| T) | T) | T) | T) | T)

# Decision support sistemi na principu Bajesovih mreža

Rastko Lazarević

February 2025

# 1 Uvod

# 2 Teorija verovatnoće

Kako se čitava priča o Bajesovim mrežama, kao jednog od načina realizacije decision support sistema, zasniva na analizi pojava, događaja i iskaza u kojima vladaju nesigurnosti i to primenom probabalističkih metoda, u ovom poglavlju iznećemo važne elemente teorije verovatnoće, koji će nam biti neophodni u daljem delu rada. Treba imati u vidu da je teorija verovatnoće jedan od matematičkih alata, kojim se možemo nositi sa problemom nesigurnosti, stoga ćemo nastojati da održimo balans između stroge matematike i realizacije decision support sistema, koji su veoma intuitivno jasni, a kasnije će biti posebno objašnjeni.

## 2.1 Dva pogleda na verovatnoću

Često se pri opisivanju i računanju verovatnoće nekog događaja susrećemo sa tim da vršimo odgovarajući eksperiment i beležimo relativnu frekvenciju realizacija događaja od interesa. Ono što očekujemo jeste da će ta frekvencija, kroz veoma veliki broj ponavljanja, težiti verovatnoći našeg događaja. Kao konkretan primer možemo uzeti nasumično izvlačenja karata iz špila. Verovatnoća izvlačenja dame je $\frac{13}{52}$ i to, jer kroz veliki broj izvlačenja očekujemo da će broj realizacija u kojim smo izvukli damu biti približno $\frac{13}{52}$, što će i biti slučaj ako je fer izvlačenje. Primetimo da ovakav pristup verovatnoći sa eksperimentom koji sprovodimo, odgovara nekom stohastičkom procesu koji možemo da ponovljamo više puta, merimo povoljne ishode i na taj način formiramo relativne frekvencije. Sa druge strane, za mnoge druge događaje nije tako lako doći do nekih smislenih vrednosti verovatnoća. Često eksperiment ili adekvatna simulacija nisu izvodljivi, pa i sva priča o računanju relativnih učestanosti nema velikog smisla. Primer ovakve situacije može biti procena verovatnoće da će Srbija osvojiti Euro Basket 2025 sa vrednošću $p$ ili da će se otkaz turbine na hidroelektrani *Đerdap* desiti u narednih 6 meseci sa vrednošću $q$. Ono što ovde primećujemo jeste da verovatnoće $p, q$ formiramo na osnovu našeg ili nečijeg iskustva, dostupnih podataka, drugih znanja i informacija. Jasno je da estimacije ovih veličina mogu da se razlikuju od osobe do osobe, pa se često nazivaju i subjektivne verovatnoće. Primećujemo da su situacije i događaji koji se uklapaju u drugi pogled često značajniji i za nas će u daljem radu biti veoma važni, a dobra procena vrednosti njihovih verovatnoća je vrlo informativna i može imati veliki značaj. Bilo kako bilo, ono što sigurno možemo reći jeste da su oba pogleda sasvim validna, a matematička teorija verovatnoće sasvim ravnopravno barata i jednim i drugim.

## 2.2 Važni elementi teorije verovatnoće

Ovde ćemo, nešto formalnije, dati nekoliko opisa tj. načina zasnivanja i računanja verovatnoće koji se često koriste u literaturi.

**1. Aksiomatski (matematički) opis**

Za potrebe definisanja verovatnoće, na aksiomatski način, uvešćemo neke pojmove i oznake i objasniti ih, gde treba posebno obratiti pažnju na $\{\Omega, F, P(\mathcal{A})\}$.
$\omega_i$ – ishod (npr. statističkog eksperimenta).
$\Omega$ – prostor verovatnoće, skup svih ishoda, koji, posmatrajući kardinalnost, može biti konačan, beskonačan (prebrojiv i neprebrojiv).
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ... \subset \Omega$ nazivamo događajima.
Specijalno za $\mathcal{A} = \{\omega\}$ kažemo da je $\mathcal{A}$ elementarni događaj, $\mathcal{A} = \Omega$ kažemo da je siguran događaj, i $\mathcal{A} = \emptyset$ kažemo da je $\mathcal{A}$ nemoguć događaj.
Za događaj $\mathcal{A}$ kažemo da se realizovao ukoliko se desio ishod $\omega_i$, takav da $\omega_i \in \mathcal{A}$.
$F$ – polje verovatnoće, skup svih mogućih događaja nad datim prostorom verovatnoće , tj. skupom ishoda. $F$ jeste partitivni skup skupa $\Omega$, gde važe sledeće dve aksiome:
**A1:** Ako događaj $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ onda i $\bar{\mathcal{A}} \in F$
**A2:** Ako su događaji $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in F$ tada i $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in F$
Kada smo objasnili pojmove prostora i polja verovatnoće, spremnni smo da definišemo i sam pojam verovatnoće nekog događaja.
**Definicija:** Verovatnoća, $P$, je preslikavanje koje događaje iz $F$ preslikava na interval $[0, 1] \in \mathbb{R}$, tako da važi:
**A1:** nenegativnost - $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ onda $P(\mathcal{A}) \geq 0$,
**A2:** normiranost - $P(\Omega) = 1$,
**A3:** aditivnost - $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in F$ i $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, onda $P(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B})$.
Ovde bi odmah trebalo napomenuti, da verovatnoća događaja $\mathcal{A}$ zavisi od polja i prostora verovatnoće nad kojim posmatramo istu.
Takođe, ako napravimo mali osvrt, jasno je da ovakav, aksiomatski, način uvođenja verovatnoće vrlo jasno formalizuje drugi pogled iz glave 2.1 koji se može učiniti malo haotičnim, gde mi, sada, na osnovu znanja, iskustva i drugih podataka možemo vrlo lepo da definišemo smislena preslikavanja. Naravno, o tome koliko dobro to možemo uraditi nećemo sada diskutovati.
Sa druge strane sasvim dobro odgovara i prvom pogledu iz glave 2.1 koji je, sam po sebi, dosta jasniji.

