Math Cheat Sheet

Funktionen

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element x aus eine Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.

$$f:\ D \to W,\ x \mapsto y.$$

Darstellungen:
1. Analytisch ($y = f(x)$ (explizit), $F(x; y) = 0$ (implizit)),
2. Wertetabelle, 3. Graphisch, 4. Parametrisch ($x = x(t)$, $y = y(t)$, Wertetabelle beginnt mit t)

Funktionseigenschaften

Symmetrie

gerade: $f(-x) = f(x)$ ungerade: $f(-x) = -f(x)$

Monotonie

Monoton wachsend	$f(x_1) \leq f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$
Streng monoton wachsend	$f(x_1) < f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$
Monoton fallend	$f(x_1) \geq f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$
Streng monoton fallend	$f(x_1) > f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$

Umkehrbarkeit

Umkehrbar: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (streng monton)
Bestimmen der Umkehrfunktion (Spiegelung an $y = x$):
1. $y = f(x)$ nach x auflösen. Ergebnis: $x = f^{-1}(y)$.
2. Vertauschen von x und y im Ergebnis: $y = f^{-1}(x)$.
Definitions- und Wertebereich sind vertauscht.

$$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(x)$$

Periodizität

Periodisch mit Periode: $p : f(x \pm p) = f(x)$

Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ heisst an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert vorhanden ist und mit dem Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Eine Funktion ist an der Stelle x_0 unstetig, wenn:
1. $f(x)$ an der Stelle x_0 nicht definiert ist (Definitionslücke).
2. An der Stelle x_0 kein Grenzwert vorhanden ist.
3. Funktions- und Grenzwert zwar vorhanden, aber verschieden sind.

Grenzwert

Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Grenzwert g, wenn gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

konvergent = hat Grenzwert, *divergent* hat keinen Grenzwert.
Lösungsschema zur Bestimmung des Grenzwerts $g = \lim_{x \to x_0} f(x)$:
1. Grundsätzlich x_0 in $f(x)$ einsetzen. Wenn $f(x_0)$ definiert ist: $g = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Falls $f(x_0)$ nicht definiert ist, $f(x)$ vereinfachen.
3. Falls das nicht geht, den links und rechtsseitigen Grenzwert durch annähern von links und rechts ermitteln.
Polstelle: Der Grenzwert ist $+\infty$ oder $-\infty$.

Rechenregeln

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = (\lim_{x \to x_0} f(x)) \pm (\lim_{x \to x_0} g(x))$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x \to x_0} g(x))$$

$$\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Polynomfunktionen

Allgemein: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0$
Der Grad des Polynoms ist n. Es gibt n Nullstellen.

Nullstellen-Formeln

Linear	$ax + b = 0$	$x = -\frac{b}{a}$
Quadratisch	$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Kubisch	$ax^3 + bx^2 + cx = 0$	$x(ax^2 + bx + c) = 0$ mit $x_1 = 0$
Biquadratisch	$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$y = x^2 \Rightarrow ay^2 + by + c = 0$

Geraden (erster Grad)

Es sei m die Steigung, a der x- und b der y-Achsenabschnitt.

y-Achse, Steigung	$y = mx + b$	
Achsenabschnittsform	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	
Punkt-Steigung	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$	Durch $P(x_1; y_1)$
Zwei-Punkte-Form	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Durch $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$

Parabeln (zweiter Grad)

Es sei S der Scheitelpunkt.

Hauptform	$y = ax^2 + bx + c$	$S = (-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a})$
Produktform	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	x_1, x_2 sind Nullstellen
Scheitelpunktsform	$y - y_0 = a(x - x_0)^2$	$S = (x_0; y_0)$

Höhere Grade

Besitzt eine Polynomfunktion $f(x)$ vom Grad n an der Stelle x_n eine Nullstelle, so lässt sie sich schreiben als: $f(x) = (x - x_n) \cdot f_1(x)$.
$(x - x_n)$ heisst Linearfaktor, $f_1(x)$ heisst reduziertes Polynom vom Grad $n - 1$.
Besitzt eine Polynom vom Grad n genau n Nullstellen, so lässt es sich schreiben als:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

1. Das reduzierte Polynom erhält man durch das Horner-Schema.
2. Polynome solange reduzieren (raten weiterer Nullstellen) bis man auf eine Polynomfunktion zweiten Grades stösst, deren Nullstellen sich durch lösen der quadratischen Gleichung ergeben.

Horner-Schema

Gegeben: $y = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30 = 3(x^3 + 6x^2 + 3x - 10)$
Durch raten findet man eine Nullstelle bei $x = 1$ $(1 + 6 + 3 - 10 = 0)$.

