шаг через параметры m шага будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{m+1} &= A^T C_{m+1}^T \left(\bar{\xi}_{um+1} - \hat{\xi}_{m+1}^* \right), \\ W_{m+1} &= \lambda^2 B_{mm+1}^{-1T} W_m B_{mm+1}^{-1} + A^T C_{m+1}^T C_{m+1} A, \\ \Delta \bar{\xi}_{m+1}^* &= W_{m+1}^{-1} \bar{P}_{m+1}, \\ \bar{\xi}_{m+1}^* &= \hat{\xi}_{m+1}^* + \Delta \bar{\xi}_{m+1}^*\end{aligned}\tag{9.11}$$

На нулевом шаге матрица W_0 – нулевая матрица размерности 7×7 ;

$\hat{\xi}_{m+1}^*$ – оценка вектора измерения на шаге $m+1$, полученная из оценки вектора состояния $\bar{\xi}_m^*$, сформированного на m -м шаге путем прогноза на шаг $m+1$;

$$\lambda = \frac{T}{T+1}, \text{ где } T \text{ – постоянная времени фильтра.}$$

Алгоритм (9.11) позволяет осуществлять коррекцию текущего вектора состояния КА при неполной системе измерений (число НС меньше четырёх), а также при любых уровнях $GDOP$ (включая бесконечность).

Для формирования вектора измерений достаточно, чтобы на текущем шаге были проведены достоверные измерения псевдодальностей хотя бы для двух НС. Если число НС

меньше двух, или на текущем шаге вектор измерений отсутствует, то в алгоритме (9.11) матрица C_{m+1} принимается равной нулю.

Алгоритм (9.11) позволяет точно оценить орбиту КА по "сырым" измерениям АСН в случае, если измерения выполняются абсолютно точно, и абсолютно точно известна модель движения КА. В реальном случае ошибки измерений и ошибки модели приводят к ошибкам оценки орбиты. Ниже проводится исследование зависимости точности формируемой оценки от ошибок измерений и точности моделирования движения КА при выполнении динамической фильтрации по приведенным в предыдущем разделе алгоритмам, а также сравнение точности этих оценок с точностью оценок орбит, формируемых по измерениям КСВ.

9.2 Исследование зависимости точности формируемой оценки орбиты от ошибок измерений и числа навигационных спутников в группировке

В разделе 9.1 было высказано предположение, что формирование оценки орбиты путём динамической фильтрации по "сырым" измерениям должно обеспечить повышение точности по сравнению с точностью оценки, формируемой по КСВ. Проверка этого утверждения была выполнена путём моделирования работы АСН для орбиты МКС. При моделировании рассматривался альманах из 30 НС *GPS*. МКС находилась в орбитальной ориентации, антенна АСН при этом была направлена в зенит. Моделировались максимально возможные ошибки измерений АСН, включая ионосферные ошибки для года с максимальной солнечной активностью и ошибки, обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС. В процессе динамической фильтрации была реализована точная модель движения МКС. На рис. 9.1 приведены графики числа НС, сигналы которых попадают в поле зрения антенны и используются для решения навигационной задачи (верхние графики),

графики ошибок (относительно ОСК) оценки орбиты, сформированной по КСВ (средние графики), а также графики ошибок оценки орбиты, сформированной по "сырым" измерениям.

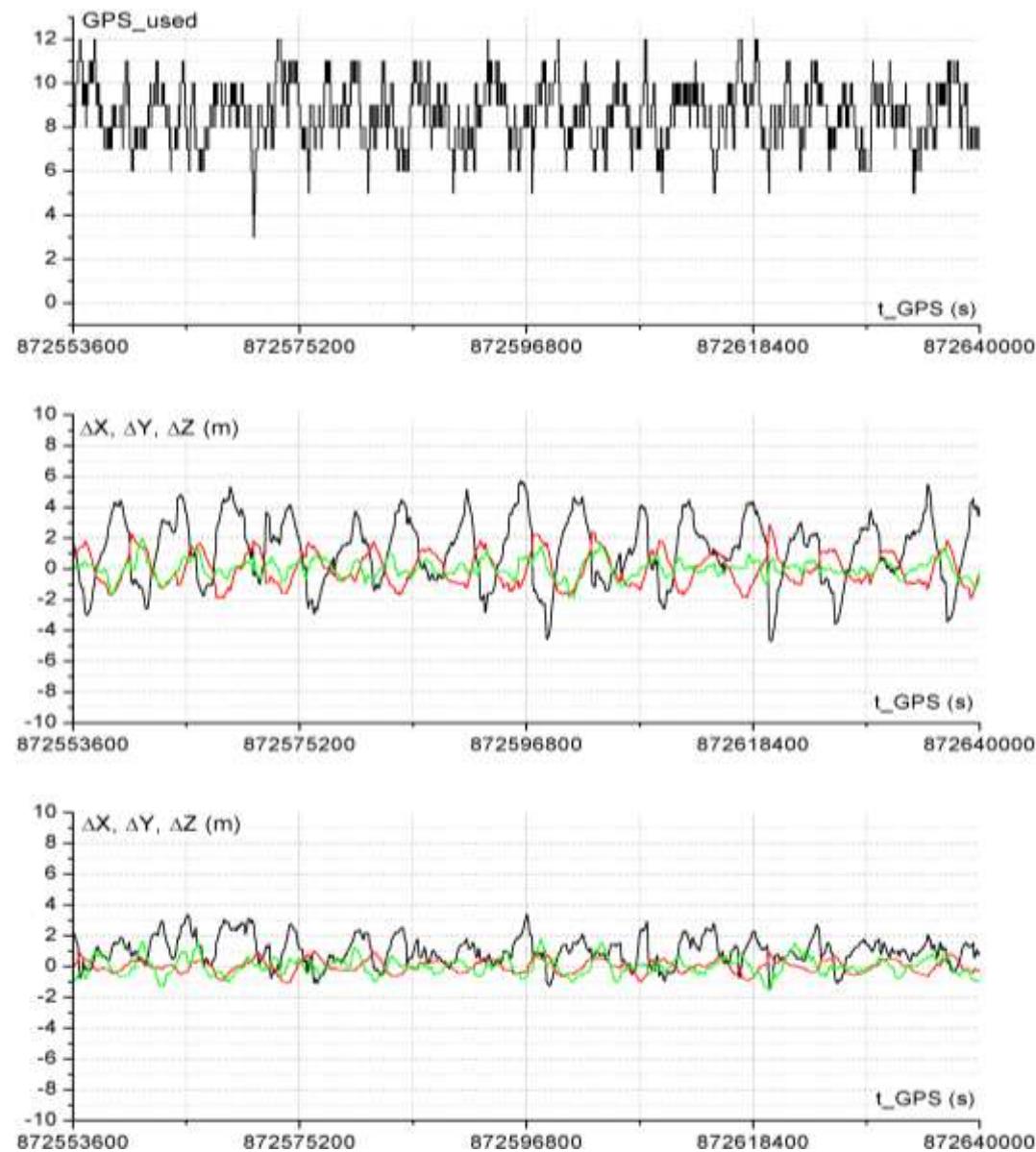


Рис. 9.1 Графики числа НС, ошибок оценки, сформированной по КСВ и ошибок оценки, сформированной по "сырым" измерениям для группировки из 30 НС.

Из приведенных графиков видно, что среднее число "видимых" антенной АСН НС составляло 8-9 спутников, максимальное число НС достигало $11 \div 12$ спутников, минимальное $5 \div 6$ спутников (хотя есть короткий участок, где число НС достигало трех). Для оценки, формируемой по КСВ (средние графики) ошибки по вертикали (ΔY) и боковой дальности (ΔZ) находились в трубке ± 2 м, по продольной дальности – в трубке ± 5 м. Ошибки оценки, формируемой по "сырым" измерениям (нижние графики), в ~ 2 раза меньше ошибок оценки, формируемой по КСВ, то есть, результаты моделирования подтвердили предположение о повышении точности оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям.

Графики, приведенные на рис. 9.1 соответствуют 30 НС в спутниковой группировке. Обычно такое число НС функционирует в системе *GPS*. В системе ГЛОНАСС максимальное число НС в группировке равно 24. Уменьшение числа спутников в группировке приводит к снижению числа одновременно видимых антенной АСН спутников, из-за чего увеличивается уровень *GDOP* и, следовательно, снижается точность формируемых КСВ. Это приводит к снижению точности оценки орбиты, формируемой по КСВ.

На рис. 9.2 для группировки из 24 НС приведены графики, аналогичные графикам, приведенным на рис. 9.1. Из графиков числа НС видно, что среднее число видимых НС составляет ~ 7 спутников, то есть на $1 \div 2$ спутника меньше, чем для группировки из 30 НС. Максимальное число НС составляло $9 \div 10$ спутников, минимальное – $3 \div 5$ спутников. Соответственно, увеличились ошибки оценки орбиты, формируемой по КСВ (см. средние графики). Наблюдаются резкие всплески ошибок: ошибки по продольной дальности достигали величины ~ 20 м, ошибки по вертикали ~ 10 м. Ошибки оценки, формируемой по "сырым" измерениям практически не изменились (см. нижние графики): ошибки по вертикали (ΔY) и боковой дальности (ΔZ) лежат в трубке ± 2 м, по продольной дальности (ΔX) – в трубке ± 4 м.

То есть, точность оценки, формируемой по "сырым" измерениям, для 24 НС примерно в пять раз выше точности оценки, формируемой по КСВ.

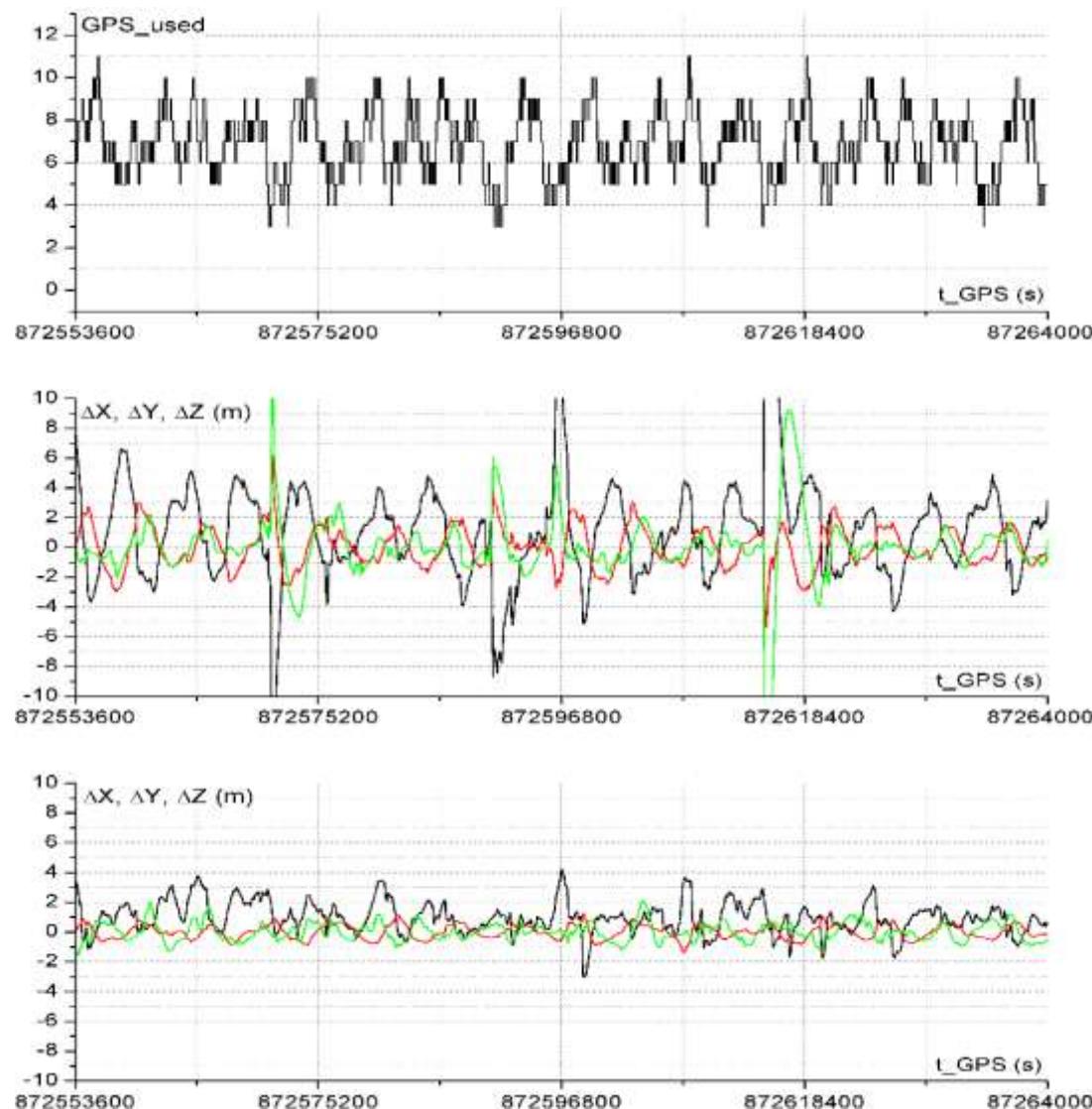


Рис. 9.2 Графики числа НС, ошибок оценки, сформированной по КСВ и ошибок оценки, сформированной по "сырым" измерениям для группировки из 24 НС.

Полученный результат показывает, что для системы ГЛОНАСС, включающей 24 НС, метод динамической фильтрации "сырых" измерений обеспечивает существенное повышение точности формируемой оценки орбиты по сравнению с методом динамической фильтрации КСВ.

Выше были рассмотрены варианты 30 и 24 НС в группировке, что соответствует количеству спутников в системах *GPS* и ГЛОНАСС соответственно. При этом предполагалось, что антенна АСН направлена в зенит, а ее поле зрения близко к полусфере (конус угла при вершине 170°).

В реальности, во-первых – в группировке НС может быть меньшее количество спутников, во-вторых – поле зрения антенны может быть значительно меньше полусферы или существенно затенено элементами конструкции КА, в-третьих – антенна на КА может быть установлена таким образом, что в основном режиме ориентации КА она не направлена в зенит, в-четвертых, КА может иметь ориентацию, при которой антенна не направлена в зенит. Во всех этих случаях число НС, попадающих в поле зрения антенны АСН, может быть значительно меньше, чем в рассмотренных выше случаях. Это может привести к снижению точности формируемых оценок орбиты (как при фильтрации по КСВ, так и при фильтрации по "сырым" измерениям). Ниже приведены результаты исследования точности формируемой оценки (по КСВ и "сырым" измерениям) в условиях пониженного числа НС, попадающих в процессе полёта в поле зрения антенны АСН. Уменьшение числа НС моделировалось путём уменьшения количества спутников в группировке. Были рассмотрены варианты, когда группировка состояла из 16, восьми, и четырех спутников. Графики числа видимых НС, ошибок оценки по КСВ и ошибок оценки по "сырым" измерениям приведены для этих трёх группировок соответственно на рис. 9.3, 9.4, 9.5.

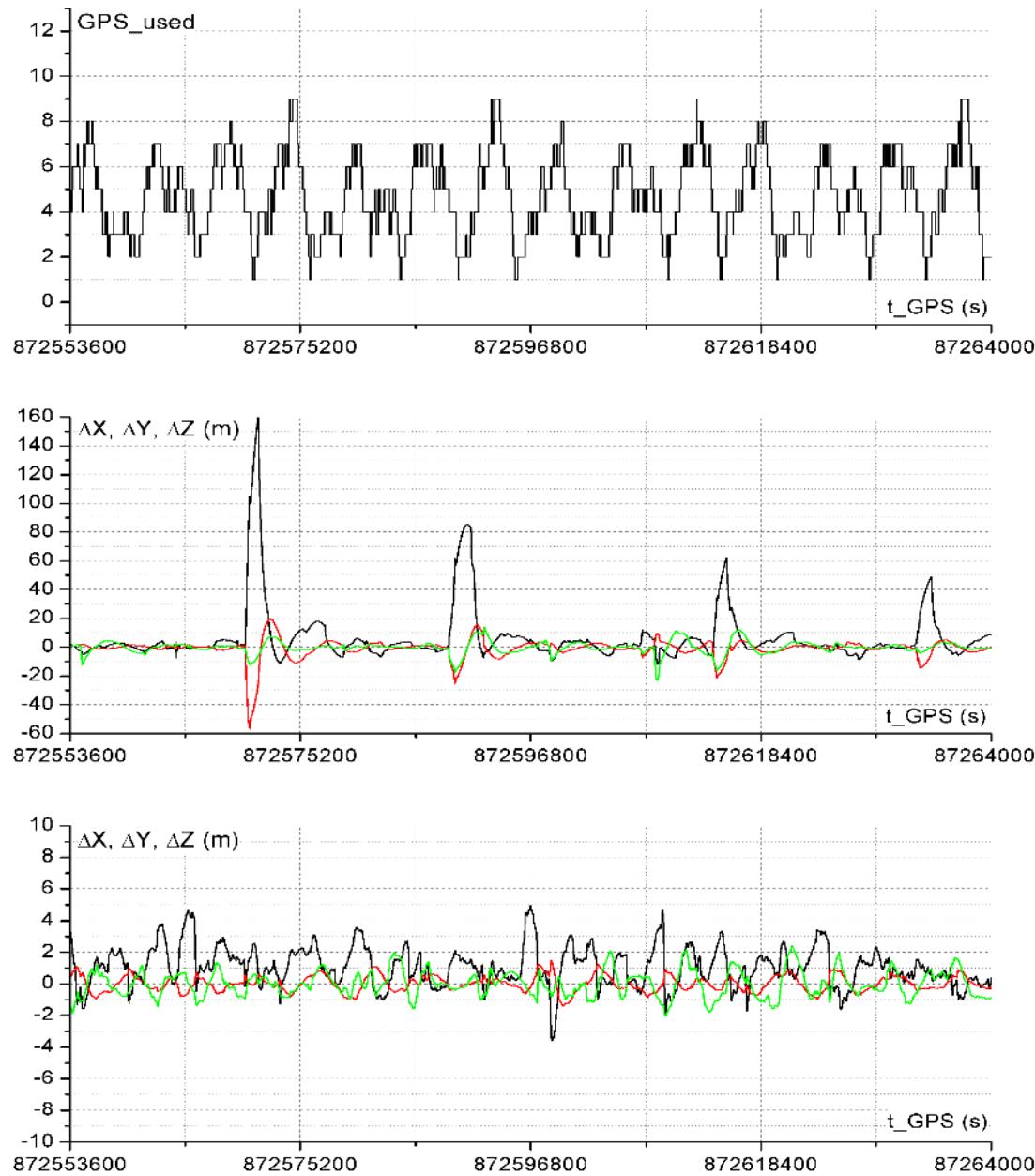


Рис. 9.3 Графики числа НС, ошибок оценки, сформированной по КСВ и ошибок оценки, сформированной по "сырым" измерениям для группировки из 16 НС.

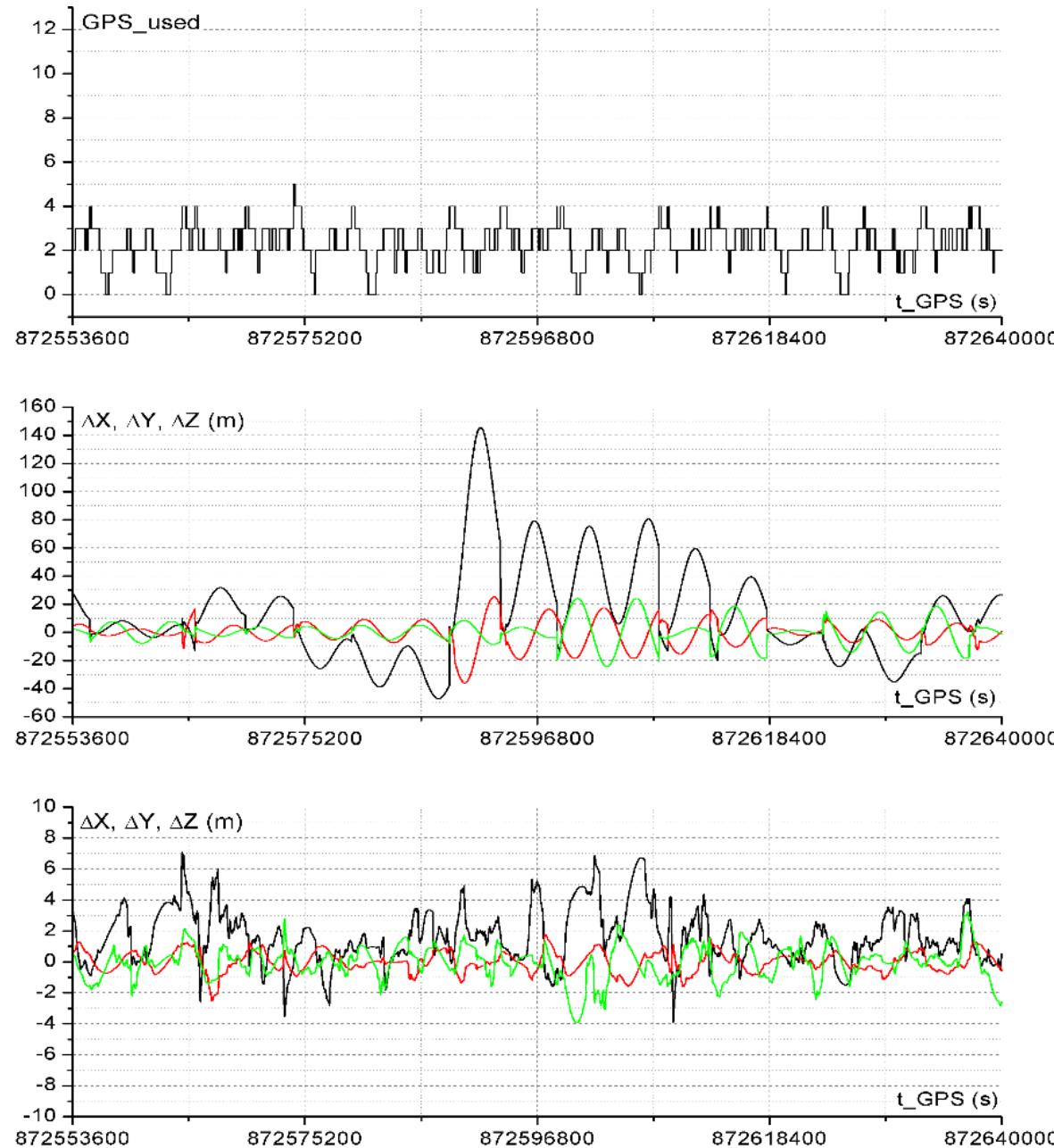


Рис. 9.4 Графики числа НС,
 ошибок оценки,
 сформированной по КСВ и
 ошибок оценки,
 сформированной по "сырым"
 измерениям для группировки из
 восьми НС.

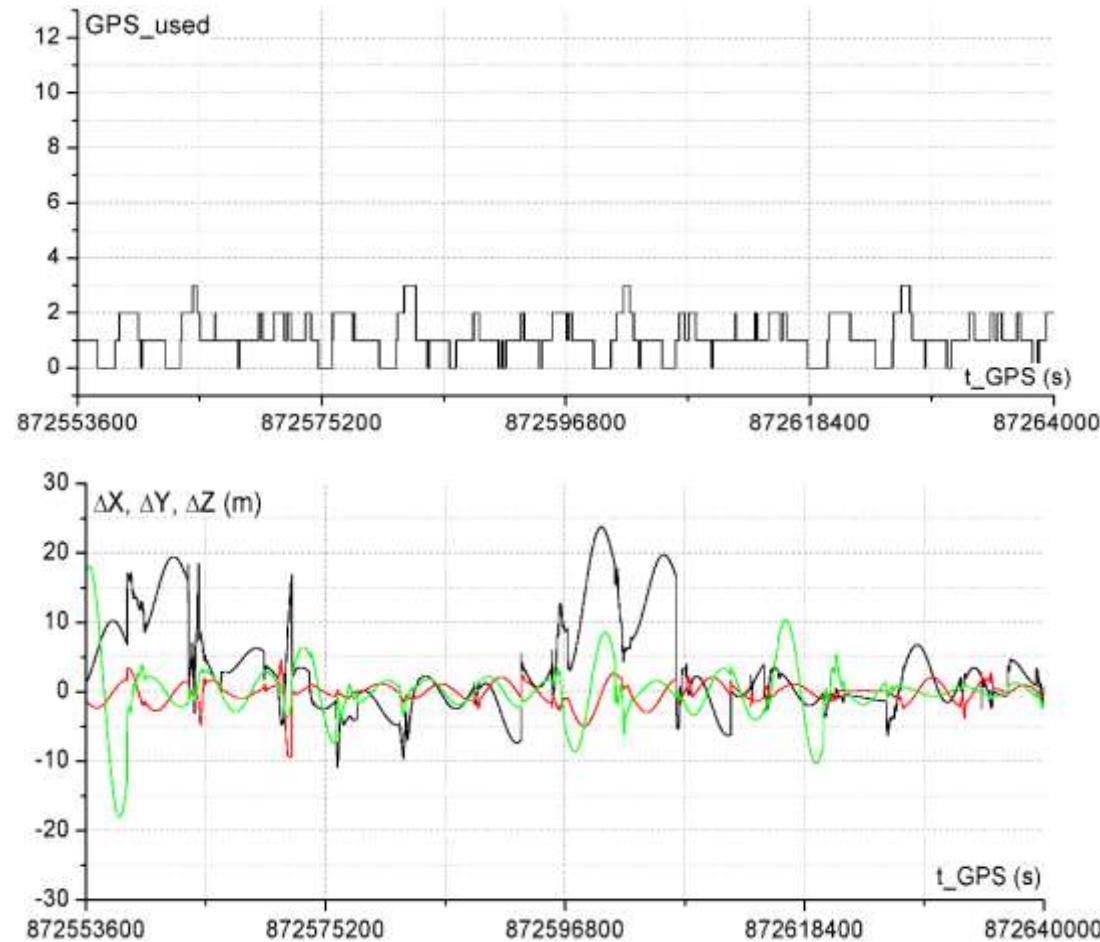


Рис. 9.5 Графики числа НС и ошибок оценки, сформированной по "сырым" измерениям для группировки из четырех НС.

Из приведённых графиков видно, что для группировки из 16 НС среднее число видимых НС составляет 4-5 спутников, максимальное количество – 7-9 спутников, минимальное количество – 1÷3 спутника. Отмечается достаточно много интервалов, на которых число НС меньше четырех. В этих условиях резко возрастают ошибки оценки, формируемой по КСВ. Максимальные ошибки составляют 60÷160 м. Ошибки оценки, формируемой по "сырым"

измерениям не превышают 5 м, то есть, точность оценки, формируемой по "сырым" измерениям, в десятки раз превышает точность оценки, формируемой по КСВ.

Похожий результат наблюдается для группировки из восьми НС. В этом случае среднее число видимых НС составляет 2-3 спутника, максимальное количество – 4 спутника, минимальное – 0÷1 спутник. Длительность интервалов, на которых могут формироваться КСВ, составляет 5-7% от общего времени полета. Тем не менее, формирование оценки орбиты по КСВ выполняется, хотя ошибки этой оценки, также как и в предыдущем случае, достигают величины ~160 м. Оценка орбиты по "сырым" измерениям выполняется с высокой точностью. Ошибки оценки по продольной дальности (ΔX) не превышают семь метров, по вертикали и боковой дальности ($\Delta Y, \Delta Z$) – четыре метра.

Для группировки из четырех НС число видимых НС составляет 1÷2 спутника, максимальное число – три спутника. В этих условиях КСВ не могут быть сформированы, соответственно, не может быть сформирована орбита по КСВ. По "сырым" измерениям оценка орбиты продолжает формироваться и в этом случае, хотя и с меньшей точностью – ошибки оценки достигают 20 м.

Таким образом, результаты проведенного моделирования показали, что точность оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, заметно выше точности оценки, формируемой по КСВ. Разница достигаемой точности существенно зависит от числа НС в группировке навигационных спутников.

Для зенитной антенны АСН примерные значения ошибок формируемых оценок, обусловленные ошибками измерений в зависимости от числа НС в группировке приведены в Таблице 9.1.

Таблица 9.1

Число НС в группировке	Ошибки оценки орбиты, формируемой по КСВ (м)	Ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям (м)
30	4	2
24	20	3
16	160	4
8	160	7
4	-	20

Устойчивость алгоритмов динамической фильтрации по "сырым" измерениям к снижению числа НС в группировке или числа одновременно видимых НС из-за углового маневрирования КА является важным качеством для навигации космических аппаратов. Во-первых, этот алгоритм обеспечивает высокоточную оценку орбиты КА практически при любом количестве отказов спутников в навигационной группировке, во-вторых, высокая точность оценки орбиты обеспечивается при значительном угловом маневрировании КА, приводящим к резкому снижению одновременно видимых НС.

9.3 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля Земли

В разделе 7.3.2 было рассмотрено влияние точности формирования модели гравитационного поля Земли на точность формируемой оценки орбиты по измерениям КСВ. При формировании оценки орбиты по "сырым" измерениям ошибки оценки, обусловленные ошибками модели поля, могут отличаться от соответствующих ошибок оценки, формируемой по КСВ. Поэтому такое исследование путем моделирования было проведено и для оценки, формируемой по "сырым" измерениям. Моделирование проведено для того же участка орбиты МКС, что и моделирование по КСВ.

На рис. 9.6 приведены графики ошибок оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, для модели гравитационного поля Земли, реализуемой в процессе динамической фильтрации порядка 8×8 .

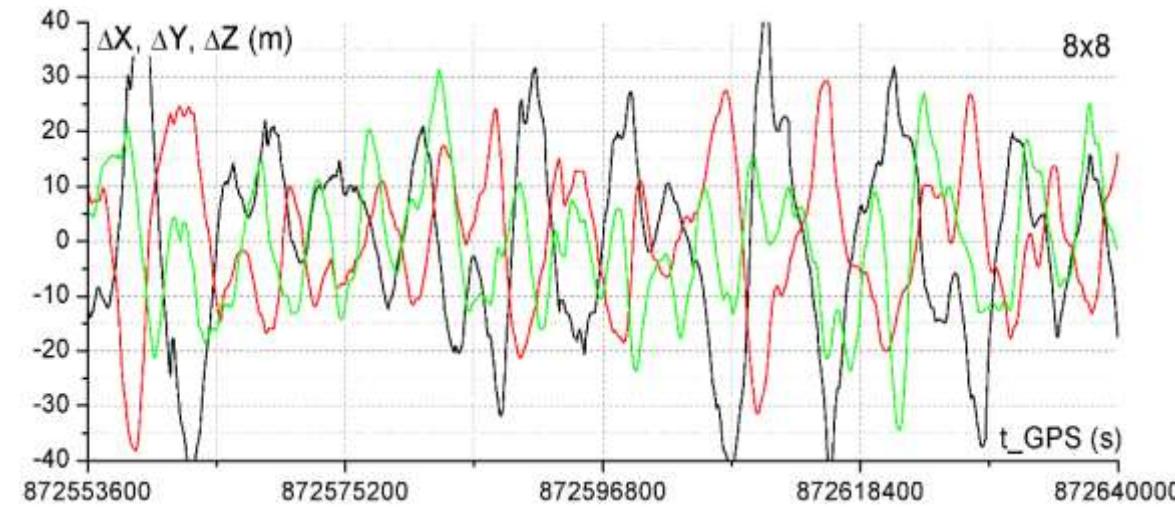


Рис. 9.6 Составляющая ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 8×8 .

Сравнив графики ошибок оценки орбиты по "сырым" измерениям (см. рис. 9.6) с аналогичными графиками ошибок оценки по КСВ (см. рис. 7.15), можно отметить, что оценки по "сырым" измерениям практически совпадают с ошибками оценки по КСВ. При этом они имеют незначительную шумовую составляющую, обусловленную изменениями во времени числа измерений (числа видимых НС) и, соответственно, изменением веса измерений в процессе фильтрации. При исследовании точности оценки по КСВ предполагалось, что измерения КСВ абсолютно точные и непрерывные с частотой 1 Гц. Поэтому вес каждого измерения был одинаков, а графики ошибок оценки – плавные.

Аналогичный результат получен для модели гравитационного поля Земли порядка 36×36 . На рис. 9.7 приведены графики ошибок оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям. Сравнив их с аналогичными графиками ошибок оценки по КСВ (см. рис. 7.16), также можно отметить, что ошибки оценки по "сырым" измерениям практически совпадают с ошибками оценки по КСВ. Следует отметить, что с повышением точности модели поля уменьшилась и шумовая составляющая ошибки оценки.

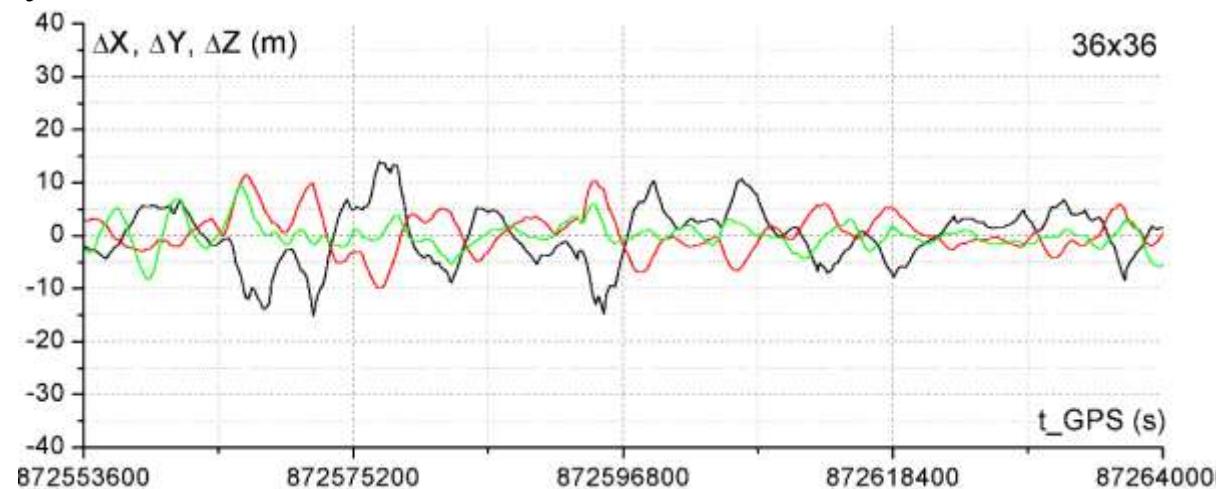


Рис. 9.7 Составляющая ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 36×36 .

На рис. 9.8 приведены графики ошибок оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям для модели гравитационного поля порядка 72×72 .

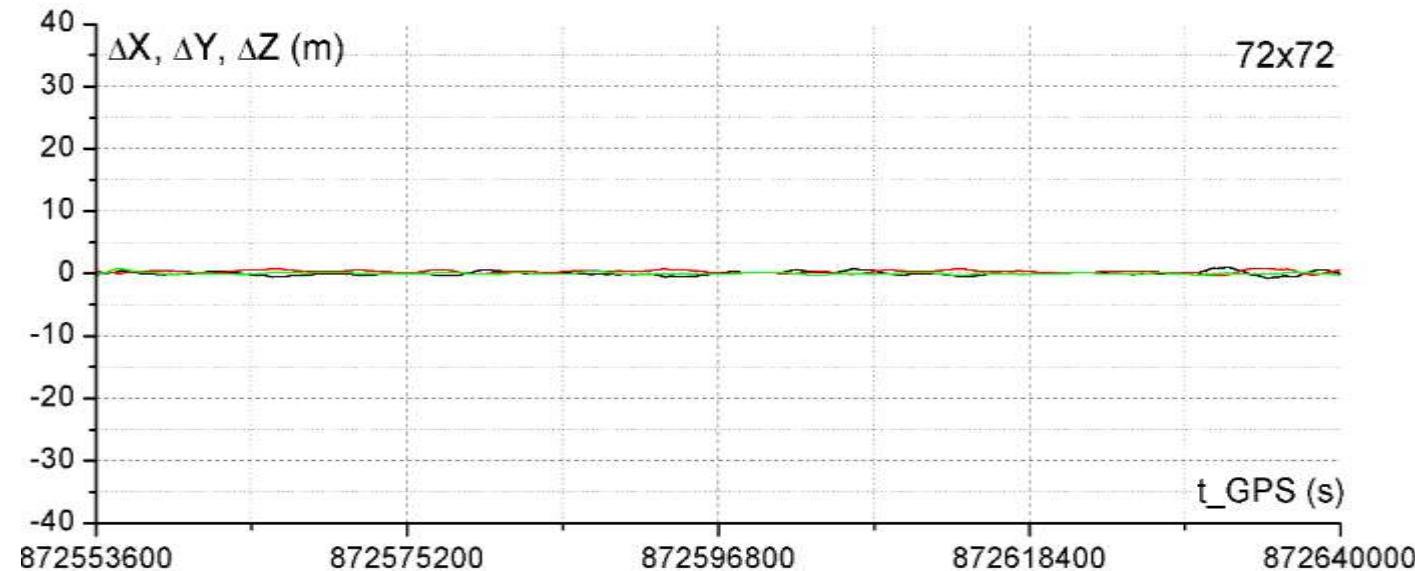


Рис. 9.8 Составляющая ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 72×72 .

Из графиков следует, что ошибки оценки, обусловленные такой моделью поля, не превышают 1 м, что соответствует ошибкам оценки, формируемой по КСВ (см. рис. 7.17), практически исчезла шумовая составляющая ошибки оценки, наблюдавшаяся выше для моделей гравитационного поля Земли порядка 8×8 и 36×36 .

9.4 Зависимость точности формируемой оценки орбиты от аэродинамического торможения КА

Для низкоорбитальных КА аэродинамическое торможение является вторым по степени влияния на орбиту КА возмущающим фактором. Оно существенно превышает по величине возмущения от Луны и Солнца, от смещения полюса Земли и т.п. К тому же, как отмечалось выше, это возмущение моделируется и прогнозируется с большой ошибкой, из-за которой учет более мелких возмущающих факторов теряет всякий смысл. В разделе 7.3.3 рассмотрено влияние аэродинамического торможения на точность оценки орбиты, формируемой по КСВ (см. рис. 7.18). Анализ проведен путем моделирования, в котором аэродинамическое торможение задавалось в виде средней константы величиной 10^{-6} м/с², на которую наложена синусоидальная модуляция амплитудой $0,5 \cdot 10^{-6}$ м/с² и частотой 1 виток. Выбранная величина среднего аэродинамического торможения соответствует максимальному значению аэродинамического торможения МКС. Модуляция среднего значения имитирует повышение аэродинамического торможения на светлой части орбиты и его уменьшение на затененной части орбиты. В результате такой модуляции аэродинамическое торможение в тени, оказывается, по величине в четыре раза меньше, чем на свету, что примерно соответствует перепадам плотности атмосферы в тени и на свету (см. Таблицу 2.3).

Подобное моделирование для этого же представления аэродинамического торможения проведено и для алгоритмов формирования оценки орбиты по "сырым" измерениям. На рис. 9.9 приведены графики ошибок оценки орбиты относительно ОСК. Из графиков видно, что аэродинамическое торможение обуславливает ошибку по продольной дальности ΔX величиной ~ 20 м, по вертикали ΔY величиной ~ 15 м. Если при формировании по КСВ на эти средние

значения ошибок была наложена синусоидальная составляющая амплитудой ~ 2 м, а по боковой дальности ΔZ ошибка была практически нулевой (см. рис. 7.18), то в данном случае для оценки по "сырым" измерениям на составляющие ошибок по всем трем осям наложена еще и шумовая составляющая амплитудой ~ 5 м. Эта шумовая составляющая обусловлена переменным весом измерений, из-за изменения числа видимых НС в процессе полёта КА.

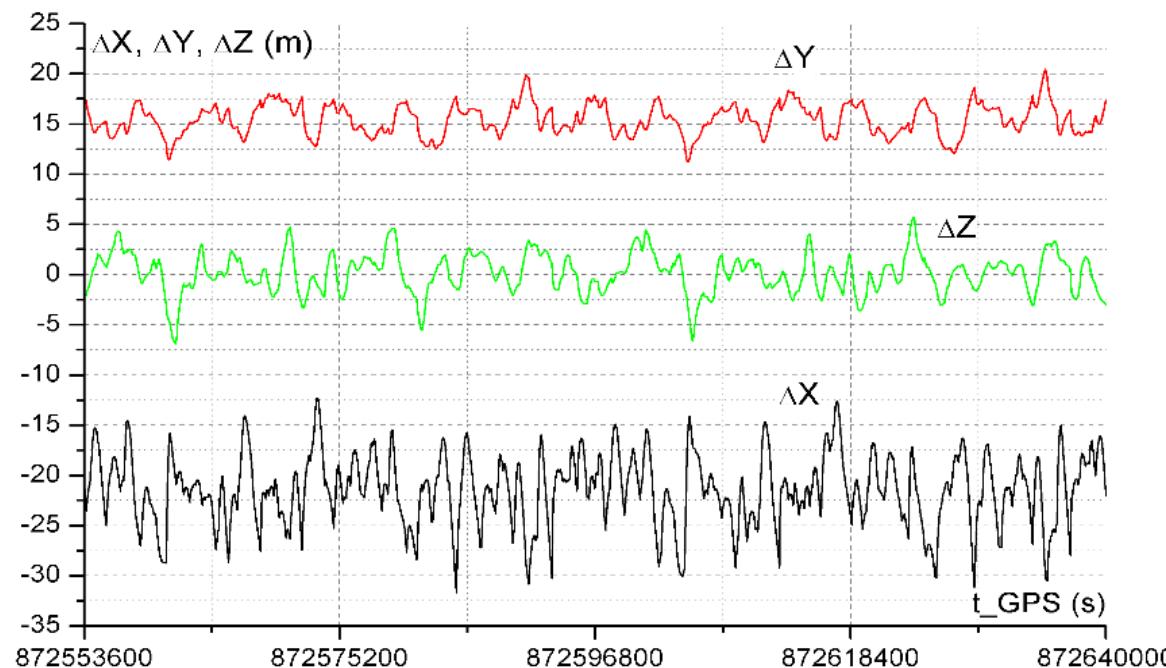


Рис. 9.9 Составляющие ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям без аэродинамической составляющей, обусловленные аэродинамическим торможением МКС в атмосфере Земли.