**2. Eksperimentalni opis**

Kako smo još u poglavlju 2.1 pominjali eksperiment, sada ga i definišemo.
**Definicija:** Statistički eksperiment je postupak, koji zadvoljava sledeća svojstva:
1. Ponovljivost – Eksperiment se može izvoditi više puta pod istim uslovima.
2. Svi ishodi su unapred poznati.
3. Nasumičnost – Ishod konkretnog eksperimenta nije unapred poznat.
Gde se jasno vidi stohastička priroda ovako definisanog procesa, koju smo i naveli u prethodnom poglavlju.

Model jednako verovatnih ishoda.
- Neka je dat skup svih ishoda $\Omega = \{\omega(i)|i = 1, .., n\}$, pri čemu smatramo da su svi ishodi jednako verovatni i $|\Omega| = n$,
- Neka je $\mathcal{A} \subset \Omega$, gde $|\mathcal{A}| = m$,
Tada je verovatnoća događaja $\mathcal{A}$ data sa:

$$P(\mathcal{A}) = \frac{m}{n} = \frac{|\mathcal{A}|}{|\Omega|} = \frac{\text{" } broj\ povoljnih\ ishoda \text{ "}}{\text{" } broj\ svih\ ishoda \text{ "}}$$

Statističko određivanje verovatnoće.
- Neka je statistički eksperiment realizovan veliki broj puta, $n$,
- Neka je broj realizacija događaja $\mathcal{A}, m(n)$, pri čemu relativnu frekvenciju događaja $\mathcal{A}$ definišemo kao $\frac{m(n)}{n}$, tada je verovatnoća događaja $\mathcal{A}$ data sa:

$$P(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n}$$

Verovatnoću koji opisujemo i računamo na neki od ovih načina, najviše odgovara prvom pogledu iz prethodnog poglavlja.

**3. Geometrijski opis - geometrijska verovatnoća**
- Neka je dat skup svih sihoda $\Omega$, koji je sada neprebrojiv, međutim može se geometrijski interpretirati kao ograničen skup (interval na pravoj, konačan deo ravni (figura), telo u prostoru itd.),
- Neka je $m(A)$, mera skupa $\mathcal{A}$ (dužina, površina, zapremina itd.), gde je $\mathcal{A} \subset \Omega$, tada

$$P(\mathcal{A}) = \frac{m(\mathcal{A})}{m(\Omega)}$$

Geometrijsku verovatnoću ovde navodimo, iako se u daljem delu rada neće naročito koristiti.
Takođe, ovde je zgodno mesto da se napomene, da u ovom radu nećemo ulaziti u dublju matematičku teoriju Teorije mere, definisanja sigma algebri i mere skupova.

## 2.3 Osobine verovatnoće

Kako se teorija verovatnoće u velikoj meri oslanja na teoriju skupova, sada ćemo ukratko izneti neke njene osobine koje proističu upravo iz teorije skupova i gornjih definicija.
**1.** $P(\bar{\mathcal{A}}) = 1 - P(\mathcal{A})$
*Dokaz:* Važi $\Omega = \bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}$, gde imamo $\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} = \emptyset$.
Tada $P(\Omega) = P(\bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A})$, koristeći aksiome **A2** i **A3** iz definicije verovatnoće poslednji izraz postaje $1 = P(\bar{\mathcal{A}}) + P(\mathcal{A})$.
**2.** $P(\emptyset) = 0$
*Dokaz:* Važi $\bar{\Omega} = \emptyset$, koristeći prethodnu osobinu imamo $P(\bar{\Omega}) + P(\Omega) = 1$, kako je $P(\Omega) = 1$, odakle jasno sledi polazno tvrđenje.

**3.** $P(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$

*Dokaz:* Krenimo od skupovne jednakosti $\mathcal{A} = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, pri čemu je $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \emptyset$.

Ako "napadnemo" obe strane skupovne jednakosti verovatnoćom, i primenimo aksiomu **3** iz definicije verovatnoće, imamo $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) + P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, što je i trebalo pokazati.

**4.** $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$

*Dokaz:* Krenimo od skupovne jednakosti $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \ \cup \ B$, jasno je da su skupovi $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ i $\mathcal{B}$ disjunktni, pa onda imamo da važi $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) + P(\mathcal{B})$. Koristeći osobinu **3** dobijamo traženo tvrđenje.

**5.** $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B})$.

*Dokaz:* Važi jednakost $B = A \cup (B \setminus A)$, odatle lako dolazimo da važi $P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(B \setminus A)$, kako $P(B \setminus A) \geq 0$ dobijamo traženu jednakost.

Primetimo da ovde ne važi obrnuto tvrđenje, tj. $P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B}) \not\Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, na primer $P(\mathcal{A}) \leq P(\mathcal{B})$, međutim $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ mogu biti disjunktni, što je kontraprimer.

Naredne dve osobine navodimo bez dokaza.

**6.** Bulova nejednakost:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

gde su $A_1, A_2, ..., A_k$ proizvoljni događaji nad datim poljem verovatnoće $\mathcal{F}$.