	$a_3 = 1$	$a_2 = 6$	$a_1 = 3$	$a_0 = -10$
$x_0 = 1$		$a_3 \cdot x_0 = 1$	$7 \cdot x_0 = 7$	$10 \cdot x_0 = 15$
	$a_3 = 1$	$6 + 1 = 7$	$3 + 7 = 10$	$-10 + 10 = 0$

Umgeformt: $y = 3(x - 1)(x^2 + 7x + 10) \Rightarrow y = 3(x - 1)(x + 2)(x + 5)$.

Gebrochenrationale Funktionen

Funktionen, die sich als Quotient zweier Polynomfunktionen $g(x)$ und $h(x)$ darstellen lassen heissen gebrochenrationale Funktionen: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ Diese Funktionen sind echt gebrochen, wenn der Grad von $g(x)$ kleiner ist als der Grad von $h(x)$. Sie werden mit Hilfe der Polynom-Division gelöst.

Nullstellen: $x_0 : g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$.
Definitionslücke: Alle Stellen wo $h(x_0) = 0$.
Bestimmen der Null- und Polstellen:
1. Zähler- und Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegen.
2. die Zähler Linearfaktoren sind die Nullstellen,
3. die Nenner Linearfaktoren sind die Polstellen.

Kreis und Ellipse

Kreisgleichung (Mittelpunkt $M = (x_0; y_0)$, Radius r):
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ oder $y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$
Ellipsengleichung (Mittelunkt $M = (x_0; y_0)$, x-Halbachse a, y-Halbachse b):
$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ oder $y = y_0 \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}$

Potenzen-, Wurzel- und Logarithmusfunktionen

Terminologie: $\text{Basis}^{\text{Exponent}}$ $\mathbb{D} := (a, b, u, v \in \mathbb{R})$

Potentenzen	Wurzeln	Logarithmen
$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$	$\sqrt[u]{0} = 0$	$\log_0 a; \log_a 0$ sind undefiniert.
$a^{-u} = \frac{1}{a^u}$	$\sqrt[u]{a} = \frac{1}{a^u}$	$\log_a a = 1$
$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$	$\sqrt[u]{a} \cdot \sqrt[v]{a} = \sqrt[uv]{a^{u+v}}$	$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$	$\frac{\sqrt[u]{a}}{\sqrt[v]{a}} = \sqrt[uv]{a^{u-v}}$	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$
$(a^u)^v = a^{uv}$	$\sqrt[u]{\sqrt[v]{a}} = \sqrt[u \cdot v]{a}$	$\log_a u^v = v \cdot log_a u$
$a^u \cdot b^u = (a \cdot b)^u$	$\sqrt[u]{a} \cdot \sqrt[u]{b} = \sqrt[u]{a \cdot b}$	$\log_a u \cdot \log_b u = \frac{(\log_a u)^2}{\log_a b}$
$\frac{a^u}{b^u} = (\frac{a}{b})^u$	$\frac{\sqrt[u]{a}}{\sqrt[u]{b}} = \sqrt[u]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\log_a u}{\log_b u} = \log_a b$

Es gibt keine Logarithmen von negativen Zahlen. Generell löst der Logarithmus folgendes Problem: $a^x = b \to x = \log_b a$
Basiswechsel: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, es gilt auch: $a^b = \mathrm{e}^{b \cdot \ln a}$ $(a > 0)$

Übersicht Eigenschaften

Angaben für D und W gelten allgemein. Im Einzelfall genauer prüfen.

$f(x)$	x^n	a^x
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
W	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
Monotonie	wachsend	$a < 1$ $\searrow$, $a > 1$, $\nearrow$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$(\ln a) \cdot a^x$
$f^{-1}(x)$	$\sqrt[n]{x}$	$\log_a x$
$f^{-1'}(x)$	$\frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}}$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$

Spezialfälle:

Exponentialfunktion	$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Trigonometrie

Winkel in griechischen Buchstaben (α, β ...) werden in ° Grad, Winkel mit lateinischen Buchstaben (x, y, ...) in Radian ausgedrückt. Für Radian (= Bogenmass) gilt: der Winkel x ist die Länge des Bogens b im Verhältnis zum Radius r. Die Beziehung zwischen Grad und Radian ist:

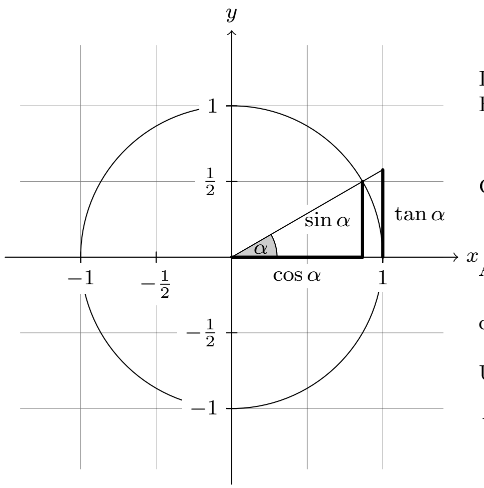
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

In einem rechtwinkligem Dreieck mit der Hypotenuse c, der Gegenkathete a und der Ankathete b gilt:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Die weiteren trigonometrischen Funktionen ($\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$) werden hier nicht weiter betrachtet.