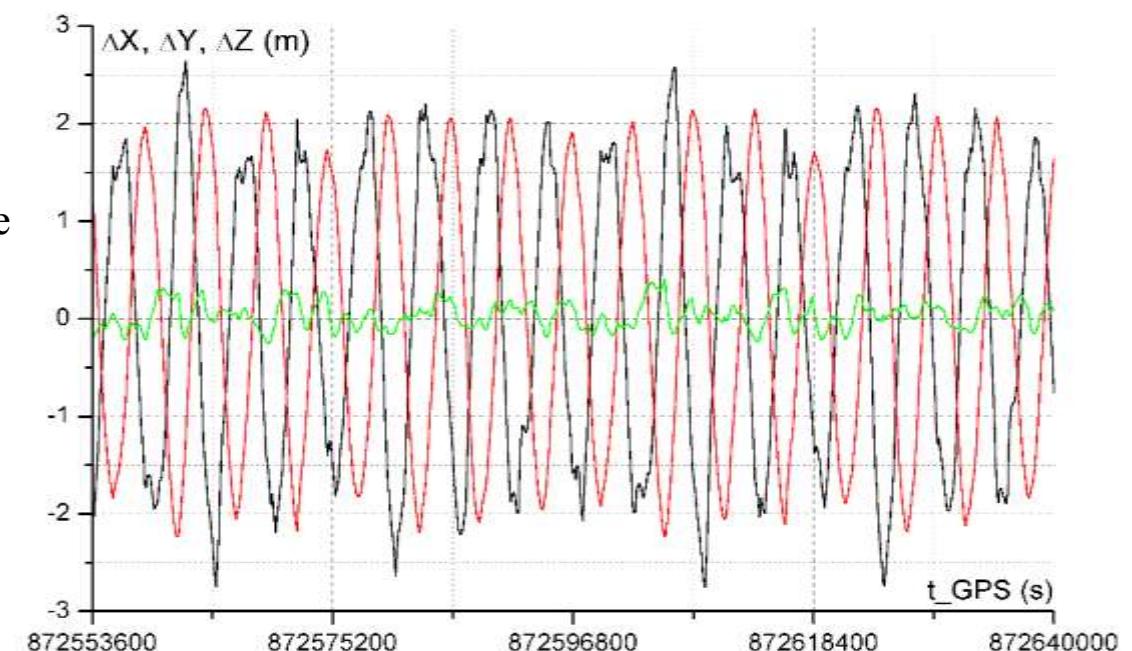
Рассмотренные в разделе 4.4 алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение позволили исключить постоянное смещение ошибок оценки орбиты по осям X и Y , обусловленных аэродинамическим

торможением (см. рис. 7.23). В результате, ошибки оценки орбиты по осям X и Y представляли собой синусоиды амплитудой ~ 2 м и частотой виток. Составляющая ошибки по оси Z оставалась нулевой.

При выводе алгоритмов динамической фильтрации по "сырым" измерениям (см. раздел 7.4) аэродинамическое торможение изначально было введено в исходный вектор состояния (9.4). Поэтому при реализации этих алгоритмов автоматически выполняется оценка величины аэродинамического торможения и его компенсация в модели движения КА. Благодаря этому существенно снижается величина аэродинамической составляющей ошибки оценки орбиты.

На рис. 9.10 приведены графики аэродинамических ошибок оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение.

Рис. 9.10 Составляющие ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям с аэродинамической компенсацией, обусловленные аэродинамическим торможением МКС в атмосфере Земли.



Также, как и при формировании оценки орбиты по КСВ, для оценки по "сырым" измерениям ошибки оценки по осям X и Y близки к синусоидам амплитудой ~ 2 м, ошибки по оси Z не превышают 0,3 м. На эти ошибки также наложена шумовая составляющая амплитудой $\sim 0,3$ м, обусловленная изменением во времени числа измерений (числа видимых НС). Учитывая малость величины шумовой составляющей, можно считать, что при динамической фильтрации по "сырым" измерениям с аэродинамической самонастройкой ошибки формируемой оценки орбиты соответствуют ошибкам оценки орбиты, формируемой по КСВ.

9.5 Влияние на точность формируемой оценки орбиты гравитационных возмущений от Луны и Солнца, солнечного давления, параметров вращения Земли

В разделе 7.3 проведено исследование зависимости точности оценки орбиты, формируемой по КСВ, от гравитационного воздействия Луны и Солнца, сил солнечного давления и параметров вращения Земли. В предыдущих разделах рассмотрено влияние ошибок моделей гравитационного поля Земли и аэrodинамического торможения на точность оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, а также проведено сравнение полученных результатов с аналогичными результатами для оценки орбиты, формируемой по КСВ. Было установлено, что ошибки оценки орбиты, формируемой по "сырым" измерениям, близки к ошибкам оценки, формируемой по КСВ, с той лишь разницей, что при формировании оценки по "сырым" измерениям ошибки оценки, обусловленные соответствующими возмущениями, имеют шумовую составляющую по амплитуде на порядок меньшую основной составляющей ошибки. Отличие ошибок оценки орбиты по "сырым" измерениям, обусловленных влиянием всех рассматриваемых мелких возмущений от соответствующих составляющих ошибок

оценки орбиты по КСВ аналогично – на основную составляющую ошибки накладывается шумовая составляющая, существенно меньшая по величине по сравнению с основной составляющей. Но, так как рассматриваемые составляющие ошибок оценки сами по себе малы, то шумовыми составляющими этих ошибок можно пренебречь. Поэтому будем считать, что и при формировании оценки орбиты по "сырым" измерениям составляющие ошибок оценки, обусловленные влиянием Луны и Солнца, силами солнечного давления, параметрами вращения Земли аналогичны ошибкам оценки, формируемой по КСВ. Графики этих ошибок приведены, соответственно, на рис. 7.19, 7.20, 7.21 и 7.22.

Глава 10 Формирование оценки орбиты в приращениях с учетом измерений БИНС и коррекцией оценки по полным "сырым" измерениям АСН

В предыдущих главах рассматривались алгоритмы формирования оценки орбиты по измерениям координат и по измерениям псевдодальностей. Эти алгоритмы разработаны применительно к АСН-М МКС, находящейся в пассивном полете. Они обеспечивают формирование высокоточной оценки орбиты МКС как по координатам, так и по скорости, что демонстрируют графики, приведенные на рис. 8.6. Высокая точность этих алгоритмов достигается за счет высокоточного моделирования уравнений движения КА при фильтрации измерений с большой постоянной времени ($T = 5500$ с). Однако, такая постоянная времени может быть реализована только на пассивных КА, движение которых моделируется с высокой точностью. На динамичных КА, у которых часто работают двигатели, на любых КА при коррекции орбиты, а также на участках орбиты КА, где действуют большие возмущающие ускорения (например, при спуске в атмосфере), большие постоянные времена недопустимы. При уменьшении постоянной времени точность оценки существенно снижается как по координатам, так и по скорости. Например, графики, приведенные на рис. 8.13 и 8.14, демонстрируют ошибки оценки орбиты МКС по координатам и скорости, формируемой при разных значениях постоянной времени. Графики показывают, что существенное повышение точности оценки орбиты достигается при постоянных времени фильтра $T > 1000$ с. А при малых постоянных времени (при $T = 30$ с) точность оценки по координатам остается такой же, как и точность измерений АСН, а точность оценки по скорости даже значительно ухудшается по сравнению с точностью измерений скорости. Это объясняется тем, что вектор измерений, реализуемый в рассмотренных алгоритмах, включает только измерения АСН по координатам или по псевдодальности, тогда как для динамичных объектов, допускающих фильтрацию

измерений только с малой постоянной времени, повышение точности оценки может быть достигнуто за счет включения скорости в состав вектора измерений или приращений интегральных фаз, в случае фильтрации "сырых" измерений АСН.

В предыдущей главе было показано также, что динамическая фильтрация псевдодальностей имеет целый ряд преимуществ по сравнению с динамической фильтрацией векторов координат, формируемых АСН. Это и более высокая точность формируемой оценки орбиты, независимость от числа НС и геометрического фактора $GDOP$, возможность формирования оценки орбиты высокоорбитальных КА. Поэтому в настоящей главе будем рассматривать динамическую фильтрацию не по координатам и скорости, а по полному составу "сырых" измерений АСН – это псевдодальности и приращения интегральных фаз сигналов НС. Здесь следует отметить, что приращения интегральных фаз за такт работы АСН (за 1 с внутренних часов АСН) определяют приращение вектора координат КА. Поэтому при динамической фильтрации полного состава "сырых" измерений АСН удобно в качестве вектора состояния КА использовать вектор координат и вектор приращения координат за такт работы АСН. В этом случае измеряемые псевдодальности непосредственно обеспечивают измерение вектора координат КА, а измеряемые приращения интегральных фаз – измерения вектора приращений координат КА. Рассмотрим алгоритмы динамической фильтрации полного состава "сырых" измерений АСН.

10.1 Алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальностей и интегральных фаз

Пусть в данный момент t_i созвездие достоверно отслеживаемых НС состоит из n спутников. В качестве текущего вектора измерений будем использовать $2n$ -мерный вектор:

$$\bar{\xi}_u = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{u1} \\ \bar{\xi}_{u2} \end{pmatrix}, \quad (10.1)$$

где $\bar{\xi}_{u1}, \bar{\xi}_{u2}$ – n -мерные векторы измерений, соответствующие измерениям псевдодальностей и интегральных фаз:

$$\bar{\xi}_{u1} = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ PR_2 - PR_3 \\ \cdots \\ PR_n - PR_1 \end{pmatrix} \quad \text{– } n\text{-мерный вектор попарных разностей псевдодальностей} \\ \bar{\xi}_{u2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1 - \Delta CP_2 \\ \Delta CP_2 - \Delta CP_3 \\ \cdots \\ \Delta CP_n - \Delta CP_1 \end{pmatrix} \quad \text{– } n\text{-мерный вектор попарных разностей приращений интегральных фаз} \\ \text{на } i\text{-м такте измерений АСН.} \quad (10.2)$$

Пусть также имеется оценка вектора состояния КА $\bar{\xi}^*$ на момент времени t_i .

$$\bar{\xi}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_i^* \\ \Delta \bar{X}_i^* \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Для низкоорбитальных КА эта оценка может быть сформирована, например, по измерениям КСВ АСН в момент t_i :

$$\bar{\xi}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_{KCB} \\ \bar{V}_{KCB} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

По известной оценке вектора состояния КА $\bar{\xi}_i^*$ и по известным векторам координат и скорости НС, формируемым по соответствующим эфемеридам, легко может быть определена оценка $2n$ -мерного вектора измерений:

$$\bar{\xi}_u^* = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ \hline PR_n^* - PR_1^* \\ \Delta CP_1^* - \Delta CP_2^* \\ \hline \Delta CP_n^* - \Delta CP_1^* \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

где $PR_i^*, \Delta CP_i^*$ – оценки соответственно псевдодальностей и приращений интегральных фаз, полученные по оценке вектора состояния $\bar{\xi}_i^*$ и эфемеридам НС.

Пусть также $\bar{X}, \Delta \bar{X}$ – истинные значения составляющих истинного вектора состояния, равного:

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \Delta \bar{X} \end{pmatrix} \quad (10.6)$$

Введем векторы ошибок вектора состояния и вектора измерений в i -й момент времени:

$$\begin{aligned}\delta\bar{\xi}_i &= \bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i^*; \\ \delta\bar{\xi}_{ui} &= \bar{\xi}_{ui} - \bar{\xi}_{ui}^*\end{aligned}\tag{10.7}$$

Если пренебречь собственно ошибками измерений, предположив, что этот вектор в АСН измеряется точно, то можно записать систему уравнений, аналогичную системе уравнений (9.10), связывающую ошибки вектора состояния с ошибками вектора измерений:

$$\delta\bar{\xi}_{ui} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \delta\bar{\xi}_i = C_0 \delta\bar{\xi}_i, \tag{10.8}$$

где $C_0 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ – матрица размерности $2n \times 6$;

0 – нулевая матрица размерности $n \times 3$.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}^*)^T}{D_1^*} & \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}^*)^T}{D_2^*} \\ \hline \dots & \dots \\ \frac{(\bar{X}_n - \bar{X}^*)^T}{D_n^*} & \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}^*)^T}{D_1^*} \end{pmatrix}$$

– известная матрица направляющих косинусов, размерности $n \times 3$,
где \bar{X}_j – координаты j -го НС, определяемого по эфемеридам;
 \bar{X}^* – оценка координат КА; $D_j^* = |\bar{X}_j - \bar{X}^*|$

В уравнении (10.8) предполагается, что измерения псевдодальностей и интегральных фаз достоверны для всех n спутников видимого созвездия. Поэтому матрица C_0 состоит из двух одинаковых матриц C .

Первые n уравнений системы (10.8) определяют связь между ошибками оценки координат и ошибками псевдодальностей, вторые n уравнений – связь между ошибками оценки приращений координат и ошибками измерений приращений интегральных фаз. Чтобы обе системы были равноценными, целесообразно привести их к безразмерному виду. Пусть мы рассматриваем КА, средний радиус орбиты которого равен R_0 , а круговая скорость для орбиты радиуса R_0 равна:

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}} \quad (10.9)$$

Тогда введем безразмерные вектор состояния и вектор измерений, а также оценки этих векторов:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \Delta\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ R_0 \\ \Delta\bar{X} \\ V_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}^* = \begin{pmatrix} \bar{x}^* \\ \Delta\bar{x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}^* \\ R_0 \\ \Delta\bar{X}^* \\ V_0 \end{pmatrix} \\ \bar{\xi}_u &= \begin{pmatrix} \bar{x}_{u1} \\ \bar{x}_{u2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{u1} \\ R_0 \\ \bar{\xi}_{u2} \\ V_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}_u^* = \begin{pmatrix} \bar{x}_{u1}^* \\ \bar{x}_{u2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{u1}^* \\ R_0 \\ \bar{\xi}_{u2}^* \\ V_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.10)$$

В принятых обозначениях вид системы уравнений (10.8) для i -го измерения не изменяется, а уравнения связи для координат и скорости равноценны и имеют одинаковый вес.

Для m измерений системы уравнений, связывающая векторы ошибок измерений $\delta\bar{\xi}_u$ с ошибками оценки орбиты, примет вид:

$$\begin{aligned}\delta\bar{\xi}_{u1} &= C_{01}\delta\bar{\xi}_1 \\ &\cdots \\ \delta\bar{\xi}_{um} &= C_{0m}\delta\bar{\xi}_m\end{aligned}\tag{10.11}$$

Система уравнений (10.11), связывающая ошибки измерений псевдодальностей и интегральных фаз с искомым вектором состояния, имеет такой же вид, как и система (9.10) для измерений только псевдодальностей. Поэтому рекуррентный алгоритм решения этой системы аналогичен алгоритму (9.11) решения системы (9.10) для измерений псевдодальностей и имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= C_{0m+1}^T \left(\bar{\xi}_{um+1} - \hat{\xi}_{um+1}^* \right), \\ W_{m+1} &= B_{mm+1}^{-1T} \lambda W_m \lambda B_{mm+1}^{-1} + C_{0m+1}^T C_{0m+1}, \\ \delta\bar{\xi}_{m+1}^* &= W_{m+1}^{-1} \bar{P}, \\ \bar{\xi}_{m+1}^* &= \hat{\xi}_{m+1}^* + \delta\bar{\xi}_{m+1}^*,\end{aligned}\tag{10.12}$$

где \bar{P} – промежуточный вектор размерности 6;

W_i – накапливаемая матрица размерности 6×6 . На нулевом шаге эта матрица равна 0;

$\bar{\xi}_{um+1}$ – вектор измерения на $m+1$ -м шаге;

$\hat{\xi}_{m+1}^*$ – оценка вектора состояния на $m+1$ -м шаге, полученная из вектора состояния $\bar{\xi}_m^*$, сформированного на m -ом шаге, путем прогноза на $m+1$ -й шаг;

$\hat{\xi}_{m+1}^*$ – оценка вектора измерения на $m+1$ -м шаге, полученная из оценки вектора состояния $\hat{\xi}_{m+1}^*$.

Коэффициент λ в алгоритме (9.11) определяется постоянной времени фильтра T :

$$\lambda = \frac{T}{T+1} \quad (10.13)$$

Эта постоянная времени одинакова для всех измерений псевдодальностей. В нашем случае динамической фильтрации измерений псевдодальностей и интегральных фаз целесообразно ввести две постоянные времени: T_x – постоянная времени для измерения псевдодальностей и T_v – постоянная времени для измерений интегральных фаз. Этим постоянным времени соответствуют два коэффициента λ :

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \frac{T_x}{T_x + 1}; \\ \lambda_v &= \frac{T_v}{T_v + 1}.\end{aligned} \quad (10.14)$$

Тогда λ в уравнении (10.12) будет представлять собой матрицу:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_x \cdot E & 0 \\ 0 & \lambda_v \cdot E \end{pmatrix}, \quad (10.15)$$

где E – единичная матрица размерности 3×3 ;

0 – нулевая матрица размерности 3×3 .

Матрица B_{mm+1} в алгоритме (10.13) представляет собой матрицу (размерности 6×6) преобразования ошибок вектора состояния на шаге m к ошибкам на шаге $m+1$:

$$B_{mm+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m}. \quad (10.16)$$

В предыдущих разделах, когда в качестве вектора состояния рассматривались векторы координат \bar{X} и скорости \bar{V} , эта матрица формировалась путем семикратного интегрирования вектора состояния от шага m к шагу $m+1$ с последовательным варьированием вектора $\bar{\xi}_m$. Интегрирование выполнялось методом Рунге-Кутта четвертого порядка и требовало на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнений движения (вектора возмущающих ускорений). После формирования этой матрицы размерности 6×6 требовалось вычисление ее обратной матрицы, что также требовало значительных вычислительных ресурсов. При использовании вектора состояния в приращениях $(\bar{X}, \Delta\bar{X})$ формирование матрицы B_{mm+1} существенно упрощается, так как она может быть представлена в явном виде. Рассмотрим алгоритмы формирования матрицы преобразования ошибок вектора состояния B_{mm+1} и обратной матрицы B_{mm+1}^{-1} . Алгоритмы прогноза вектора координат и вектора приращений координат с шага m на шаг $m+1$ в соответствии с (3.72) имеют вид:

$$\Delta\bar{X}_{m+1} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2)\Delta\bar{X}_m - (E + \Omega)\Omega^2\bar{X}_m + (E + \Omega)A_{H-G}\bar{a}_m, \quad (10.17)$$

$$\bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta\bar{X}_{m+1},$$

где \bar{X} – вектор координат КА относительно ГСК;

$\Delta\bar{X}$ – вектор приращения координат КА за шаг относительно ГСК;

E – единичная матрица размерности 3×3 ;

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \Delta t - \text{матрица поворота Земли за такт } \Delta t;$$

ω_z – угловая скорость вращения Земли;

$A_{И-Г}$ – текущая матрица перехода от ИСК БИНС к ГСК;

\bar{a} – вектор ускорений КА в ИСК БИНС.

Вектор \bar{a}_i определяется по формуле:

$$\bar{a}_m = \bar{a}_{\Gamma_m} \Delta t^2 + \bar{a}_{I_m} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{\Gamma_m} \Delta t^4 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{I_m} \Delta t^4, \quad (10.18)$$

где \bar{a}_{Γ_m} – суммарный вектор гравитационных возмущений, действующих на КА;

\bar{a}_{I_m} – вектор инерциальных возмущений, измеряемых БИНС.

В равенстве (10.18) векторы \bar{a}_Γ и $\ddot{\bar{a}}_\Gamma$ являются функциями координат КА, векторы \bar{a}_n и $\ddot{\bar{a}}_n$ – измеряются БИНС и не являются функциями вектора состояния. Для выполнения точного прогноза вектора состояния вектор \bar{a}_Γ должен рассчитываться с высокой точностью. Однако при вычислении матрицы B_{mm+1} он может быть представлен приближенно относительно ГСК в виде:

$$\bar{a}_\Gamma = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}, \quad (10.19)$$

где $r = |\bar{X}|$

Вектором $\ddot{\bar{a}}_\Gamma$ при вычислении матрицы B_{mm+1} ввиду его малости можно пренебречь. Тогда для вычисления матрицы B_{mm+1} зависимость вектора состояния $\bar{\xi}_{m+1}$ на $m+1$ -м шаге от его значений на m -м шаге может быть представлена в виде:

$$\Delta \bar{X}_{m+1} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta \bar{X}_m - (E + \Omega)\Omega^2 \bar{X}_m - (E + \Omega) \frac{\mu}{r^3} \bar{X}_m \Delta t^2; \quad (10.20)$$

$$\bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta \bar{X}_{m+1}.$$

Для перехода к безразмерным параметрам движения \bar{x} и $\Delta \bar{x}$ в алгоритме (10.22) сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= R_0 \bar{x} \\ \Delta \bar{X} &= V_0 \Delta t \Delta \bar{x} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Подставив значения векторов \bar{X} и $\Delta \bar{X}$ из (10.21) в соотношения (10.20), получим уравнения связи между безразмерными составляющими вектора состояния \bar{x} и $\Delta \bar{x}$ на $m+1$ -м и m -м шагах:

$$\begin{aligned} \Delta x_{m+1} &= (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta x_m - \frac{R_0}{V_0 \Delta t} (E + \Omega) \Omega^2 \bar{x}_m - \frac{\mu}{V_0 R_0^2} (E + \Omega) \frac{\bar{x}_m}{r_0^3} \Delta t; \\ \bar{x}_{m+1} &= \bar{x}_m + \frac{V_0}{R_0} \Delta \bar{x}_{m+1} \Delta t, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где

$$r_0 = |\bar{x}_i|$$

Обозначим:

$$\omega_0 = \frac{V_0}{R_0} = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} \quad (10.23)$$

Тогда соотношения (10.22) могут быть представлены в виде:

$$\Delta \bar{x}_{m+1} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta x_m - \frac{1}{\omega_0 \Delta t} (E + \Omega) \Omega^2 \bar{x}_m - \omega_0 (E + \Omega) \frac{\bar{x}_m}{r_0^3} \Delta t; \quad (10.24)$$

$$\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_m + \omega_0 \Delta \bar{x}_{m+1} \Delta t.$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial \Delta x_m}, \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial x_m}, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \Delta x_m}, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_m}.$$

Из уравнений (10.24) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} &= (E + 2\Omega + 2\Omega^2); \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} &= -\frac{1}{\omega_0 \Delta t} (E + \Omega) \Omega^2 - \omega_0 \left(\frac{E + \Omega}{r_0^3} \right) \left(E - 3 \frac{x_m \bar{x}_m^T}{r_0^2} \right) \Delta t; \\ \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} &= \omega_0 (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta t; \\ \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} &= E + \omega_0 \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial x_m} \Delta t. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Тогда матрица B_{mm+1} будет равна:

$$B_{mm+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \omega_0 \Delta t \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \omega_0 \Delta t (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & E + 2\Omega + 2\Omega^2 \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

Матрица $\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m}$, входящая в состав матрицы B_{mm+1} , определяется вторым равенством соотношений (10.25).

Матрица B_{mm+1} может быть представлена в виде суммы единичной матрицы E размерности 6×6 и малой матрицей δB_{mm+1} , максимальные значения компонент которой имеют порядок $\omega_0 \Delta t (\sim 10^{-3})$. Для этих матриц можно записать соотношение:

$$\delta B_{mm+1} = B_{mm+1} - E \quad (10.27)$$

С точностью до величин ω_0^3 обратная матрица B_{mm+1}^{-1} будет равна:

$$B_{mm+1}^{-1} = E - \delta B_{mm+1} + \delta B_{mm+1} \cdot \delta B_{mm+1} \quad (10.28)$$

Соотношения (10.25), (10.26), (10.28) определяют алгоритм формирования матрицы B_{mm+1}^{-1} , которая в данном случае вычисляется в явном виде. То есть, при динамической фильтрации вектора состояния КА, выраженного через вектор координат \bar{X} и вектор приращений координат $\Delta \bar{X}$, матрица преобразования ошибок B_{mm+1}^{-1} вычисляется в явном виде, как функция координат КА. Для ее формирования не требуется проводить семикратное численное интегрирование уравнений движения, а также выполнять вычисление обратной матрицы размерности 6×6 . Это позволяет более чем в 20 раз уменьшить объем вычислений, необходимых для ее формирования, что чрезвычайно важно для реализации динамической фильтрации в реальном времени на борту КА с использованием бортовых вычислительных средств.

Анализ результатов фильтрации "сырых" измерений (10.12), полученных как на моделирующем стенде, так и в реальном полете МКС, показал, что при больших постоянных времени фильтра T_x и T_v достигается высокая точность формируемой оценки орбиты КА. При

этом формируемая оценка практически совпадает с оценкой, полученной при фильтрации по алгоритму (9.11), реализуемому без использования измеренных приращений интегральных фаз. Наличие возмущающих ускорений, неучтенных в алгоритмах прогноза орбиты, приводит к значительным ошибкам формируемой оценки. Уменьшение постоянных времени приводит к значительному снижению влияния возмущающих ускорений на точность оценки, что будет показано ниже. Однако одновременно возрастает влияние шумов псевдодальностей на точность формируемой оценки скорости. Проведенный анализ показал, что это влияние может быть значительно снижено путем сглаживания измеренных псевдодальностей измеренными приращениями фазы. Такое сглаживание обеспечивается путем "смешивания" с определенными весовыми коэффициентами измеренных псевдодальностей и приращений интегральных фаз. В этом случае несколько изменится алгоритм формирования вектора измерений $\bar{\xi}_u$ и его оценки $\bar{\xi}_u^*$. В рассмотренном выше варианте фильтра эти векторы формировались в соответствии с алгоритмом (10.10). В модифицированном фильтре эти алгоритмы имеют вид:

$$\bar{\xi}_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u1}}{R_0} + \frac{T_p - 1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u2}}{V_0} \omega_0 \\ \bar{\xi}_{u2} \\ \frac{V_0}{V_0} \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_u^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u1}^*}{R_0} + \frac{T_p - 1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u2}^*}{V_0} \omega_0 \\ \bar{\xi}_{u2}^* \\ \frac{V_0}{V_0} \end{pmatrix}, \quad (10.29)$$

где T_p – постоянная времени сглаживания псевдодальности.

Векторы $\bar{\xi}_{u1}, \bar{\xi}_{u2}, \bar{\xi}_{u1}^*, \bar{\xi}_{u2}^*$ определяются по формулам:

$$\bar{\xi}_{u1} = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ \cdots \\ PR_n - PR_1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{u2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1 - \Delta CP_2 \\ \cdots \\ \Delta CP_n - \Delta CP_1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\xi}_{u1}^* = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ \cdots \\ PR_n^* - PR_1^* \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{u2}^* = \begin{pmatrix} \Delta CP_1^* - \Delta CP_2^* \\ \cdots \\ \Delta CP_n^* - \Delta CP_1^* \end{pmatrix}. \quad (10.30)$$

Тогда вектор измерений, входящий в левую часть уравнений (10.11) будет иметь вид:

$$\delta\bar{\xi}_u = \bar{\xi}_u - \bar{\xi}_u^*, \quad (10.31)$$

где векторы $\bar{\xi}_u$ и $\bar{\xi}_u^*$ формируются по алгоритму (10.29)

Ниже приводится неформальное описание рассмотренного выше алгоритма динамической фильтрации "полных сырых" измерений АСН, являющееся одним из необходимых этапов разработки соответствующего программного обеспечения.

10.2 Алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальностей и интегральных фаз с самонастройкой на аэродинамическое торможение

Рассмотренные в предыдущем разделе алгоритмы динамической фильтрации "сырых" измерений АСН в модели движения КА (10.17) учитывают гравитационные составляющие вектора ускорений, входящие в состав вектора \bar{a} , представленного в ИСК. Матрица $A_{И\cdot Г}$ преобразует этот вектор в ГСК. Однако для низкоорбитальных КА кроме гравитационных ускорений \bar{a} , существенное влияние на движение КА оказывает аэродинамическое

торможение, моделирование которого со сколь-либо приемлемой точностью представляет собой сложную задачу. Поэтому, например, в разделе 7.4 были рассмотрены алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое ускорение. Тогда в качестве измерений АСН рассматривался вектор координат. Предложенные алгоритмы позволяли вычислять с определенной точностью текущее аэродинамическое торможение, которое учитывалось в уравнениях движения КА. При этом благодаря компенсации аэродинамического возмущения существенно повышалась точность формируемой оценки орбиты. Аналогичную оценку аэродинамического торможения можно выполнять при динамической фильтрации "сырых" измерений АСН. Для этого в качестве вектора состояния КА будем рассматривать 7-мерный вектор

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \Delta\bar{x} \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{X}}{R_0} \\ \frac{\Delta\bar{X}}{V_0} \\ \frac{1}{k} a_{aero} \end{pmatrix}, \quad (10.32)$$

где \bar{X} – текущий вектор координат КА в ГСК;
 $\Delta\bar{X}$ – текущее приращение вектора координат за такт в ГСК;
 a – среднее за виток аэродинамическое торможение КА;
 R_0 – средний радиус орбиты КА;
 V_0 – круговая скорость КА для орбиты радиусом R_0 $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}$;

$k=const$ – весовой коэффициент, порядок которого равен порядку величины a_{aero} рассматриваемого КА (для МКС $k = 10^{-6}$ м/с²).

Среднее за виток аэродинамическое торможение КА a_{aero} будем считать медленно меняющимся от витка к витку. Именно этот параметр будем оценивать по "сырым" измерениям АСН совместно с оценкой текущего вектора координат \bar{X} и вектора приращения координат $\Delta\bar{X}$.

В качестве вектора измерений будем рассматривать вектор, составленный из измеренных значений псевдодальностей и интегральных фаз в соответствии с алгоритмами (10.2), (10.10), (10.29), (10.33), (10.34). Тогда систему уравнений движения для оценки текущего вектора состояния можно записать в том же виде, что и уравнение (10.11):

$$\delta\xi_{u1} = C_{0i} \delta\bar{\xi}_i \\ \dots \\ \delta\xi_{um} = C_{0n} \delta\bar{\xi}_m \quad (10.33)$$

Однако в системе уравнений (10.33) векторы $\delta\bar{\xi}_i$ имеют размерность 7, а матрицы C_{0i} – размерность $(2n_i \times 7)$ (n_i – число НС измерений в i -й момент времени) и имеют вид:

$$C_{0i} = \begin{pmatrix} C_i & 0 & 0 \\ & \dots & \\ 0 & C_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.34)$$

где C_i – матрица направляющих косинусов, формируемая по алгоритму (10.8).

Алгоритм формирования оценки вектора состояния, являющейся решением системы уравнений (10.33), аналогичен алгоритму (10.12). Отличие состоит в том, что вектор P имеет размерность 7, а матрицы W , λ , $B_{m,m+1}$ – размерность 7×7 .

Матрица λ определяется по формуле:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_x \cdot E & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_v \cdot E & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_a \end{pmatrix}, \quad (10.35)$$

где $\lambda_x, \lambda_v, \lambda_a$ – определяются по формулам:

$$\lambda_x = \frac{T_x}{T_x + 1}; \quad \lambda_v = \frac{T_v}{T_v + 1}; \quad \lambda_a = \frac{T_a}{T_a + 1}, \quad (10.36)$$

где T_x, T_v, T_a – постоянные времена формирования оценок соответственно координат, скорости и аэродинамического торможения.

Матрица $B_{m,m+1}$ представляет собой матрицу преобразования ошибок вектора состояния от момента m к моменту $m+1$:

$$B_{mm+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m}. \quad (10.37)$$

При фильтрации "сырых" измерений без оценки аэродинамического торможения эта матрица имела размерность 6×6 и формировалась по алгоритмам (10.25) и (10.26). При оценивании аэродинамического торможения к этой матрице добавляются 7 строка и 7 столбец.

Для получения алгоритма формирования этих дополнительных элементов матрицы $B_{m,m+1}$ рассмотрим уравнение движения КА в приращениях (10.17) относительно ГСК с учетом аэродинамического торможения. Вектор аэродинамического торможения относительно ГСК представим в виде, аналогичном (7.25):

$$\bar{a}_a = -\frac{\Delta \bar{X}}{|\Delta \bar{X}|} a_{aero} \quad (10.38)$$

В соответствии с рассматриваемой моделью вектор аэродинамического торможения направлен против вектора скорости КА относительно ГСК.

С учетом аэродинамического торможения уравнение (10.17) примет вид:

$$\Delta \bar{X}_{m+1} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta \bar{X}_m - (E + \Omega) \Omega^2 \bar{X}_i + (E + \Omega) A_{I-I'} \bar{a} - \frac{\Delta \bar{X}}{|\Delta \bar{X}|} a_{aero} \quad (10.39)$$

$$\bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta \bar{X}_{m+1}$$

Для перехода к равноценным безразмерным переменным сделаем замену переменных:

$$\bar{X} = R_0 \bar{x}; \quad \Delta X = V_0 \Delta \bar{x}; \quad a_{aero} = a_0 \cdot K. \quad (10.40)$$

Подставив значения \bar{X} , $\Delta \bar{X}$ и a_{aero} , выраженные через новые переменные, в уравнение (10.39), получим уравнение движения КА в безразмерных параметрах $\bar{x}, \Delta \bar{x}, a_0$:

$$\Delta \bar{x}_{m+1} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta \bar{x}_m - \frac{1}{\omega_0} (E + \Omega) \Omega^2 \bar{x}_m + \frac{1}{V_0} (E + \Omega) A_{I-I'} \bar{a} - \frac{\Delta \bar{x}_m}{|\Delta \bar{x}_m|} \frac{a_0}{V_0} K; \quad (10.41)$$

$$\bar{x}_{m+1} = \bar{x}_m + \omega_0 \Delta \bar{x}_{m+1},$$

где $\omega_0 = \frac{V_0}{R_0}$ – средняя орбитальная скорость КА.

Матрицу $B_{m,m+1}$ можно представить в виде:

$$B_{m,m+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ \frac{\partial a_0}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial a_0}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \frac{\partial a_0}{\partial a_0} \end{pmatrix}. \quad (10.42)$$

Векторы $\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m}, \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m}, \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m}, \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m}$ определяются равенствами (10.25). Векторы $\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0}, \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0}, \frac{\partial a_0}{\partial a_0}, \frac{\partial a_0}{\partial \bar{x}_m}, \frac{\partial a_0}{\partial \Delta \bar{x}_m}$ легко получить из уравнения (10.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} &= -k \Delta \bar{x}_m; & \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial a_0} &= -k \omega_0 \Delta \bar{x}_m; \\ \frac{\partial a_0}{\partial a_0} &= 1; & \frac{\partial a_0}{\partial \bar{x}_m} &= 0; \\ \frac{\partial a_0}{\partial \Delta \bar{x}_m} &= 0; & \frac{\partial a_0}{\partial \bar{x}_m} &= 0. \end{aligned} \quad (10.43)$$

То есть, 7 столбец матрицы $B_{m,m+1}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -k \omega_0 \Delta \bar{x}_m \\ -k \Delta \bar{x}_m \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

Первые 6 элементов 7 строки матрицы $B_{m,m+1}$ равны 0. Элементы первых 6 строк и 6 столбцов матрицы $B_{m,m+1}$ соответствуют элементам матрицы $B_{m,m+1}$, формируемой при фильтрации без оценки аэродинамического торможения по алгоритму (10.26). При задании коэффициента $k = 0$ фильтрация измерений АСН будет выполняться без настройки на аэродинамическое торможение.

10.3 Неформальное описание алгоритмов динамической фильтрации "полных сырых" измерений АСН при формировании оценки орбиты КА в приращениях

В разделе 3.8 было приведено неформальное описание алгоритмов интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС. Эти алгоритмы включали программу обработки измерений аппаратуры БИНС, реализуемую в ЦВМ КА, и программу собственно интегрирования уравнений движения КА, реализуемую в АСН. Указанные программы были оформлены как программные функции f_BINS и f_INTEGR . Выходом этих программ является оценка орбиты КА, спрогнозированная на один шаг интегрирования уравнений движения КА. При наличии измерений АСН эта спрогнозированная оценка должна на каждом шаге корректироваться по проведенным измерениям. Рассматриваемое в настоящей главе программное обеспечение обеспечивает эту коррекцию. Для удобства реализации программы в процессоре АСН целесообразно ее также оформить в виде программной функции, вызываемой после проведения измерений АСН на текущем шаге и выполнения прогноза на текущий шаг оценки орбиты, полученной на предыдущем шаге. Условно назовем эту функцию $f_RAW_CORRECTION$.

10.3.1 Назначение ПО и методы решения задачи

Разрабатываемое ПО предназначено для формирования оценки орбиты КА, представленной в приращениях в виде вектора координат КА в ГСК и приращений координат за текущий шаг интегрирования, корректируемой по "полным сырым" измерениям АСН – псевдодальностям и приращениям интегральных фаз текущего видимого созвездия НС. ПО выполнено в виде программной функции $f_RAW_CORRECTION$, реализующей рекуррентный алгоритм динамической фильтрации измерений АСН модифицированным методом

наименьших квадратов, рассматриваемым в настоящем курсе лекций. Функция включает три параметра:

- T_x – постоянная времени фильтра по координатам;
- T_v – постоянная времени фильтра по скорости;
- T_p – постоянная времени сглаживания псевдодальностей;
- T_{aero} – постоянная времени фильтра аэродинамического торможения.

Данные параметры могут выбираться пользователем в зависимости от орбиты КА, его динамики и требований к характеристикам фильтра. Характер влияния указанных параметров на точностные и динамические характеристики фильтра рассмотрен ниже на примере реальных измерений АСН-М МКС.

10.3.2 Описание интерфейса программы

Программная функция использует ряд констант:

- ω_z – угловая скорость вращения Земли;
- R_0 – средний радиус орбиты КА, для которого предназначено ПО;
- V_0 – средняя круговая скорость КА, для которого предназначено ПО;
- $\omega_0 = \frac{V_0}{R}$ – средняя орбитальная угловая скорость КА, для которого предназначено ПО;
- Δt – такт измерений АСН в аппаратной шкале времени.

Программная функция использует ряд параметров, задаваемых пользователем в зависимости от требований к характеристикам фильтра:

- T_x – постоянная времени фильтра по координатам;

- T_V – постоянная времени фильтра по скорости;
- T_p – постоянная времени сглаживания псевдодальностей;
- T_{aero} – постоянная времени фильтра аэродинамического торможения.

По параметрам T_x и T_V формируются коэффициенты λ_x и λ_V , используемые в программе:

$$\lambda_x = \left(\frac{T_x}{T_x + 1} \right); \quad \lambda_V = \left(\frac{T_V}{T_V + 1} \right). \quad (10.45)$$

Для того, чтобы эти параметры не вычислять на каждом шаге, они формируются отдельно при инициализации всего ПО АСН (при запуске АСН), а в функцию входят как входные параметры Lam_X , Lam_V . Описание интерфейсных параметров функции $f_RAW_CORRECTION$ приведено в Таблице 10.1.

В приведенной таблице размер матриц измерений и направляющих косинусов равен максимально возможному числу, соответствующему числу каналов АСН (в данном случае 16). Реальное число отслеживаемых НС n_SV_namb меньше максимального. Это число используется как входной параметр стандартных функций реализующих действия с матрицами.

Таблица 10.1

Идентификатор	Название	I/O	Size	type	unit
<i>Lam_X</i>	коэффициент "старения" накопленных измерений по координатам	I	1	double	-
<i>Lam_V</i>	коэффициент "старения" накопленных измерений по скорости	I	1	double	-
<i>TAU_P</i>	постоянная времени сглаживания псевдодальностей	I	1	double	s
<i>TAU_aero</i>	постоянная времени фильтра аэродинамического торможения	I	1	double	s
<i>drift ASN</i>	дрейф часов АСН относительно системного времени	I	1	double	s/s
<i>n_SV_namb</i>	число НС в измеренном созвездии	I	1	short	-
<i>mes_vect_PR</i>	вектор измерений псевдодальности	I	16	double	m
<i>mes_vect_CP</i>	вектор измерения приращений интегральной фазы	I	16	double	m
<i>estim_vect_PR</i>	оценка вектора измерения псевдодальности	I	16	double	m
<i>estim_vect_CP</i>	оценка вектора измерения приращения интегральной фазы	I	16	double	m
<i>estim_prev_vect_X</i>	оценка вектора координат от предыдущего шага	I/O	3	double	m
<i>estim_prev_vect_delta_X</i>	оценка вектора приращения координат от предыдущего шага	I/O	3	double	m
<i>cos_matr</i>	матрица направляющих косинусов	I	16×3	double	-
<i>prev_accum_matr</i>	накапливаемая матрица от предыдущего шага	I/O	6×6	double	-

10.3.3 Алгоритм функции *f_RAW_CORRECTION*

Данная функция запускается на каждом шаге измерений АСН после выполнения текущих измерений, формирования векторов измерений псевдодальностей и приращений интегральных фаз, формирования оценки орбиты КА на момент измерений АСН на текущем шаге, путем прогноза с предыдущего шага с использованием функции *f_INTEGR*, обработки эфемерид НС и формирования оценки координат НС в момент излучения сигнала, формирования оценки векторов измерений псевдодальностей и приращений интегральных фаз. Следует отметить, что, так как оценка приращений интегральных фаз требует использования измерений интегральных фаз на предыдущем шаге, то в случае изменения созвездия достоверных НС на текущем шаге по отношению к предыдущему, новый НС вводится в созвездие только со следующего шага, а в случае исчезновения НС измерения, соответствующие этим НС, исключаются из состава измерений предыдущего шага.

Первый запуск функции выполняется после получения от АСН достоверных значений КСВ, которые используются в качестве нулевого приближения на нулевом шаге. Значение накапливаемой матрицы – *prev_accim_matr* на нулевом шаге принимается равным нулю.

Программа реализуется в следующей последовательности.

Начало.