**7.** Neka su dati događaji $A_1, A_2, ..., A_k, ...$, gde za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $A_k \subset A_{k+1}$, tada važi:

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Ovde smo naveli 7 osobina verovatnoće, iako su neka prilično trivijalna, a druga zahtevaju nešto napredniju matematiku, međutim sva su, prvenstveno, ostavljena čitaocu da oseti kako se verovatnoća ponaša u nekim specifičnim oblicima, koji se vrlo prirodno nameću (pitanje unije, preseka, razlike itd.).

Još je interesantno, dodatno, prokomentarisati činjenicu da je veliki broj događaja ili procesa koje razmatramo, teško opisati nekom verovatnoćom i stvari postaviti jasno. Međutim, već se ovde dobro vidi snaga načina na koji je verovatnoća uvedena, gde mi pojavu u kojoj postoji pregršt nesigurnosti svodimo u domen teorije skupova, koja je vrlo jasna i nedvosmislena, a gde se analiza događaja i ishoda svodi na analizu standardnih skupova, uz definisanje adekvatnih preslikavanja.

## 2.4 Uslovna verovatnoća

Uslovna verovatnoća će biti veoma značajna za nas, jer se veliki deo priče o Bajesovim mrežama zasniva na njoj. Imajući to u vidu posvetićemo joj malo više pažnje, kako kroz primere tako i kroz matematičku teoriju.
Zaboravimo na trenutak svu formalnu priču koju smo ispričali ranije i pokušajmo da priđemo pojmu uslovne verovatnoće kroz par primera. Naime, vratimo se na primer Euro Basketa 2025 iz poglavlja 2.1, rekli smo da Srbija osvaja ovaj turnir sa verovatnoćom $p$, međutim u međuvremenu Nikola Jokić se povredio, svaki navijač koji prati košarku zna da je ovo loše za Srbiju i da je sada verovatnoća osvajanja turnira $p_1$ znatno manja od prvobitne verovatnoće $p$.
Takođe, zamislite vašeg prijatelja koji živi u Novom Sadu i koga dugo niste videli. Ipak, sasvim slučajno ga srećete jednog dana ispred Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, moramo se složiti da je u prvu ruku verovatnoća ovakvog susreta veoma mala (ne postoji nikakav raniji dogovor), oba nastavljate dalje sa šetnjom i srećete se opet za deset minuta kod Vukovog spomenika (slučajno, bez dogovora), iako se čini da je ovo neverovatna slučajnost i da je verovatnoća drugog susreta isto tako mala, to nije tako. Dakle, iako je verovatnoća prvog susreta mala, pod uslovom da se on dogodio, verovatnoća svakog narednog susreta je drastično veća od prvog.
Sa druge strane, ako uzmemo rad turbine na hidroelektrani *Đerdap*, ako je prošao rok za remont ležaja, jasno je da će kvar ili neki problem u radu biti sve izvesniji pa je verovatnoća $q_1$ veća od početne verovatnoće kvara $q$.
Ono što je suština ovih primera jeste:
*Kako se verovatnoća događaja $\mathcal{A}$ menja ukoliko se realizovao drugi događaj $\mathcal{B}$?*
U nastavku rada ćemo uslovnu verovatnoću označavati sa $P(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ - verovatnoća događaja $\mathcal{A}$, pod uslovom da se dogodio događaj $\mathcal{B}$.
Pretpostavimo da nam je dat prostor verovatnoće $\Omega$ sa odgovarajućim poljem verovatnoće $\mathcal{F}$, neka su $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji. Pretpostavimo da se realizovao događaj $\mathcal{B}$, to znači da ishod $\omega$ koji smo imali u našem eksperimentu ili pojavi pripada skupu ishoda $\mathcal{B}$ i to dalje znači da se, praktično, početni prostor verovatnoće ograničava na skup $\mathcal{B}$, te ako sada razmatramo verovatnoću da se realizuje događaj $\mathcal{A}$, odgovor na ovo pitanje ima smisla tražiti pogledom na $P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$. Međutim, kako smo se realizacijom događaja $\mathcal{B}$ sveli na novi prosotor verovatnoće neophodno je izvršiti određena skaliranja, ali sigurno možemo reći da su $P(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ i $P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})$ proporcionalne. Slično važi, ako posmatramo uslovnu verovatnoću događaja $\mathcal{C}$.
Tada važi jednakost:

$$\frac{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{P(\mathcal{C}\cap\mathcal{B})} = \frac{P(\mathcal{A}|\mathcal{B})}{P(\mathcal{C}|\mathcal{B})}$$

Ukoliko usvojimo $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, tada imamo:

$$\frac{P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})}{P(\mathcal{B}\cap\mathcal{B})} = \frac{P(\mathcal{A}|\mathcal{B})}{P(\mathcal{B}|\mathcal{B})}$$

Kako $P(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{B})$ i $P(\mathcal{B}|\mathcal{B}) = 1$, dobijamo:

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{P(\mathcal{B})} \tag{2.1}$$

Jednakost (1) smatramo definicionim izrazom uslovne verovatnoće, pri čemu $P(\mathcal{B}) > 0$.
**Teorema 1.** Fundamentalna teroma uslovne verovatnoće, generalniji oblik jednakosti (1)

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \tag{2.2}$$

Ono na šta treba obratiti pažnju u jednakostima (2.1) i (2.2), jeste da su verovatnoće $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ i $P(\mathcal{B})$ određene nezavnisno od toga da li se dogodio događaj $\mathcal{B}$, apriori su poznate. Dakle, iako se desio novi događaj u našem eksperimentu verovatnoće koje posedujemo od ranije su sasvim dovoljne za rekonstrukciju novih, aposteriornih, verovatnoća.
Možemo izvršiti generalizaciju formule (2.1):

