Cheat Sheet Numerik

Anwendungen

- Nullstellen von Polynomen n-ten Grades bestimmen (Newton-Verfahren) (Dabei wird von einem beliebigen Punkt einen Tangente an das Polynom gelegt. Die Nullstelle der Tangente ist Ausgangspunkt für die nächste Tangente. Diese Folge konvergiert gegen eine Nullstellen).
- Lineare Gleichungssysteme mit n-Unbekannten (Gauss-Algorithmus)
- Interpolation (Funktion durch diskrete Punkte; es gibt keine eindeutige Lösungen)
- Numerische Differentiation von Funktionen (Differenten-Quotient)
- Numerische Integration (Unter-/Obersummen) für Funktionen ohne Stammfunktion
- Lösungen von nicht-linearen Gleichungssystemen
- Regression (Optimierungsproblem; Gerade durch Punkt-Wolke legen)
- Differentialgleichungen lösen
- Fouriertransformation (Bsp. mp3-Codierung, Dedektieren von Regelmässigkeiten in Beobachtungen)

Rechnerarithmetik

Maschinenzahlen

Eine gegebene Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich darstellen als: $x = m \cdot B^e$.

Basis B ist eine Zahl aus $\mathbb{N}$

Mantisse m ist eine Zahl in $\mathbb{R}$. m_1 ist die erste Ziffer von m.

Exponent e ist eine Zahl in $\mathbb{Z}$. e_1 ist die erste Ziffer von e.

Maschinendarstellbare Zahlen Es gilt:

$$M := \{x \in \mathbb{R} | x = \pm 0.m_1 m_2 m_{...} m_n \cdot B^{e_1 e_2 e_{...} e_j}\}$$

Zahlen werden normiert, so dass die Ziffer vom dem Komma immer eine 0 ist. (spart ein Bit)

Wert im Dezimal Die Basis ist somit 10.

$$\text{Wert} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot B^{e-i}$$

Bsp:

$$x = 0.101 \cdot 2^3 \qquad n = 3$$
$$= 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 0 + 4 + 0 + 1 = 5$$

Musteraufgaben

Wie viele Stellen benötigt folgende Zahl als n-stellige Gleitpunktzahl (g)?

$$x = 1230001$$
$$g(x) = 0.1230001 \cdot 10^7 \Rightarrow n = 7$$

Bestimmen Sie alle dualen positiven 3-stelligen Gleitpunktzahlen mit einstelligem binären Exponenten, sowie deren Dezimalwert

$0.100 \cdot 2^0 = 0.5$	$0.100 \cdot 2^1 = 1$
$0.101 \cdot 2^0 = 0.625$	$0.101 \cdot 2^1 = 1.25$
$0.110 \cdot 2^0 = 0.75$	$0.110 \cdot 2^1 = 1.5$
$0.111 \cdot 2^0 = 0.875$	$0.111 \cdot 2^1 = 1.75$

Hinzu kommt noch die immer vorhandene 0 ($0.000 \cdot 2^x$)

Wie viele verschiedene Maschinenzahlen gibt es auf einem Rechner, der 20-stellige Gleitpunktzahlen mit 4-stelligem binären Exponenten sowie zugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet? Was ist die kleinste und die grösste Maschinenzahl?

1. Die erste Stelle ist per Definition eine 1 $\rightarrow$ 19 freie Stellen, die die Werte 0 oder 1 annehmen können. $\rightarrow 2^{19}$ Möglichkeiten.
2. 4 Stellen für den Exponenten, die jeweils die Werte 0 und 1 annehmen können $\rightarrow 2^4$ Möglichkeiten.
3. 1 Vorzeichen für das Vorzeichen der Mantisse $\rightarrow$ 2 Möglichkeiten.
4. 1 Vorzeichen für den Exponent $\rightarrow$ 2 Möglichkeiten.

Verschiedene Zahlen: $2^{19} \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{25}$ Möglichkeiten. Hinzu kommt noch die 0. Also $2^{25} + 1$ Möglichkeiten. Minimum $= -0.1000_2 \cdot \dots \cdot 2^{1111_2}$, Maximum $= 0.111_2 \cdot \dots \cdot 2^{1111_2}$

Umrechnung von Basen

Umgerechnete Zahlen werden normiert. Durch die Normierung gehen Stellen verloren.

Vorkommaanteil

1. Durch neue Basis dividieren und den Rest notieren
2. Mit dem Divisionsergebnis wiederholen, bis das Divisionsergebnis 0 ist.

Die Reste vom letzten zum ersten ergeben die Zahl im neuen System.

Nachkommaanteil

1. Mit der neuen Basis multiplizieren und den Ganzzahlanteil notieren.
2. Mit dem Nachkommaanteil des Multiplikationsergebnisses wiederholen, bis
   a) das Ergebnis 0 ist
   b) sich der Nachkommaanteil periodisch wiederholt
   c) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist

Die Ganzzahlanteile von ersten zum letzten ergeben den Nachkommaanteil.

Approximations- und Rundungsfehler

Maschinengenauigkeit

$\tilde{x}$ sei die Näherung zum exakten Wert x.

absoluter Fehler $|\tilde{x} - x|$

relativer Fehler $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|}$

Allgemein: $|\text{rd}(x) - x| \leq 0.5 \cdot 10^{E-n}$ für die Basis 10. E ist ein Exponent, n sind die Anzahl Stellen.
Definition: $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-n}$ heisst Maschinengenauigkeit. Für eine beliebige Basis B : $\text{eps} = \frac{B}{2} \cdot B^n$