Вводим обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{u1} &= mes_vect_PR \\ \bar{x}_{u2} &= mes_vect_CP \\ \bar{x}_{u1}^* &= estim_vect_PR \\ \bar{x}_{u2}^* &= estim_vect_CP \\ \bar{X}^* &= estim_prev_vect_X\end{aligned}$$

$$\Delta\bar{X}^* = estim_prev_vect_delta_X$$

$$C = cos_matr$$

$$W = prev_accum_matr$$

$$T_p = TAU_P$$

$$T_{aero} = TAU_aero$$

Вычислим шаг интегрирования в системной шкале времени:

$$\Delta t_c = \Delta t(1 + drift_ASN)$$

Формируем матрицы:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta t_c \quad \text{– матрица угла поворота Земли за такт.}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{– матрица направляющих косинусов размерности } 2n \times 6.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} Lam_X & 0 & 0 \\ 0 & Lam_V & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{aero}}{T_{aero} + 1} \end{pmatrix}$$

– матрица "старения" накоплений размерности 6×6 .

Формируем ошибку безразмерного вектора измерений:

$$\delta \bar{\xi}_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_p} \frac{\bar{x}_{u1} - \bar{x}_{u1}^*}{R_0} + \frac{T_p - 1}{T_p} \frac{(\bar{X}_{u2} - X_{u2}^*)}{R_0} \\ \frac{(\bar{x}_{u2} - \bar{x}_{u2}^*)}{V_0} \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

Вычисляем вектор:

$$\bar{P} = C_0^T \delta \bar{\xi}_u \quad (10.47)$$

Формируем оценку безразмерного вектора координат и его модуля:

$$\bar{x} = \frac{\bar{X}^*}{R_0}; \quad r_0 = |\bar{x}|. \quad (10.48)$$

Вычисляем матрицы:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} &= (E + 2\Omega + 2\Omega^2); \\
 \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} &= -\frac{1}{\omega_0 \Delta t_c} (E + \Omega) \Omega^2 - \omega_0 \left(\frac{E + \Omega}{r_0^3} \right) \left(E - 3 \frac{x_m \bar{x}_m^T}{r_0^2} \right) \Delta t_c; \\
 \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} &= \omega_0 (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta t_c; \\
 \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} &= E + \omega_0 \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial x_m} \Delta t_c.
 \end{aligned} \tag{10.49}$$

Формируем матрицу преобразования ошибок:

$$B_{mm+1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.50}$$

Вычисляем обратную матрицу преобразования ошибок:

$$\begin{aligned}
 \delta B &= B_{mm+1}^{-1} - E; \\
 B_{mm+1}^{-1} &= E - \delta B + \delta B \cdot \delta B.
 \end{aligned} \tag{10.51}$$

Вычисляем накапливаемую матрицу:

$$W = B_{mm+1}^{-1T} \Lambda W \Lambda B_{mm+1}^{-1} + C_0^T C_0 \tag{10.52}$$

Вычисляем поправку к прогнозируемому вектору состояния:

$$\delta\bar{\xi} = W^{-1}P = \begin{pmatrix} \delta\bar{\xi}_X \\ \delta\bar{\xi}_V \end{pmatrix} \quad (10.53)$$

Вычисляем оценку вектора состояния:

$$\begin{aligned} \bar{X}^* &= \bar{X}^* + R_0 \cdot \delta\bar{\xi}_X; \\ \Delta\bar{X}^* &= \Delta\bar{X}^* + V_0 \cdot \delta\bar{\xi}_V. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Формируем выходные параметры

$$\begin{aligned} estim_prev_vect_X &= \bar{X}^* \\ estim_prev_vect_delta_X &= \Delta\bar{X}^* \\ prev_accum_matr &= W \end{aligned} \quad (10.55)$$

Конец.

10.3.4 Методы верификации программной функции *f_RAW_CORRECTION*.

Верификация функции *f_RAW_CORRECTION* может выполняться в несколько этапов. Первый этап – это верификация в режиме *ideal*, когда в модели вектора измерений $\bar{\xi}_u$ отключаются все ошибки. Тогда формируемая оценка орбиты должна идеально совпадать с моделируемой точной орбитой КА.

На следующих этапах верификации можно сравнить формируемую выходную оценку орбиты с оценкой, формируемой аналогичными разработанными ранее программами. Результаты динамической фильтрации реальных измерений псевдодальностей, полученных АСН-М МКС, приведены в Главе 9. Графики ошибок формируемой оценки орбиты МКС для

измерений от разного числа НС в группировке спутников *GPS* приведены на рис. 9.1 – 9.5. В следующем разделе настоящей главы приведены результаты исследования точностных характеристик оценки орбиты, формируемой рассматриваемой функцией для различных значений ее параметров.

10.4 Исследование зависимости точности формируемой оценки орбиты и устойчивости по отношению к внешним возмущающим ускорениям от постоянных времени динамического фильтра с использованием реальных "сырых" измерений АСН-М МКС

Рассмотренная в предыдущих разделах динамическая фильтрация измерений псевдодальнностей и интегральных фаз обладает существенными преимуществами по сравнению с динамической фильтрацией измеряемых координат. Эти преимущества обусловлены в первую очередь за счет расширения вектора измеряемых параметров. По сути, рассмотренный метод полностью реализует возможности АСН в части измерений параметров движения КА. Как отмечалось выше, метод фильтрации измерений координат обеспечивает формирование высокоточной оценки орбит пассивных КА. Этот результат достигается за счет фильтрации с большой постоянной времени фильтра. Но если на каком-то участке траектории возникают дополнительные возмущения орбиты, не учтенные в модели движения КА, например, начинает работать корректирующий двигатель, а создаваемое им ускорение не моделируется, то эти возмущения приводят к значительной ошибке оценки орбиты. В этом случае возрастаёт разница между измеряемым АСН вектором координат и его оценкой. Сказанное демонстрирует график, приведенный на рис. 10.1, на котором приведены рассогласования ΔX , ΔY , ΔZ между измеряемым АСН-М МКС вектором координат и

формируемой по этим координатам оценкой орбиты, преобразованные к ОСК (ΔX – продольная дальность, ΔY – местная вертикаль). Приведенные на указанном рисунке данные относятся к 26.05.2010 г. Оценка орбиты МКС в АСН-М формировалась по измеряемому вектору координат в соответствии с алгоритмами (7.18), в которых постоянная времени фильтра T задавалась равной одному витку (5500 с). На указанном участке траектории в 06:25:00 по Гринвичу выполнялась коррекция орбиты станции двигателями грузового корабля "Прогресс". Величина выданного во время коррекции импульса скорости равнялась 0,82 м/с. Длительность работы двигателей составила 596 с. В процессе выдачи корректирующего импульса МКС стабилизировалась в орбитальной системе координат. В результате возмущения орбиты МКС от двигателей, которые не моделировались в динамическом фильтре, возникли значительные рассогласования между измеряемым АСН-М вектором координат и его оценкой. Приведенные на рис. 10.1 графики демонстрируют эти рассогласования. Из графиков видно, что первоначально, когда МКС находилась в свободном орбитальном полете и стабилизировалась на гиродинах, не возмущающих орбиту станции, формируемая оценка орбиты практически совпадала с измеряемым вектором координат. За виток до выдачи корректирующего импульса управление станцией начало выполняться реактивными двигателями, которые привели к некоторому возмущению орбиты станции, и на приведенных графиках появились рассогласования между измеряемым вектором и оценкой орбиты. Через виток после перехода на управляющие двигатели ориентации началась коррекция орбиты, при которой неучченное в модели движения станции возмущающее ускорение составило величину $1.376 \cdot 10^{-3}$ м/с². Это возмущающее ускорение привело к значительному разлету фильтра, и разность между измеряемым текущим вектором координат и его оценкой через полвитка достигла 14 км по продольной дальности и 3 км по высоте. Дальше фильтр "сошелся" только

через 4 часа, и фильтруемая оценка вновь стала близка к измеряемому АСН вектору координат МКС.

Приведенный график демонстрирует сказанное выше, что фильтрация измерений АСН по алгоритму (7.18) с большой постоянной времени обеспечивает формирование высокоточной орбиты КА только при отсутствии неучтенных в фильтре возмущений. Даже небольшое возмущающее ускорение величиной $\sim 10^{-3} \text{ м/с}^2$ приводит к значительному "разлету" фильтра.

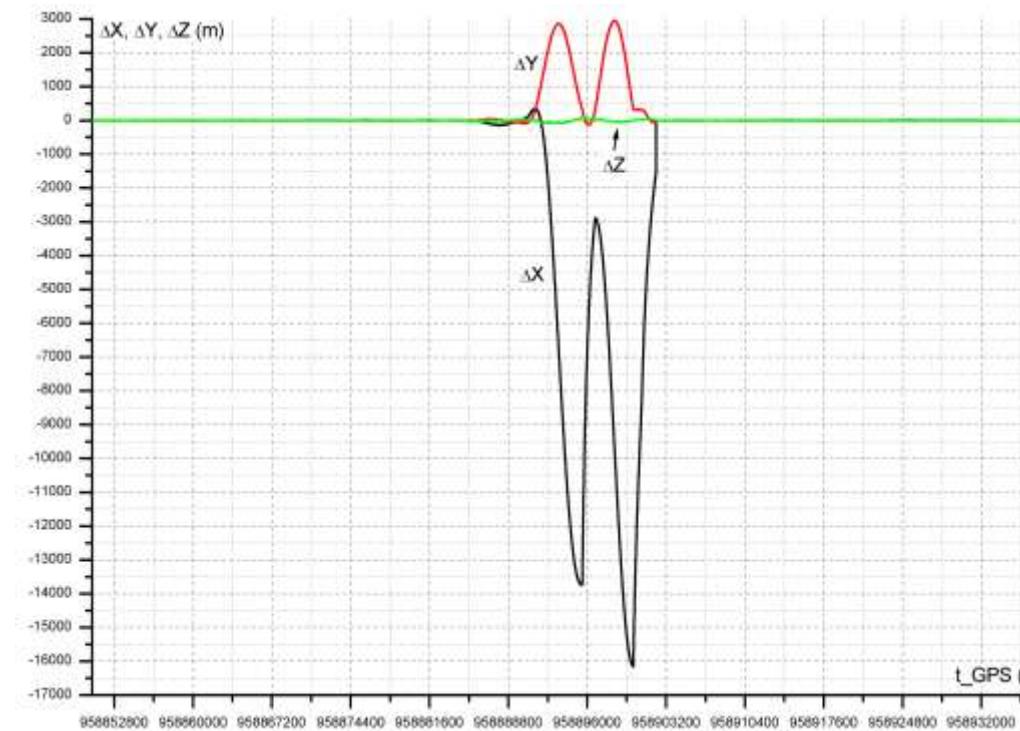


Рис. 10.1 Графики ошибок оценки орбиты МКС по измерениям координат АСН-М при коррекции орбиты двигателями корабля "Прогресс".

Рассмотренные в предыдущем разделе алгоритмы динамической фильтрации полного состава "сырых" измерений АСН обеспечивают формирование оценки орбиты с существенно более высокой точностью при воздействии на КА неучтенных возмущающих ускорений.

Повышение точности достигается за счет использования в качестве вектора измерений полного состава "сырых" измерений АСН, включающего псевдодальности и интегральные фазы, а также за счет выбора определенного сочетания постоянных времени фильтра T_x , T_v , T_p , T_{aero} . Для существенного снижения ошибок, обусловленных внешними неучтеными в фильтре возмущениями, необходимо уменьшить постоянную времени T_x по сравнению с постоянной времени T , реализованной в АСН-М МКС для работы на пассивном участке полета станции. В результате на этом участке орбиты происходит некоторое снижение точности формируемой оценки орбиты. Но задачей рассматриваемого фильтра является значительное повышение точности формируемой оценки при воздействии неучтенных внешних возмущений орбиты. При этом может допускаться незначительное снижение точности формируемой оценки на пассивных участках полета. Для этого было проведено исследование зависимости ошибок оценки орбиты, формируемой по полному составу "сырых" измерений, для различного сочетания постоянных времени фильтра T_x , T_v , T_p , T_{aero} . В исследовании использовались реальные данные АСН-М МКС для рассмотренного выше участка орбиты.

В результате проведенного исследования были определены значения постоянных времени, обеспечивающих наилучшие характеристики фильтра как в условиях отсутствия возмущений, так и при проведении коррекции орбиты МКС от двигателей.

Для условий пассивного участка полета наилучшими значениями постоянных времени оказались значения $T_x = 5500$ с, $T_v = 5500$ с, $T_{aero} = 11000$ с. Для этих значений постоянных времени формируемая оценка орбиты отличалась от оценки, формируемой по измеренному

вектору координат МКС не более, чем на 3 м. При этом было сложно оценить, какая из оценок точнее, ввиду отсутствия точной базы для сравнения. Тем не менее, "развал" формируемой оценки из-за коррекции орбиты при фильтрации по "сырым" измерениям оказался значительно меньшим по сравнению с "развалом" при фильтрации по вектору координат. На рис. 10.2 представлены графики ошибок оценки (для векторов координат и скорости) орбиты относительно ОСК, формируемой по "сырым" измерениям, для приведенных выше значений параметров фильтра. Вертикальными линиями на графиках отмечен участок работы корректирующего двигателя. Из графиков видно, что "разлет" оценки орбиты по координатам, обусловленный работой двигателя коррекции, составил 2,8 км, в то время как "разлёт" оценки по измеренному вектору координат превысил 16 км (см. рис. 10.1).

Как отмечалось выше, "разлёт" фильтра может быть существенно снижен при уменьшении постоянных времени фильтра T_x , T_v . Однако здесь должен быть найден оптимум, так как уменьшение этих постоянных времени приводит к ухудшению качества фильтрации на участках свободного полета КА. Поэтому для активных КА, у которых периодически происходит срабатывание управляемых двигателей (коррекции или ориентации), были определены примерные значения параметров, при которых обеспечивается достаточно высокая точность формируемой оценки орбиты как на участках свободного полета КА, так и на участках коррекции траектории. На рис. 10.3 приведены графики ошибок оценки орбиты по координатам и скорости относительно КСВ, формируемой по "сырым" измерениям, на участке коррекции орбиты МКС при $T_x = 1000$ с, $T_v = 10$ с, $T_p = 300$ с. Из приведенных графиков видно, что "разлёт" формируемой оценки орбиты не превысил 20 м, что почти в 1000 раз меньше величины "разлёта" при фильтрации по координатам.

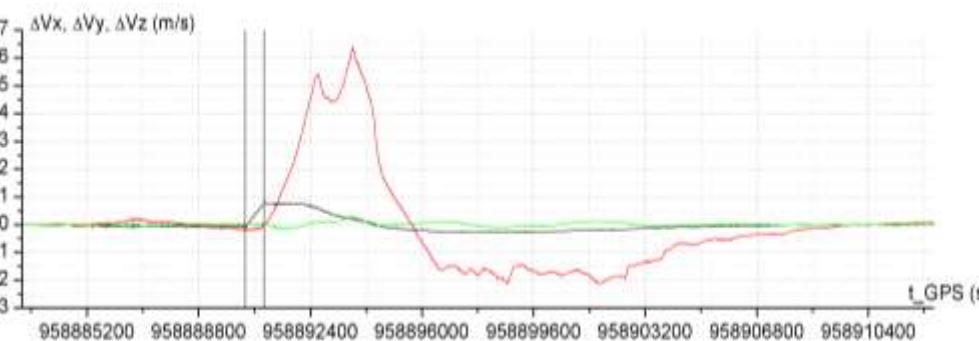
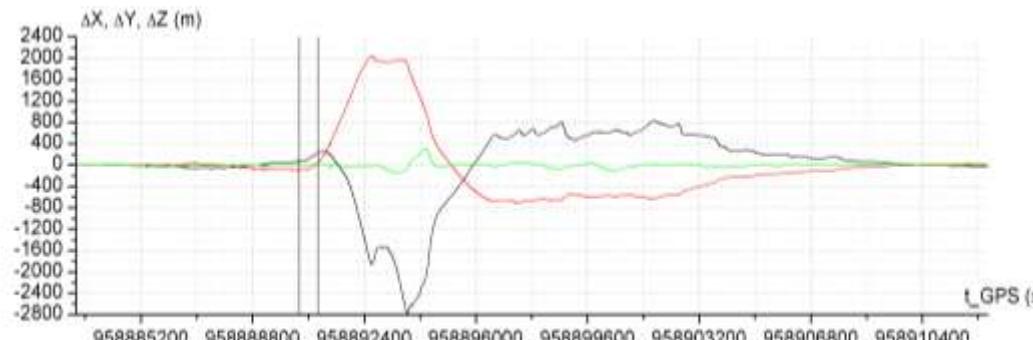


Рис. 10.2 Ошибки оценки орбиты (относительно КСВ), формируемой по "сырым" измерениям АСН-М (в ОСК) на участке коррекции орбиты МКС при постоянных времени фильтра порядка витка.

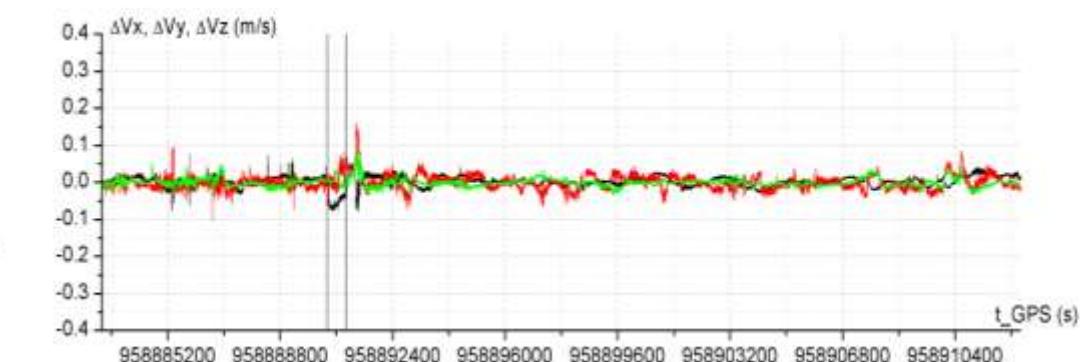
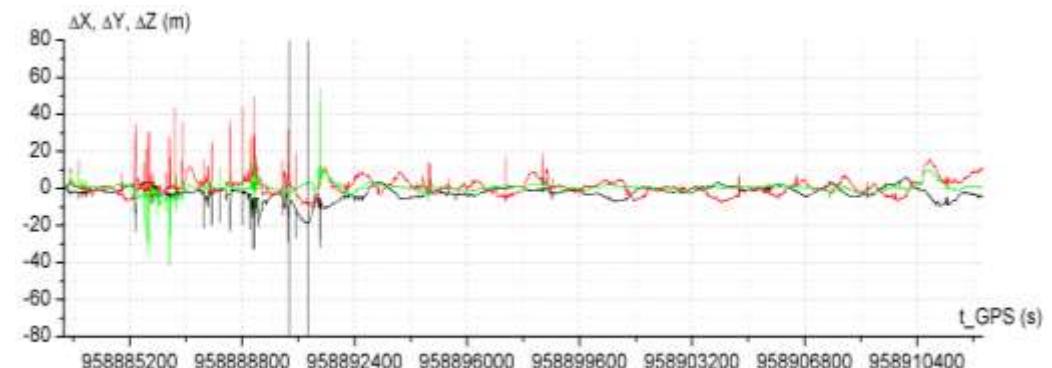


Рис. 10.3 Ошибки оценки орбиты МКС (относительно КСВ), формируемой по "сырым" измерениям АСН-М (в ОСК) на участке коррекции орбиты МКС при $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с.

На рис. 10.4 для тех же постоянных времени фильтра приведены графики ошибок оценки орбиты по координатам и скорости (относительно "точной" оценки, формируемой фильтром с постоянными временем T_x , T_v , T_{aero} порядка витка) для участка пассивного полета МКС. Из

приведенных графиков видно, что ошибки оценки на суточном интервале не превышают 12 м по координатам, по скорости – 5 см/с. При этом, в течение ~95 % указанного времени эти ошибки не превышают 8 м по координатам и 2 см/с по скорости. Чтобы оценить эффективность фильтра, рассмотрим ошибки КСВ, сформированных АЧН-М МКС на том же участке орбиты.

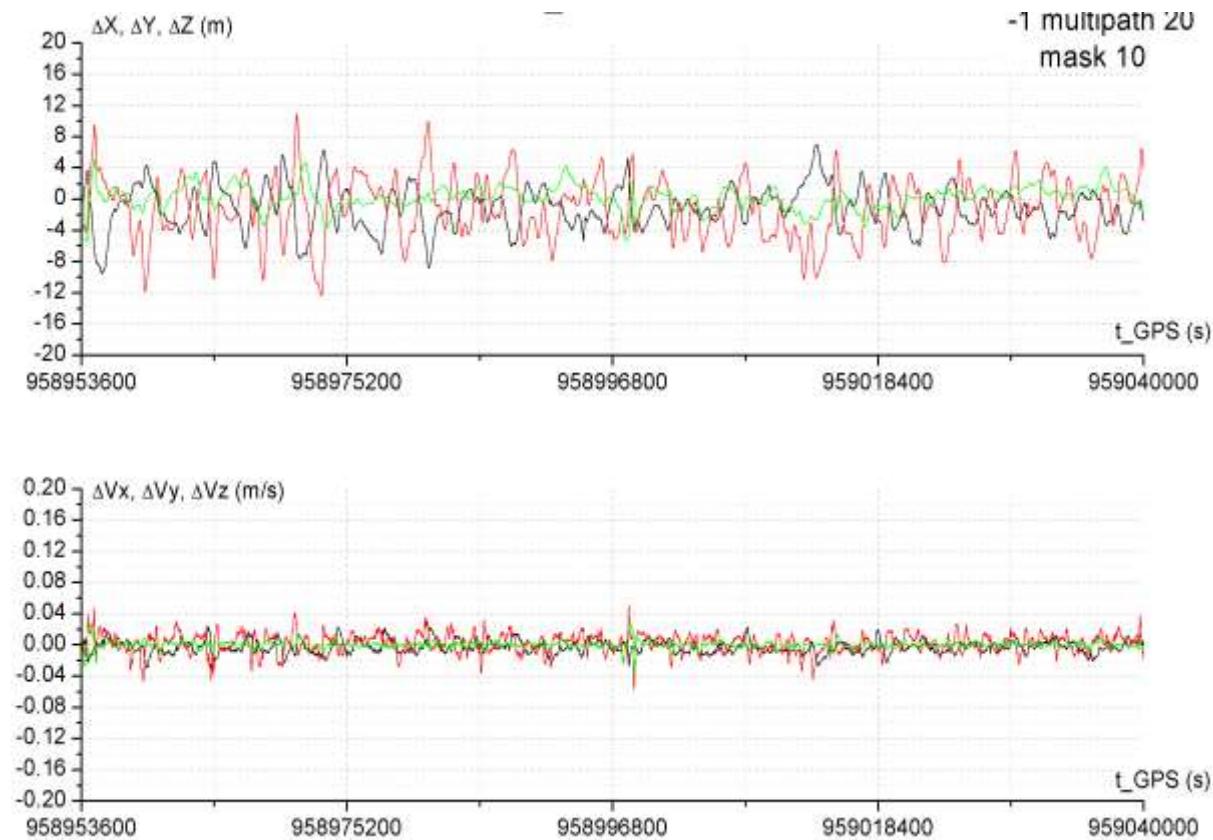


Рис. 10.4 Ошибки оценки орбиты МКС, формируемой по "сырым" измерениям АЧН-М для альманаха из 30 НС (в ОСК) на участке свободного полета МКС при $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с.

На рис. 10.5 приведены графики ошибок КСВ по координатам и скорости относительно "точной" оценки. Из приведенных графиков видно, что нефильтрованные измерения координат и скорости (КСВ) имеют значительную шумовую составляющую, а также ошибки в виде кратковременных выбросов, достигающих на рассматриваемом участке орбиты величины 30 м по координатам и 8 см/с по скорости. Сравнивая эти графики с графиками ошибок оценки орбиты, формируемой рассматриваемым фильтром (рис. 10.4), можно констатировать, что формируемая оценка имеет значительно более высокую точность, отсутствие "выбросов" и шумовой составляющей ошибок.

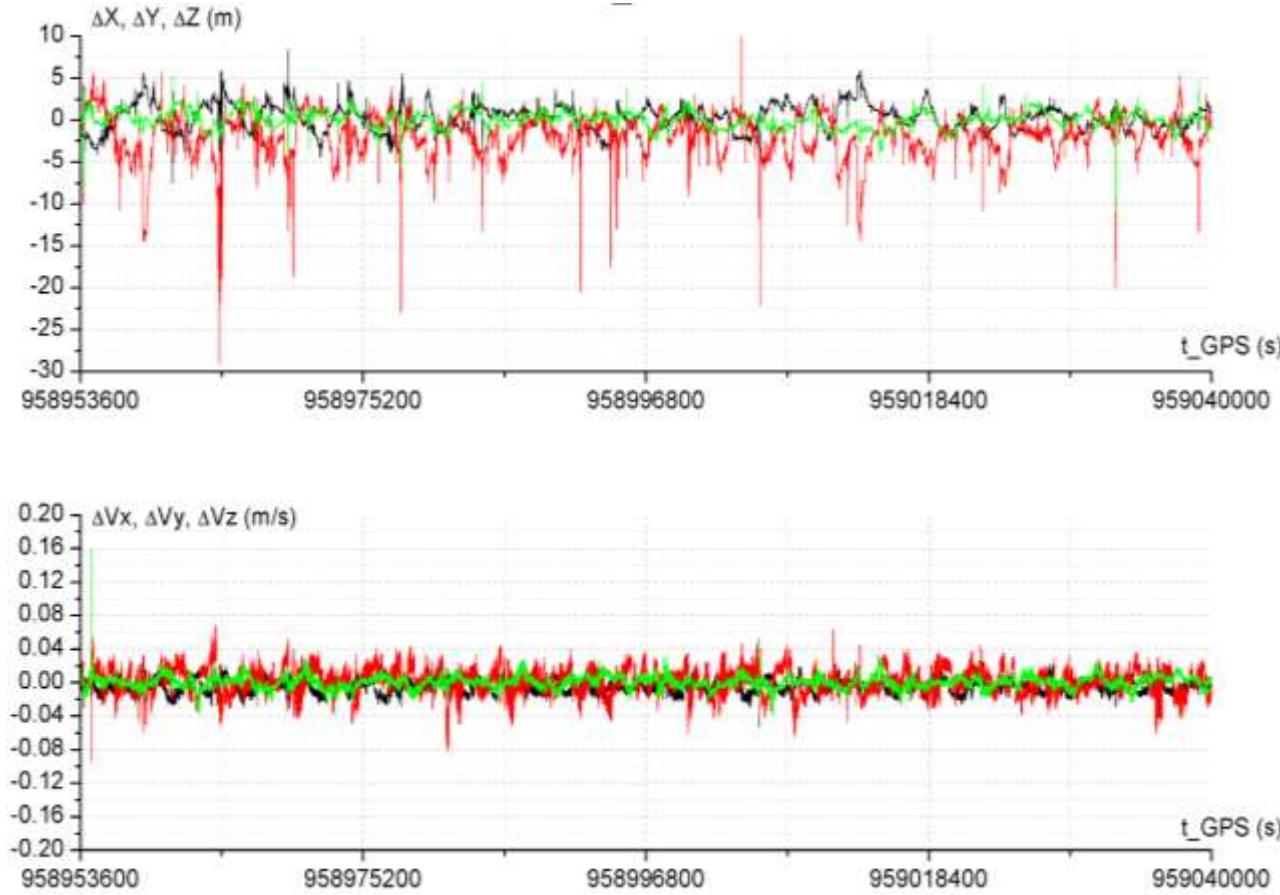


Рис. 10.5 Ошибки КСВ АЧ-М МКС на суточном участке пассивного полёта станции.

10.5 Исследование зависимости точности формируемой оценки орбиты и устойчивости по отношению к внешним возмущающим ускорениям от числа видимых навигационных спутников

В разделе 9.2 исследовался вопрос влияния числа НС в группировке на точность формируемой оценки орбиты при фильтрации "сырых" измерений с большой (порядка витка) постоянной времени фильтра. Было показано, что в этом случае число НС в группировке слабо влияет на точность формируемой оценки. Уменьшение числа НС почти в 2 раза практически не ухудшало достигаемую точность. Даже при наличии в общей группировке всего четырех НС фильтр обеспечивал формирование оценки орбиты МКС с приемлемой точностью (~25 м см. рис. 9.5). Такая устойчивость фильтра по отношению к числу спутников обеспечивается благодаря большой постоянной времени фильтра. Ситуация меняется при уменьшении постоянных времени фильтра, обеспечивающих устойчивость к внешним возмущающим ускорениям.

В этом случае число НС в группировке оказывает существенное влияние как на точность формируемой оценки орбиты на участках пассивного полета КА, так и на устойчивость фильтра к внешним возмущающим ускорениям. Сказанное демонстрируют рис. 10.8 и 10.9, на которых приведены графики ошибок формируемых оценок орбиты МКС, полученных по летным данным АСН-М МКС для того же участка орбиты, что и графики, приведенные на рис. 10.3 и 10.4. При этом из всего объема записанных измерений АСН-М были исключены измерения от 7 НС. В результате, группировка НС GPS включала 23 спутника вместо 30. Графики числа используемых для формирования оценки НС в случае группировки из 30 и 23 НС приведены на рис. 10.6 и 10.7 соответственно.

Параметры фильтра были выбраны такие же, как и при формировании оценки по измерениям от группировки из 30 НС. Из приведенных графиков видно, что "разлет" фильтра из-за работы двигателя коррекции увеличился с 20 м до 65 м. На 20-30 % в среднем увеличились ошибки формируемой оценки орбиты как по координатам, так и по скорости. В основном ошибки по координатам не превышали 12 м, хотя наблюдались два всплеска ошибки по высоте длительностью ~10 мин. и амплитудой 20 м. Приведенный пример показывает, что точность формируемой оценки и устойчивость фильтра к возмущениям существенно зависит от числа НС в группировке навигационных спутников. Снижение числа НС приводит к увеличению ошибок. Соответственно, увеличение числа НС должно обеспечить повышение точности. К сожалению, подтвердить это предположение по имеющимся летным данным АСН-М МКС не представляется возможным, так как в проведенном на МКС эксперименте был реализован режим *GPS* (число спутников в группировке на тот момент составляло 30 НС), а не режим *GPS+ГЛОНАСС*, в котором число НС в общей группировке спутников могло быть увеличено до 54. Ввиду этого точностные характеристики оценки орбиты, формируемой рассматриваемым фильтром в режиме *GPS+ГЛОНАСС* при общем числе НС до 56 НС, были получены путем моделирования.

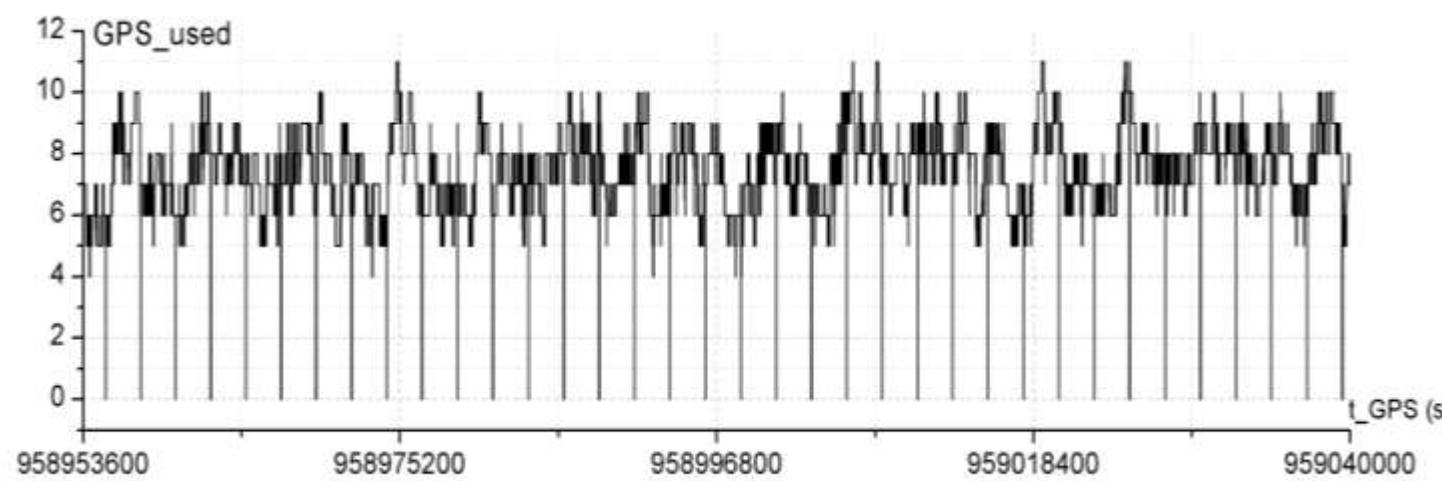


Рис. 10.6 График числа видимых навигационных спутников для альманаха GPS из 30 НС.

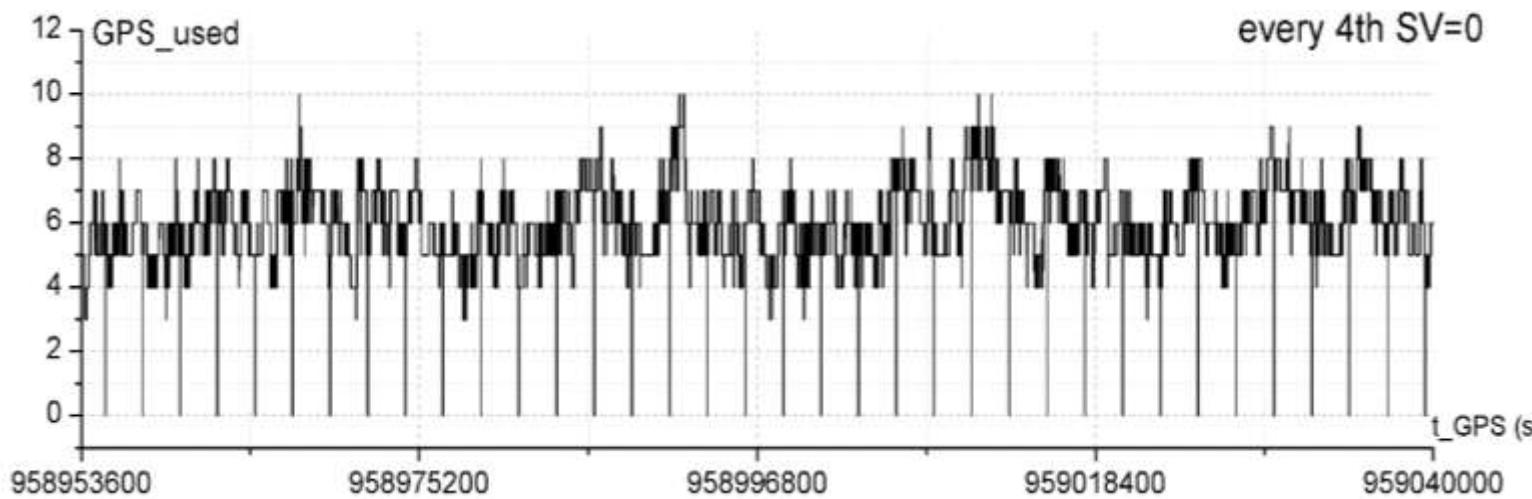


Рис. 10.7 График числа видимых навигационных спутников для альманаха GPS из 23 НС.

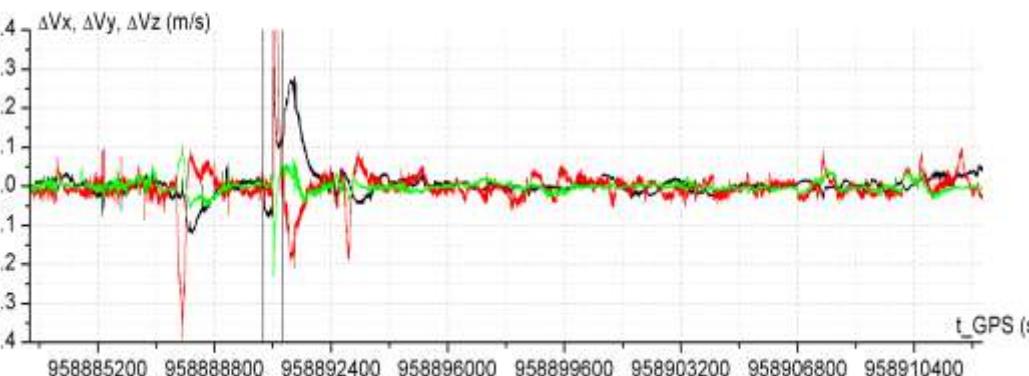
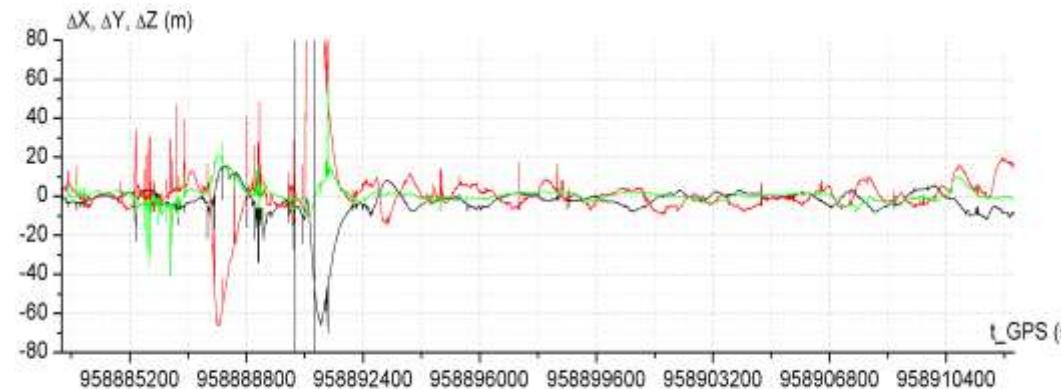


Рис. 10.8 Ошибки оценки орбиты МКС по "сырым" измерениям АЧН-М (относительно КСВ), для альманаха из 23 НС GPS.

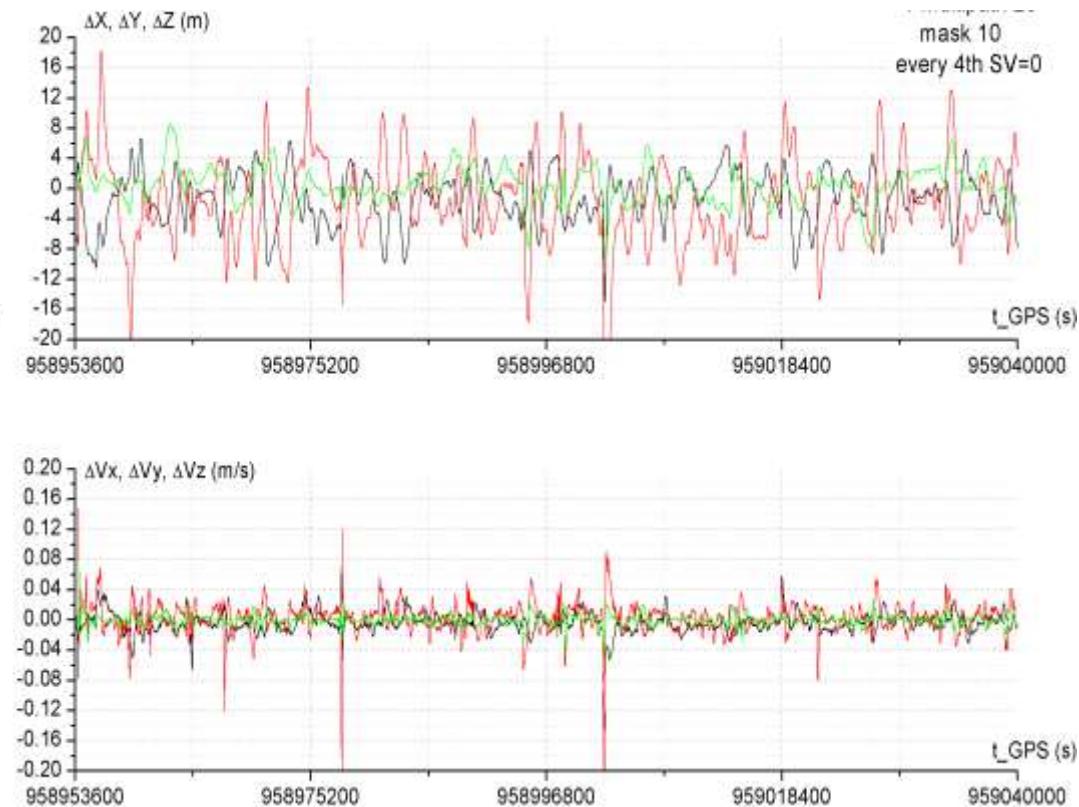


Рис. 10.9 Ошибки оценки орбиты МКС, формируемой по "сырым" измерениям АЧН-М (в ОСК) на участке свободного полета МКС для альманаха из 23 НС GPS.

Моделирование проводилось для того же суточного участка орбиты МКС в режимах *GPS* для альманахов из 30 НС и 23 НС, а также в режиме *GPS+ГЛОНАСС* для альманаха из 54 НС. Оценка орбиты МКС формировалась по моделируемым "сырым" измерениям АСН с постоянными времени $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с. На рис. 10.10 и 10.11 приведены графики ошибок оценок по координатам и приращенным координатам, полученным по моделируемым "сырым" измерениям АСН для альманахов *GPS* соответственно из 30 и 23 НС. Сравнив эти графики с аналогичными графиками, но полученными путем фильтрации реальных "сырых" измерений АСН-М МКС, приведенными на рис. 10.4 и 10.9, можно сделать вывод, что используемая модель АСН-М МКС с хорошей репрезентативностью моделирует измерения АСН, так как графики ошибок оценок для обоих альманахов близки к соответствующим графикам, полученным по реальным летным данным. Соответственно, можно считать, что приведенные ниже результаты моделирования с хорошей точностью отражают соответствующую моделируемую ситуацию.