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap ... \cap \mathcal{B}_n) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap ... \cap \mathcal{B}_n)}{P(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \cap ... \cap \mathcal{B}_n)} \tag{2.3}$$

**Teorema 2.** Neka su dati doagađaji $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\ , ..., \mathcal{B}_n \subset \Omega$, takvi da $P(\mathcal{B}_1) \neq 0, P(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_1) \neq 0, ..., P(\mathcal{B}_1 \cap ... \cap \mathcal{B}_{n-1}) \neq 0$, tada je

$$P(\mathcal{B}_1 \cap ... \cap \mathcal{B}_n) = P(\mathcal{B}_1)P(\mathcal{B}_2|\mathcal{B}_1)...P(\mathcal{B}_n|\mathcal{B}_1 \cap ... \cap \mathcal{B}_{n-1}) \tag{2.4}$$

Opšti oblik fundamentalne teoreme uslovne verovatnoće (2.2) koji se dokazuje indukcijom.
Sada iznosimo tvrđenje koje nam može biti od koristi u daljem delu rada, a daje nam malo drugačiji pogled na uslovnu verovatnoću sa više događaja. **Tvrđenje 1.** $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|\mathcal{C}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B} \cap \mathcal{C})P(\mathcal{B}|\mathcal{C})$
*Dokaz:* Korišćenjem jednakosti (2.3) imamo

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C})}{P(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})}$$

Primenom **Teoreme 2.** na imenilac i brojilac imamo $P(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{C})P(\mathcal{C})$ i $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|C)P(\mathcal{C})$, odakle i sledi tražena jednakost.

**Notacijska napomena:**
Za rad lakšeg zapisa, u daljem delu rada umesto skupovnih operatora $(\cap, \cup)$ koristimo oznake $(\cdot, +)$, pa na primer $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}\mathcal{B})$. Osim toga kada se u daljem delu rada pojavi zapis $P(\mathcal{A}|\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ za uslovne verovatnoće sa više uslovnih događaja, podrazumevamo da to znači $P(\mathcal{A}|\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$.
**Definicija:** Za događaje $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ kažemo da čine potpun sistem hipoteza ukoliko za svako $i \neq j$ $A_iA_j = \emptyset$ i $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, gde $P(\mathcal{A}_i) \neq 0$ za svako $i = \overline{1, n}$.

**Teorema 3.** (Teorema totalne verovatnoće) Neka je dat potpun sistem hipoteza $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$, tada verovatnoću događaja $\mathcal{B}$ možemo izračunati kao

$$P(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{n} P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_k)P(A_k) \tag{2.5}$$

*Dokaz:* Krenimo od skupovne jednakosti $B = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}\mathcal{A}_k$, takođe zbog činjenice da $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ čine potpun sistem hipoteza, važi $(\mathcal{B}\mathcal{A}_i)(\mathcal{B}\mathcal{A}_j) = \emptyset$ za $i \neq j$. Tada $P(\mathcal{B}) = P(\sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}\mathcal{A}_k)$, imajući u vidu **A3** definicije verovatnoće izraz postaje $P(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{n} P(\mathcal{B}\mathcal{A}_k)$, tj. koristeći fundamentalni teoremu verovatnoće imamo $P(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{n} P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_k)P(\mathcal{A}_k)$, što je i trebalo pokazati.

**Teorema 4.** (Bajesova teorema) Neka su dati događaji $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, tada važi

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{B})} \tag{2.6}$$

*Dokaz:* Iz fundamentalne teoreme o uslovnoj verovatnoći imamo da važe sledeće jednakosti: $P(\mathcal{A}\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B})$ i $P(\mathcal{B}\mathcal{A}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{A})$, osim toga važi i skupovna jednakost $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, što se prenosi i na verovatnoće, pa prema tome izjednačavajući gornje jednakosti dobijamo traženu jednakost.

Bajesovo pravilo nam pruža metod za ažuriranje naših uverenja o događaju A s obzirom na to da dobijamo informacije o drugom događaju B. Posmatrajući izraz (2.6), u matematičkoj teoriji deo $P(\mathcal{A})$ se naziva apriornom verovatnoćom događaja $\mathcal{A}$, dok $P(\mathcal{A}|\mathcal{B})$, aposteriornom verovatnoćom događaja $\mathcal{A}$.
Ukoliko posmatramo potpun sistem hipoteza $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$, događaj $\mathcal{B}$ ( $P(\mathcal{B}) \neq 0$ ) i teoremu totalne verovatnoće izraz za Bajesovu formulu (2.6) može poprimiti oblik

$$P(\mathcal{A}_k|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_k)P(\mathcal{A}_k)}{P(\mathcal{B})} = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_k)P(\mathcal{A}_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_i)P(A_i)} \tag{2.7}$$

Bajesova teorema sa još jednim uslovnim događajem $\mathcal{C}$

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}, \mathcal{C})P(\mathcal{A}|\mathcal{C})}{P(\mathcal{B}|\mathcal{C})} \tag{2.8}$$

Što se dalje može još uopštavati.

