Constantin Lazari 10. Oktober 2013

1. Lösen Sie die folgende Aufgabe manuell auf einem Blatt Papier und scannen Sie dieses in die Datei *Name_Klasse_S2_Aufg1.pdf*:

   (a) Geben Sie für die reelle Dezimalzahl $x_0 = 118\,559.999$ die Maschinenzahl $\tilde{x_0}$ in normalisierter Gleitpunktdarstellung zur Basis 12 (Duodezimalsystem) mit Mantisselänge $n = 7$ und hinreichend grossem Exponenten an (verwenden Sie dazu die Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ sowie $A \triangleq 10, B \triangleq 11$). Wie gross ist der absolute und relative Fehler, der bei der Abbildung auf die Maschinenzahl entsteht?

Lösung:

i.) Vorkommaanteil

Wert	**Divident**	**Ganzzahl**	**Rest**
118 559	12	9879	$11 = B$
9 879	12	823	3
823	12	68	7
68	12	5	8
5	12	0	5

Vorkommaanteil $= 5873B$

ii.) Nachkommaanteil

Wert	**Multiplikator**	**Resultat**	**Ganzzahl**
0.999	12	11.998	$11 = B$
0.988	12	11.856	$11 = B$
0.856	12	10.272	$10 = A$
0.272	12	3.264	3
...	12	...	...

Nachkommaanteil $= BBA3$

iii.) Zusammen: $x_0 = 118\,559.999_{10} \approx 5873B.BBA3_{12}$

iv.) Normalisiert: $x_0 \approx 0.5873BBBA3_{12} \cdot 12^5$

v.) Mit 7-stelliger Mantisse: $\tilde{x} = 0.5873BBB_{12} \cdot 12^5$

vi.) Rückkonvertiert:

$$5 \cdot 12^4 + 8 \cdot 12^3 + 7 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 + \\ 11 \cdot 12^{-1} + 11 \cdot 12^{-2} = 118\,560.83\overline{3}_{10}$$

vii.) Absoluter Fehler: $|\tilde{x} - x_0| = |118\,560.83\overline{3}_{10} - 118\,560.999_{10}| = 0.1656\overline{6}$

viii.) Relativer Fehler: $\frac{|\tilde{x}-x_0|}{x_0} = 1.3973_{10} \cdot 10^{-6}$

(b) Berechnen Sie nun den Funktionswert $f(x) = x^3 - 1.6665 \cdot 10^{15}$ sowohl für x_0 als auch für $\tilde{x_0}$. Wie gross ist der relative Fehler der Funktionswerte?

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(118\,560.999) = 118\,559.999^3 - 1.6665 \cdot 10^{15} \approx 1.5776 \cdot 10^{12} \\ f(\tilde{x}) &= f(118\,560.83\overline{3}) = 118\,560.83\overline{3}^3 - 1.6665 \cdot 10^{15} \approx 1.5707 \cdot 10^{12} \\ \frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{f(x)} &= 0.004428251 \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie die Konditionszahl und vergleichen Sie diese mit dem Verhältnis der relativen Fehler aus a) und b). Gab die Konditionszahl in diesem Beispiel eine realistische Abschätzung der Fehlerfortpflanzung?

Lösung:

$$\begin{aligned} K &:= \frac{|f'(\tilde{x})| \cdot |\tilde{x}|}{|f(\tilde{x})|} \\ f'(\tilde{x}) &= 3 \cdot 118\,560.83\overline{3}^2 = 4\,217\,013\,602.0833 \\ K &= \frac{4\,217\,013\,602.0833 \cdot 118\,560.83\overline{3}}{1.5707 \cdot 10^{12}} = 3\,183.209084 \end{aligned}$$

Die Konditionszahl ist sehr hoch. Wir haben mit 3 Nachkommastellen gearbeitet und der Fehler wirkt sich bereits auf die dritte Nachkommastelle aus. Somit halt ich die Abschätzung für realistisch.