На рис. 10.12 приведены графики ошибок по координатам и скорости оценки моделируемой орбиты МКС в режиме *GPS+ГЛОНАСС* для альманаха из 54 НС при постоянных времени фильтра $T_x = 1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с. Сравнивая эти графики с графиками, приведенными на рис. 10.10 и 10.11, можно сделать вывод, что с увеличением числа НС в альманахе повышаются точность формируемой оценки как по координатам, так и по скорости. В данном случае точность в режиме *GPS+ГЛОНАСС* повысилась в $\sim 1,5$ раза по сравнению с точностью в режиме *GPS* с альманахом из 30 НС и в $2\div 2,5$ раза по сравнению с точностью в режиме *GPS* с альманахом из 23 НС.

Оценим устойчивость формируемой оценки орбиты по отношению к внешним возмущающим ускорениям. Из графиков, приведенных на рис. 10.3 видно, что для постоянных

времени $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с при коррекции орбиты МКС с ускорением от двигателей $\sim 1,3 \cdot 10^{-3}$ м/с² в течение ~ 600 с "разлет" фильтра по продольной дальности ΔX составил ~ 20 м. При моделировании работы АСН в режиме GPS также была реализована коррекция орбиты МКС длительностью ~ 600 с, но с увеличенным ускорением 10^{-2} м/с². Графики "разлета" оценки для этого случая приведены на рис. 10.13. Из приведенных графиков видно, что величина "разлета" по продольной дальности составила 160 м, то есть, увеличилась пропорционально величине возмущающего ускорения. Аналогичное моделирование было проведено для режима GPS+ГЛОНАСС с альманахом из 54 НС. Графики "разлета" оценки орбиты для этого случая приведены на рис. 10.14. Из приведенных графиков видно, что величина "разлета" в режиме GPS+ГЛОНАСС не изменилась и осталась такой же, как и в режиме GPS с альманахом из 30 НС. Тем не менее, величина "разлёта" оценки может быть существенно уменьшена при уменьшении постоянной времени T_v . На рис. 10.15 приведены графики ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с² в течение 600 с при постоянных времени фильтра $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с. Из приведенных графиков видно, что величина "разлета" оценки по продольной дальности уменьшилась со 160 м (для $T_v=10$ с) до 20 м. Таким образом, рассмотренные в настоящей главе алгоритмы динамической фильтрации полного состава "сырых" измерений АСН при соответствующем выборе постоянных времени фильтра T_x , T_v , T_p позволяют при сохранении высокой точности формируемой оценки орбиты в десятки тысяч раз повысить устойчивость оценки к внешним возмущающим ускорениям по сравнению с алгоритмами динамической фильтрации по формируемым АСН координатам КА.

Так графики "разлёта" оценки орбиты МКС, формируемой по измеряемым координатам, приведенные на рис. 10.1 показывают, что при коррекции орбиты с ускорением от двигателей $1,3 \cdot 10^{-3}$ м/с² величина "разлета" по продольной дальности составила 17 км. При этом фильтр "сошелся" только через 4 часа. Фильтрация по полным "сырым" измерениям (см. рис. 10.15) при внешнем ускорении 10^{-2} м/с² в течение 600 с обеспечила величину "разлета", не превышающую 20 м. При этом, через 5 мин. после завершения коррекции, формируемая оценка вышла на установившийся уровень точности 10 м.

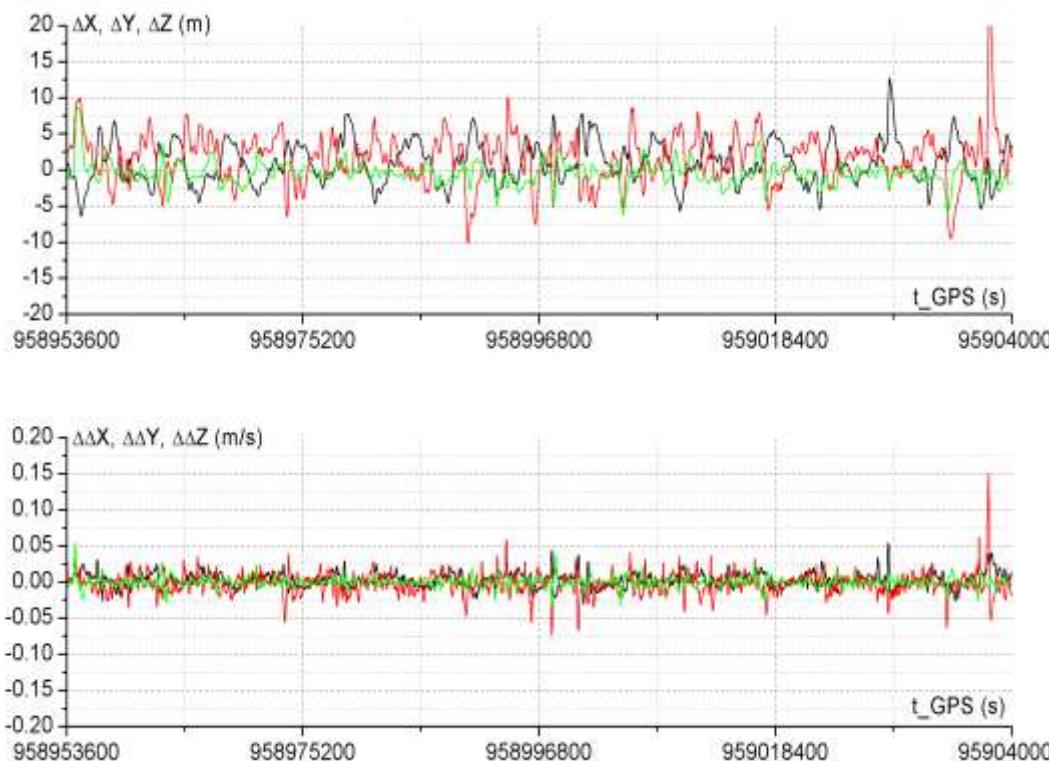


Рис. 10.10 Ошибки оценки орбиты МКС сформированной по моделируемым "сырым" измерениям АСН (в ОСК) для альманаха GPS из 30 НС на участке свободного полета МКС при $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с.

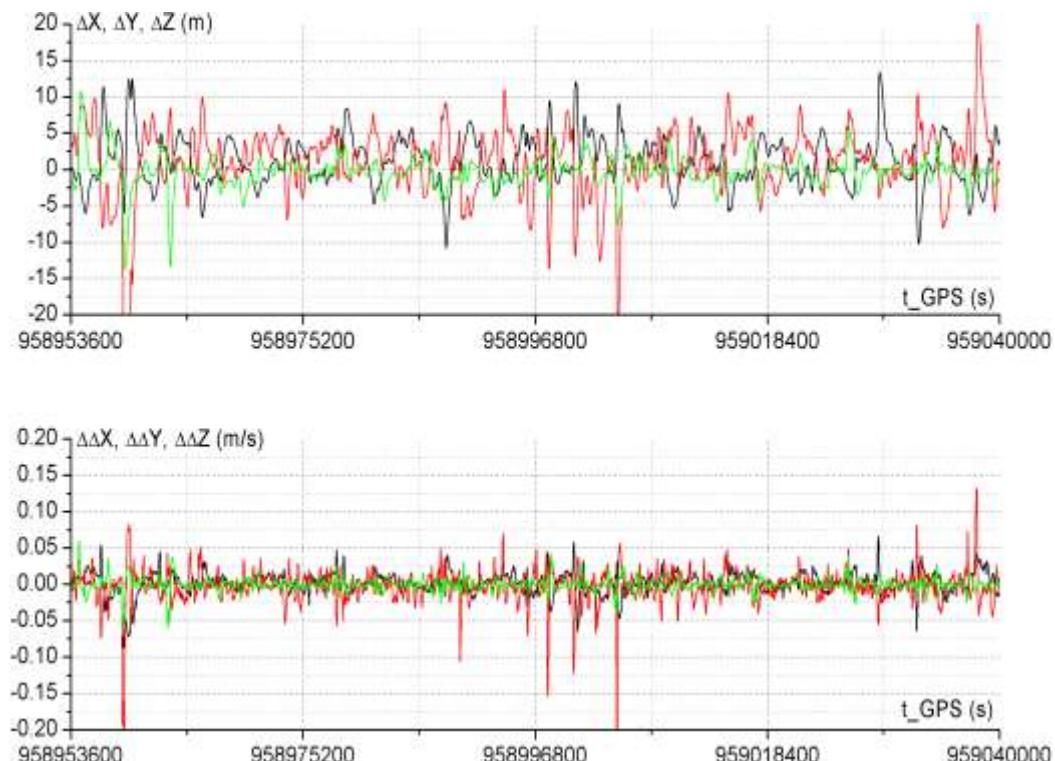


Рис. 10.11 Ошибки оценки орбиты МКС сформированные по моделируемым "сырым" измерениям АСН (в ОСК) для альманаха GPS из 23 НС на участке свободного полета МКС при $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с.

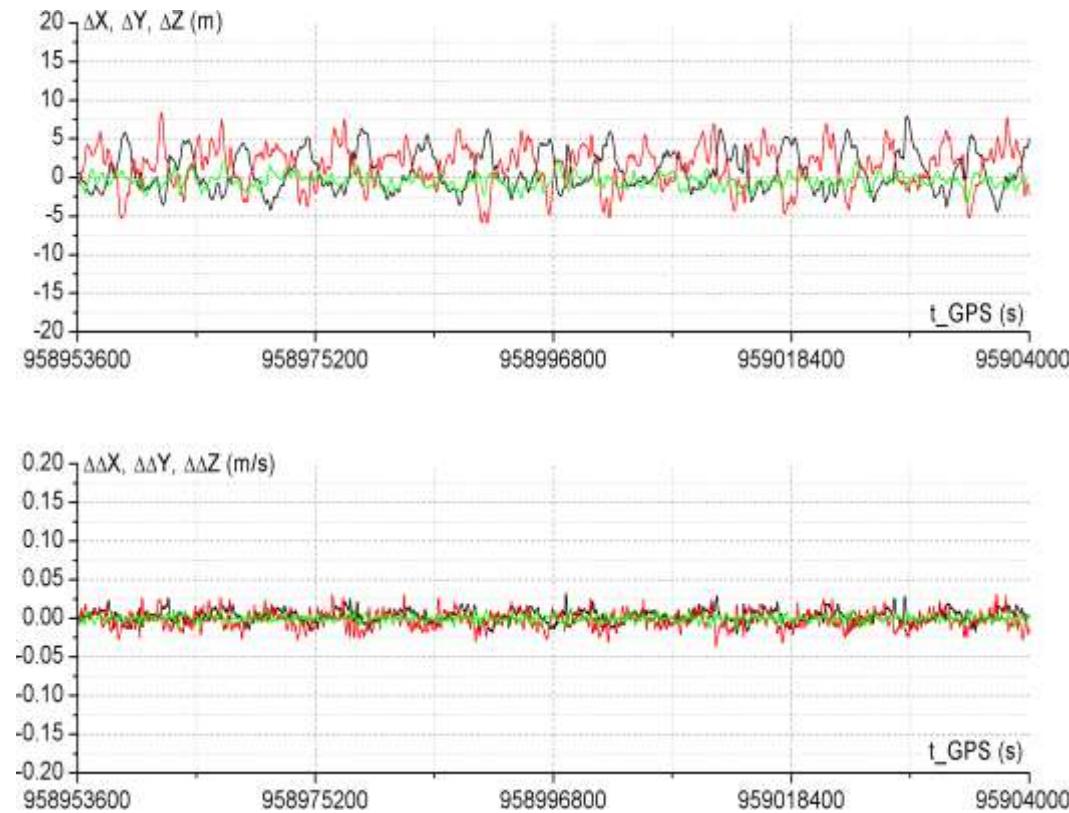


Рис. 10.12 Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС для альманаха из 54 НС на участке пассивного полета МКС при постоянных времени фильтра $T_x=1000$ с, $T_v=10$ с, $T_p=300$ с.

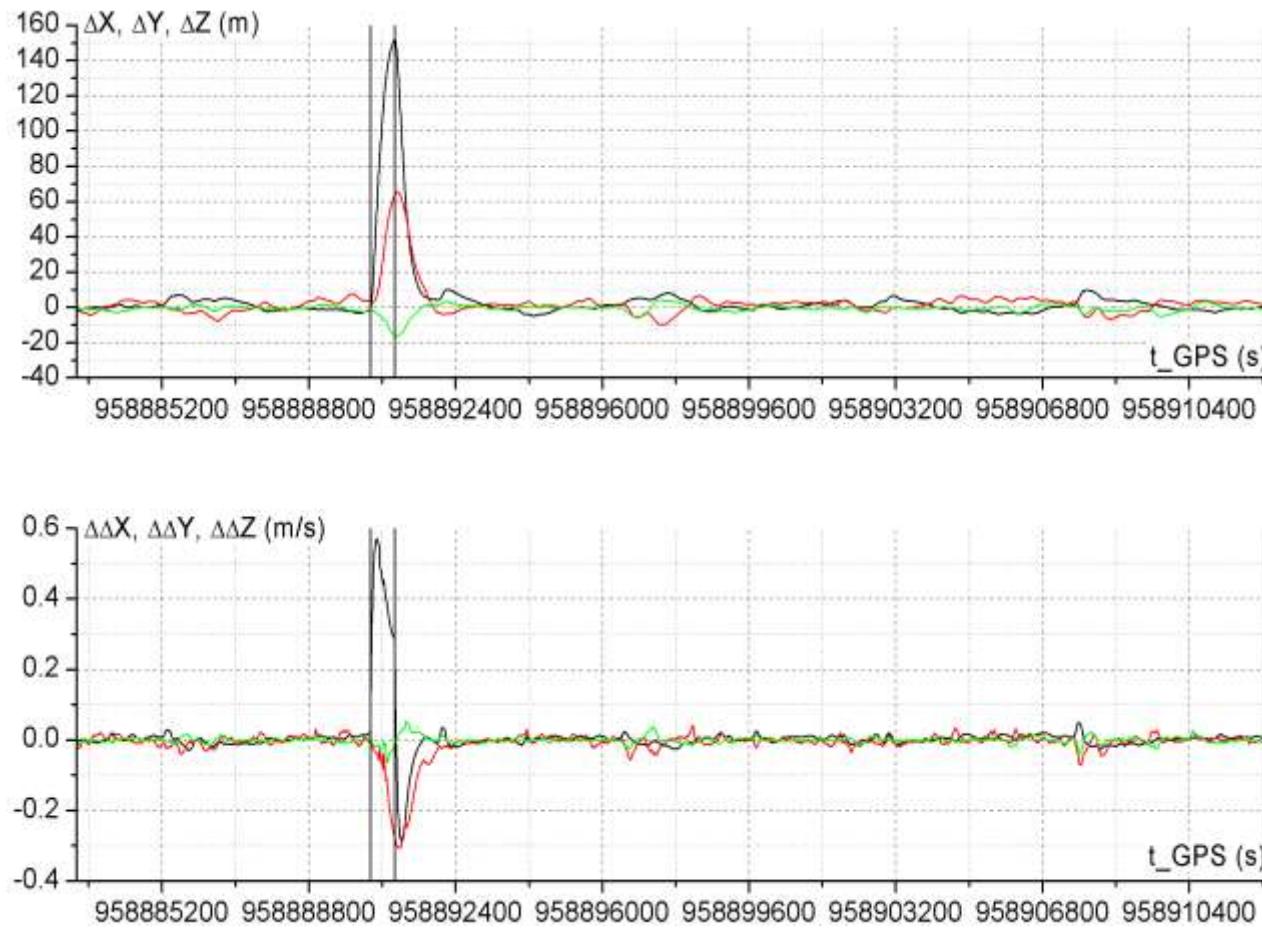


Рис. 10.13 Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с 2 при постоянных времени фильтра $T_X=1000$ с, $T_V=10$ с, $T_p=300$ с.

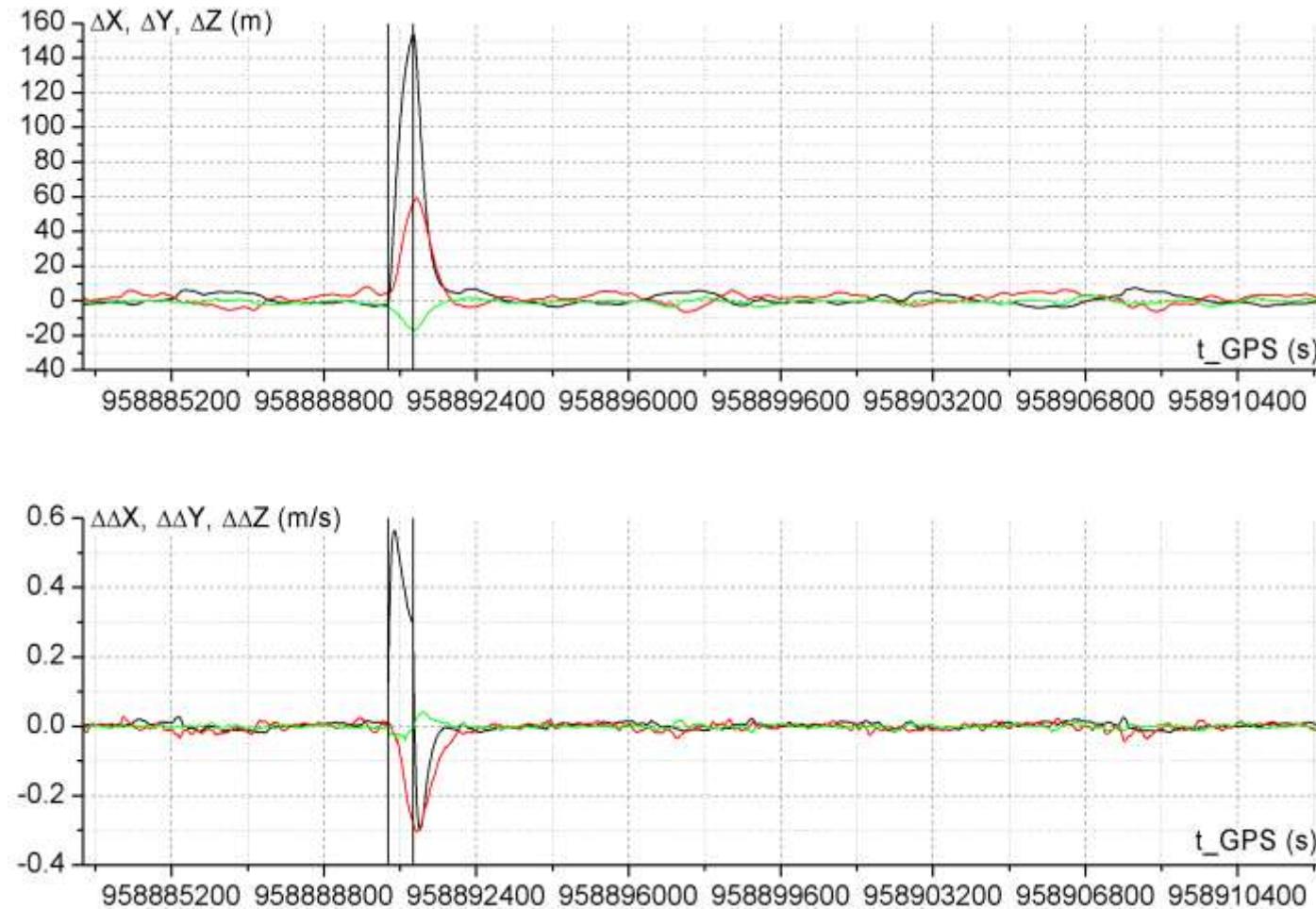


Рис. 10.14 Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с^2 при постоянных времени фильтра $T_x=1000 \text{ с}$, $T_v=10 \text{ с}$, $T_p=300 \text{ с}$.

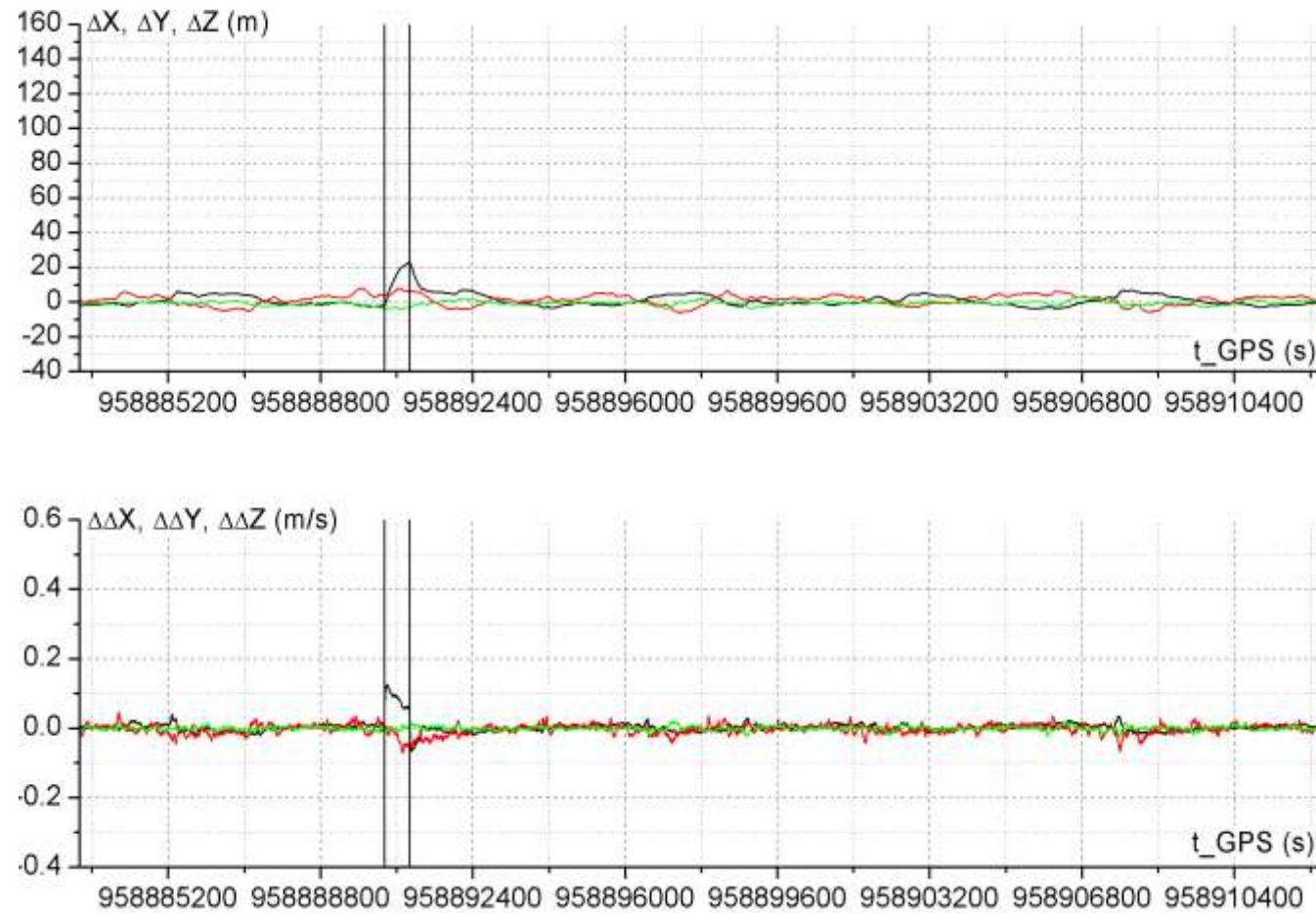


Рис. 10.15 Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с^2 при постоянных времени фильтра $T_x=1000 \text{ с}$, $T_v=3 \text{ с}$, $T_p=300 \text{ с}$.

10.6 Алгоритм формирования оценки орбиты и кажущейся скорости при больших ускорениях от корректирующих двигателей

В главах 8, 9, 10 рассмотрены алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН, обеспечивающие повышение точности формируемой оценки орбиты. При этом значительное повышение точности достигается в случае свободного полета КА без выполнения коррекции орбиты с помощью реактивных двигателей. Было показано, например, что для МКС, управляемой с помощью гиродинов с разгрузкой с помощью гравитационного момента (без работы РД), точность формируемой оценки орбиты достигает от 3 до 5 м по координатам и ~ 3 мм/с по скорости. При этом выполняется оценка и компенсация текущего аэродинамического ускорения. Однако точность формируемой оценки существенно ухудшается при наличии даже незначительных ускорений от двигателей. Так рис. 10.1 демонстрирует «развал» фильтра, реализованного на МКС во время коррекции орбиты станции с помощью двигателей корабля «Прогресс», когда ускорение от двигателей составляло величину $\sim 10^{-3}$ м/с².

Ускорения такого порядка часто реализуются на КА различных классов для обеспечения коррекции орбиты. Поэтому для этих случаев были разработаны алгоритмы динамической фильтрации полных «сырых» измерений АСН, позволяющих повышать точность формируемой оценки орбиты на фоне работы корректирующих двигателей. Выбором определенной комбинации постоянных времени фильтра удалось обеспечить с одной стороны значительное повышение точности оценки орбиты при выключенных двигателях и незначительное снижение точности на участке коррекции орбиты. Например, графики ошибок формируемой оценки орбиты, приведенные на рис. 10.3 демонстрируют, что на участке с

выключенными двигателями ошибки оценки орбиты МКС составляли 10 м по координатам, а на участке с работающими двигателями – не превышали 20 м.

Увеличение ускорений от двигателей приводит к пропорциональному росту ошибок вектора состояния. На многих КА ускорения от двигателей составляют величину порядка 1 м/с², а могут и существенно превышать указанную величину. В этих случаях рассмотренные алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН не могут обеспечивать формирование оценки орбиты с достаточной точностью на фоне работающих двигателей. Тогда точность формируемой оценки орбиты будет соответствовать точности КСВ, а точность формируемой кажущейся скорости – точности КСВ по скорости. Рассмотрим алгоритм формирования оценки орбиты на фоне больших ускорений КА от двигателей и оценки кажущегося ускорения относительно ИСК.

Пусть мы имеем измерения КСВ АСН на i и $i+1$ -м шагах: $\bar{X}_i, \Delta\bar{X}_i, \bar{X}_{i+1}, \Delta\bar{X}_{i+1}$. В качестве оценки вектора состояния КА будем рассматривать вектор измерений КСВ, включающий векторы $\Delta\bar{X}_i$ и $\Delta\bar{X}_{i+1}$ с их привязкой к системному времени. Требуется определить вектор кажущегося ускорения \bar{a}_{ic} в ИСК на i -м шаге по измерениям АСН на i и $i+1$ -м шагах. Векторы состояния КА на i и $i+1$ -м шагах относительно ГСК, измеряемых АСН, связаны рекуррентным соотношением (3.65):

$$\begin{aligned} \Delta X_{Gi+1} &= (E + 2\Omega + \Omega^2) \Delta X_{Gi} - (E + \Omega) \Omega^2 \bar{X}_{Gi} + (E + \Omega) A_{Ii-Gi} \bar{a}_i \\ \bar{X}_{Gi+1} &= \bar{X}_{Gi} + \Delta\bar{X}_{Gi+1} \\ \bar{a}_i &= \bar{a}_{Gi} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{Gi} \Delta t^4 + \bar{a}_{Ii} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{Ii} \Delta t^4, \end{aligned} \quad (10.56)$$

где Ω – матрица вращения Земли;

Δt – время между i и $i+1$ -м измерениями;

\bar{a}_Γ - внешние гравитационные ускорения;

\bar{a}_H - внешние инерциальные ускорения (например, от двигателей).

Вектор \bar{a}_Γ известен с высокой точностью из модели движения КА. Вектор $\ddot{\bar{a}}_\Gamma$ для околокруговых орбит с высокой точностью может быть представлен в соответствии с формулой (3.11) в виде:

$$\ddot{\bar{a}}_\Gamma = -\omega_0^2 \bar{a}_\Gamma \quad (10.57),$$

где ω_0 – орбитальная угловая скорость КА.

Вектор состояния на i -й момент времени $\bar{X}_{G_i}, \Delta\bar{X}_{G_i}$ измеряется АСН на i -м шаге. Введем обозначение: $\Delta\bar{X}_{G_{i+1}}^*$ – значение вектора $\Delta\bar{X}_{G_{i+1}}$ при отсутствии ускорения от двигателей \bar{a}_{H_i} на i -м шаге.

Вектор $\Delta\bar{X}_{G_{i+1}}^*$ может быть вычислен по алгоритму (10.56) при нулевом значении вектора \bar{a}_{H_i} . Тогда для определения вектора \bar{a}_{H_i} получим уравнение:

$$\Delta\bar{X}_{G_{i+1}} - \Delta\bar{X}_{G_{i+1}}^* = A_{H-G_i} \left(\bar{a}_{H_i} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{H_i} \Delta t^4 \right) \quad (10.58)$$

Из равенства (10.58) получим значение вектора ускорения \bar{a}_{H_i} относительно ИСК:

$$\bar{a}_{H_i} = \frac{1}{\Delta t^2} A_{H-G_i}^T \left(\Delta\bar{X}_{G_{i+1}} - \Delta\bar{X}_{G_{i+1}}^* \right) - \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{H_i} \Delta t^2 \quad (10.59)$$

В формуле (10.59) матрица A_{H-G_i} формируется в БИНС, Δt для АСН-К равна 1 с, $\Delta\bar{X}_{G_{i+1}}$ определяется АСН, $\Delta\bar{X}_{G_{i+1}}^*$ по алгоритму (10.56) для нулевого значения вектора \bar{a}_{H_i} . Проблему представляет определение вектора $\ddot{\bar{a}}_{H_i}$. Если вектор ускорения \bar{a}_H обусловлен работой двигателя, то за исключением моментов начала и конца работы вторая производная от тяги

пренебрежимо мала по сравнению с тягой (величиной вектора \bar{a}_H). С учетом коэффициента $\frac{1}{12}$, вектором $\ddot{\bar{a}}_H$, последним слагаемым равенства (10.59), можно пренебречь практически без потери точности.

Вычисленный вектор \bar{a}_H может быть преобразован к ССК по формуле:

$$\bar{a}_{CCKi} = A_{H-Ci} \bar{a}_{Hi} \quad (10.60),$$

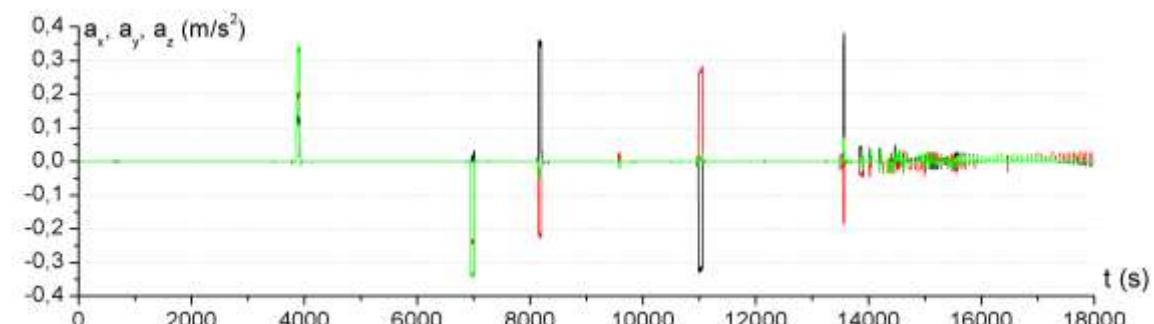
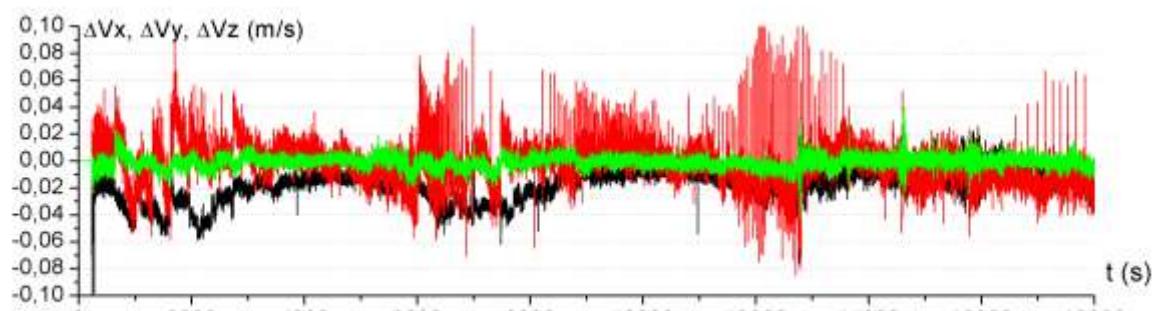
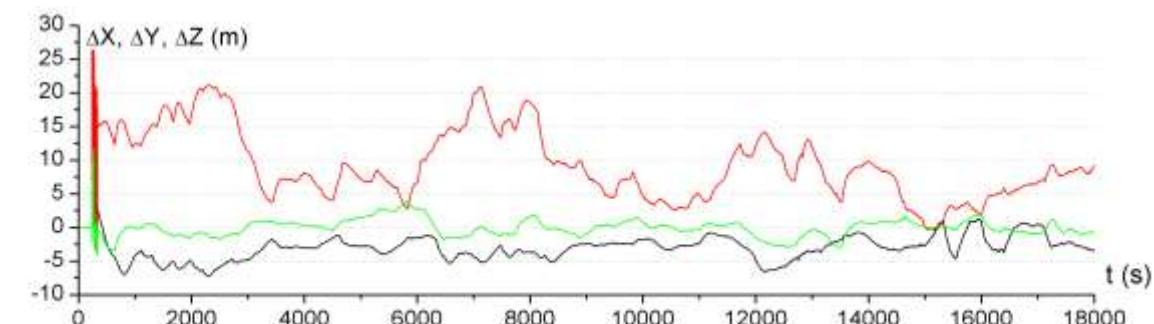
где A_{H-Ci} – матрица перехода от ИСК к ССК.

Таким образом, используя в качестве текущего вектора состояния непосредственно измерения КСВ АСН, можно непрерывно формировать вектор состояния на фоне значительных возмущений от корректирующих двигателей. При этом возмущения орбиты не влияют на точность измерений АСН. Сами возмущения могут быть оценены по формулам (10.56), (10.59). Сказанное демонстрируют графики, приведенные на рис. 10.16, полученные по результатам моделирования дальнего и ближнего сближения корабля «Союз» с МКС. В процессе сближения на дальнем расстоянии работают корректирующие двигатели (КД), создающие ускорение $\sim 0,5 \text{ м/с}^2$, на малых расстояниях сближение обеспечивается с помощью двигателей причаливания и ориентации (ДПО). Циклограмма включения КД и ДПО приведена на нижнем графике рис. 10.16. На верхнем графике представлены ошибки КСВ по координатам, на среднем – ошибки КСВ по скорости. Из графиков видно, что работа двигателей КД и ДПО не влияет на измерения АСН. Точность измерений КСВ по координатам составляет 10 – 20 м. Более высокие ошибки (до 20 м) отмечаются по вертикали ΔY на солнечной стороне части орбиты, обусловленные ионосферными задержками.

Ошибки по скорости составляют 3 – 5 см/с и также в основном обусловлены влиянием ионосферы на солнечной части орбиты. Отметим, что наблюдаемые на графиках ошибок по скорости одномоментные всплески обусловлены дискретностью модели ионосферы Земли. В реальности такие всплески отсутствуют.

Рис. 10.16 Графики ошибок КСВ по координатам (верхний график) и скорости (средний график) на фоне работы СКД и ДПО.

Циклограмма включений двигателей на участках дальнего и ближнего сближения (нижний график).



Ускорения от двигателей

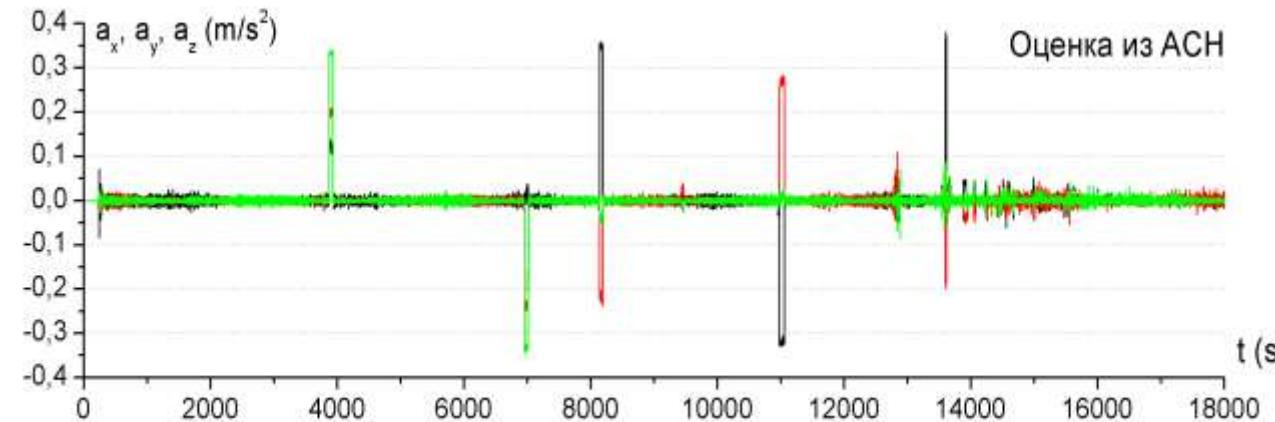
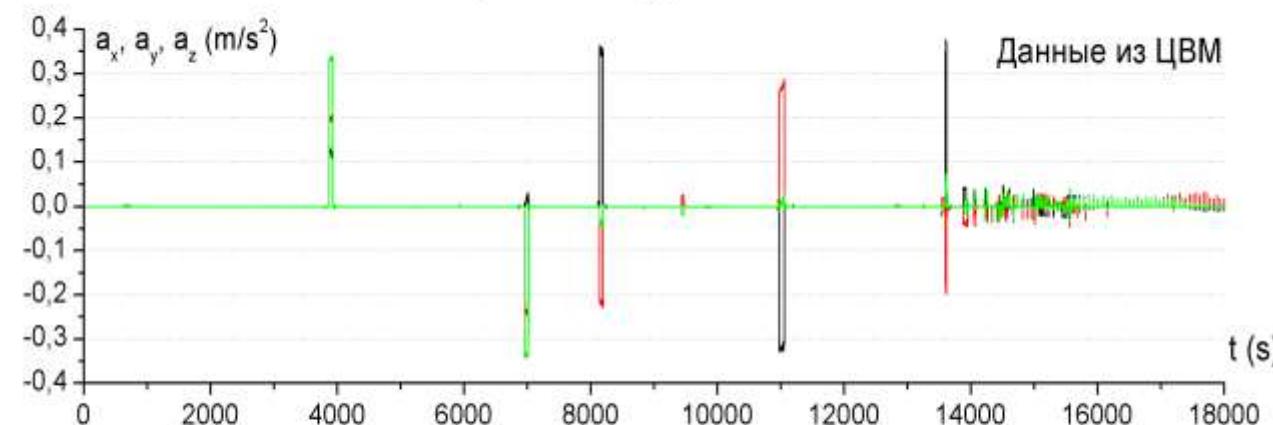


Рис. 10.17 Графики ускорений от двигателей в ССК на участках дальнего и ближнего сближения.
 Верхний график – реальное ускорение, нижний график – ускорение, измеренное АЧН.

На рис. 10.17 для этого же участка моделирования дальнего и ближнего сближения КА «Союз» с МКС приведены графики ускорений от двигателей к ИСК на участках дальнего и ближнего сближения. На верхнем графике представлено реальное ускорение в ИСК на нижнем – ускорение оцененное по измерениям АСН. Из приведенных графиков следует, что оцененное ускорение с высокой точностью совпадает с реальным. Оцененное ускорение имеет шумовую составляющую амплитудой $\sim 0,02 \text{ м/с}^2$, обусловленную ошибками измерений АСН.

Возможность оценки ускорений от двигателей с помощью АСН придает АСН новое качество. Совместно с возможностью определения ориентации определение ускорений позволяет на КА с помощью АСН решить задачи БИНС. Например, одной из таких задач является управление включениями КД при коррекции орбиты. Для этого на КА используются акселерометры, установленные по оси КД. При включении двигателя акселерометр осуществляет интегрирование продольного ускорения и по достижении кажущейся скорости (интеграла от ускорения) заданного значения осуществляет выключение КД.

Аналогичная задача может быть решена с помощью АСН путем интегрирования значения кажущегося ускорения \bar{a}_{CCKi} , сформированного по формуле (10.60). Ожидаемая ошибка определения вектора кажущейся скорости составляет 5-10 см/с, что соответствует точности формируемых импульсов скорости на участке дальнего сближения кораблей «Союз» и «Прогресс» с МКС.

Глава 11 Навигация высокоорбитальных космических аппаратов по измерениям ГСНС

В предыдущих главах рассматривались вопросы навигации низкоорбитальных КА. К низким орбитам с точки зрения навигации по измерениям ГСНС будем относить орбиты, на которых в верхней полусфере (над местным горизонтом) всегда или почти всегда находится четыре и более НС. Типовой график видимости НС *GPS* антенной АСН-М МКС, направленной в зенит, представлена на рис. 7.1. Среднее число одновременно видимых спутников на графике составляет ~ 8 НС, их число лежит в диапазоне $5 \div 12$ НС. С увеличением высоты орбиты число видимых спутников уменьшается, появляются участки орбиты, на которых число НС меньше четырёх. Дальнейшее увеличение высоты приводит к увеличению количества таких участков и их длительности. На высоте более 2000 км участки орбиты с числом видимых НС меньше четырёх начинают по суммарной длительности превышать участки с числом НС более четырёх. Поэтому высоту 2000 км условно будем считать границей между низкими и высокими орбитами. В качестве примера низкоорбитального КА рассматривалась МКС. Возможности ГСНС в части решения навигационной задачи МКС исследовались как путём моделирования измерений АСН, так и с использованием реальных лётных данных, полученных на МКС в процессе проведения различных экспериментов, а также в процессе штатной работы АСН-М МКС. В настоящей главе в качестве примера высокоорбитальных КА будут рассматриваться спутники, находящиеся на ВЭО, ГСО, а также НС ГЛОНАСС и *GPS*. Особенности функционирования АСН на ВЭО и ГСО будут исследоваться путём моделирования с использованием разработанных моделей движения КА. Результаты моделирования можно считать верными, если есть абсолютная уверенность в правильности разработанных моделей. Сегодня существует уникальная возможность проведения такой верификации с

использованием высокоточных эфемерид спутников ГЛОНАСС и *GPS*. В Интернете для этих спутников представлены реальные высокоточные эфемериды, полученные постобработкой передаваемых потребителю *broadcast*-эфемерид [с. 1] с использованием дополнительных измерений. Эфемериды представлены в виде векторов координат центров масс спутников в ГСК (*WGS-84*), с дискретностью 15 мин. Их точность составляет единицы сантиметров (декларируется точность эфемерид *GPS* – 3 см, ГЛОНАСС – 5 см). Это означает, что для спутников ГЛОНАСС и *GPS* исследования можно проводить с практически идеальными данными об их движении. По этим данным можно с высокой точностью верифицировать разработанные модели движения КА, используемые как в наземных исследовательских стендах, так и в бортовом программном обеспечении разрабатываемых объектов. Такая верификация была выполнена в Главе II.