## 2.5 Zavisnost događaja

**Definicija:** Za događaje $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su nezavisni ukoliko važi

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}). \tag{2.9}$$

Primetimo, ukoliko (2.9) vratimo u Bajesovu formulu (2.6) takođe dobijamo $P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$.
Dakle ova definicija nam kaže, da realizacija događaja $\mathcal{B}$ nikako ne utiče na verovatnoću realizacije događaja $\mathcal{A}$ i obrnuto. Već se iz definicije vidi, da u slučaju nezavisnih događaja apriori i aposteriori verovatnoće imaju istu vrednost.
Primenom fundamentalne teoreme verovatnoće na izraz (2.9), lako dobijamo

$$P(\mathcal{AB}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}). \tag{2.10}$$

Ovaj izraz se često uzima kao definicioni izraz nezavisnih događaja.
Uočimo da verovatnoća istovremene realizacije događaja $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, zavisi iskuljučivo od njihovih pojedinačnih verovatnoća.
**Definicija:** Za događaje $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su uslovno nezavisni za dati događaj $\mathcal{C}$ ukoliko važi

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{B},\mathcal{C}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \tag{2.11}$$

Jasno je da ovim želimo istaći da će se realizacije događaja $\mathcal{A}$, pod uslovom da su se realizovali $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, svesti samo na realizaciju događaja $\mathcal{A}$ pod uslovom $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ nema uticaj!
Primenom fundamentalne teoreme verovatnoće nad izrazom (2.11) imaćemo

$$\frac{P(\mathcal{ABC})}{P(\mathcal{BC})} = P(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \text{ tj. } \frac{P(\mathcal{AB}|\mathcal{C})P(\mathcal{C})}{P(\mathcal{B}|\mathcal{C})P(\mathcal{C})} = P(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \text{ što daje}$$

$$P(\mathcal{AB}|\mathcal{C}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{C})P(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \tag{2.12}$$

Izraz (2.12) se često uzima kao definicioni izraz za uslovnu nezavinost. Osim toga, ukoliko $\mathcal{C} = \Omega$, dobijamo jednakost (2.10), te je očigledno da je "obična" nezavisnot koju smo gore razmatrali samo specijalan slučaj uslovne nezavinosti.
Treba imati u vidu da događaji koji su nezavisni nad celim poljem verovatnoće, mogu postati uslovno zavisni. Ovaj fenomen je čest, zbog toga moramo biti oprezni pri analizi podataka. Osim toga vrlo je povezan sa načinom na koji se realizuju Bajesove mreže i protokom informacija koji se u njima ostvaruje, o čemu će već biti reči kasnije.

## 2.6 Slučajne promenljive

**Definicija:** Jednodimenziona realna slučajna promenljiva X je preslikavanje koje svakom elementarnom događaju iz prostora verovatnoće $\Omega$ dodeljuje neki broj iz $\mathbb{R}$, tako da
**A1:** $X(\omega)$ je merljiva, što znači postoji $P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$
**A2:** $P(\{\omega : X(\omega) = +\infty\}) = P(\{\omega : X(\omega) = -\infty\}) = 0$
U nastavku rada notaciju $P(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$ ćemo zameniti jednostavnijom $P(X \leq x)$, koja se češće koristi u literaturi.
Kod pojma slučajne promenljive treba biti oprezan, jer sama po sebi ona nije toliko slučajna. Preciznije, jasno da je preslikavanje $X(\omega)$ determinističko, međutim slučajnost leži samo u neizvesnosti ishoda.
Već smo ranije rekli da skup ishoda eksperimenta može biti konačan i beskonačan (prebrojiv i neprebrojiv), prema tome slučajne promenljive mogu biti:
1. diskretne - skup vrednosti (stanja) konačan ili prebrojiv,
2. neprekidne ili mešovite - skup vrednosti (stanja) neprebrojiv
Ono na šta posebno treba obratiti pažnju jeste da je slučajna promenljiva uvek u tačno jednom stanju.
U daljem delu ovog poglavlja akcenat stavljamo na diskretne slučajne promenljive i to posebno na one sa konačnim brojem stanja.
**Definicija:** Neka je $A$ diskretna slučajna promenjiva sa konačnim skupom vrednosti $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Skup verovatnoća $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ gde važi $p_i = P(A = a_i)$, $i = \overline{1, n}$, predstavlja zakon raspodele slučajne promenjive $A$.
Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive, u ovom radu, ćemo zapisivati na dva načina

$$P(A) = (p_1, p_2, ..., p_n) \text{ ili } A : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Gde važi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Uređenu $n-$torku stanja $a_1, a_2, ..., a_n$ označavamo sa $\text{sp}(A) = (a_1, a_2, ..., a_n)$, dok $P(a_i)$ predstavlja $P(A = a_i)$.

## 2.7 Uslovna verovatnoća slučajnih promenljivih

Sada ćemo se pozabaviti pitanjem uslovne verovatnoće za slučajne promenljive. Neka su date slučajne promenljive $A$ i $B$, gde $\text{sp}(A) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $\text{sp}(B) = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Odmah se može naslutiti da se ovde bavimo pitanjem kako će se verovatnoća da slučajna promenljiva $A$ uzme vrednost $a_i$ menjati, ukoliko znamo da je slučajna promenjiva $B$ ima vrednost $b_j$.
Lako se zaključuje da će $P(A|B)$ sadržati $n \cdot m$ vrednosti, koje se najčešće vizuelno predstavljaju u tablici (matrici) $n \cdot m$ gde se na poziciji $(i, j)$ tablice nalazi $P(A = a_i | B = b_j)$.

