Integralrechnung Cheat Sheet

Allgemein

Die Integration ist die Umkehrung der Ableitung.

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{Differentiation}} y' = f'(x) \xrightarrow{\text{Integration}} y = f(x)$$

Stammfunktion

Es sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$ falls für alle $x \in [a, b]$ gilt: $F'(x) = f(x)$.
Eigenschaften:

1. Hat eine stetige Funktion $f(x)$ mindestens eine Stammfunktion, so hat sie unendliche viele Stammfunktionen.
2. Zwei beliebige Stammfunktione $F_1(x) und F_2(x)$ unterscheiden sich durch eine additive Konstante C. $(F_1(x) - F_2(x) =$ konstant.
3. Ist $F_1(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die allgemeine Stammfunktion ist: $F(x) = F_1(x) + C$, wobei C eine beliebige reelle Konstante ist.

Flächeninhalt (bestimmtes Integral)

Um die Fläche A unterhalb einer Funktion $f(x)$ zu berechnen gilt folgendes Vorgehen:

1. Fläche in n Streifen teilen
2. Alle Streifenflächen berechnen
3. Flächen aufsummieren

In der Theorie wird eine Fläche in Rechtecke zerlegt, Untersumme (U_n) und Obersumme (O_n) berechnet. Die Fläche liegt zwischen diesen beiden Werten.

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k \qquad O_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}A$$

Das bestimmte Integral ist eine Zahl, die der Fläche entspricht.

Flächenfunktion (unbestimmtes Integral)

$$I(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Die obere Intervall Grenze wird offengelassen. Das unbestimmte Integral ist eine Funktion. Eigenschaften:

1. Das unbestimmte Integral $I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ repräsentiert den Flächeninhalt zwischen $y = f(t)$ und der t-Achse im Intervall $a \leq t \leq x$ in Abhängigkeit von der oberen Grenze x.
2. Zu jeder stetigen Funktion $f(t)$ gibt es unendliche viele unbestimmte Integrale, die sich in ihrer unteren Grenze voneinander unterscheiden.
3. Die Differenz zweier unbestimmter Integrale $I_1(x)$ und $I_2(x)$ von $f(t)$ ist eine Konstante.

Fundamentalsatz

Jedes unbestimmte Integral $I(x) = \int\limits_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ der stetigen Funktion $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$:

$$I(x) = \int\limits_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow I'(x) = f(x)$$

heisst: Die Ableitung jedes unbestimmten Integrals ergibt die Integrandfunktion. Jeds unbestimmte Integral einer Funktion ist die Menge aller Stammfunktionen.

- $I(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion.
- Jedes unbestimmte Integral lässt sich schreiben als:
  $$I(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$
- Die Funktionenschar aller unbestimmter Integrale eine Funktion $f(x)$ schreibt man als
  $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$
  wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion ist.
- Für stetige Funktionen sind die Begriffe „unbestimmtes Integral" und „Stammfunktion" synonym.

Grund- oder Stammintegrale

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C$$
$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$
$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$
$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2$$

Beweistechniken

Verifizierung: Ableiten der Stammfunktion ($I(x)$ muss den Integrand ($f(x)$) ergeben. **Beispiel**

Verifizierung.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x - x + C) &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1\\ &= \ln x + 1 - 1\\ &= \ln x \qquad \square\end{aligned}$$

Berechnen des bestimmten Integrals

1. Zunächst eine beliebige Stammfunktion bestimmen
2. Mit der Stammfunktion $F(b)$ und $F(a)$ berechnen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln

Faktorregel

Ein konstanter Faktor darf vor das Integral gezogen werden.