Было показано, что для высокоорбитальных КА разработанные модели движения КА при трехсуточном прогнозе дают суммарную ошибку прогноза порядка трех метров относительно точной орбиты, что соответствует величине неучтенных возмущающих ускорений $\sim 10^{-9}$ м/с².

Другим источником ошибок моделирования являются ошибки моделирования самих измерений АСН. Здесь следует отметить, что сравнение результатов моделирования измерений с реальными измерениями АСН, выполненными как на Земле, так и на МКС, позволяют сделать заключение, что используемые для проводимого анализа модели измерений АСН близки к измерениям реальных АСН, работающих, соответственно, на Земле или на орбите КА. Поэтому с большой долей уверенности можно сказать, что представленные ниже ожидаемые характеристики систем навигации высокоорбитальных КА близки характеристикам проектируемых реальных систем, реализующих предлагаемые алгоритмы решения соответствующих задач.

11.1 Навигация высокоэллиптических КА по измерениям АСН в окрестности перигея

Навигация высокоэллиптических КА с использованием АСН существенно отличается от навигации низкоорбитальных КА. На низкоорбитальных КА антенна АСН, направленная в зенит, всегда «видит» достаточное количество навигационных спутников (НС) для одномоментного решения навигационной задачи и формирования сообщений с КСВ (координаты, скорость, время). Измеренные КСВ непрерывно поступают в динамический фильтр, формирующий более точную (по сравнению с КСВ) оценку орбиты. В Главе 7 было показано, что динамический фильтр КСВ, реализованный на МКС, обеспечивает точность оценки орбиты 3-5 м при условии, что бортовая модель движения КА, реализованная в фильтре, включает модель гравитационного поля Земли порядка не ниже 72×72 и модель аэродинамического торможения. При этом нет необходимости в модели движения учитывать такие возмущающие факторы, как влияние Луны и Солнца, сил солнечного давления.

Для высокоэллиптических КА возможны два принципиально разных метода измерений АСН и формирования орбиты по этим измерениям:

- измерения АСН по «прямым» НС;
- измерения АСН по «обратным» НС.

Измерения по «прямым» НС предполагают, что антенна АСН направлена по местной вертикали (как и у низкоорбитальных КА). Для высокоэллиптических КА в поле зрения «зенитной» антенны сигналы НС могут попадать лишь на коротком интервале пролета КА в окрестности перигея. На остальном интервале времени оценка должна формироваться путем прогноза орбиты, сформированной по измерениям АСН в окрестности перигея. Точность оценки орбиты в этом случае во многом будет определяться точностью бортовой модели движения КА. В данном случае основными возмущающими факторами кроме аномалии

гравитационного поля Земли будут ошибки модели гравитационного влияния Луны и Солнца, а также сил солнечного давления. Аэродинамическим торможением можно пренебречь.

Измерения по «обратным» НС предполагают, что антенна АСН направлена на Землю, и измерения ведутся по «пригоризонтным» НС. Измерения по «обратным» НС характерны тем, что на большей части траектории число НС, видимых антенной АСН, меньше 4-х, минимально необходимых для одномоментного решения навигационной задачи. В этом случае в качестве измеряемых параметров должны использоваться, например, псевдодальности. Несмотря на то, что при работе по «обратным» спутникам существуют достаточно длительные интервалы времени, на которых измерения вообще отсутствуют, тем не менее, на большей части траектории, включая участок апогея, измерения могут выполняться, и может проводиться коррекция оценки орбиты, формируемой фильтром. Поэтому измерения по «обратным» НС обеспечивают более высокую точность формируемой оценки орбиты по сравнению с измерениями по «прямым» НС. Тем не менее, АСН, работающая по прямым НС на низких орbitах, обладает весьма важным преимуществом: она реально существует, достаточно хорошо отработана и широко используется на различных КА. АСН, работающая по «обратным» спутникам, аппаратно более сложная. Она должна работать по более слабому сигналу НС, а также из-за больших разбросов расстояний между КА и НС обеспечивать устойчивую работу в большом диапазоне мощности принимаемых сигналов.

В настоящем разделе приведено исследование вопросов точности навигации высокоэллиптических КА по измерениям АСН в окрестности перигея [71]. Будем рассматривать орбиты КА с высотой перигея ~ 1500 км, апогея ~ 40000 км и наклонением $\sim 62^\circ$. Период такой орбиты равен ~ 12 час.

Определим следующую стратегию решения навигационной задачи.

При подлете к окрестности перигея антенна АСН направляется по местной вертикали, приемник АСН начинает отслеживать видимые НС и при уровне $GDOP$ видимых НС меньше порогового значения (~5) формирует КСВ (координаты, скорость, время). Навигационный процессор АСН реализует динамическую фильтрацию измерений и по серии измерений формирует оценку орбиты КА. На участках отсутствия измерений КСВ оценка орбиты формируется путем прогноза движения КА. Аналогичная стратегия решения навигационной задачи реализована в АСН-М. Рекуррентный алгоритм динамической фильтрации измерений АСН представлен в Главе 7. Приведем здесь этот алгоритм:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+1} &= A^T \left(\bar{\xi}_{un+1} - \hat{\xi}_{n+1}^* \right);; W_{n+1} = \lambda^2 B_{nn+1}^{-1T} W_n B_{nn+1}^{-1} + A^T A; \\ \Delta \bar{\xi}_{n+1}^* &= W_{n+1}^{-1} \bar{P}_{n+1}; \quad \hat{\xi}_{n+1}^* = \hat{\xi}_{n+1}^* + \Delta \bar{\xi}_{n+1}^*; \end{aligned} \quad (11.1)$$

где $\bar{\xi}_n^*$ – формируемая оценка 6-мерного вектора состояния на n -м шаге;

$\hat{\xi}_{n+1}^*$ – прогнозируемая оценка вектора состояния на $(n+1)$ -м шаге, формируемая из $\bar{\xi}_n^*$, путем интегрирования уравнений движения от момента n до $n+1$;

$\bar{\xi}_{un+1}$ – измеренный вектор состояния на $(n+1)$ -м шаге, формируется из измерений КСВ АСН;

$A=(E_3 0_3)$ – матрица размерности 3×6 ;

E_3 – единичная матрица размерности 3;

0_3 – нулевая матрица размерности 3;

W_n – накапливаемая матрица измерений ($W_0=0$);

B_{nn+1} – матрица преобразований ошибок вектора состояния от n -го шага к $(n+1)$ -му;

λ – константа, близкая к 1.

Константа λ определяет постоянную времени фильтра Т и связана с ней соотношением:

$$\lambda = \frac{T}{T+1}. \quad (11.2)$$

Постоянная времени Т в АСН-М МКС выбрана равной 1 витку (5500 сек). С некоторой степенью приближения можно считать, что формируемая фильтром (11.1) оценка текущего вектора состояния $\bar{\xi}_{n+1}^*$ определяется по измерениям АСН, полученным на интервале времени Т, который предшествует текущему моменту. Точность формируемой фильтром оценки существенно зависит от точности бортовой модели движения КА.

11.1.1 Исследование зависимости ошибок формируемой оценки орбиты от параметров динамического фильтра и различных возмущающих факторов: ошибок измерений АСН, ошибок моделирования гравитационного поля Земли, гравитационного воздействия Луны и Солнца, сил солнечного давления

Минимизация ошибок формируемой оценки орбиты требует исследования влияния различных возмущающих факторов на точность этой оценки. Такое исследование было проведено путем моделирования.

Оценим длительность интервала измерений в окрестности перигея.

На рис. 11.1 приведён график *GDOP* для альманаха *GPS* из 30 НС с максимальным уровнем 10. Во внимание принимались НС, попадающие в поле зрения антенны АСН, направленной в зенит и имеющей диаграмму направленности шириной 170°.

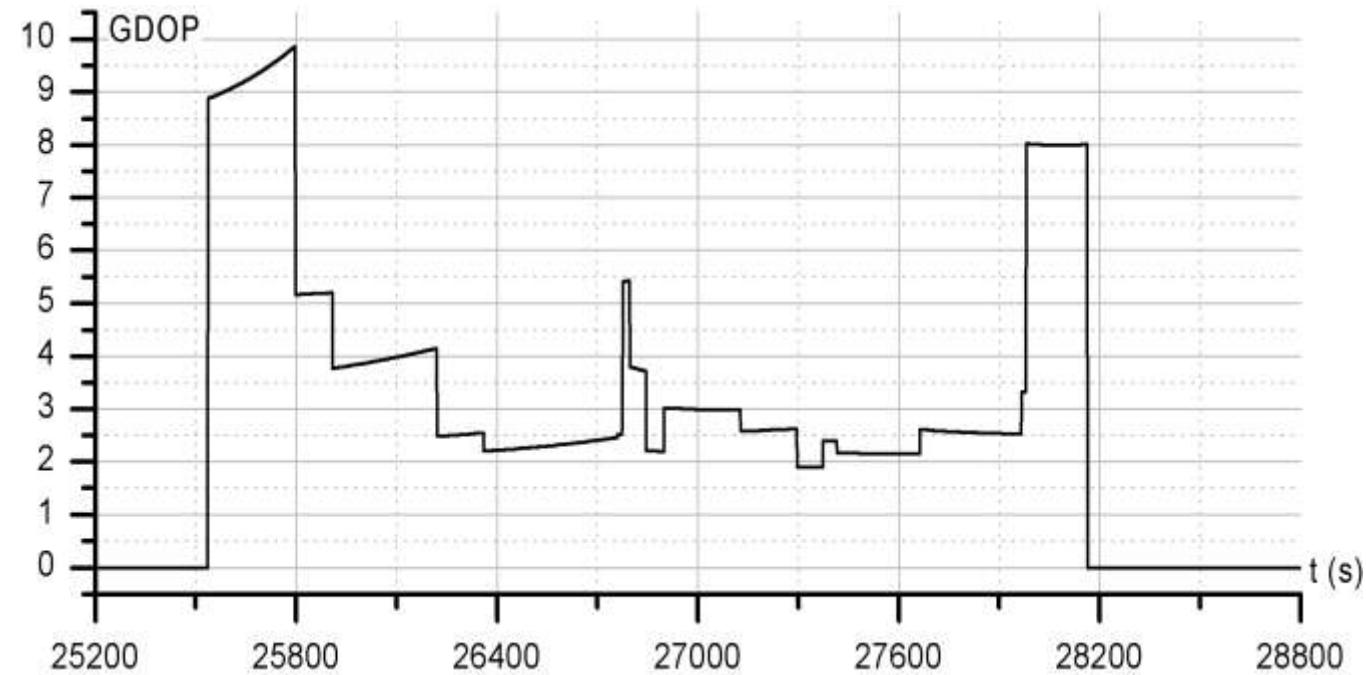


Рис. 11.1 Геометрический фактор $GDOP$ для КА на ВЭО в окрестности перигея для альманаха GPS из 30 спутников

Из приведенного графика видно, что длительность такого интервала измерений составляет ~ 45 мин. Однако начало и конец интервала имеют повышенное значение $GDOP$ и, следовательно, повышенные ошибки измерений. Для исключения таких ошибок обычно ограничиваются измерениями с порогом по $GDOP$, равным 3÷5.

На рис. 11.2 приведен график числа используемых НС с порогом по $GDOP$, равным 3. Из графика видно, что длительность интервала измерений в этом случае составляет ~ 25 мин, количество используемых для решения навигационной задачи НС лежит в диапазоне 6-8.

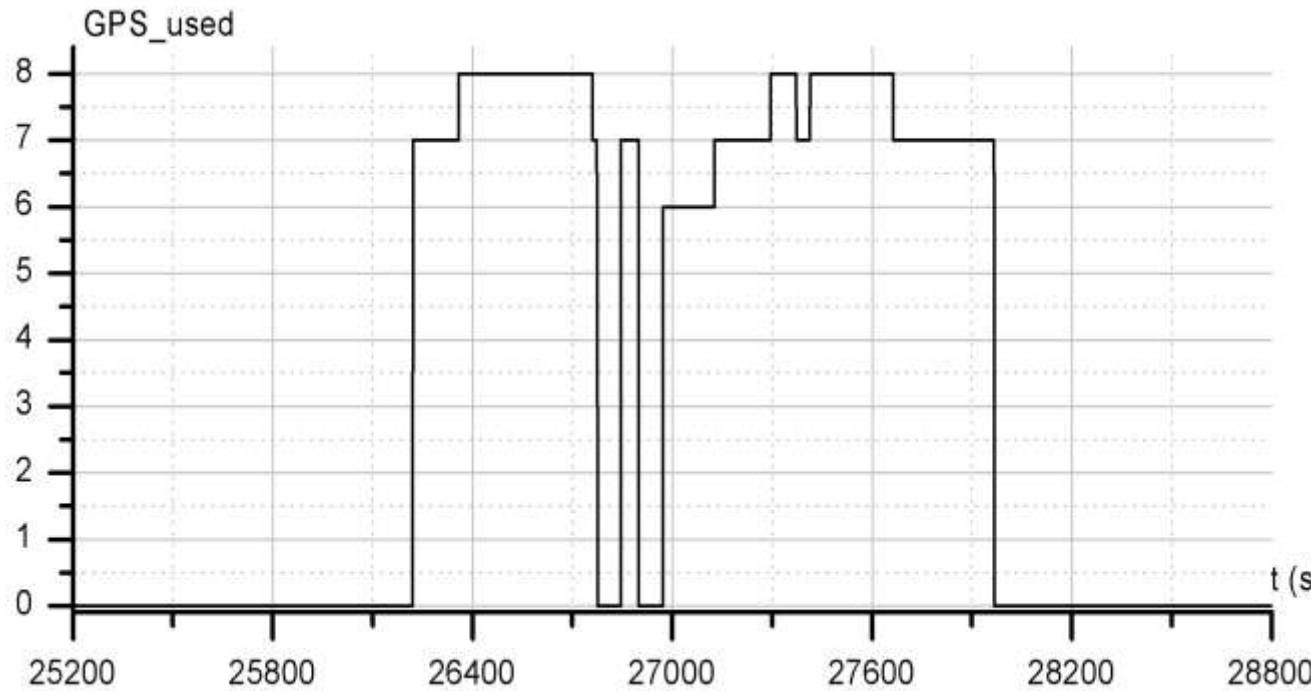
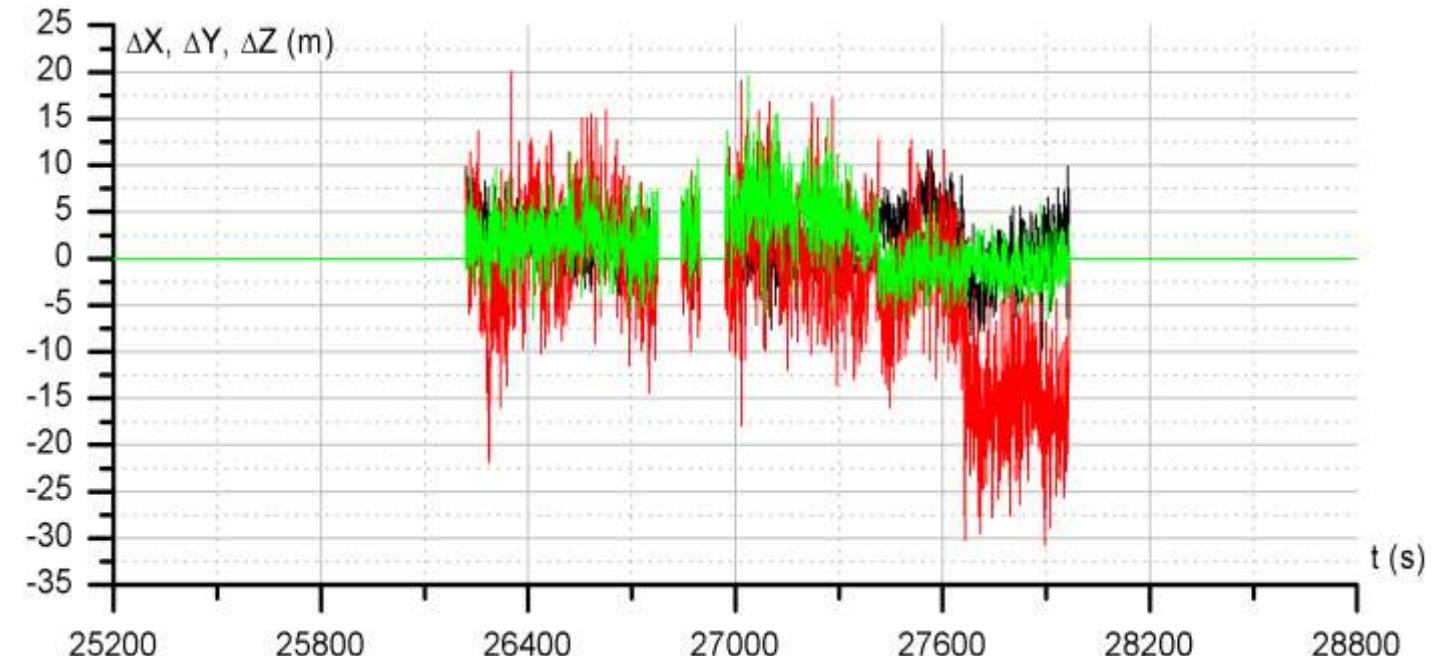


Рис. 11.2 Число видимых НС для $GDOP \leq 3$.

На рис. 11.3 для этого интервала приведены моделируемые ошибки измерений АСН для трех каналов в орбитальной системе координат.

Рис. 11.3 Ошибки КСВ по координатам в ОСК для $GDOP \leq 3$.



В целом представленный график моделируемых ошибок измерений АСН соответствует графику реальных ошибок измерений АСН-М МКС, приведенному в Главе 8. Отличие состоит в том, что моделируемые ошибки несколько выше реальных ошибок АСН-М МКС. Если в лётных данных ~95% ошибок измерений АСН-М не превышали ± 5 м, то моделируемые ошибки в основном лежат в диапазоне ± 10 м. В тоже время реальные измерения АСН-М МКС содержат достаточно большие по величине ошибки (достигающие 40 м), обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС. В отличие от МКС, высокоэллиптические КА имеют существенно меньшие габариты. Для их конструкций ошибки, обусловленные переотражениями, не превышают 10-15 м. В приведенных на рисунке графиках

эти ошибки сливаются с шумовыми ошибками приемника АСН. Ошибки измерений АСН приводят к ошибкам оценки орбиты, формируемой фильтром.

На рис. 11.4 приведены графики модуля ошибок оценки орбиты, обусловленных только ошибками измерений АСН для различных постоянных времени фильтра T ($T=1\text{час}$, 12 час , 24 часа).

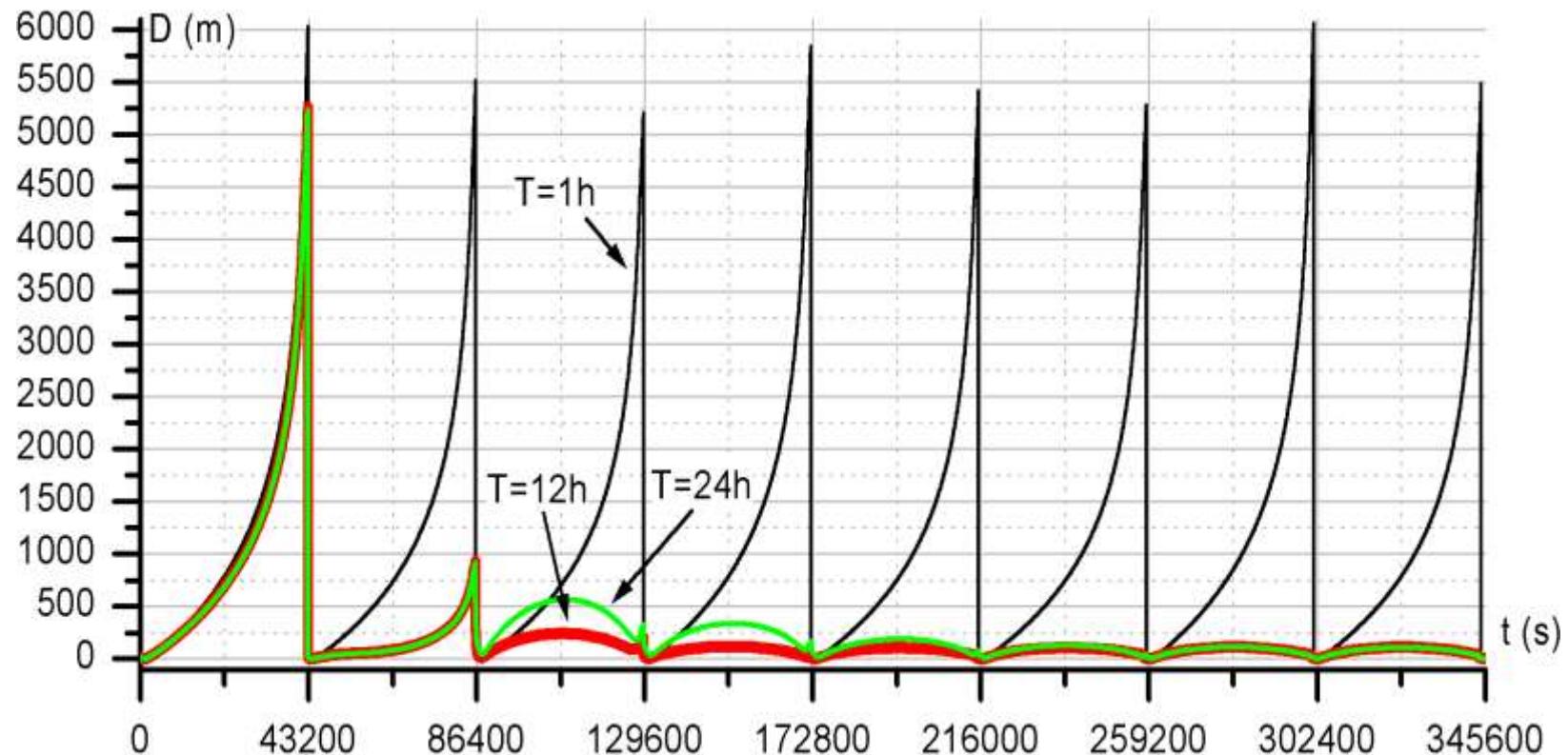


Рис. 11.4 Ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН для различных постоянных времени фильтра.

Из приведённых графиков следует, что при постоянной времени фильтра $T = 1$ час ошибка оценки орбиты в окрестности апогея по положению составляет ~ 1 км, при подлете к области измерений в окрестности перигея – ~ 6 км. При значениях постоянной времени 12 часов и 24 часа эти ошибки на порядок уменьшаются после прохождения второго участка измерений (через виток после начала работы), а через 2 – 4 витка после начала работы система приходит в установившееся состояние, в котором ошибки оценки орбиты на всем ее протяжении не превышают 100 м. При этом для $T=12$ часам установившееся состояние начинается практически через 2 витка после начала работы, для $T=24$ час. – через 4 витка. Постоянная времени $T=12$ час обеспечивает как наилучшие точностные выходные характеристики, так и минимальное время выхода в установившееся состояние. Поэтому дальнейшее исследование влияния различных возмущающих факторов на точность формируемой оценки орбиты будем проводить для постоянной времени фильтра 12 часов.

Рассмотрим влияние ошибок бортовой модели гравитационного поля Земли на точность формируемой фильтром орбиты. Движение КА будем моделировать с использованием модели гравитационного поля Земли порядка 144×144 при отсутствии каких-либо других возмущающих факторов.

В бортовой модели движения КА последовательно используем модель гравитационного поля Земли порядка 2×0 , 8×8 , 72×72 , а измерения АСН выполняем без ошибок.

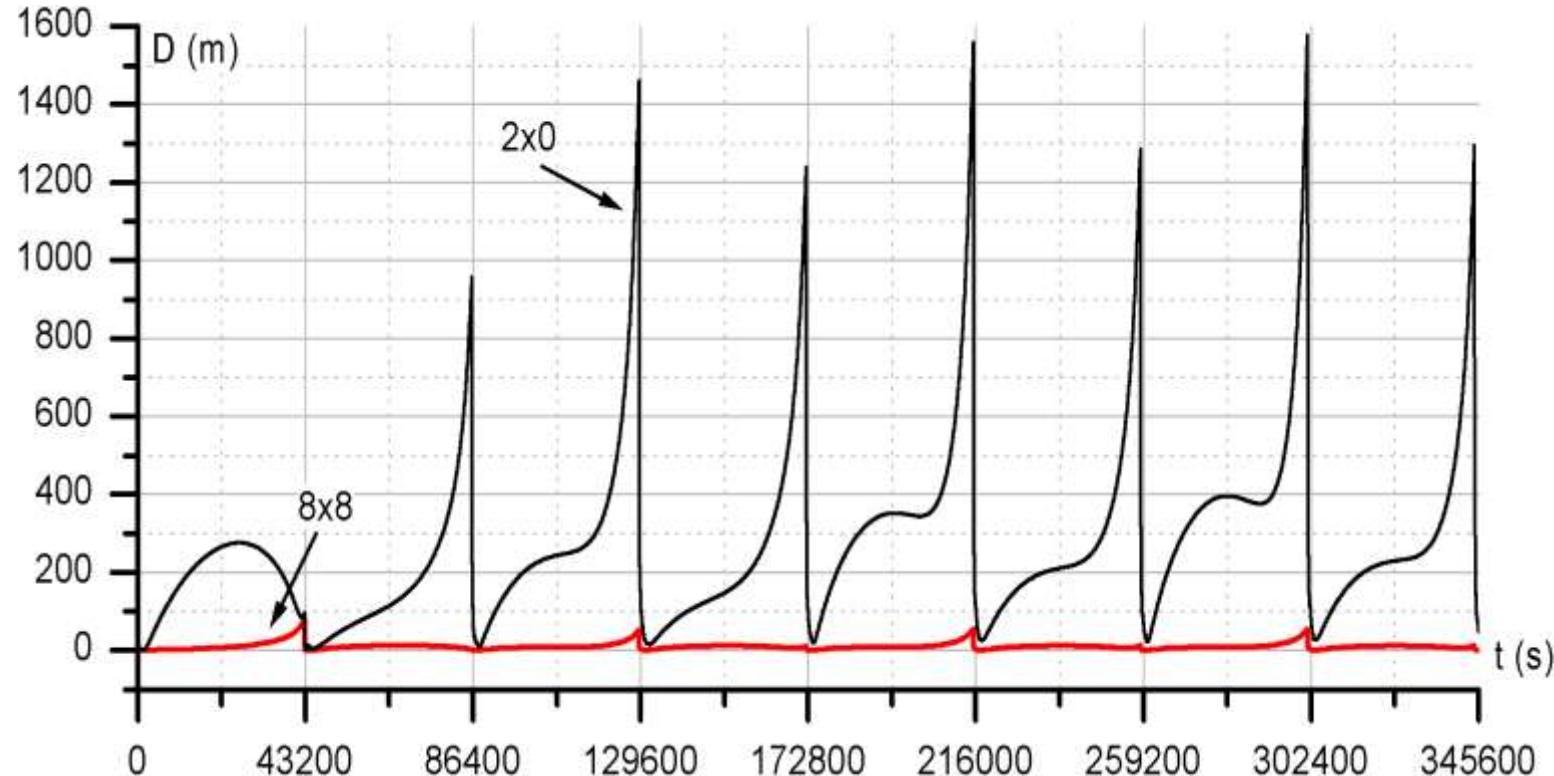


Рис. 11.5 Ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками модели гравитационного поля Земли.

На рис. 11.5 приведены графики модулей ошибок оценок формируемых орбит по положению для моделей гравитационного поля порядка 2×0 и 8×8 . Из приведенных графиков видно, что при использовании в бортовой модели движения КА модели гравитационного поля Земли порядка 2×0 ошибки оценки орбиты по положению (обусловленные ошибкой модели гравитационного поля Земли) достигают величины $\sim 1,6$ км. Для модели порядка 8×8 эти ошибки (в установившемся режиме) не превышают ~ 30 м, для модели порядка 72×72 – практически равны нулю.

Выше было показано, что ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН, составляют величину ~ 100 м. Для сохранения точности системы автономной навигации на уровне ~ 100 м необходимо, чтобы ошибки от всех остальных возмущений, влияющих на точность формируемой оценки орбиты, были заметно меньше 100 м. Это означает, что бортовая модель гравитационного поля Земли должна иметь порядок не ниже 8×8 . В этом случае в установившемся режиме ошибки, обусловленные неточностью модели поля, в окрестности апогея не превышают 15 м, а при подлете к зоне измерений в окрестности перигея – 60 м.

Второй составляющей возмущения движения КА, существенно влияющей на точность формируемой оценки, является гравитационное возмущение от Луны и Солнца.

На рис. 11.6 приведен график модуля обусловленной этим возмущением ошибки оценки орбиты для рассматриваемого динамического фильтра. Из приведенного графика следует, что ошибка оценки орбиты в окрестности апогея может достигать 2 км. Для уменьшения этой ошибки в бортовую модель движения КА необходимо вводить модель влияния Луны и Солнца.

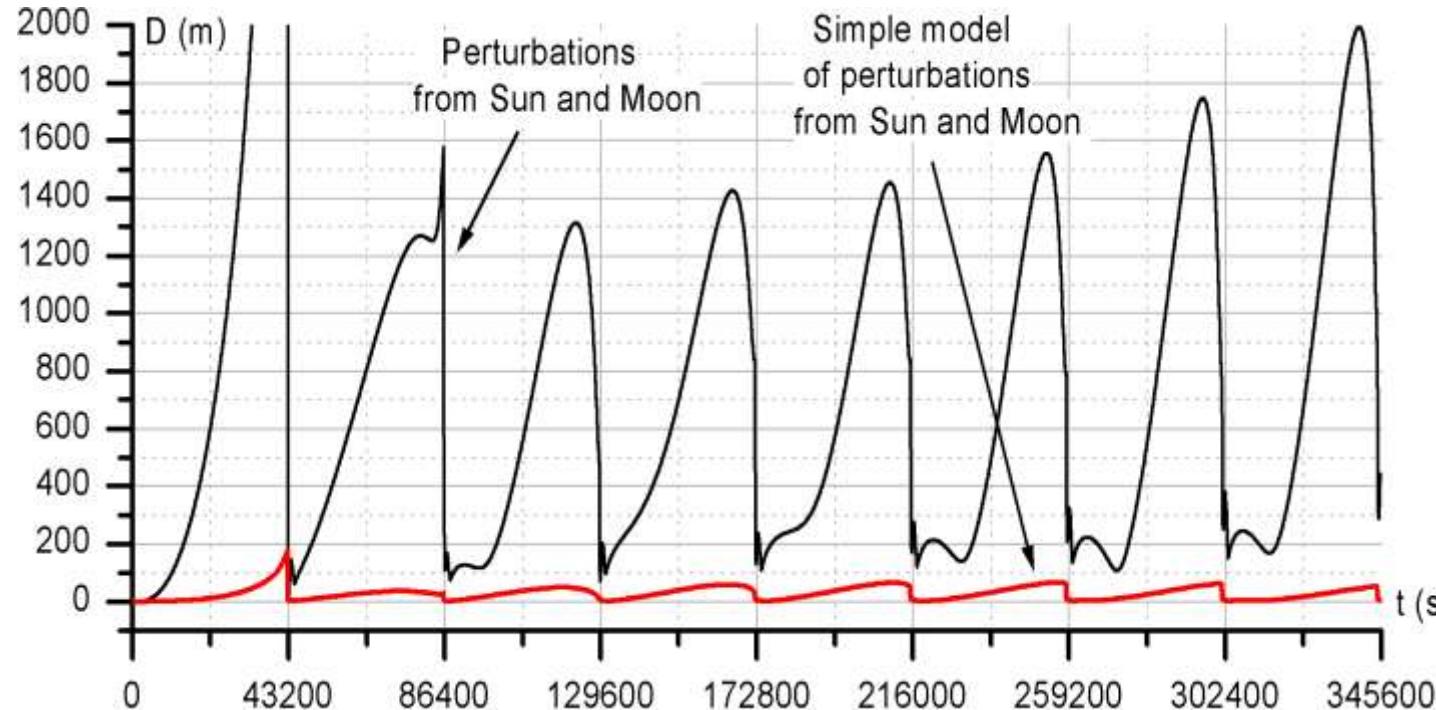


Рис. 11.6 Ошибки оценки орбиты, обусловленные гравитационным влиянием от Луны и Солнца.

При моделировании были использованы две модели гравитационного возмущения от Луны и Солнца:

- модель на основе точной теории Брауна;
- приближенная модель влияния Луны и Солнца.

Первая модель основана на точной теории Брауна и позволяет вычислить эфемериды Луны с точностью 1''. Ошибки этой модели, по крайней мере, не превышают 0,1% от величины возмущения.

Вторая модель использует упрощенные алгоритмы расчета эфемерид Луны. Точность этой модели составляет ~5% от величины возмущения. График модуля ошибки оценки орбиты,

обусловленной неточностью бортового моделирования влияния Луны и Солнца с использованием этой модели, приведен на рис. 11.6.

Из графика следует, что эти ошибки в установившемся режиме достигают величины ~50 м.

Использование же в бортовой модели движения КА модели на основе точной теории Брауна позволяет практически полностью исключить влияние Луны и Солнца на точность формируемой оценки орбиты.

Третьим по степени влияния на точность формируемой оценки орбиты является возмущение от сил солнечного давления, величина которого во многом определяется отношением площади миделевого сечения к массе КА: $K_s = \frac{S_m}{m}$.

Величина коэффициента солнечного давления K_s для разных КА может изменяться в достаточно широких пределах. На рис. 11.7 приведен график модуля ошибки оценки орбиты для рассматриваемого динамического фильтра. Здесь рассматривается ошибка, обусловленная силами солнечного давления для КА с коэффициентом K_s , равным 0,08.

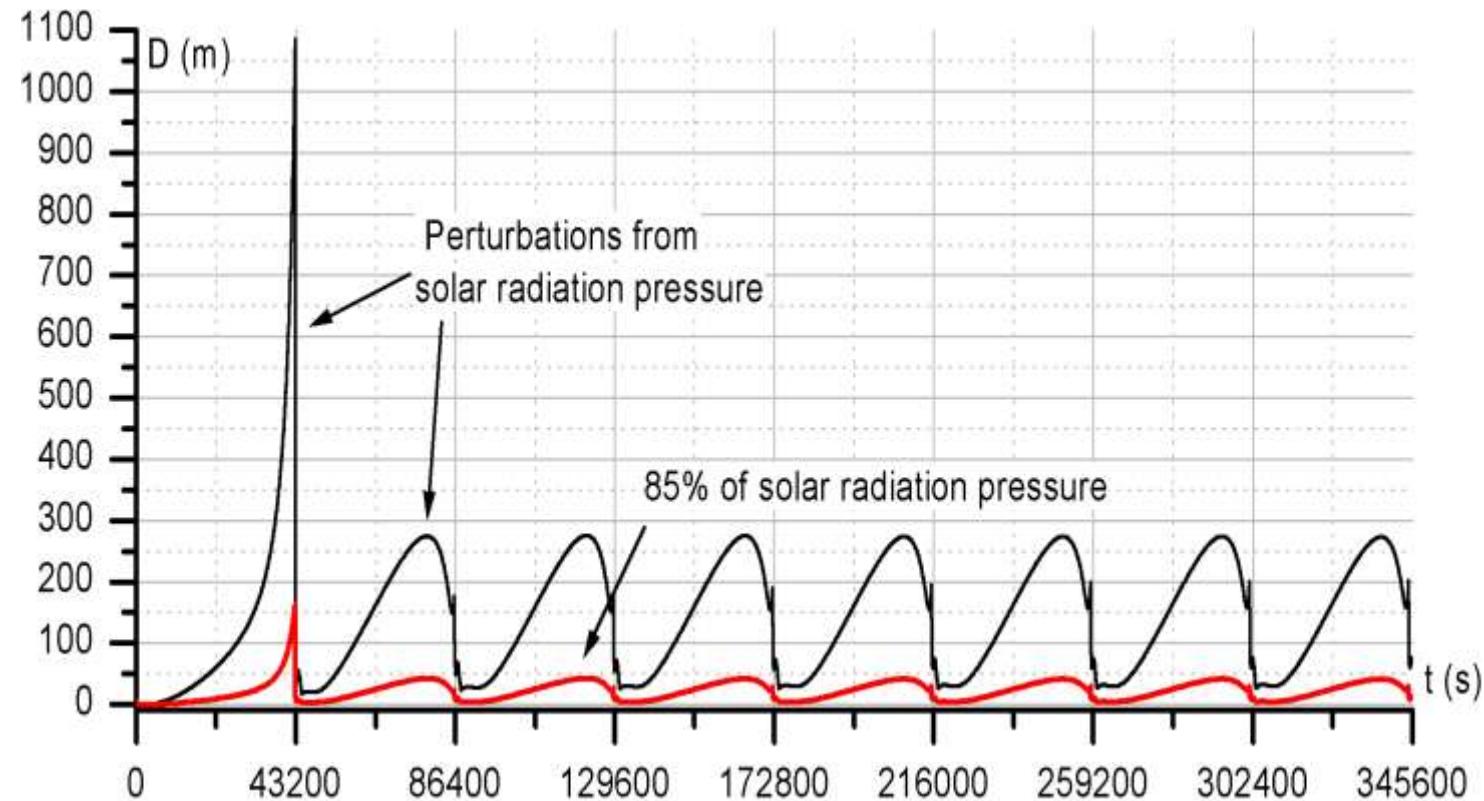


Рис. 11.7 Ошибки оценки орбиты, обусловленные силами солнечного давления.

Из приведенного графика следует, что ошибка оценки орбиты в окрестности апогея может достигать величины ~ 300 м. Для уменьшения этой ошибки в бортовую модель движения КА необходимо вводить модель сил солнечного давления. В отличие от моделей рассмотренных выше возмущений модели сил солнечного давления, в силу целого ряда неопределенностей, являются достаточно грубыми. Обычно такие модели имеют точность $\sim 15\%$ от величины возмущения. График модуля ошибки оценки орбиты, обусловленной неточностью бортового моделирования влияния сил солнечного давления с использованием

этой модели, приведен на рис. 11.7. Из графика следует, что эти ошибки в установившемся режиме в окрестности апогея достигают величины ~ 50 м.

11.1.2 Влияние разгрузки инерционных исполнительных органов на точность формируемой оценки орбиты

В предыдущем разделе не рассматривалось одно из возможных возмущений орбиты – возмущение от двигателей КА. Возможны два типа возмущений от двигателей:

- возмущение при коррекции орбиты КА;
- возмущение при разгрузке инерционных исполнительных органов (ИИО).

При коррекции происходит «сильное» изменение орбиты, приводящее в течение витка к ошибкам по положению в зависимости от величины корректирующего импульса до нескольких сотен километров. Если корректирующий импульс оценивается, например, с помощью акселерометров, то ошибка оценки орбиты в течение витка может достигать несколько километров. Для обеспечения навигации КА с точностью до сотни метров формирование орбиты по измерениям АСН после коррекции требуется выполнять «с нуля». В этом случае проведение измерений должно проводиться в перигее орбиты, а изменение точности формируемой оценки во времени будет соответствовать графикам, приведенным на рис. 11.9.

Менее сильные возмущения орбиты происходят при разгрузке ИИО КА с помощью двигателей. Вообще говоря, на рассматриваемом типе КА обычно реализуется гравитационная разгрузка ИИО без использования двигателей. В этом случае возмущение орбиты отсутствует. Однако в нештатных ситуациях разгрузка может выполняться с помощью двигателей. В этом случае возмущение орбиты может быть значительным и достигать несколько километров до очередного интервала измерений АСН. При этом даже после проведения измерений АСН

ошибки оценки, обусловленные работой двигателей, не компенсируются до нуля, и, хотя значительно уменьшаются по величине, остаются заметными в течение 2÷3 витков.

Сказанное иллюстрирует рис. 11.8, на котором приведены графики ошибок оценки орбиты по положению после проведения разгрузки ИИО.

Разгрузка выполнена после завершения очередного сеанса измерений АСН в окрестности перигея. В таком случае реализуется максимальное возмущение орбиты от работы двигателей. Приведенные графики соответствуют возмущению скорости КА величиной 1 см/сек. по трем осям орбитальной системы координат. При этом в момент достижения апогея величина ошибки оценки орбиты по положению составила ~1000 м по трем осям. В перигее эта ошибка по продольной дальности составила ~8000 м, по высоте – ~3500 м, по боковой дальности ~50 м. На каждом последующем витке все ошибки пропорционально уменьшались в ~3-4 раза. Как уже выше указывалось, приведённые значения ошибок орбиты соответствуют возмущающему импульсу скорости КА от разгрузки ИИО двигателями 1 см/сек по трем осям орбитальной системы. С увеличением возмущающего импульса скорости пропорционально увеличиваются ошибки оценки орбиты по положению.