Dajemo primer jedne takve tablice.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0.4 | 0.3 | 0.6 |
| $a_2$ | 0.6 | 0.7 | 0.4 |

Tablica 1: Tablica verovatnoća $P(A|B)$

Ako obratimu pažnju vidimo da $\sum_{i=1}^{n} P(A = a_i|B = b_j) = 1$ za svako $j = \overline{1, m}$, $A\mathbf{1}$ verovatnoće.
Osim uslovne verovatnoće, prirodno se nameće i pitanje kolika je verovatnoća da se dese odgovarajući ishodi za dva ili više različitih eksperimenata, istovremeno. Što u kontekstu dve slučajne promenljive predstavlja verovatnoću da sluačajna promenjiva $A$ uzima vrednost $a_i$, a slučajna promenljiva $B$ uzima vrednost $b_j$. Primetimo da je sada ishod uređena dvojka $(a_i, b_j)$, te i da se prostor verovatnoće (mogućih ishoda) menja.
Priča se dalje može uopštiti na $N$ slučajnih promenljivih, što ulazi u domen teorije o slučajnim vektorima, međutim za nas je od interesa da budemo svesni da na ovaj način "proširujemo dimenziju" prostora verovatnoće i da uvedemo pojam zajedničke verovatnoće.
Neka su date slučajne promenljive $A$ i $B$ sa $n$ i $m$ stanja, redom. Tada, sa $P(A, B)$ označavamo njihovu zajedničku verovatnoću (zakon zajedničke raspodele). Očigledno je da će zakon zajedničke raspodele imati $n \cdot m$ vrednosti, za svaki uređen par $(a_i, b_j)$ $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ računamo $P(A = a_i, B = b_j)$.
$P(A, B)$ je zgodno predstaviti tablicom. Navodimo primer.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0.16 | 0.12 | 0.12 |
| $a_2$ | 0.24 | 0.28 | 0.08 |

Tablica 2: Tablica družrne verovatnoće $P(A, B)$

Na osnovu $A\mathbf{1}$ definicije verovatnoće $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(A = a_i, B = b_j) = 1$.
Način na koji smo uveli slučajne promenljive, kao preslikavanje elementarnih događaja na skup realnih brojeva, nam potpuno daje za pravo da se koristimo teorijom koju smo izveli za verovatnoću događaja, jer stanje (vrednost) koju je uzela slučajna promenljiva sasvim odgovara ishodu statističkog eksperimenta.
Pa tako koristeći fundametalnu teoremu verovatnoće i jednakost (2.2) imamao $P(a_i, b_j) = P(a_i|b_j)P(b_j)$.
U pratkičnom smislu ovo nam daje vezu između uslovne i združene verovatnoće slučajnih promenljivih $A$ i $B$.
Ako je $P(B) = (0.4, 0.4, 0.2)$, a uslovna verovatnoća $P(A|B)$ data Tablicom 1, primenom fundamentalnog pravila dobijamo $P(A, B)$ što odgovara Tablici 2.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $0.4 \cdot 0.4$ | $0.3 \cdot 0.4$ | $0.6 \cdot 0.2$ |
| $a_2$ | $0.6 \cdot 0.4$ | $0.7 \cdot 0.4$ | $0.4 \cdot 0.2$ |

Tablica 3: Veza $P(A, B)$ i $P(A|B)$

Pa možemo videti da gornja tablica zaista odgovara Tablici 2.
Ovo sve nas dovodi do nove teoreme.
**Teorema 4.** (Fundamentalna teorema za slučajne promenljive) Neka su date slučajne promenljive $A$ i $B$, tada važi

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) \tag{2.13}$$

Ova teorema se proširuje za uslovljenost promenljivom $C$, analogno kako je urađeno za događaje u **Tvrđenju 1 glave 2.4** i to

$$P(A, B|C) = P(A|B, C)P(B|C) \tag{2.14}$$

Već se iz jednakosti (2.13) može videti da nam je za računanje $P(A|B)$, neophodno $P(A, B)$ i $P(B)$, međutim primetićemo da ove dve stvari nisu baš nezavisne, čak šta više vrlo su povezane.
Ako fiksiramo stanje slučajne promenljive $A$ na $a_i$ i saberemo verovatnoće svih ishoda gde se realizuje $a_i$ u združenoj verovatnoći ($B$ uzima sve svoje vrednosti), dobijamo ukupnu verovatnoću da se realizuje ishod $a_i$. Matematički zapisano izgleda ovako

$$P(A = a_i) = \sum_{j=1}^{m} P(A = a_i, B = b_j) = \sum_{j=1}^{m} P(a_i, b_j) \tag{2.15}$$

Ako isti postupak primenimo za svih $n$ vrednosti koje može uzimati $A$, dolazimo do zakona raspodele slučajne promenljive $A$, $P(A)$. Ovakav postupak se u literaturi naziva $marginalizacija$.
U ovom radu marginalizaciju po slučajnoj promenljivoj $B$, iz zajedničke verovatnoće $P(A, B)$, gde dobijamo $P(A)$ zapisujemo

$$P(A) = \sum_{B} P(A, B) \tag{2.16}$$

**Teorema 5.** (Bajesova teorema za slučajne promenljive) Za slučajne promenljive $A$ i $B$ važi

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A, B)}{\sum_B P(A, B)} \tag{2.17}$$

Očigledno je da jednakost (2.17), predstavlja samo zapis Bajesove teoreme za slučajne promenljive. U praktičnim primenama mi ćemo se koristiti jednakostima koje proizilaze iz Bajesove teoreme za događaje.
Ako poznajemo $P(A, B)$, marginalizacijom vrlo lako dolazimo da zakonitosti $P(A)$ i $P(B)$. Primenom fundamentalne teoreme uslovne verovatnoće možemo

izračunati $P(A|B)$ i $P(B|A)$.
Osim toga Bajesova formula nam daje direktnu vezu $P(A|B)$ i $P(B|A)$ i način kako da ažuriramo odnos apriori verovatnoće, $P(A)$, i aposteriori verovatnoće, $P(A|B)$.
Dakle, možemo zaključiti da je poznavanje $P(A,B)$ potpun opis verovatnoće slučajnih promenljivih $A$ i $B$.
Bajesova teorema se dalje uopštava, pa ako imamo uslovljenost prmenljivom $C$, izraz (2.17) postaje

$$P(A|B,C) = \frac{P(B|A,C)P(A|C)}{P(B|C)} = \frac{P(A,B|C)}{\sum_B P(A,B|C)} \tag{2.18}$$