Einheitskreis



Der Winkel α ist im Beispiel 30°:

$$\sin\alpha = 1/2.$$

Gemäss Pythagoras:

$$cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Also:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Und:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Rechenregeln

$$\sin x = \cos x + \frac{\pi}{2}$$
$$\cos x = \sin x - \frac{\pi}{2}$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Übersicht Eigenschaften

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$
$\mathbb{W}$	$[-1,+1]$	$[-1,+1]$	$(-\infty,+\infty)$
Peri	2π	2π	π
Symm.	ungerade	gerade	ungerade
Null	$x_k = k\cdot\pi$	$x_k = \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$	$x_k = k\cdot\pi$
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f^{-1}(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$f^{-1'}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Differentialrechnung

Berechnet die Steigung der Kurventangente an der Stelle x_0. Voraussetzungen:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

und linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert. Dann:

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\alpha = \arctan m = \arctan\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eine Funktion ist differenzierbar wenn: Stetigkeit $\not\Rightarrow$ diff.-bar, diff.-bar $\Rightarrow$ Stetigkeit, unstetig $\Rightarrow$ undiff.-bar

Ableitungsregeln

Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, z.B. $y = \sin(2x)$ oder $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ auf elementare Ableitungen zurückführen.
Seien $f(x), g(x)$ und $h(x)$ (im Definitionsbereich) differenzierbare, reelle Funktionen, und a, b reelle Zahlen, dann gelten:

Konstante Funktion	$(a)' = 0$
Faktorregel	$(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Potenzregel	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$
Logarithmisch	$f'(x) = (g(x)^{h(x)}) = f(x)\cdot(h'(x)\cdot\ln(g(x)) + h(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)})$

Die Kettenregel ist im wesentlichen äussere Ableitung mal innere Ableitung. Beispiel:

$$f: x \to f(x) = (x^2+4)^3$$
$$u: x \to u(x) = x^2+4 \to u'(x) = 2x$$
$$v: u \to v(u) = u^3 \to v'(u) = 3u^2$$
$$f(x) = (v\circ u)(x) = v(u(x)) \to f'(x) = 3(x^2+4)^2\cdot 2x$$

Ableitung Umkehrfunktion

1. Umkehrfunktion bestimmen: $y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$
2. $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$
3. Mit Hilfe von $y = f(x)$ $g'(y)$ als Funktion von y schreiben
4. x und y in $g'(y)$ vertauschhen

Ableitung in Parameterform

$(x = x(t), y = y(t))' \Rightarrow y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Differential

$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = f'(x_0)\cdot\mathrm{d}x$: Zuwachs der Ordinate an der Stelle x_0 bei Änderung von x um $\mathrm{d}x$.

Tangente und Normale

$$y_T = f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \qquad \text{Tangente}$$

$$y_N = \frac{1}{f'(x)}\cdot(x-x_0)+y_0 \qquad \text{Normale}$$

Linearisierung

In der Umgebung von $P(x_0, y_0)$ gilt $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$.

Monotonie

$y' = f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend
$y' = f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

Krümmung

Linkskrümmung: $y'' = f''(x_0) > 0$
Rechtskrümmung: $y'' = f''(x_0) < 0$

Kurvendiskussion

Definitionsbereich und Definitionslücken

Definitionslücken liegen vor bei nicht-definierten Werten: Division durch 0, negative Wurzeln, Logarithmus von 0.

Symmetrie

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \text{gerade, gespiegelt y-Achse}$$
$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{ungerade, gespiegelt 0-Punkt}$$

Nullstellen

$$f(x) = 0$$

Pole

x_0 sei eine Definitionslücke, dann Pol, wenn $\lim_{x_0\to 0} f(x_0) = \pm\infty$

Ableitungen

$f'(x), f''(x), f'''(x)$ berechnen

Extremwerte

Extremwerte: $f'(x) = 0, f''(x) < 0 \Rightarrow$ max., $f''(x) > 0 \Rightarrow$ min.
$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow (n = \text{gerade} \Rightarrow \text{Extremwert}) \wedge (n = \text{ungerade} \Rightarrow$ Sattelpunkt)

Wende- und Sattelpunkte

Wendepunkt: $f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt: $f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$

Asymptoten

$\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$

Wertebereich

Entweder aus der Zeichnung oder aus Definitionlücken der Umkehrfunktion.