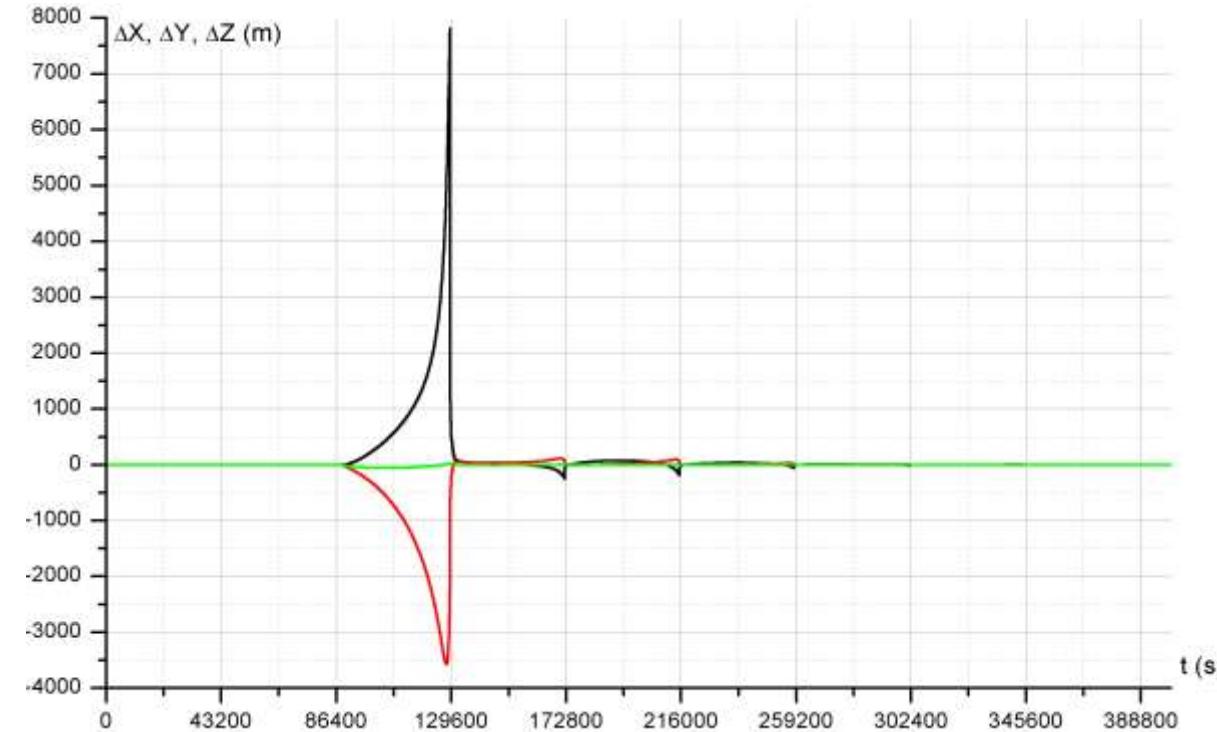


Рис. 11.8 Ошибки оценки орбиты, обусловленные работой двигателей при разгрузке ИИО.

Снижение возмущений оценки орбиты от работы двигателей КА может быть достигнуто путем оценки возмущающего импульса скорости с помощью акселерометров. Однако кардинальным способом является реализация гравитационной разгрузки ИИО, полностью исключающая использование двигателей для этих целей.

11.1.3 Достигаемая точность навигации

Таким образом, проведенное исследование показало, что формирование орбиты высокоэллиптичного КА с достаточно высокой точностью вполне может быть реализовано по измерениям «прямых» НС в окрестности перигея. При этом длительность интервала измерений составляет 20-30 мин. Динамическая фильтрация измерений может выполняться с использованием фильтра, реализованного в АСН-М МКС. Оптимальным значением постоянной времени фильтра, минимизирующим ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН, является величина $T=12$ часов. Бортовая модель движения КА, реализуемая в процессе динамической фильтрации, должна включать модель гравитационного поля Земли, модель гравитационного влияния Луны и Солнца, модель сил солнечного давления.

На рис. 11.9 приведены результирующие графики ошибок оценки орбиты по положению в орбитальной системе координат (Δx – продольная дальность, Δy – местная вертикаль) при одновременном влиянии всех рассмотренных возмущающих факторов. Интервал измерений выбирался по условию: $GDOP \leq 3$. График ошибок измерений АСН (в орбитальной системе координат) приведен на рис. 11.3. В качестве бортовой модели гравитационного поля Земли использовалась модель порядка 72×72 , в качестве модели влияния Луны и Солнца использовалась упомянутая выше упрощенная модель, имеющая точность $\sim 5\%$.

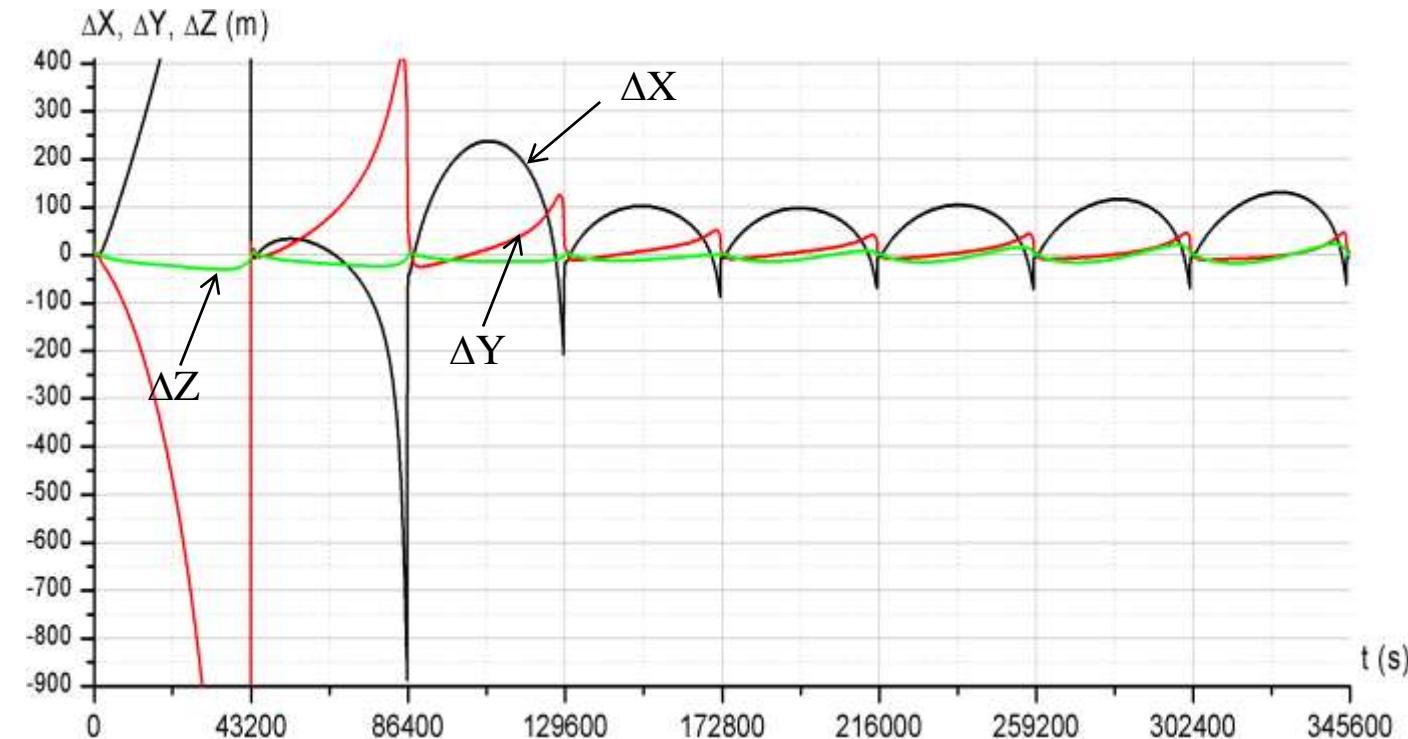


Рис. 11.9 Суммарные ошибки оценки орбиты в переходном и установившемся режимах

Воздействие сил солнечного давления рассматривалось для коэффициента $K_s = 0,08$. В бортовой модели движения была реализована упрощенная модель сил солнечного давления, имеющая точность $\sim 15\%$. При воздействии всех возмущающих факторов в установившемся состоянии точность оценки орбиты по продольной дальности составила ~ 100 м, по местной вертикали и боковой дальности – 30 м. После первого интервала измерений ошибка в апогее достигала 1 км, в перигее перед вторым интервалом измерений – 6 км. После второго интервала измерений ошибка в апогее составила 100 м, в перигее перед третьим интервалом измерений –

1 км. После третьего интервала измерений система практически приходила в установившийся режим.

Указанная достигаемая точность может нарушаться в случае работы двигателей КА. После проведения коррекции процесс формирования орбиты необходимо начинать заново. Возмущения орбиты от работы двигателей в процессе выполнения разгрузки ИИО зависят от величины возмущающего импульса скорости КА и могут быть значительными. Количественные характеристики возмущений оценки орбиты от работы двигателей при разгрузке ИИО представлены графиками на рис. 11.8. Исключение возмущений оценки орбиты от работы двигателей обеспечивается при реализации гравитационной разгрузки ИИО.

Таким образом, рассмотренные алгоритмы обеспечивают достаточно высокую точность формирования оценки орбиты КА, находящегося на ВЭО, по измерениям АСН в окрестности перигея. В установившемся режиме эта точность по координатам составляет величину ~ 100 м. Однако эти алгоритмы имеют два существенных недостатка. Во-первых, большая длительность переходного процесса (~ 3 витка), в течение которого ошибки могут достигать величины ~ 2 км, во-вторых – чувствительность к неучтеным возмущениям от двигателей. Импульс скорости 1 см/с может приводить к ошибкам по координатам, достигающим 8 км.

Существенное сокращение времени переходного процесса, снижение чувствительности к неучтеным возмущениям от двигателей, а также повышение точности навигации может быть достигнуто при измерениях АСН по "обратным" НС.

11.2 Навигация высокоэллиптических КА по полным "сырым" измерениям от "прямых" и "обратных" НС

В предыдущем разделе были рассмотрены характеристики АСН, работающей на ВЭО по "прямым" НС, то есть, по НС, находящимся "выше" КА. В этом случае антенна АСН устанавливается таким образом, чтобы ее поле зрения было направлено в зенит. Однако в этом случае сигналы НС могут быть приняты на коротком интервале времени (~ 300 с), когда КА находится в окрестности перигея.

Рассмотрим вариант построения АСН для ВЭО, когда сигналы НС принимаются в течение всего витка. В этом случае на КА должны быть установлены два типа антенн:

- антенны для работы по "прямым" НС;
- антенны для работы по "обратным" НС.

Антенны, работающие по "прямым" НС обеспечивают измерения в окрестности перигея. Антенны, работающие по "обратным" НС – на остальной части орбиты. Одним из основных вопросов, влияющих на идеологию построения АСН, является вопрос видимости НС со стороны КА.

На рис. 11.10 приведены графики видимости НС для ВЭО в режимах GPS, ГЛОНАСС и GPS+ГЛОНАСС.

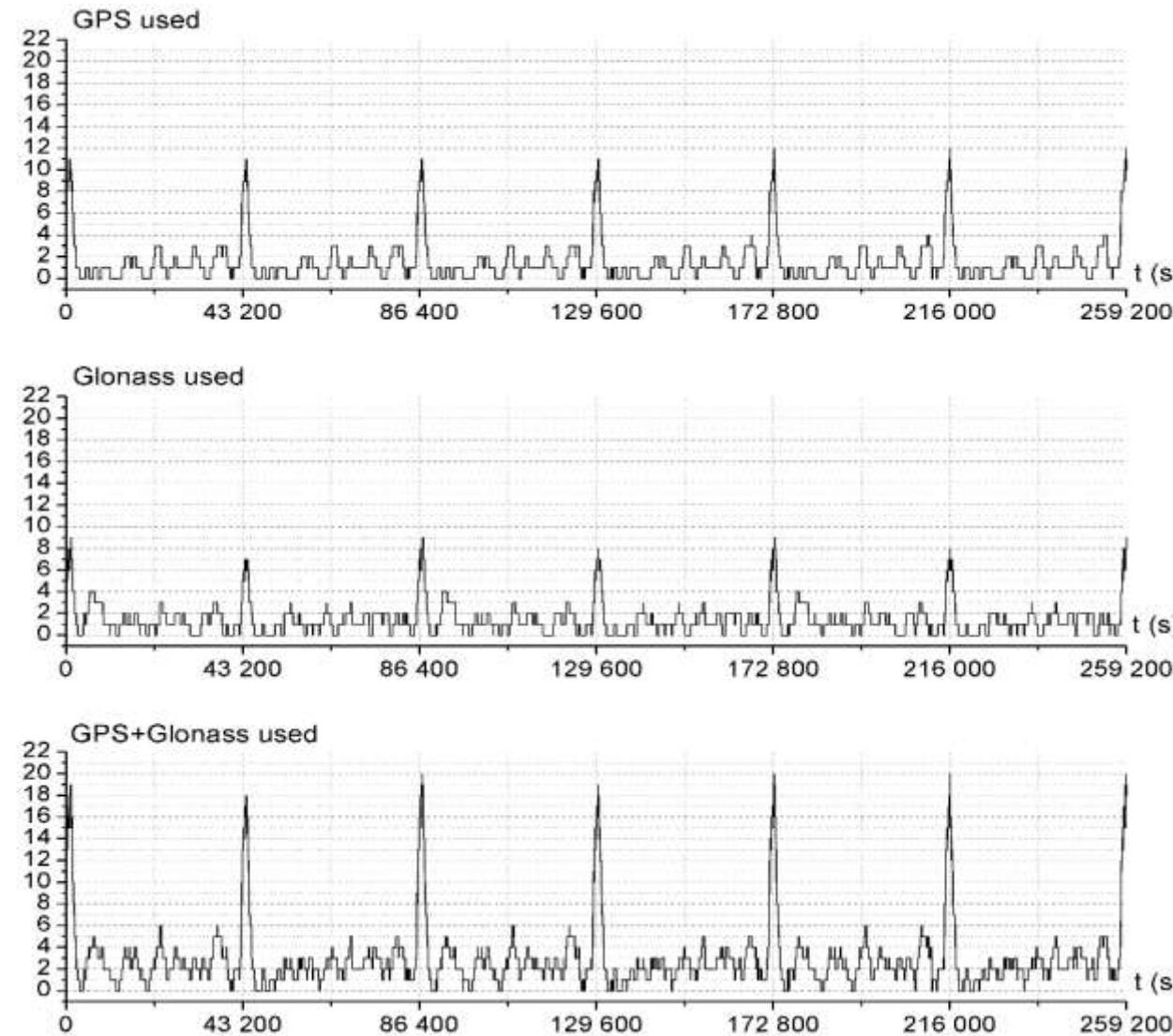


Рис. 11.10 Графики числа видимых НС для ВЭО в режимах GPS, ГЛОНАСС, GPS+ГЛОНАСС

Графики получены путем моделирования для группировки GPS из 30 НС и ГЛОНАСС из 24 НС. Из графиков видно, что в течение короткого интервала времени в окрестности перигея число видимых НС достигает ~ 10 -и для GPS, ~ 8 -и для ГЛОНАСС и ~ 18 для GPS+ГЛОНАСС. На всей остальной части орбиты в режимах GPS и ГЛОНАСС число видимых НС находится в диапазоне 0-3, в режиме GPS+ГЛОНАСС – в диапазоне 0-6.

Во всех режимах наблюдаются достаточно длительные интервалы, когда число видимых НС больше 3. Принципиально на этих участках орбиты можно формировать КСВ. Однако, в силу малости углового расстояния между видимым НС уровень *GDOP* на этих участках оказывается настолько большим, что точность формируемых КСВ оказывается недопустимо низкой.

На рис. 11.11 для этих участков орбиты приведены графики ошибок КСВ по координатам и графики уровня *GDOP*. Из приведенных графиков видно, что уровень *GDOP* находится в диапазоне $100 \div 1000$ при допустимой величине $2 \div 6$. Высокий уровень *GDOP* обуславливает большие ошибки определяемых координат КА, достигающих по величине 5 км. При таких ошибках ошибки прогноза орбиты на интервале, где КСВ не формируются ($n < 4$), может составлять десятки километров. Очевидно также, что оценивать орбиту по измерениям КСВ в режимах GPS или ГЛОНАСС вообще невозможно. Поэтому оценку орбиты для ВЭО необходимо проводить по "сырым" измерениям. При этом максимальная точность оценки орбиты обеспечивается, если она осуществляется по полным "сырым" измерениям – псевдодальностям и интегральным фазам, например, по алгоритмам, рассмотренным в Главе 10. Приведем эти алгоритмы применительно к ВЭО.

Пусть в начальный момент времени t_0 известно начальное приближение вектора координат \bar{X}_0 и скорости \bar{V}_0 КА. Например, этот вектор можно получить, когда КА находится

в окрестности перигея, где в поле зрения антенн АСН находится достаточное количество НС для формирования КСВ. Если оценка вектора состояния представляется в форме координат и их приращений, то в качестве $\Delta\bar{x}_0$ может быть взят вектор скорости. Пусть также измерения проводятся в моменты t_i , а n_i – число видимых НС в момент t_i ($n_i \geq 2$). Если эфемериды видимых НС в моменты t_i известны, то по измерениям псевдодальностей PR_j и приращениям интегральных фаз ΔCP_j , оценке орбиты КА и эфемеридам НС в соответствии с алгоритмом (10.30) могут быть сформированы векторы измерения $\bar{\xi}_{u1}, \bar{\xi}_{u2}$ и их оценки $\bar{\xi}_{u1}^*, \bar{\xi}_{u2}^*$:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{u1} &= \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ \cdots \\ PR_n - PR_i \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{u2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1 - \Delta CP_2 \\ \cdots \\ \Delta CP_n - \Delta CP_1 \end{pmatrix}; \\ \bar{\xi}_{u1}^* &= \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ \cdots \\ PR_n^* - PR_1^* \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{u2}^* = \begin{pmatrix} \Delta CP_1^* - \Delta CP_2^* \\ \cdots \\ \Delta CP_n^* - \Delta CP_1^* \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{11.3}$$

По алгоритму (10.29) для момента t_i формируется общий вектор измерений $\bar{\xi}_u$ и его оценка $\bar{\xi}_u^*$:

$$\bar{\xi}_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u1}}{R_0} + \frac{T_p - 1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u2}}{V_0} \omega_0 \\ \frac{\bar{\xi}_{u2}}{V_0} \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_u^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u1}^*}{R_0} + \frac{T_p - 1}{T_p} \frac{\bar{\xi}_{u2}^*}{V_0} \omega_0 \\ \frac{\bar{\xi}_{u2}^*}{V_0} \end{pmatrix}\tag{11.4}$$

где T_p – постоянная времени сглаживания псевдодальности.

Тогда вектор измерений, входящий в левую часть уравнений (10.11), будет иметь вид:

$$\bar{\xi}_u - \hat{\xi}_u^*, \quad (11.5)$$

где векторы $\bar{\xi}_u$ и $\hat{\xi}_u^*$ формируются по алгоритму (11.4)

Рекуррентный алгоритм решения системы (10.11) аналогичен алгоритму (10.12) и имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= C_{0m+1}^T \left(\bar{\xi}_{um+1} - \hat{\xi}_{um+1}^* \right), \\ W_{m+1} &= B_{mm+1}^{-1T} \lambda W_m \lambda B_{mm+1}^{-1} + C_{0m+1}^T C_{0m+1}, \\ \delta \bar{\xi}_{m+1}^* &= W_{m+1}^{-1} \bar{P}, \\ \bar{\xi}_{m+1}^* &= \hat{\xi}_{m+1}^* + \delta \bar{\xi}_{m+1}^*, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где \bar{P} – промежуточный вектор размерности 6;

W_i – накапливаемая матрица размерности 6×6 . На нулевом шаге эта матрица равна 0;

$\bar{\xi}_{um+1}$ – вектор измерения на $m+1$ -м шаге;

$\hat{\xi}_{m+1}^*$ – оценка вектора состояния на $m+1$ -м шаге, полученная из вектора состояния $\bar{\xi}_m^*$, сформированного на m -ом шаге, путем прогноза на $m+1$ -й шаг;

$\hat{\xi}_{um+1}^*$ – оценка вектора измерения на $m+1$ -м шаге, полученная из оценки вектора состояния $\hat{\xi}_{m+1}^*$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_x \cdot E & 0 \\ 0 & \lambda_v \cdot E \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица размерности 3×3 ;

0 – нулевая матрица размерности 3×3 .

Матрица B_{mm+1} в алгоритме (11.6) представляет собой матрицу (размерности 6×6) преобразования ошибок вектора состояния на шаге m к ошибкам на шаге $m+1$:

$$B_{mm+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m}, \quad (11.7)$$

где $\bar{\xi}_m = \begin{pmatrix} \bar{X}_m \\ \Delta \bar{X}_m \end{pmatrix}$ – вектор состояния КА в приращениях.

Она формируется по алгоритму (10.26):

$$B_{mm+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \omega_0 \Delta t \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \omega_0 \Delta t (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \\ \frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & E + 2\Omega + 2\Omega^2 \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{R_0} \bar{X}$, $\Delta \bar{x} = \frac{1}{V_0 \Delta t} \Delta \bar{X}$,

R_0 – радиус Земли;

$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}$ – круговая скорость;

$\omega_0 = \frac{V_0}{R_0}$ – орбитальная угловая скорость.

$$\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2);$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} = -\frac{1}{\omega_0 \Delta t} (E + \Omega) \Omega^2 - \omega_0 \left(\frac{E + \Omega}{r_0^3} \right) \left(E - 3 \frac{\bar{x}_m \bar{x}_m^\top}{r_0^2} \right) \Delta t;$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} = \omega_0 (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta t;$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} = E + \omega_0 \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial x_m} \Delta t;$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta t \text{ — матрица вращения Земли;}$$

ω_z — угловая скорость вращения Земли.

Оценка вектора состояния $\hat{\xi}_{m+1}^*$, формируемая из оценки вектора состояния $\bar{\xi}_m^*$ путем прогноза на шаг $m+1$ по алгоритму (10.17):

$$\Delta \bar{X}_{m+1} = (E + 2\Omega + 2\Omega^2) \Delta \bar{X}_m - (E + \Omega) \Omega^2 \bar{X}_m + (E + \Omega) A_{II-G} \bar{a}_m, \quad (11.9)$$

$$\bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta \bar{X}_{m+1},$$

где

\bar{X} — вектор координат КА относительно ГСК;

$\Delta \bar{X}$ — вектор приращения координат КА за шаг относительно ГСК;

A_{II-G} — текущая матрица перехода от ИСК БИНС к ГСК;

\bar{a} — вектор ускорений КА в ИСК БИНС.

Вектор \bar{a}_i определяется по формуле:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{ri} \Delta t^2 + \bar{a}_{ii} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{ri} \Delta t^4 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{ii} \Delta t^4, \quad (11.10)$$

где \bar{a}_{ri} – суммарный вектор гравитационных возмущений, действующих на КА;
 \bar{a}_{ii} – вектор инерциальных возмущений, измеряемых БИНС.

Формирование оценки орбиты для ВЭО по приведенным выше алгоритмам (11.6) – (11.10) было выполнено путем моделирования при различных возмущениях. Для исключения ионосферных ошибок измерений в обработку принимались НС, высоты линий визирования которых относительно Земли были более 600 м (маска 600 км). Поэтому моделируемые ионосферные ошибки не превышали величины $2\div4$ м. Моделировались также эфемеридные ошибки, шумы измерений псевдодальностей, переотражения сигналов от элементов конструкции КА. Все эти ошибки также не превышали величины ~ 5 м. На рис. 11.12 приведены графики ошибок формируемой оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x = T_v = 43000$ с. При моделировании предполагалось, что модель движения КА, реализуемая в АСН при прогнозе движения объекта, абсолютно точная. Из приведенных графиков следует, что в начальный момент формирования оценки орбиты при полете в окрестности перигея ошибки оценки по координатам в основном составляют величину $10\div20$ м, по скорости – не превышают 2 см/с. Начиная со второго витка, когда процесс формирования оценки орбиты приходит в установившееся состояние, ошибки оценки по координатам не превышают 5 м, по скорости – 0,5 см/с.

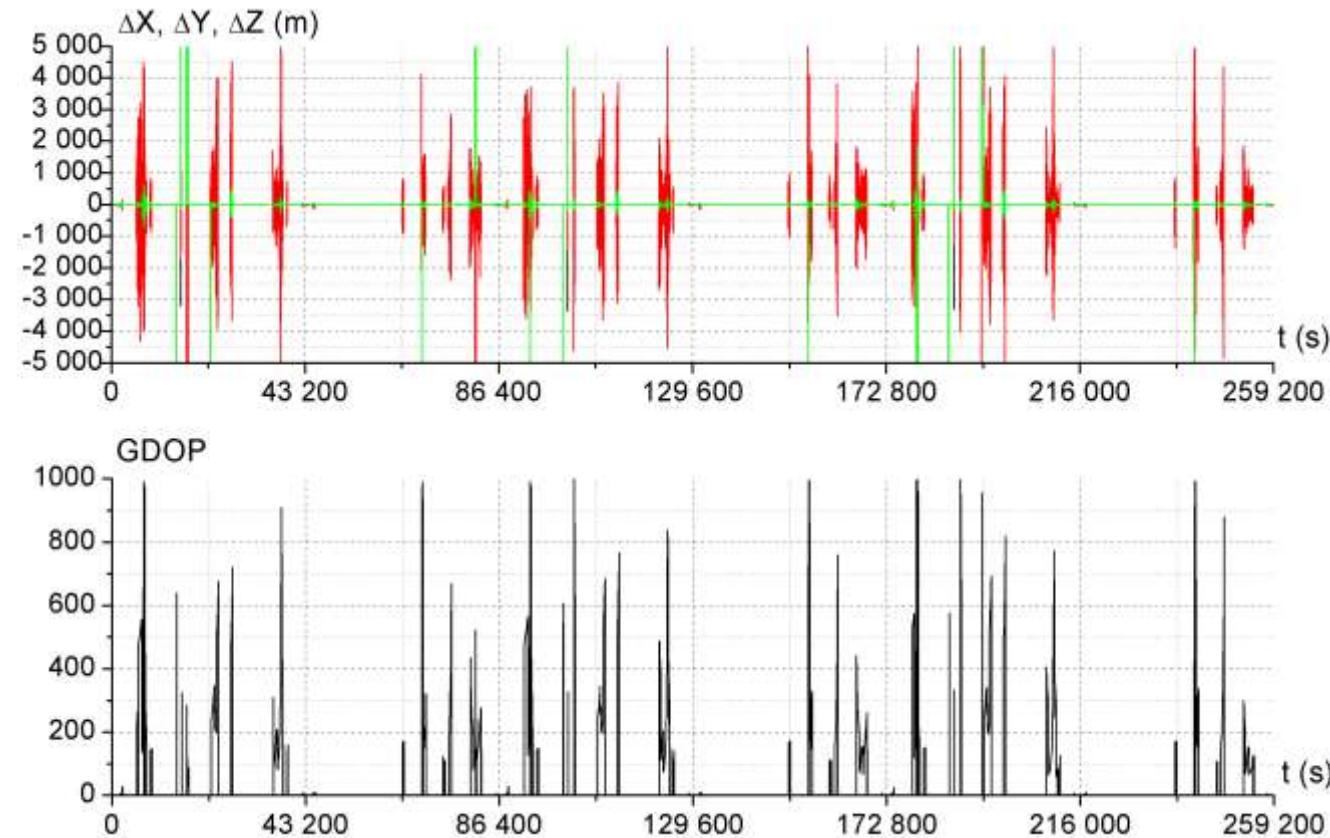


Рис. 11.11 Графики ошибок КСВ по координатам и уровня GDOP для ВЭО в режиме GPS+ГЛОНАСС на участках орбиты, где число видимых НС>3

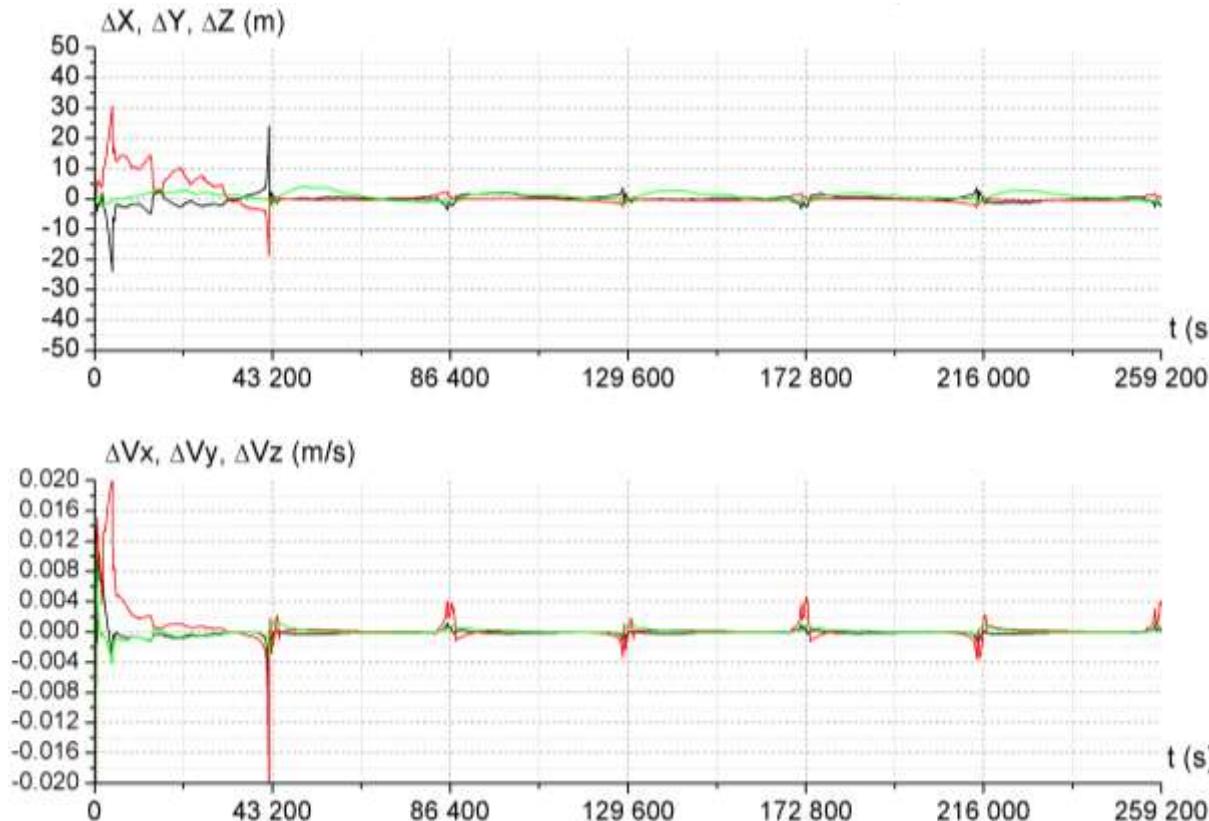


Рис. 11.12 Графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=T_v=43000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН

На рис. 11.13 приведены аналогичные графики ошибок оценки ВЭО с той лишь разницей, что в качестве возмущений рассматривались ошибки измерений АСН и влияние сил солнечного давления. То есть, предполагалось, что в бортовой модели выполняется точное моделирование гравитационного поля Земли и гравитационного воздействия от Луны и Солнца. Действительно, эти возмущения легко могут моделироваться в АСН с высокой точностью, тогда как моделирование сил солнечного давления для многих КА представляет

собой проблему из-за неопределенности ряда параметров. Поэтому моделирование реального движения КА учитывало силы солнечного давления, а в бортовой модели движения КА при выполнении динамической фильтрации измерений АСН эти возмущения не моделировались. Из приведенных графиков видно, что из-за нескомпенсированного влияния сил солнечного давления ошибки оценки орбиты по координатам возросли до 30 м, по скорости – до 0,8 см/с.

На рис. 11.14 приведены результаты аналогичного моделирования для режима ГЛОНАСС, когда измерения в АСН проводились только по сигналам спутников ГЛОНАСС. Из приведенных на рисунке графиков видно, что ошибки оценки по координатам практически не изменились и достигают величины порядка 30 м, ошибки по скорости несколько возросли и стали достигать величины 1,5 см/с.

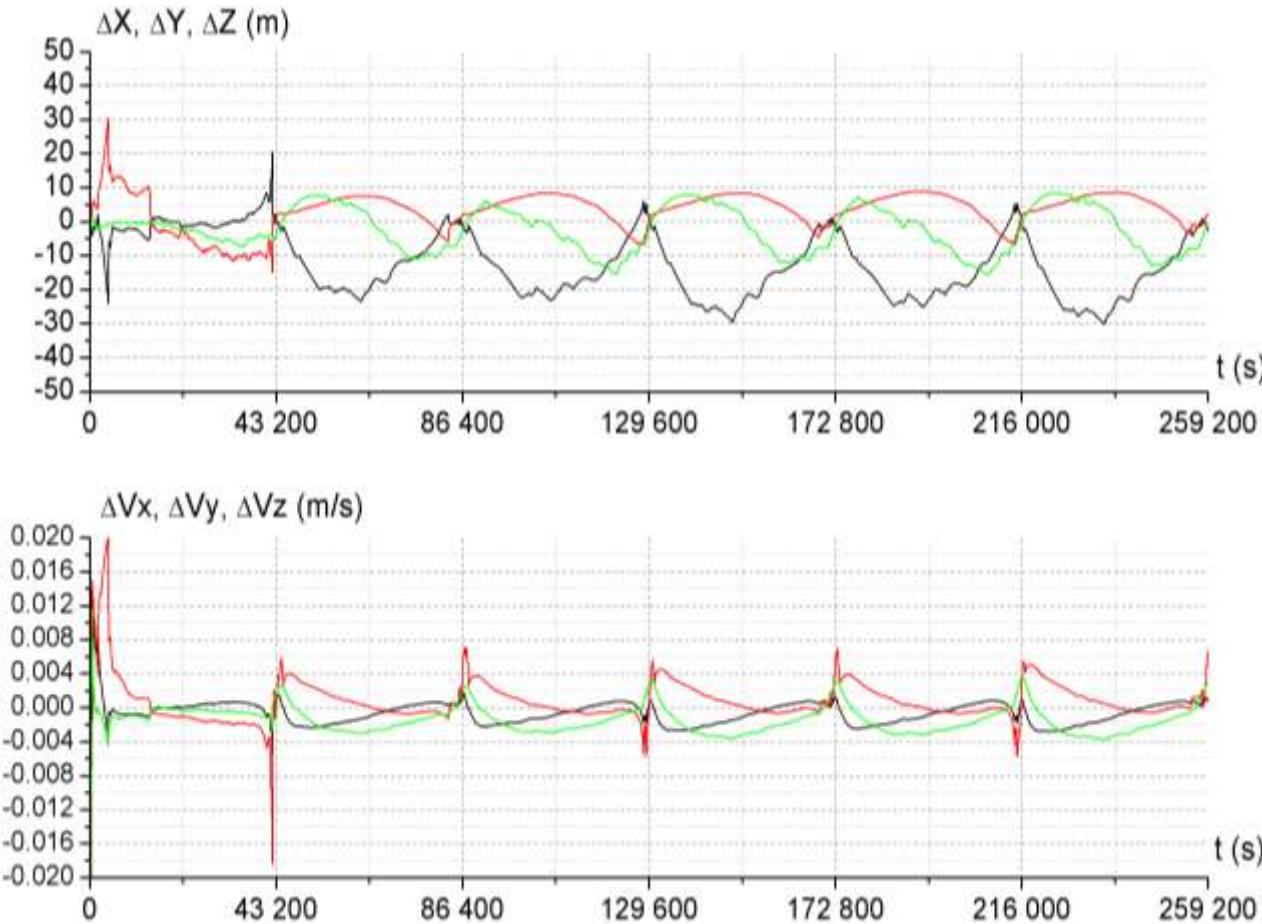


Рис. 11.13 Графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=T_v=43000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и солнечное давление

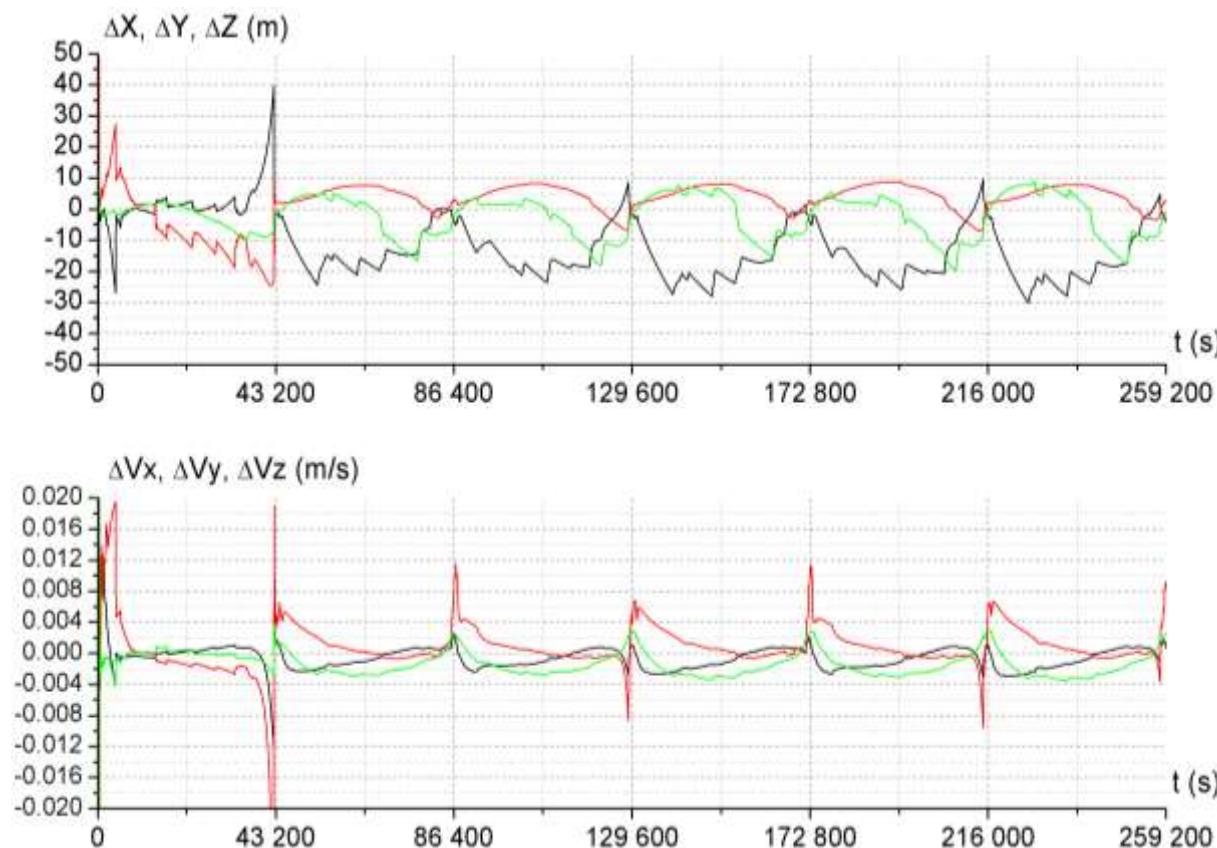


Рис. 11.14 Графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 43000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и солнечное давление.

Однако полученный результат относится к случаю, когда КА находится в свободном полёте и на него влияют только внешние силы. При выполненной коррекции орбиты на КА действуют повышенные возмущающие силы от двигателей коррекции, сильно влияющие на точность формируемой оценки. Двигатели коррекции орбиты КА могут быть двух типов: двигатели большой тяги и двигатели малой тяги.

Двигатели большой тяги – это реактивные двигатели, создающие ускорения в диапазоне $10^{-2} \div 10 \text{ м/с}^2$ и работающие при коррекции орбиты от нескольких секунд до нескольких минут. Такую коррекцию будем называть импульсной.

Двигатели малой тяги – это, как правило, электрические реактивные двигатели с тягой от нескольких десятков грамм до нескольких сотен грамм. Они создают ускорение КА в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ м/с}^2$. Длительность коррекции с помощью таких двигателей может находиться в диапазоне от нескольких десятков минут вплоть до непрерывной работы в течение месяцев.

Как правило, на КА с корректирующими двигателями большой тяги в состав системы управления входит БИНС, оценивающая ускорение от двигателей. Будем считать, что точность оценки ускорения с помощью БИНС составляет 10^{-4} м/с^2 . Тяга малых двигателей хотя и грубо, но также может быть оценена по управляющим параметрам двигателя, по крайней мере, с точностью 10%. С учетом сказанного будем предполагать, что при проведении непрерывной коррекции ошибка моделируемого на борту ускорения от двигателей составляет 10^{-5} м/с^2 . Определим, как влияет ошибка оценки непрерывного возмущающего ускорения от двигателей на точность формируемой оценки орбиты КА.

На рис. 11.15 приведены графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС с постоянной времени фильтра $T_X = T_V = 43000 \text{ с}$ при непрерывной

коррекции орбиты с ошибкой оценки ускорения от двигателей 10^{-5} м/с². Из графиков видно, что ошибки по координатам достигают величины 60 км, по скорости – 60 м/с. То есть, по сравнению со свободным полётом, ошибки увеличились в 2000 раз. Существенное уменьшение ошибок может быть обеспечено за счет изменения постоянной времени фильтра. Проведенное исследование показало, что наиболее приемлемыми значениями постоянных времени фильтра, обеспечивающими существенное повышение точности формируемой оценки ВЭО и сохраняющими устойчивость процесса фильтрации, является значение $T_x = 10000$ с, $T_v = 2000$ с. Графики ошибок оценки ВЭО для этих значений постоянной времени фильтра в режиме GPS+ГЛОНАСС и возмущений от двигателей 10^{-5} м/с² приведены на рис. 11.16. Из графиков видно, что ошибки оценки ВЭО по координатам в этом случае не превышают 1,5 км, по скорости – 0,2 м, то есть, по сравнению с предыдущим случаем ($T_x = T_v = 43000$ с) уменьшились в 50 раз. Обеспечиваемая в этом случае точность оценки орбиты (порядка километра) во многих случаях достаточна для решения функциональных задач КА. Тогда эти задачи могут выполняться и на фоне коррекции орбиты. После завершения коррекции максимальные ошибки оценки ВЭО по координатам и скорости для постоянной времени $T_x = 10000$ с, $T_v = 2000$ с в режиме GPS+ГЛОНАСС приведены на рис. 11.17.