**Definicija:** Dve slučajne promenljive $A$ i $C$ su uslovno nezavisne za datu slučajnu promenljivu $B$ ukoliko

$$P(a_i|b_j,c_k) = P(a_i|b_j)$$

za svako $a_i \in \mathrm{sp}(A)$, $b_j \in \mathrm{sp}(B)$ i $c_k \in \mathrm{sp}(C)$.
Skraćena notacija za ovu definciju $P(A|B,C) = P(A|B)$.
Slično načinu na koji smo to izveli za događaje, uslovnu nezavnisnost možemo interpretirati i na sledeći način

$$P(A,C|B) = P(A|B,C)P(C|B) = P(A|B)P(C|B)$$

što se suštinski zasniva na jednakosti

$$P(a_i,c_k|b_j) = P(a_i|b_j)P(c_k|b_j)$$

za svako $a_i \in \mathrm{sp}(A)$, $b_j \in \mathrm{sp}(B)$ i $c_k \in \mathrm{sp}(C)$.
Pitanje zavisnosti slučajnih promenljivih i događaja za nas će biti veoma važno pri modelovenju Bajesovih mreža. Njega ćemo dodatno komentarisati već pri analizi kauzalnih mreža. Način na koji slučajne promenljive utiču jedna na drugu uticaće na način modelovanja same mreže. Stoga ovde navodimo još neke teoreme koje mogu biti od koristi.
**Iskaz:** Događaji $\mathcal{A}_1, ...\mathcal{A}_n \subset \Omega$ su nezavisni po parovima ukoliko za svako $i,j = \overline{1,n}$ važi $P(\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j) = P(\mathcal{A}_i)P(\mathcal{A}_j)$.
**Iskaz:** Događaji $\mathcal{A}_1, ...\mathcal{A}_n \subset \Omega$ su nezavisni u celini ukoliko za svakih $k$ raznih događaja $\mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_k} \in \{\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n\}$ važi $P(\mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_k}) = P(\mathcal{A}_{i_1})...P(\mathcal{A}_{i_k})$, gde $k = \overline{2,n}$.
**Teorema:** Neka su događaji $\mathcal{A}_1, ...\mathcal{A}_n \subset \Omega$ nezavisni u celini. Događaj $\mathcal{B}$ nastao od događaja $\mathcal{A}_{i_1}, ..., \mathcal{A}_{i_k} \in \{\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n\}$ gde $k = \overline{1,n-1}$ primenom konačno ili prebrojivo mnogo skupovanih operacija $(\cup, \cap, ^-, \setminus)$. Tada su i događaji $\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$, nezavisni u celini.

## 2.8 Primeri rada sa tablicama

Neka su date slučajne promenljive $A, B$ i $C$. Gde $B$ i $C$ uzimaju tri stanja, a $A$ uzima dva stanja. Združenu verovatnoću $P(A, B, C)$ možemo predstaviti sledećom tablicom.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | (0, 0.05, 0.05) | (0.05, 0.05, 0) | (0.05, 0.05, 0.05) |
| $a_2$ | (0.1, 0.1, 0) | (0.1, 0, 0.1) | (0.2, 0, 0.05) |

Tablica 4: Tablica združene verovatnoće $P(A, B, C)$

Vidimo da svako polje tablice sadrži uređenu trojku, pa na $(i, j)$ poziciji tablice imamo $(P(a_i, b_j, c_1), P(a_i, b_j, c_2), P(a_i, b_j, c_3))$.
Odredimo $P(B)$ iz $P(A, B, C)$. Važi $P(B) = \sum_{B,C} P(A, B, C)$, tj. vršimo marginalizaciju po promenljivim $A$ i $C$. $P(b_1) = 0 + 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0 = 0.3$, $P(b_2) = 0.05 + 0.05 + 0 + 0.1 + 0 + 0.1 = 0.3$, $P(b_3) = 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.2 + 0 + 0.05 = 0.4$, pa je $P(B) = (0.3, 0.3, 0.4)$. Jednakost koju ovde koristimo $P(b_j) = \sum\limits_i \sum\limits_k P(a_i, b_j, c_k)$.
Sličnim postupkom dobijamo $P(A) = (0.35, 0.65)$.
Analogno $P(C) = (0 + 0.1 + 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0.2, 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0 + 0.05 + 0, 0.05 + 0 + 0 + 0.1 + 0.05 + 0.05)$, tj. $P(C) = (0.5, 0.25, 0.25)$.

Odredimo sada $P(A, B)$ iz $P(A, B, C)$, ovde radimo marginalizaciju po promenljivoj $C$, što zapisujemo $P(A, B) = \sum_C P(A, B, C)$.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0.1 | 0.1 | 0.15 |
| $a_2$ | 0.2 | 0.2 | 0.25 |

Tablica 5: Tablica združene verovatnoće $P(A, B)$

Jednakost koju koristimo $P(a_i, b_j) = \sum\limits_k P(a_i, b_j, c_k)$.
Sličnim postupkom marginalizacije, izračunaćemo $P(A, C)$. Ovo može biti malo teže, ali samo treba imati u vidu jednakost $P(a_i, c_j) = \sum\limits_k P(a_i, b_k, c_j)$.

| | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0.1 | 0.15 | 0.1 |
| $a_2$ | 0.4 | 0.1 | 0.15 |