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = C \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise integriert werden.

$$\int_a^b (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Vertauschungsregel

Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Gleiche Intervallgrenzen

Fallen die Integrationsgrenzen zusammen ($a = b$), so ist der Integralwert gleich Null.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Zerlegen des Integrationsintervalls

Für jede Stelle c aus dem Integrationsinterval $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrationsmethoden

Substitution

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

1. Aufstellen der Substitutionsgleichungen:
$$u = g(x) \rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$
2. Durchführen der Integralsubstitution durch Einsetzen der Substitutionsgleichungen in das vorgegebene Integral:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$
Das neue Integral enthält nur noch die Hilfsvariable u und deren Differential $\mathrm{d}u$. Der Integrand ist nur noch eine von u abhängige Funktion $\varphi(u)$
3. Integration (Berechnung des neuen Integrals)
$$\int \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(u)$$
4. Rücksubsitution (mittels $u = g(x)$)
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

- Die Funktion muss stetig differenzier- und umkehrbar sein.
- Die Substitution muss zu einer Vereinfachung führen
- Nach einsetzen der Substitutionsgleichung darf x im Integral nicht mehr vorkommen
- Bei Wurzelausdrücken ist eine Substitutionsgleichung vom Typ $x = h(u)$ günstiger
- Bei bestimmten Integralen kann auf die Rücksubsitution verzichtet werden. Dafür sind die Integrationsgrenzen mit $u = g(x)$ bzw. $x = h(u)$ zu berechnen.

Beispiel mit $u = g(x)$

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$u = 1 + x^2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot x \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot x}$$

Untergrenze: $x = 0 \Rightarrow u = 1 + (0)^2 = 1$

Obergrenze: $x = 1 \Rightarrow u = 1 + (1)^2 = 2$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{u=1}^{u=2} x\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2 \cdot x} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{8} - \sqrt{1}) \approx 0{,}6095
\end{aligned}$$

Integralsubstitutionen

Typ A

$$\int f(a \cdot x + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(u)\,\mathrm{d}u$$

Subsitution: $u = a\dot{x} + b \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{a}$
Beispiel: $\int \sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x; u = 4x + 5$

Typ B

$$\int f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(f(x))^2 + C$$

Substitution: $u = f(x) \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$
Beispiel: $\int \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x; u = \sin x$

Typ C

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C$$

Substitution: $u = f(x) \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$
Beispiel: $\int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x; u = \ln x$

Typ D

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

Substitution: $u = g(x) \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$
Beispiel: $\int x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x; u = x^2$

Typ E

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

Substitution: $u = f(x) \rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$
Beispiel: $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x; u = x^2 - 3x + 1$

Partielle (Produkt-)Integration

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u \cdot v'\,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v\,\mathrm{d}x$$

Eine Funktion muss geschickt nach $u \cdot v'$ zerlegt werden. Die Stammfunktion von v' muss sich ohne Schwierigkeiten ergeben. Häufig muss erneut integriert oder substituiert werden.

Beispiel

$$\int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot e^x - e^x + C = (x-1) \cdot e^x + C
\end{aligned}$$

Flächeninhalt

Die Fläche ist immer ein positiver Wert $\rightarrow$ mit Beträgen arbeiten.

Allgemeiner Fall

Flächen, die teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse verlaufen, müssen in Teilflächen zerlegt werden, die entweder oberhalb oder unterhalb der x-Achse verlaufen:

1. Nullstellen im Interval $a \leq x \leq b$ bestimmen
2. Teilflächen aufsummieren (ggf. Skizze erstellen)

Fläche zw. zwei Kurven (ohne Schnittpunkte)

Gegeben seien zwei Kurven $f_1(x)$ und $f_2(x)$

$$A = \left|\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x\right|$$

Fläche zw. zwei Kurven (mit Schnittpunkten)

Erst die Schnittpunkte berechnen, dann wie ohne Schnittpunkt bis zum Schnittpunkt berechnen und aufsummieren.

Rotationskörper

x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

y-Achse

$y = f(x)$ in $x = g(y)$ umrechnen und Intervallgrenzen berechnen ($c = f(a), d = f(b)$)

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\,\mathrm{d}y = \pi \cdot \int_c^d (g(x))^2\,\mathrm{d}y$$

Anwendungen

$$\text{Ort: } s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int\int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Geschwindigkeit: } v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t) = \dot{s} = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Beschleunigung: } a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \dot{v} = \ddot{s}$$