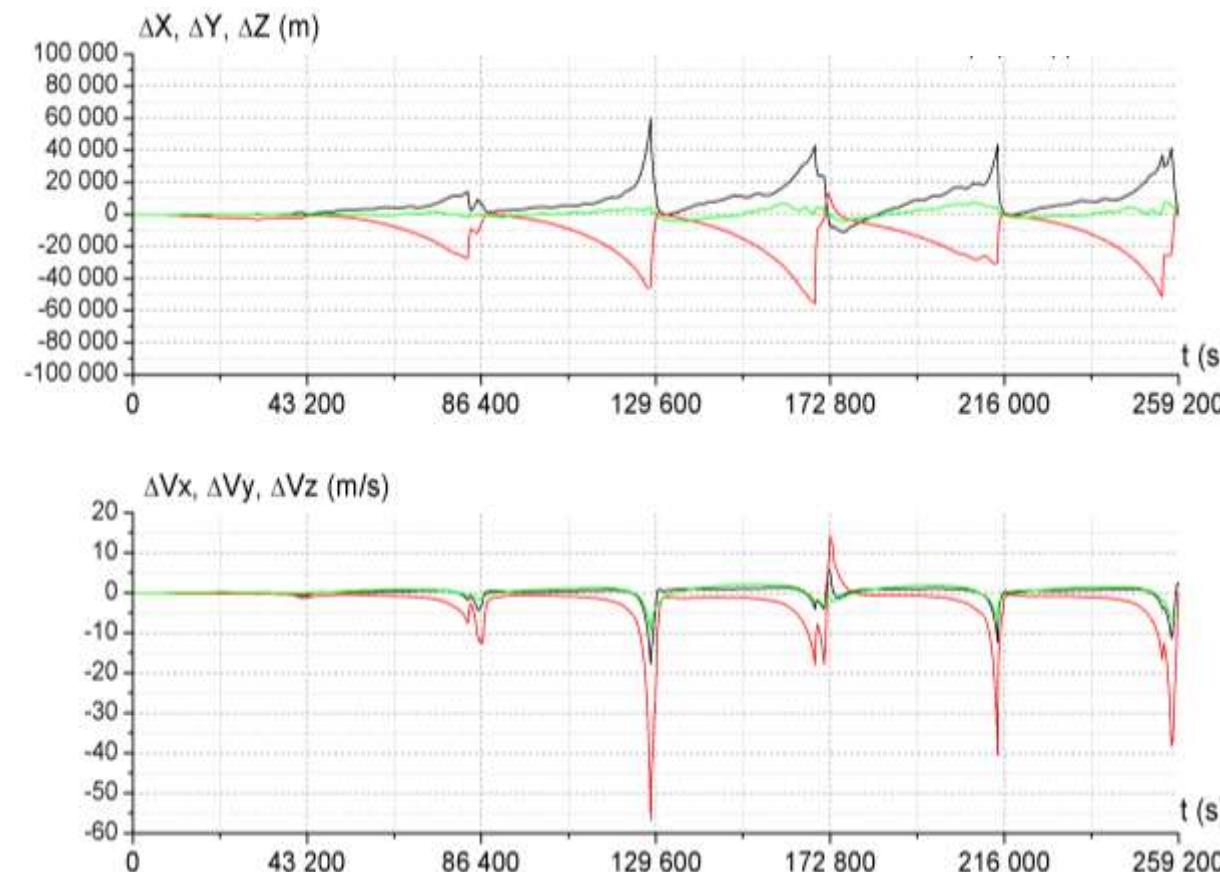


Рис. 11.15 Графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=T_v=43000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН, солнечное давление, постоянное возмущение от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с 2 .

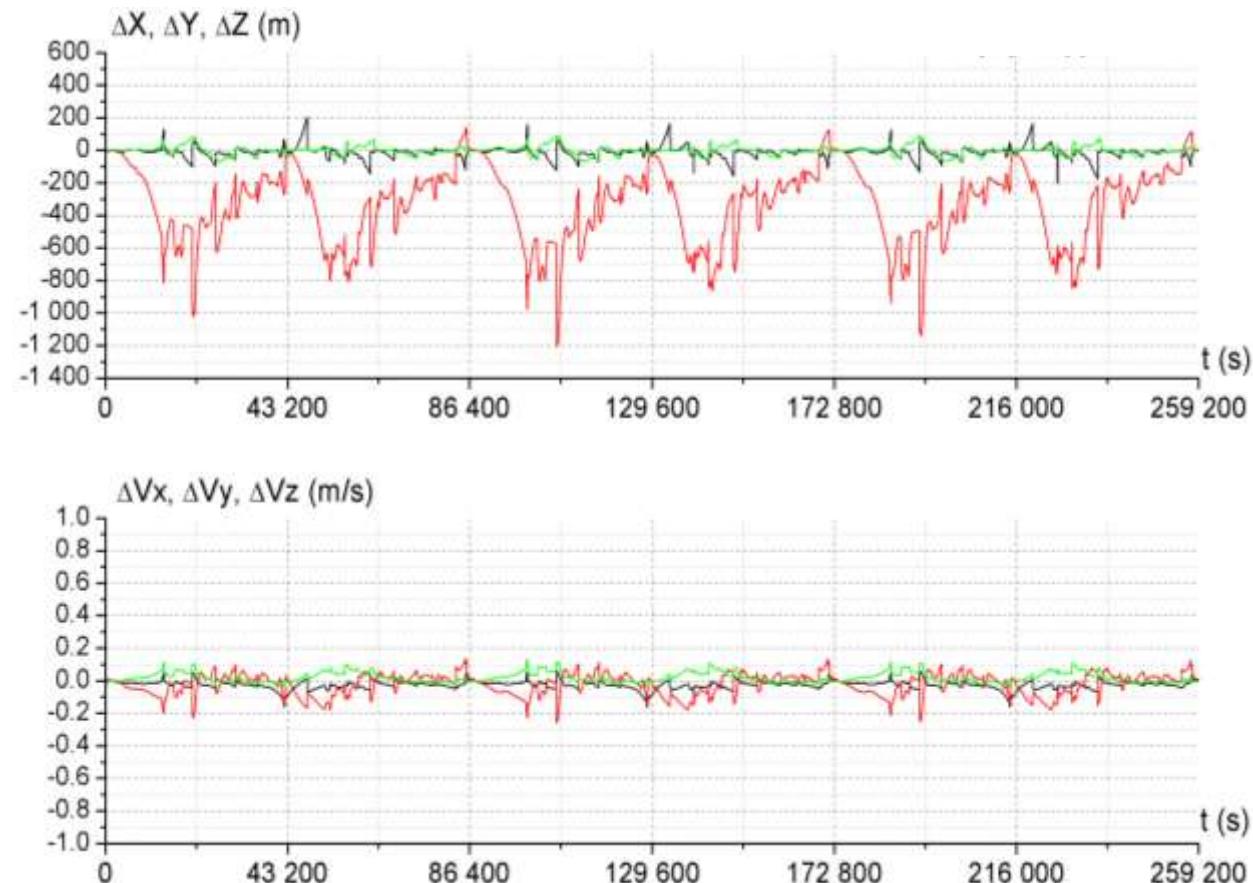


Рис. 11.16 Графики ошибок ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=10000$ с.; $T_V=2000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН, силы солнечного давления, возмущения от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с 2 .

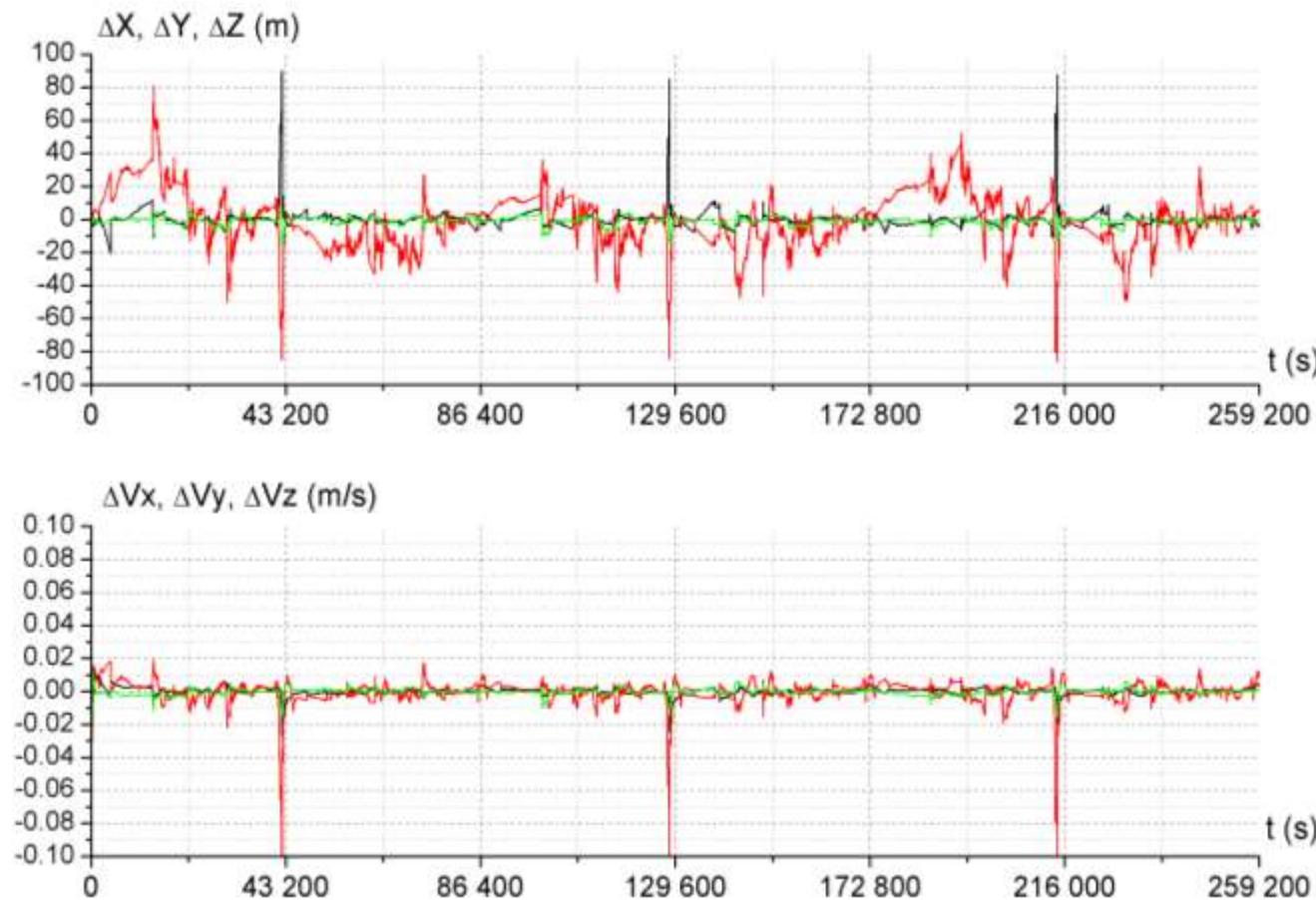


Рис. 11.17 Графики ошибок ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=10000$ с.; $T_V=2000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и силы солнечного давления.

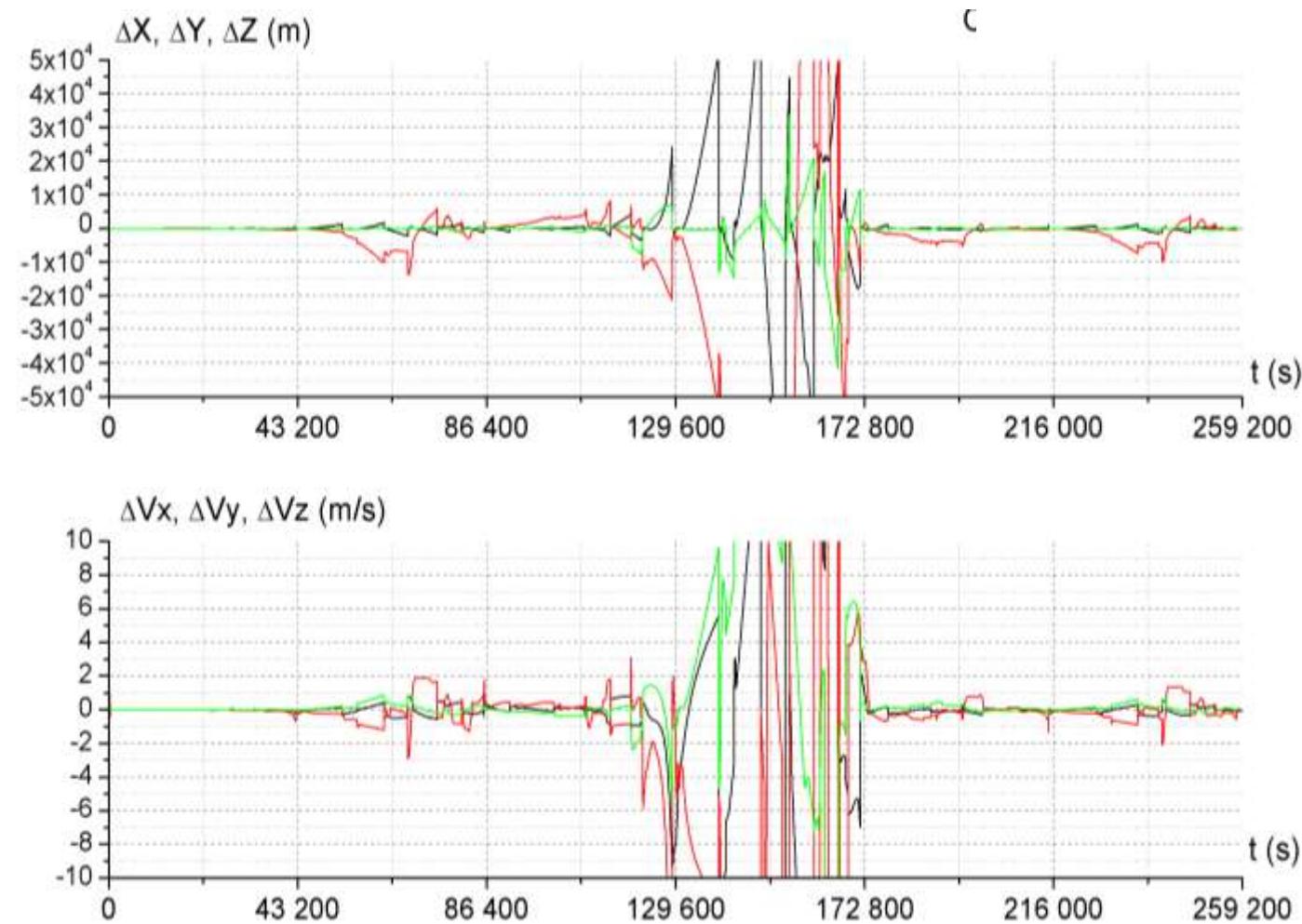


Рис. 11.18 Графики ошибок ВЭО по координатам и скорости в режиме ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=10000$ с.; $T_V=2000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и силы солнечного давления.

Таким образом, уменьшение постоянных времени T_x и T_v обеспечивает повышение точности формируемой оценки орбиты при проведении коррекции орбиты. Однако в этом случае ухудшается устойчивость процесса динамической фильтрации измерений АСН. При уменьшении числа НС в группировке навигационных спутников процесс динамической фильтрации может стать неустойчивым. Например, на рис. 11.18 приведены графики ошибок оценки ВЭО для постоянной времени $T_x = 10000$ с и $T_v = 2000$ с в режиме ГЛОНАСС, которые демонстрируют "развал" процесса фильтрации – ошибки по координатам начинают превышать десятки километров, а по скорости – десятки метров в секунду. Поэтому выбор минимально допустимых значений постоянных времени T_x и T_v должен осуществляться для каждой конкретной группировки НС.

Импульсная коррекция орбиты приводит к временному снижению точности формируемой оценки орбиты. На рис. 11.19 приведены графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=10000$ с, $T_v=2000$ с и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с² и длительностью 2000 с. Из графиков видно, что в процессе коррекции ошибки по координатам возрастают до 1,5 км, по скорости – до 0,4 м/с². После завершения коррекции ошибки оценки начинают уменьшаться и выходят на установившийся уровень (демонстрируемый графиками рис. 11.17) за время ~ 1 виток.

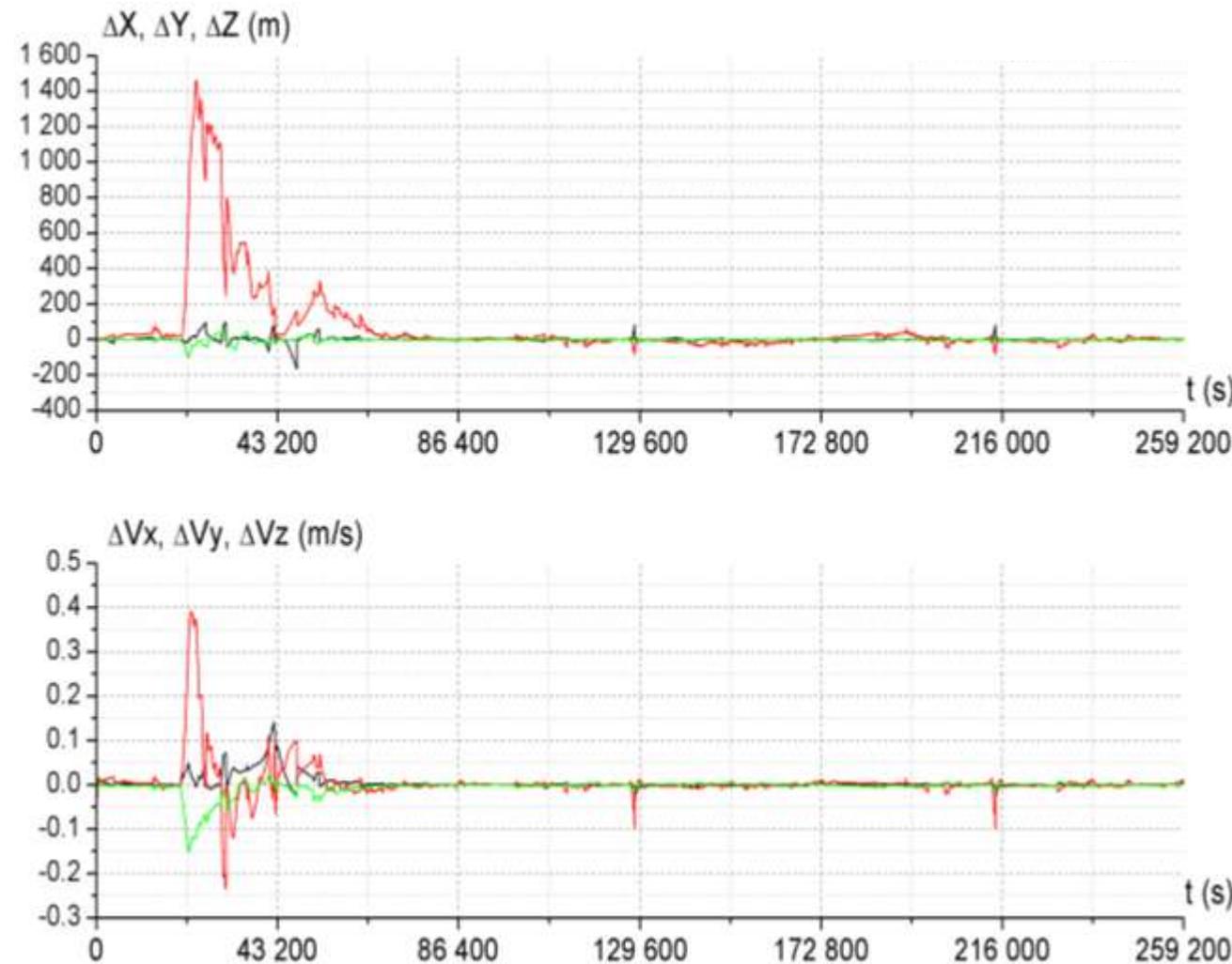


Рис. 11.19 Графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X=10000$ с.; $T_V=2000$ с и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с 2 и длительностью 2000 с.

Таким образом, формирование оценки орбиты ВЭО по полным "сырым" измерениям АСН в соответствии с алгоритмами динамической фильтрации 11.3 – 11.10 при величинах постоянной времени $T_x = T_v = 43000$ с (1 виток), моделировании гравитационного поля Земли с точностью до ~70 порядка и гравитационных возмущений от Луны и Солнца обеспечивают точность по координатам ~30 м, по скорости – 1,5 см/с.

При проведении коррекции орбиты КА с помощью корректирующих двигателей ошибки оценки резко возрастают. Но они могут быть значительно снижены за счет уменьшения величины постоянных времени T_x и T_v . Однако эти постоянные времена ограничены снизу условиями устойчивости динамической фильтрации, зависящими, в том числе, от альманаха НС и особенно от числа НС в спутниковой группировке. Получить аналитически условия устойчивости невозможно в силу существенной нелинейности процесса динамической фильтрации (особенно для высоких орбит при малом числе видимых НС). Поэтому исследование точностных и динамических характеристик формируемой оценки орбиты должно выполняться для каждого конкретного КА и конкретного альманаха НС. Приведенные выше результаты моделирования позволяют оценить достигаемые точности в тех или иных режимах работы АСН и систем КА. При проектировании КА для определения точностных характеристик системы необходимо выполнять аналогичное моделирование с учетом конкретных характеристик КА, его орбиты и состояния группировок навигационных спутниковых систем.

11.3 Навигация геостационарных КА по полным "сырым" измерениям от "обратных" НС

Если КА, находящиеся на ВЭО периодически "видят" "прямые" НС и могут формировать КСВ, то КА на ГСО могут видеть только "обратные" НС. Типовые графики видимости НС на ГСО в режимах GPS, ГЛОНАСС и GPS+ГЛОНАСС приведены на рис. 11.20. Графики получены путем моделирования для группировки GPS из 30 НС и ГЛОНАСС из 24-х НС. Из графиков видно, что на всей орбите в режиме GPS число видимых НС находится в диапазоне $0\div 4$, в режиме ГЛОНАСС – в диапазоне $0\div 3$, в режиме GPS+ГЛОНАСС – в диапазоне $0\div 6$.

В режиме GPS и GPS+ГЛОНАСС наблюдаются интервалы, когда число видимых НС больше 3. Принционально на этих участках орбиты можно формировать КСВ. Однако, в силу малости углового расстояния между видимыми НС, уровень GDOP на этих участках оказывается настолько большим, что точность формируемых КСВ оказывается недопустимо низкой.

На рис. 11.21 для этих участков орбиты приведены графики ошибок КСВ по координатам и графики уровня GDOP. Из приведенных графиков видно, что уровень GDOP находится в диапазоне $100\div 1000$ при допустимой величине $2\div 6$. Высокий уровень GDOP обуславливает большие ошибки определяемых координат КА, достигающих по величине 5 км. При таких ошибках ошибки прогноза орбиты на интервале, где КСВ не формируются ($n < 4$), может составлять десятки километров. Очевидно также, что оценивать орбиту по измерениям КСВ в режимах GPS или ГЛОНАСС вообще невозможно. Поэтому оценку орбиты для ГСО необходимо проводить по "сырым" измерениям. При этом обеспечивается максимальная точность оценки орбиты, если она осуществляется по полным "сырым" измерениям –

псевдодальностям и интегральным фазам, например, по алгоритмам 11.6÷11.10, приведённым в предыдущем разделе для ВЭО. Формирование оценки орбиты для ГСО по этим алгоритмам было выполнено путём моделирования при различных возмущениях. Для исключения ионосферных ошибок измерений в обработку принимались НС, высоты линий визирования которых относительно Земли были более 600 м (маска 600 км). Поэтому моделируемые ионосферные ошибки не превышали величины 2÷4 м. Моделировались также эфемеридные ошибки, шумы измерений псевдодальностей, переотражения сигналов от элементов конструкции КА. Все эти ошибки также не превышали величины ~5 м. На рис. 11.22 приведены графики ошибок формируемой оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=T_v = 86000$ с. При моделировании предполагалось, что модель движения КА, реализуемая в АСН при прогнозе движения объекта, абсолютно точная.

Из приведённых графиков следует, что в установившемся состоянии ошибки оценки по координатам не превышают 3 м, по скорости – 0,1 см/с. Длительность переходного процесса составляет ~1 сутки. В течение переходного процесса ошибки изменяются от начальных значений в момент t_0 до установленных значений.

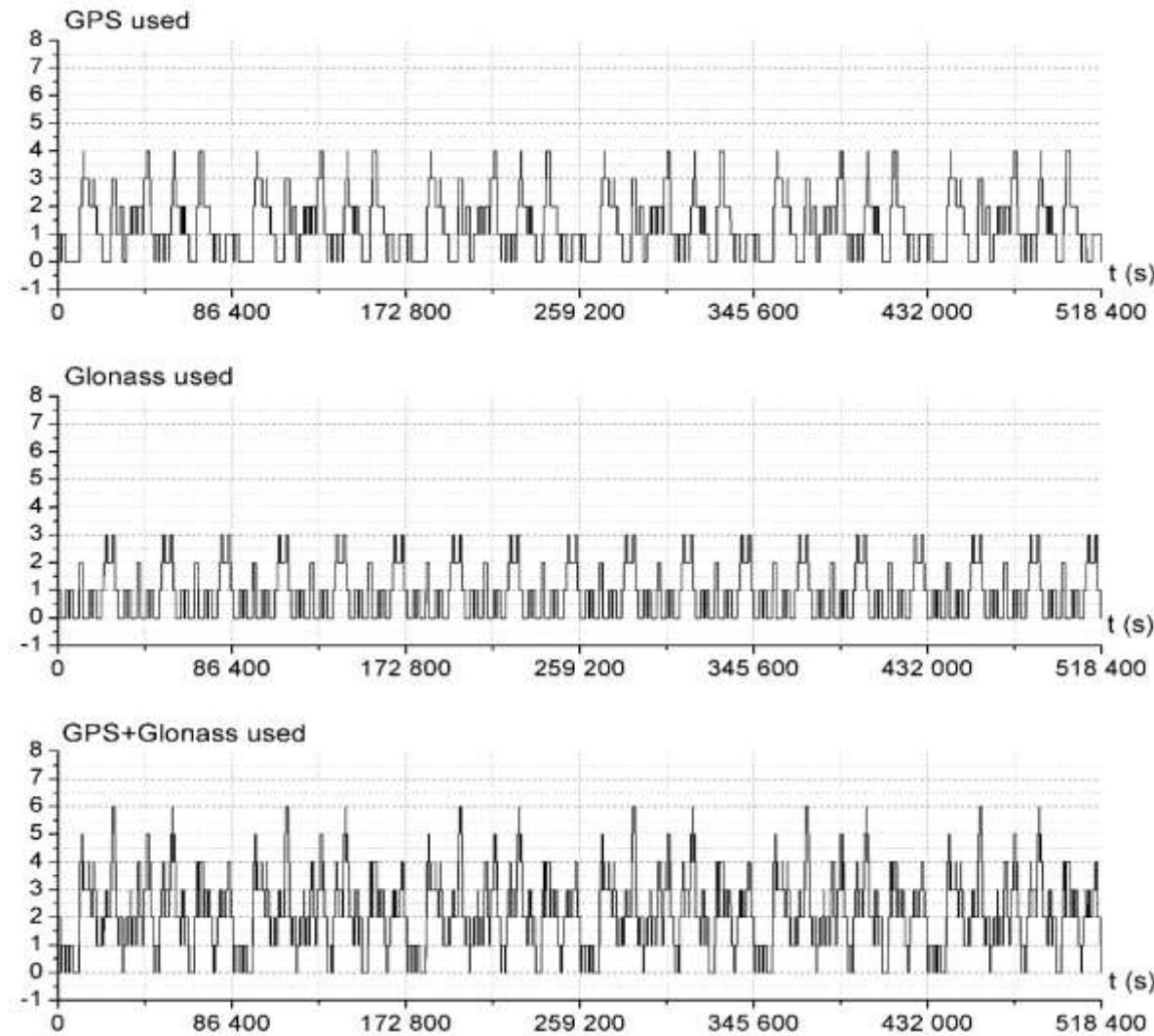


Рис. 11.20 Графики числа видимых НС для ГСО в режимах GPS, ГЛОНАСС, GPS+ГЛОНАСС.

На рис. 11.23 приведены аналогичные графики ошибок оценки ГСО с той лишь разницей, что в качестве возмущений рассматривались ошибки измерений АСН и влияние сил солнечного давления. То есть, предполагалось, что в бортовой модели выполняется точное моделирование гравитационного поля Земли и гравитационного воздействия от Луны и Солнца. Действительно, эти возмущения легко могут моделироваться в АСН с высокой точностью, тогда как моделирование сил солнечного давления для многих КА представляет собой проблему из-за неопределенности ряда параметров. Поэтому моделирование реального движения КА учитывало силы солнечного давления, а в бортовой модели движения КА при выполнении динамической фильтрации измерений АСН эти возмущения не моделировались. Из приведенных графиков видно, что из-за нескомпенсированного влияния сил солнечного давления ошибки оценки орбиты по координатам возросли до 200 м, по скорости – до 2 см/с.

На рис. 11.14 приведены результаты аналогичного моделирования для режима ГЛОНАСС, когда измерения в АСН проводились только по сигналам спутников ГЛОНАСС. Из приведенных на рисунке графиков видно, что ошибки оценки по координатам достигают величины порядка 300 м, ошибки по скорости достигают величины 1,5 см/с.

КСВ - модель

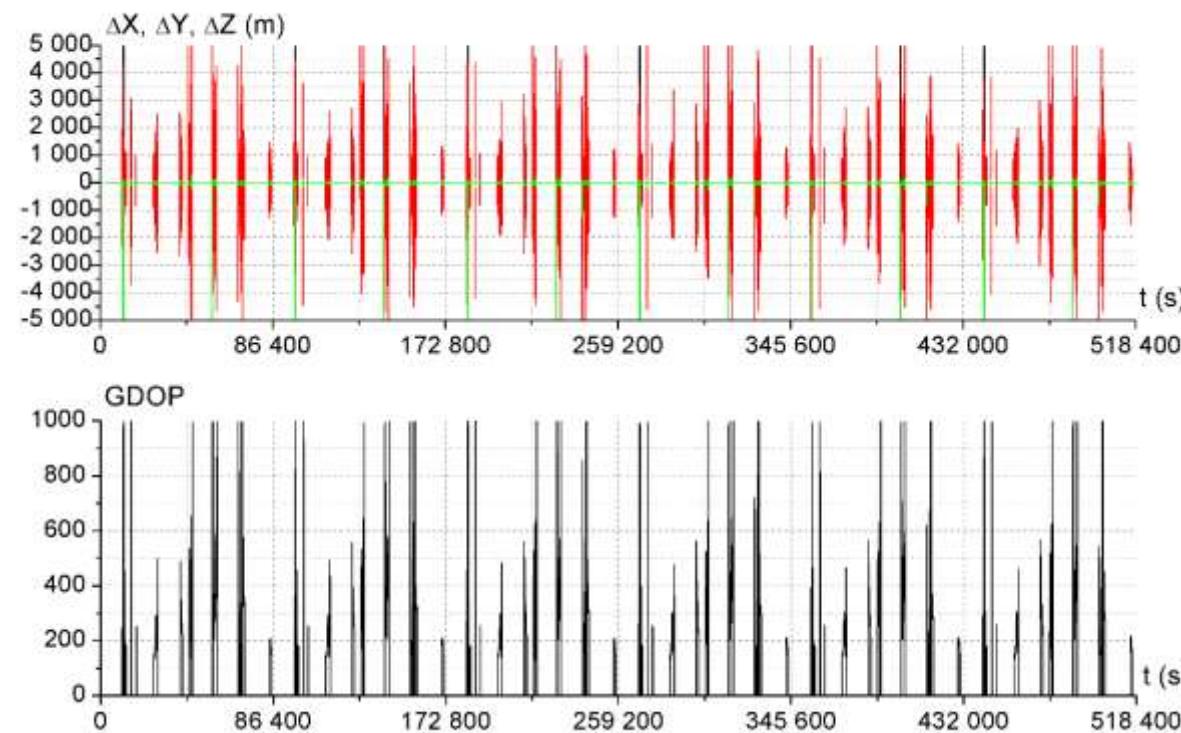


Рис. 11.21 Графики ошибок КСВ по координатам и уровня GDOP для ГСО в режиме GPS+ГЛОНАСС на участках орбиты, где число видимых НС>3.

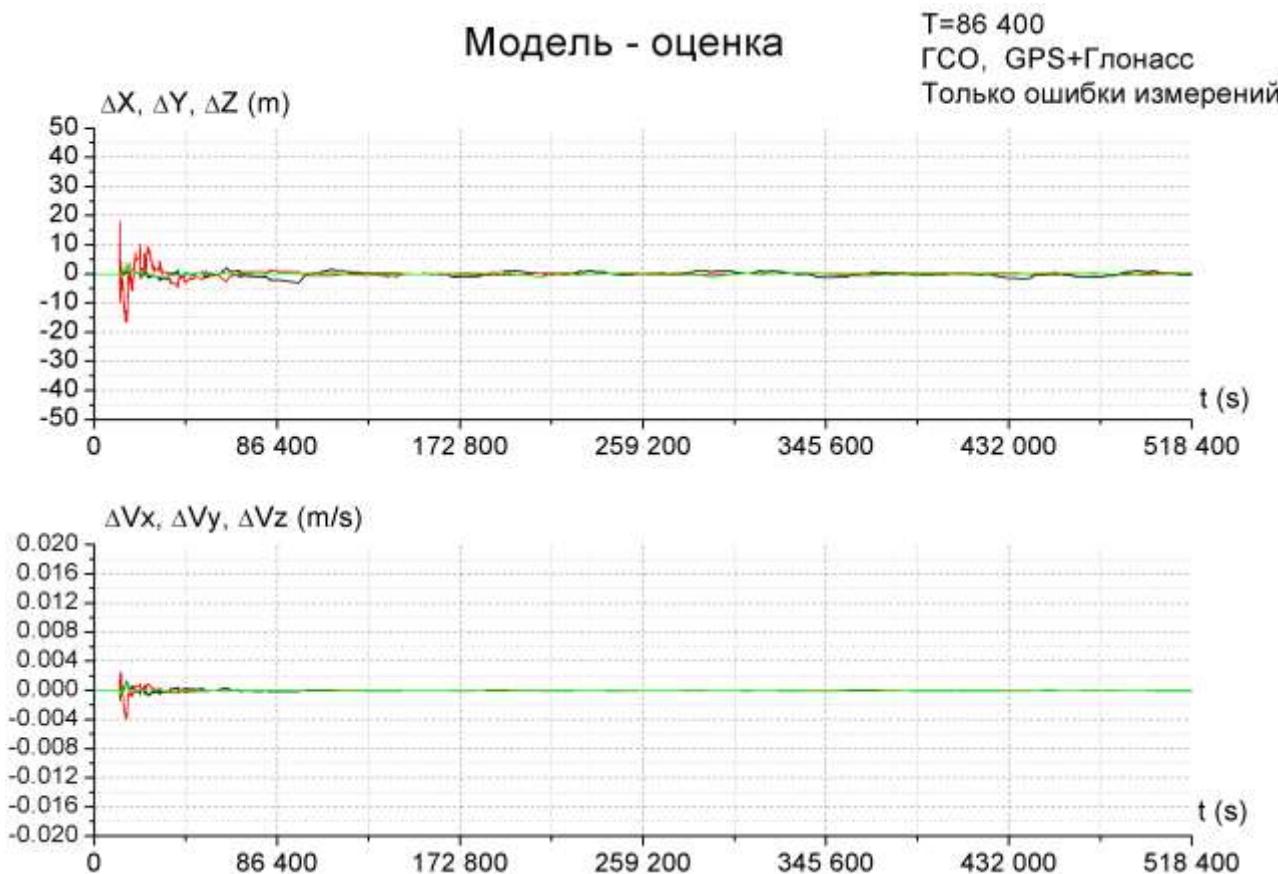


Рис. 11.22 Графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=T_y=86000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН.

Однако полученный результат относится к случаю, когда КА находится в свободном полёте и на него влияют только внешние силы. При выполненной коррекции орбиты на КА действуют повышенные возмущающие силы от двигателей коррекции, сильно влияющие на точность формируемой оценки. Двигатели коррекции орбиты КА могут быть двух типов: двигатели большой тяги и двигатели малой тяги.

Двигатели большой тяги – это реактивные двигатели, создающие ускорения в диапазоне $10^{-2} \div 10 \text{ м/с}^2$ и работающие при коррекции орбиты от нескольких секунд до нескольких минут. Такую коррекцию будем называть импульсной.

Двигатели малой тяги – это, как правило, электрические реактивные двигатели с тягой от нескольких десятков грамм до нескольких сотен грамм. Они создают ускорение КА в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ м/с}^2$. Длительность коррекции с помощью таких двигателей может находиться в диапазоне от нескольких десятков минут вплоть до непрерывной работы в течение месяцев.

Как правило, на КА с корректирующими двигателями большой тяги в состав системы управления входит БИНС, оценивающая ускорение от двигателей. Будем считать, что точность оценки ускорения с помощью БИНС составляет 10^{-4} м/с^2 . Тяга малых двигателей хотя и грубо, но также может быть оценена по управляющим параметрам двигателя, по крайней мере, с точностью 10%. С учетом сказанного будем предполагать, что при проведении непрерывной коррекции ошибка моделируемого на борту ускорения от двигателей составляет 10^{-5} м/с^2 . Определим, как влияет ошибка оценки непрерывного возмущающего ускорения от двигателей на точность формируемой оценки орбиты КА.

На рис. 11.15 приведены графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС с постоянной времени фильтра $T_x = T_v = 86000$ с при непрерывной коррекции орбиты с ошибкой оценки ускорения от двигателей 10^{-5} м/с^2 . Из графиков видно, что ошибки по координатам достигают величины 30 км, по скорости – 2 м/с. То есть, по сравнению со свободным полётом, ошибки увеличились в ~ 100 раз. Существенное уменьшение ошибок может быть обеспечено за счет изменения постоянной времени фильтра. Проведенное исследование показало, что наиболее приемлемыми значениями постоянных времени фильтра,

обеспечивающими существенное повышение точности формируемой оценки ГСО и сохраняющими устойчивость процесса фильтрации, является значение $T_x = 10000$ с, $T_V = 2000$ с. Графики ошибок оценки ГСО для этих значений постоянной времени фильтра в режиме GPS+ГЛОНАСС и возмущений от двигателей 10^{-5} м/с² приведены на рис. 11.26. Из графиков видно, что ошибки оценки ГСО по координатам в этом случае не превышают 1,5 км, по скорости – 0,2 м/с, то есть, по сравнению с предыдущим случаем ($T_x = T_V = 86000$ с) уменьшились в 20 раз. Обеспечиваемая в этом случае точность оценки орбиты (порядка километра) во многих случаях достаточна для решения функциональных задач КА. Тогда эти задачи могут выполняться и на фоне коррекции орбиты. После завершения коррекции максимальные ошибки оценки ГСО по координатам и скорости для постоянной времени $T_x = 10000$ с, $T_V = 2000$ с в режиме GPS+ГЛОНАСС приведены на рис. 11.27.

Модель - оценка

T=86 400
 ГСО, GPS+Глонасс
 Ошибки измерений и СД

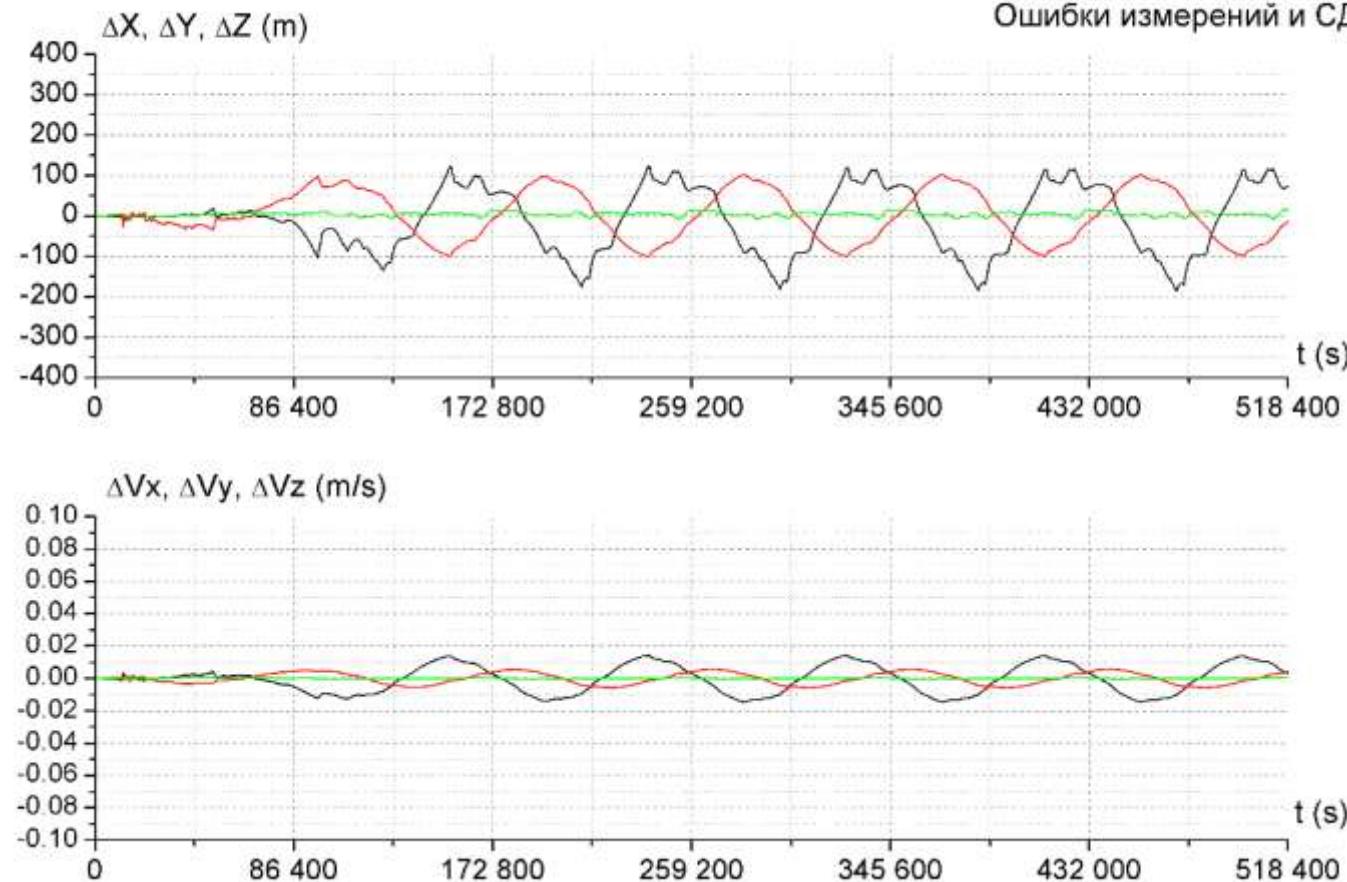


Рис. 11.23 Графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=T_v=86000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и солнечное давление.

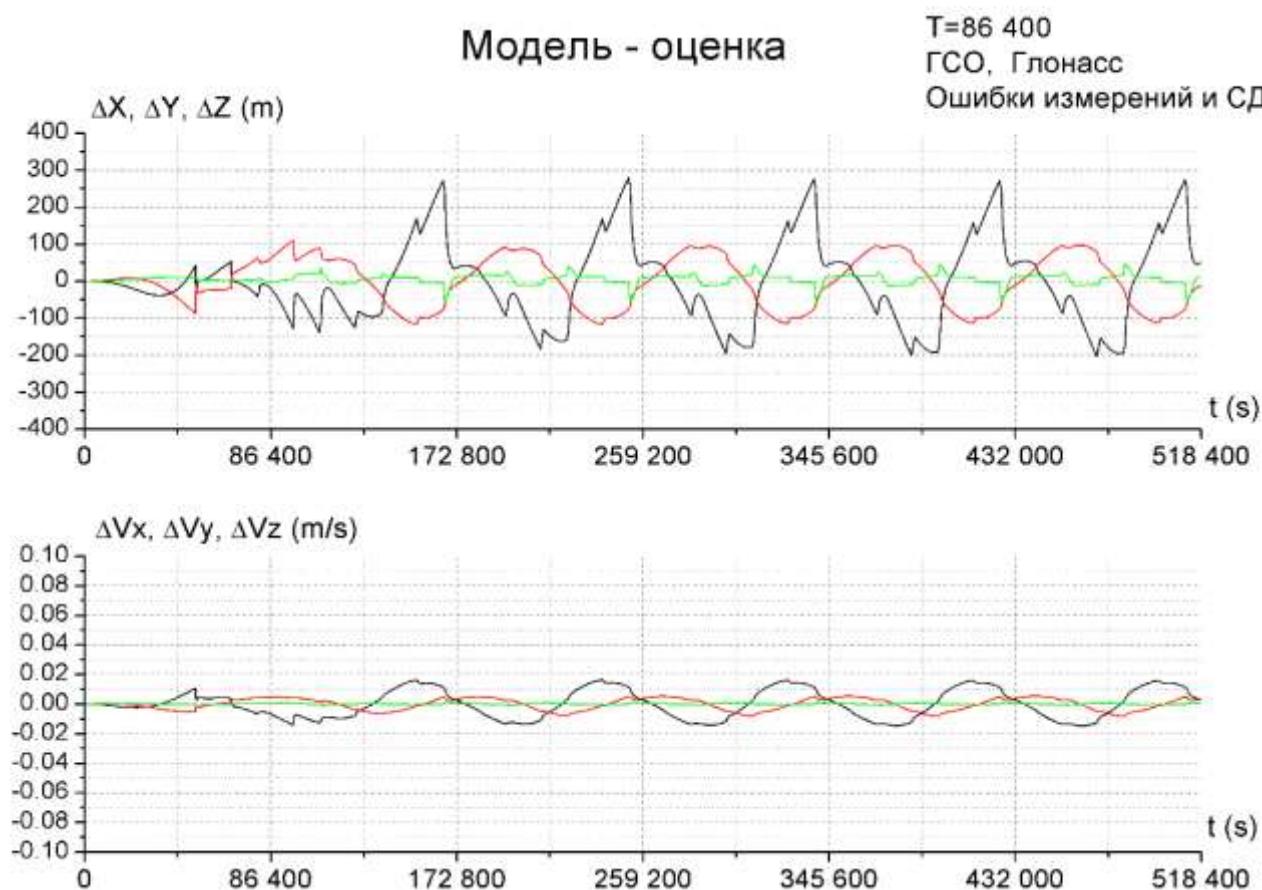


Рис. 11.24 Графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=T_v=86000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и солнечное давление.

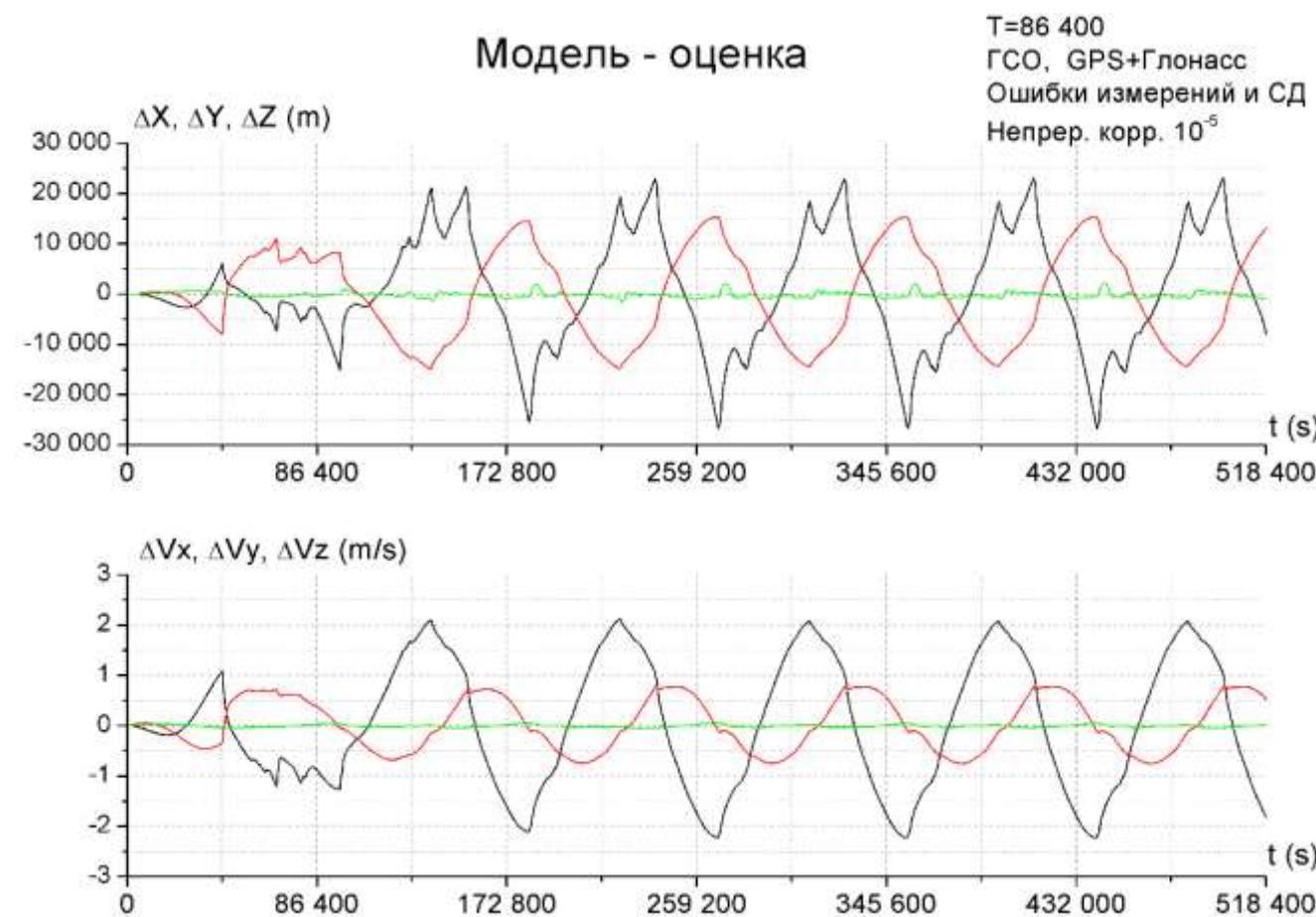


Рис. 11.25 Графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X=T_V=86000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН, солнечное давление, постоянное возмущение от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с 2 .

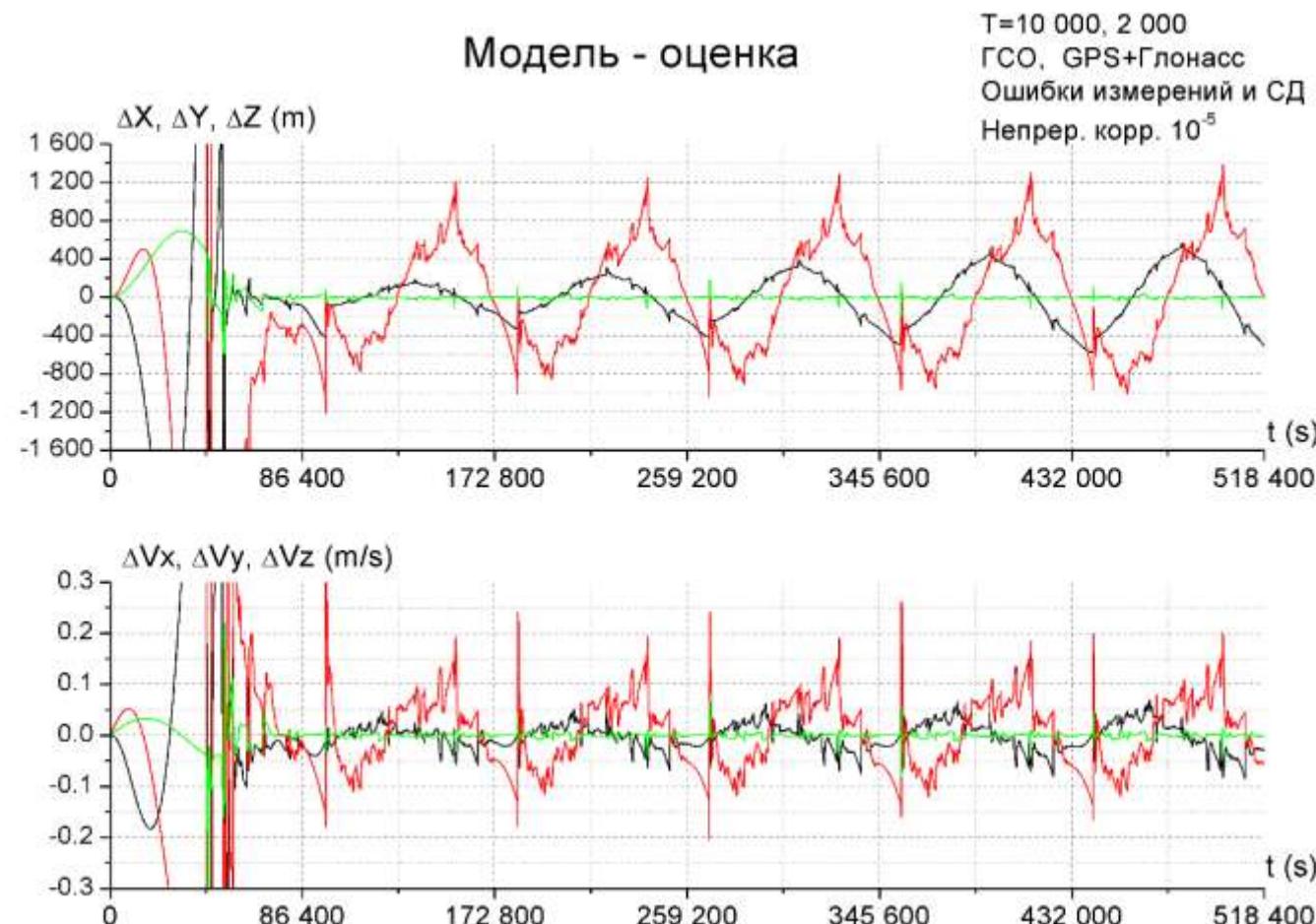


Рис. 11.26 Графики ошибок ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_X = 10000$ с, $T_V = 2000$ с. Действующие возмущения: ошибки измерений АСН, силы солнечного давления, возмущения от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с 2 .

Таким образом, уменьшение постоянных времени T_x и T_v обеспечивает повышение точности формируемой оценки орбиты при проведении коррекции орбиты. Однако в этом случае ухудшается устойчивость процесса динамической фильтрации измерений АСН. При уменьшении числа НС в группировке навигационных спутников процесс динамической фильтрации может стать неустойчивым. Например, на рис. 11.28 приведены графики ошибок оценки ГСО для постоянной времени $T_x = 10000$ с, $T_v = 2000$ с в режиме ГЛОНАСС, которые демонстрируют "развал" процесса фильтрации – ошибки по координатам начинают превышать десятки километров, а по скорости – десятки метров в секунду. Поэтому выбор минимально допустимых значений постоянных времени T_x и T_v должен осуществляться для каждой конкретной группировки НС.

Импульсная коррекция орбиты приводит к временному снижению точности формируемой оценки орбиты. На рис. 11.29 приведены графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x = 10000$ с, $T_v = 2000$ с и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с² и длительностью 2000 с. Из графиков видно, что в процессе коррекции ошибки по координатам возрастают до 900 м, по скорости – до 0,3 м/с². После завершения коррекции ошибки оценки начинают уменьшаться и выходят на установившийся уровень (демонстрируемый графиками рис. 11.27) за время ~1 виток.

Модель - оценка

$T=10\ 000, 2\ 000$
 ГСО, GPS+Глонасс
 Ошибки измерений и СД

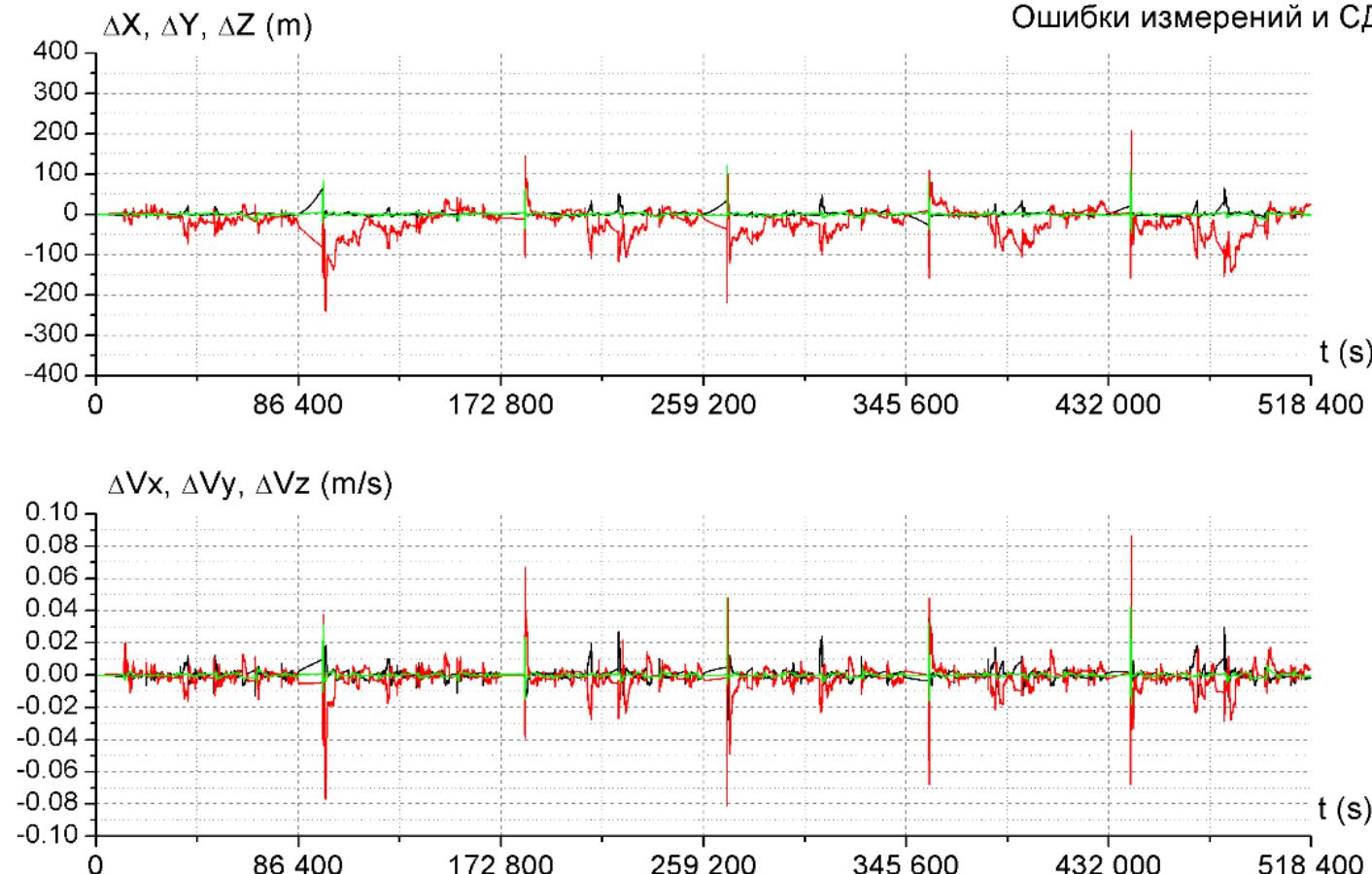


Рис. 11.27 Графики ошибок ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=10000$ с, $T_v=2000$ с.

Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и силы солнечного давления.

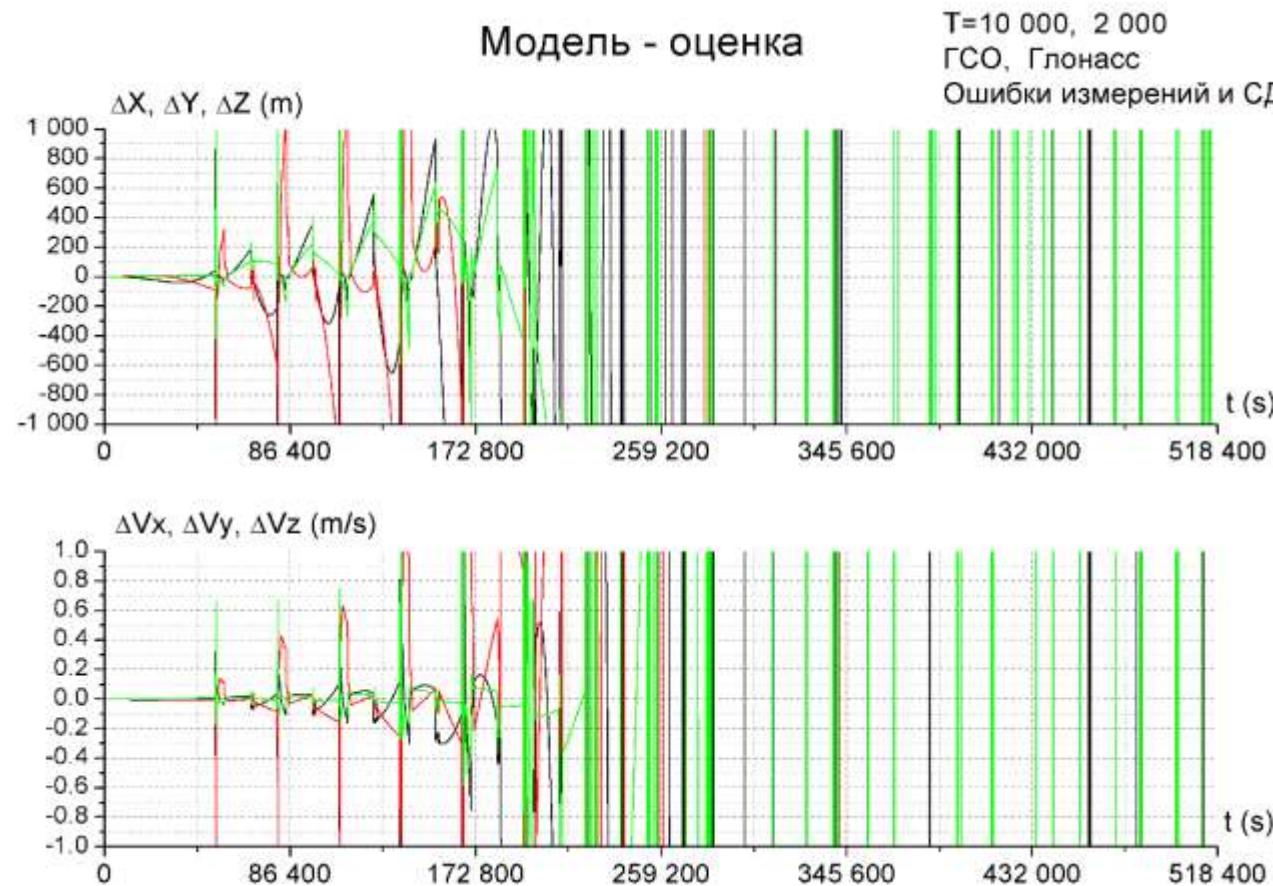


Рис. 11.28 Графики ошибок ГСО по координатам и скорости в режиме ГЛОНАСС при постоянной времени $T_x=10000$ с, $T_v=2000$ с.

Действующие возмущения: ошибки измерений АСН и силы солнечного давления.

Модель - оценка

$T_x = 10\ 000, 2\ 000$
 ГСО, GPS+Глонасс
 Ошибки измерений и СД
 Имп. корр. 10^{-4} 2000с

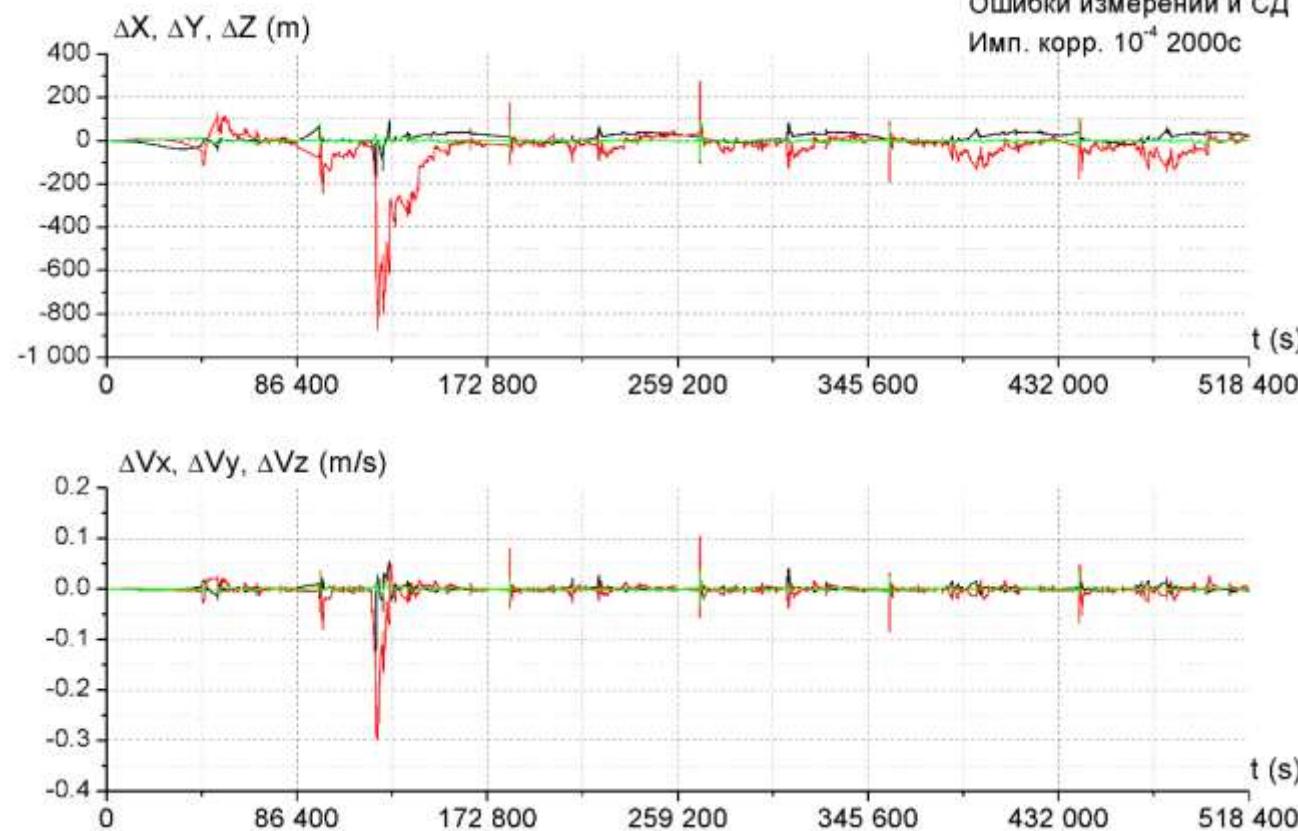


Рис. 11.29 Графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_x=10000$ с, $T_v=2000$ с.
 и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с 2 и длительностью 2000 с.

Таким образом, формирование оценки орбиты ГСО по полным "сырым" измерениям АСН в соответствии с алгоритмами динамической фильтрации 11.3 – 11.10 при величинах постоянной

времени

$T_x = T_v = 86000$ с (1 виток), моделировании гравитационного поля Земли с точностью до ~8 порядка и гравитационных возмущений от Луны и Солнца обеспечивают точность по координатам ~200 м, по скорости – 1,5 см/с.

При проведении коррекции орбиты КА с помощью корректирующих двигателей ошибки оценки резко возрастают. Но они могут быть значительно снижены за счет уменьшения величины постоянных времени T_x и T_v . Однако эти постоянные времени ограничены снизу условиями устойчивости динамической фильтрации, зависящими, в том числе, от альманаха НС и особенно от числа НС в спутниковой группировке. Получить аналитически условия устойчивости невозможно в силу существенной нелинейности процесса динамической фильтрации (особенно для высоких орбит при малом числе видимых НС). Поэтому исследование точностных и динамических характеристик формируемой оценки орбиты должно выполняться для каждого конкретного КА и конкретного альманаха НС. Приведенные выше результаты моделирования позволяют оценить достигаемые точности в тех или иных режимах работы АСН и систем КА. При проектировании КА для определения точностных характеристик системы необходимо выполнять аналогичное моделирование с учетом конкретных характеристик КА, его орбиты и состояния группировок навигационных спутниковых систем.

Литература

1. Основы теории полета космических аппаратов под редакцией Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова. М., «Машиностроение», 1972 г.
2. М.К. Тихонравов и др. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. М., «Машиностроение», 1962 г.
3. П.Е. Эльясберг. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965 г.
4. Р.Ф. Аппазов, С.С. Лавров, В.П. Мишин. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М., «Наука», 1966 г.
5. Ю.В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки результатов измерений. М., Физматгиз, 1962 г.
6. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1968 г.
7. Р. Бэттин. Наведение в космосе. Перевод с английского, М., «Машиностроение», 1966 г.
8. В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М., «Наука», 1992 г.
9. К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин. Управление космическими летательными аппаратами. 2-е издание, дополненное и переработанное М., «Машиностроение», 1974 г.
10. Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь. Управление ориентацией космических аппаратов. М., «Наука», 1974 г.
11. А.П. Разыграев. Основы управления полетом космических аппаратов. 2-е издание, дополненное и переработанное М., «Машиностроение», 1990 г.
12. В.П. Легостаев, Б.В. Раушенбах. Автоматическая сборка в космосе. «Космические исследования» 1969 г., № 6, Т. VII.
13. В.П. Легостаев, И.П. Шмыглевский. Управление сближением космических аппаратов на этапе причаливания. «Управление в космосе.» М., «Наука», 1972 г., Т. II.
14. Б.В. Раушенбах и др. Космические аппараты. под общ. ред. К.П. Феоктистова М., Воениздат, 1983 г.
15. Д.Е. Охочимский. Динамика космических полетов. М., изд-во МГУ, 1968 г.
16. А.Ю. Ишлинский. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М., «Наука», 1968.
17. Р. Калман, Р. Бьюси. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказывания. Труды Американского общества инженеров – механиков. Сер. М., 1961 г. т. 33, № 1.
18. А.А. Лебедев, Н.Ф. Герасюта. Баллистика ракет. М., «Машиностроение», 1970 г.
19. А.А. Лебедев, М.Н. Красильщиков, В.В. Малышев. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М. Машиностроение, 1974 г.

20. А.А. Лебедев, В.Б. Соколов. Встреча на орбите. М., «Машиностроение», 1969 г.
21. И.К. Бажинов, В.И. Алешин, В.Н. Почукаев и др. Космическая навигация. М., «Машиностроение», 1975 г.
22. В.М. Пономарев. Теория управления движением космических аппаратов. М., «Наука», 1965 г.
23. А.А. Крассовский. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М., «Наука», 1973 г.
24. Л.Ч. Каргу. Системы угловой стабилизации КА. М., Машиностроение, 1980 г.
25. Г.Д. Смирнов. Управление космическими аппаратами. М., «Наука», 1978 г.
26. Е.Н. Переверзенцев, В.А. Сорочинский. Алгоритмы решения задачи определения места судна по данным дальномерной навигационной спутниковой системы. «Судовождение и связь» / ЦНИИМФ.Л., «Транспорт», 1971 г. Вып.147.
27. В.С. Шебшаевич. Введение в теорию космической навигации. М., «Сов. радио», 1971 г.
28. Е.Н. Переверзенцев, В.А. Сорочинский. Алгоритмы решения задачи определения места судна по данным разностно-дальномерных навигационных спутниковых систем. «Судовождение и связь» ЦНИИМФ. Л., «Транспорт», 1972 г. Вып.157.
29. Р.Л. Истон. Роль частоты и времени в навигационных спутниковых системах. Время и частота: пер. с английского М., «Мир», 1973 г.
30. В.Н. Брандин, А.А. Васильев, С.Т. Худяков. Основы экспериментальной космической баллистики. М., «Машиностроение», 1974 г.
31. Е.П. Чуров. Спутниковые системы радионавигации. М., «Сов. радио», 1977 г.
32. R.J. Milliken, C.J. Zoller. Principle of operation of NAVSTAR and systems characteristics. “Navigation” (USA), 1978. Vol. 25 N2.
33. P.S Noe, K.A. Myers T.K. Wu. A navigation algorithm for the low – cost GPS receiver. “Navigation” (USA), 1978. Vol. 25 N2.
34. B.W. Parkinson, J.J. Spilker. Global Positioning System: Theory and Applications. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996. – Volume I, II.
35. J.J. Spilker. GPS signal structure and performance characteristics. “Navigation” (USA), 1978. Vol. 25 N2.
36. И.В. Кудрявцев, И.Н. Мищенко, А.И. Волынкин под редакцией
В.С. Шебшаевича. Бортовые устройства спутниковой радионавигации. М., «Транспорт», 1988 г.
37. В.С. Шебшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванович и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. М., «Радио и связь», 1993 г.

38. А.Г. Козлов и др. Проектирование космических навигационных систем. Красноярск, НИИ ИПУ, 2000 г.
39. В.С. Шебшаевич. Введение в теорию космической навигации. М., «Сов. Радио», 1976 г.
40. В.А. Болдин. Зарубежные глобальные системы навигации. М., изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986 г.
41. М.К. Чмых. Спутниковые системы связи и навигации: сб. статей. Красноярск, КГТУ, 1997 г.
42. Интерфейсный Контрольный Документ ГЛОНАСС: версия 5.0. – 2002 г. Интернет: www.glonass-center.ru/ICD02_e.pdf.
43. В.Д. Дишель, А.К. Быков, В.Г. Сулимов, Н.В. Соколова. Совершенствование бортового математического обеспечения первой инерциально-спутниковой системы навигации и ориентации космических средств выведения. Обобщение результатов серии летных испытаний системы XIII-ая Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ «Электроприбор», 2006 г.
44. В.Д. Дишель, Е.Л. Межерицкий, В.А. Немкеевич. Методология формирования объединенного контура терминального наведения и инерциально-спутниковой корректируемой навигации в системах управления космических средств выведения. Анализ натурных испытаний. XV-ая Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ «Электроприбор», 2008 г.
45. Б.В. Шебшаевич, А.Е. Тюляков, В.Е. Дружинин, Д.Н. Федоров, А.В. Чухненков. Интегрированная навигационная аппаратура для низкоорбитальных космических аппаратов зондирования Земли ; X-ая Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ «Электроприбор», 2003 г.
46. Г.П. Аншаков, А.И. Мантуров, Я.А. Мостовой, В.И. Рублев, Ю.М. Усталов. Бортовое навигационное обеспечение космического аппарата дистанционного зондирования Земли «Ресурс - ДК». XIII-ая Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ «Электроприбор», 2006 г.
47. Р.Н. Ахметов, А.И. Мантуров, Я.А. Мостовой, В.И. Рублев, Ю.М. Усталов, Р.А. Дзесов. Некоторые результаты анализа эксплуатации системы спутниковой навигации на КА «Ресурс - ДК». XV-ая Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ «Электроприбор», 2006 г.
48. В.Д. Дишель, В.Л. Паластин. Методы навигации и ориентации геостационарных и высокоэллиптических космических аппаратов при использовании БИНС, корректируемой по кодовым и фазовым измерениям ГЛОНАСС/GPS. 10 Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ «Электроприбор», 2003 г.

49. В.А. Бартенев, А.К. Гречкоев, Д.И. Мараескул. Применение ГЛОНАСС и GPS для навигации космических аппаратов на геостационарных и высокоэллиптических орбитах. Методы навигации, построения аппаратуры и технология испытаний. «Космонавтика и ракетостроение» ЦНИИМАШ, 3(48), 2007.
50. W. Bamford, L. Winternitz, C. Hay. Autonomous GPS Positioning at High Earth Orbits. GPS World, Apr. 1, 2006 г.
51. Ю.А. Соловьев. Системы спутниковой навигации. ЭКО-ТРЕНДЗ, Москва, 2000 г., 267 стр.
52. Ю.А. Соловьев. Спутниковая навигация и ее применение. ЭКО-ТРЕНДЗ, Москва, 2003 г., 325 стр.
53. Ю.А. Соловьев. Состояние и развитие спутниковых навигационных систем. Научно-технический журнал по проблемам навигации. Новости навигации № 2, Москва, 2008.
54. Ю.А. Соловьев. Точность определения относительных координат и синхронных шкал времени объектов при использовании спутниковых радионавигационных систем. Радиотехника. ИПРЖР. № 9, 1998 г.
55. В.В. Малышев. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез, управление. М., Издательство МАИ, 2000 г.
56. В.В. Малышев, М.Н. Красильщиков, В.И. Карлов. Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1989 г.
57. В.В. Малышев, А.К. Кузнецов, А.В. Федоров. Достаточные условия оптимальности в задачах управления движением. М., Издательство МАИ, 1990 г.
58. В.В. Малышев, А.В. Федоров. Управление движением спутников космической системы. Сб. трудов II Международной конференции «Малые спутники. Новые технологии. Миниатюризация. Области эффективного применения в XXI веке». М., ЦНИИМАШ, 2000.
59. И.О. Скаун Всемирное координированное время и методы сличения шкал времени. «Космонавтика и ракетостроение» ЦНИИМАШ, 4(69), 2012.
60. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, А.С. Семенов, И.А. Краснопольский Метод повышения точности и "времени жизни" эфемерид GPS и ГЛОНАСС Сб. трудов XIX-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2012
61. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, А.С. Семенов Результаты летного эксперимента на МКС по исследованию влияния переотражений на решение задач навигации, ориентации и сближения по измерениям аппаратуры спутниковой навигации. Гирокопия и навигация. № 1 (76), 2012 г
62. Ю.Г. Марков, М.В. Михайлов, В.Н. Почукаев Учет фундаментальных составляющих параметров вращения Земли в формировании высокоточной орбиты навигационных спутников. Доклады Академии наук, 2012 г., том 445, №1
63. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, А.С. Семенов, И.А. Краснопольский, Е.А. Белянко Метод повышения точности и "времени жизни" эфемерид ГЛОНАСС. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ, № 4(65), 2011

64. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, А.С. Семенов Результаты летного эксперимента на МКС по исследованию влияния переотражений на решение задач навигации, ориентации и сближения по измерениям аппаратуры спутниковой навигации. Сб. трудов XVIII-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2011
65. М.В. Михайлов, И.И. Ларьков Решение задачи относительной навигации по измерениям глобальной спутниковой навигационной системы при сближении космических аппаратов. Труды МФТИ. Том 3, № 2, 2011
66. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков Автономная навигация и сближение КА на лунной орбите. Гирoscopия и навигация. Том 1, № 4, 2010
67. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков Автономная навигация и сближение КА на лунной орбите. Сб. трудов XVII-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2010
68. М.В. Михайлов, С.Н. Рожков Прецизионная автономная навигация МКС по измерениям АСН. Вестник компьютерных и информационных технологий. М., Машиностроение, № 5, 2009
69. М.В. Михайлов Метод определения ориентации космических аппаратов по измерениям асинхронных приемников GPS-ГЛОНАСС. Вестник компьютерных и информационных технологий. М., Машиностроение, №6, 2009
70. М.В. Михайлов Определение ориентации космических аппаратов по измерениям асинхронных приемников GPS-ГЛОНАСС и датчиков угловой скорости. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ, 2009. № 2(55)
71. М.В. Михайлов, С.Н. Рожков Автономная навигация высокоэллиптических космических аппаратов по измерениям АСН. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ, 2009. № 2(55)
72. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов Эксплуатация АСН-М МКС, ее характеристики и возможности. Перспективы использования АСН на КА "Союз" и "Прогресс". Сб. трудов XVI-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2009.
73. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов Ориентация перспективных кораблей "Союз" и "Прогресс" по измерениям асинхронных приемников GPS. Сб. трудов XV-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2008.
74. М.В. Михайлов, Р.В. Федулов Применение аппаратуры спутниковой навигации для навигационного обеспечения сближения и стыковки ATV с МКС. Ракетно-космическая техника, РКК "Энергия", вып. 3-4, 2008.
75. М.В. Михайлов Система спутниковой навигации МКС. Функциональное назначение и прикладные эксперименты. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ, 2007. № 3(48)

76. В.Н. Бранец, М.В. Михайлов Аппаратура спутниковой навигации на существующих и перспективных изделиях РКК "Энергия". Функциональные возможности, технические характеристики. Международный форум по спутниковой навигации. М. Правительство Москвы, 2007.
77. В.Н. Бранец, М.В. Михайлов Фазовый метод решения задачи относительной навигации при сближении космических аппаратов с МКС по сигналам спутниковых навигационных систем GPS и ГЛОНАСС. Сб. трудов XIII-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2006.
78. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов Использование спутниковой навигации для обеспечения полета автоматического транспортного корабля ATV к Международной космической станции. Сб. трудов XIII-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2006.
79. М.В. Михайлов, Р.В. Федулов Определение относительного положения двух КА по сигналам навигационных систем GPS и ГЛОНАСС. Сб. трудов пятой Международной конференции Авиация и космонавтика. М., 2006
80. Е.А. Микрин, М.В. Михайлов Прецизионная навигация спутника дистанционного зондирования Земли. V-е научные чтения памяти М.К. Тихонравова. МО, Королёв, 2004.
81. В.Н. Бранец, М.В. Михайлов Навигационное обеспечение МКС. Сб. трудов X-й С-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб, ЦНИИ "Электроприбор", 2003
82. В.Н. Бранец, М.В. Михайлов, Ю.В. Стишев "Союз"- "МИР" – орбитальный эксперимент GPS/GLONASS. Сб. докладов 12-й международной технической конференции. ION GPS 1999, Nashville Convention Center
83. Э.В. Гаушус, М.В. Михайлов, Ю.Н. Зыбин, А.В. Антонов Управление спуском космического аппарата в атмосфере. Вестник МГТУ им. Баумана, спец. выпуск Системы управления, 1/97 (25)
84. Э.В. Гаушус, М.В. Михайлов, Ю.Н. Зыбин, А.В. Антонов Прецизионная система навигации и управления движением искусственных спутников Земли. Вестник МГТУ им. Баумана, спец. выпуск Системы управления, 1/97 (25).
85. Murtazin R., Budylov S. Short Rendezvous Missions for Advanced Russian HumanSpacecraft. – Acta Astronautica, 2010, № 67, pp. 900-909.
86. Е.К. Мельников, А.И. Смирнов Метод решения многоцелевой задачи управления движением околоземной космической станции. – Космонавтика и ракетостроение, 2009, вып. 2 (55), с. 69 – 78.
87. Murtazin R., Petrov N. Short Profile for the Human Spacecraft SOYUZ-TMA Rendezvous Mission to the ISS. – Acta Astronautica, 2012, № 77, pp. 77 – 82.

88. Р.Ф. Аппазов, О.Г. Сытин Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987.
89. Освоение космического пространства в СССР. 1967 – 1970 гг. М.: Наука, 1970.
90. NASA News Release-66-226 “Project Gemini-11”, 1966.
91. NASA News Release-73-131 “Project Skylab-3 (Second Manned Mission)”, 1973.
92. Р.Ф. Муртазин Баллистическое обеспечение схем быстрого сближения космического корабля с орбитальной станцией. Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ, 2012. № 4(69).
93. Ю.Г. Марков, В.Н. Почукаев Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточных систем навигации космических аппаратов, Доклады академии наук, 2013. №3

Сайты интернета

C.1 – en.wikipedia.org/wiki/leap_second

C.2 – www.iers.org (полюс и dUT1)

C.3 – http://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods_cb.html (точные эфемериды)