Tablica 6: Tablica združene verovatnoće $P(A, C)$

Dalje ćemo da se pozabavimo uslovnim verovatnoćama, tj. u našem sistemu verovatnoće imamo da je $A = a_2$ i $C = c_2$. Sada ćemo odrediti $P(B|a_2, c_1)$. Iz

Tablice 3 uzimamo deo koji odgovara $a_2$ i $c_1$, tada $P(a_2, B, c_1) = (0.1, 0.1, 0.2)$. Koristeći **Teoremu 5 (Bajesova teorema)** i to drugi deo jednakosti, imamo

$$P(B|a_2, c_1) = \frac{P(a_2, B, c_1)}{P(a_2, c_1)} = \frac{P(a_2, B, c_1)}{\sum_B P(a_2, B, c_1)}$$

$\sum_B P(a_2, B, c_1) = 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4$, pa tada $P(B|a_2, c_1) = (\frac{0.1}{0.4}, \frac{0.1}{0.4}, \frac{0.2}{0.4})$.

Razmotrimo sada slučaj kad nam je dato $A = a_2$ i želimo da izračunamo $P(B|a_2, C)$. Fokusiramo se na deo tablice 3 gde figuriše $A = a_2$. Tada je $P(a_2, B, C)$ dato sa

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1$ | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| $c_2$ | 0.1 | 0 | 0 |
| $c_3$ | 0 | 0.1 | 0.05 |

Tablica 7: $P(a_2, B, C)$

Opet primenom **Teoreme 5**, imamo

$$P(B|a_2, C) = \frac{P(a_2, B, C)}{P(a_2, C)} = \frac{P(a_2, B, c_1)}{\sum_B P(a_2, B, C)} \tag{2.19}$$

$$P(a_2, C) = (0.1 + 0.1 + 0.2, 0.1 + 0 + 0, 0 + 0.1 + 0.05) = (0.4, 0.1, 0.15) \tag{2.20}$$

Koristeći (2.20) u (2.19) dobijamo tablicu koja predstavlja $P(B|a_2, C)$.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $c_1$ | $\frac{0.1}{0.4}$ | $\frac{0.1}{0.4}$ | $\frac{0.2}{0.4}$ |
| $c_2$ | $\frac{0.1}{0.1}$ | $\frac{0}{0.1}$ | $\frac{0}{0.1}$ |
| $c_3$ | $\frac{0}{0.15}$ | $\frac{0.1}{0.15}$ | $\frac{0.05}{0.15}$ |

Tablica 8: $P(B|a_2, C)$

Prokomentarisaćemo i slučaj $C = c_2$, gde želimo da odredimo $P(A, B|c_2)$. Tablicu združene verovatnoće $P(A, B, c_2)$ je lako odrediti. Koristeći se ponovo Bajesovom teoremom tj. jednakošću $P(A, B|c_2) = \frac{P(A,B,c_2)}{P(c_2)} = \frac{P(A,B,c_2)}{\sum_{A,B} P(A,B,c_2)}$ uz proračun $P(c_2)$ koji je trivijalan, dobijamo traženu verovatnoću.
Pored toga treba imati u vidu da ako poznajemo verovatnoću $P(A|B)$, primenom Bajesove teoreme u standardnoj formi iz **Teoreme 5** $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$, ako imamo sve neophodne informacije možemo doći do $P(B|A)$.

# 3 Elementi teorije grafova

# 4 Kauzalne i Bajesove mreže

U ovom poglavlju uvodimo pojam kauzalne mreže, kao jedan od modela za rezonovanje i zaključivanje u prisustvu neizvesnosti. Ovde nije loše istaći da su kauzalne mreže kvalitativni oblik opisivanja rezonovanja pri neizvesnostima, a u svojoj osnovi se bave problemom kauzalnih veza među mogućim ishodima, što je reprezentovano kroz adekvatnu grafovsku strukturu. Dalje, definišemo pojam Bajesove mreže koja se više fokusira na kvantitativni deo rada sa neizvesnostima, i to primenom teorije verovatnoće.

## 4.1 Motivacija - Rezonovanje u prisustvu nesigurnosti

Kako bi bolje razumeli samu problematiku koju razmatramo, navodimo veoma ilustrativan primer iz knjige *Bayesian Networks and Decision Graphs*, koji ćemo dalje nazivati CarStart problem.

*"Ujutro, moj auto neće da upali. Čujem kako se starter okreće, ali ništa se ne dešava. Može da postoji više uzroka za moj problem. Mogu čuti starter, tako da akumulator nije problem. Dakle, najverovatniji uzroci su - gorivo je ukradeno preko noći ili su svećice prljave. To može biti i zbog prljavštine u karburatoru, labavog spoja u sistemu paljenja, ili nešto ozbiljnije. Da bih saznao, prvo gledam merač goriva. Pokazuje da je rezervoar polupun, pa sam tada odlučio da očistim svećice."*

Glavni zadatak koji se ovde postavlja jeste, kako da ovakav način ljudskog rezonovanja i zaključivanja simuliramo na mašini. Razloga je mnogo zašto bi to hteli, no sama činjenica da računar može da daje rezultate vrlo brzo i efikasno je dovoljna.

Odmah se postavlja pitanje šta se dešava sa standardnim načinima zaključivanja i rezonovanja. Većini je vrlo verovatno poznata iskazna i ,nešto opštija , predikatska logika, gde baratamo sa iskazima koji imaju dve istinitosne vrednosti, logičkim funkcijama (konjukcija, disjunkcija, ekvivalencija i implikacija), logičkim tablicama i donosimo zaključke. Poznata je logička konstrukcija:

*"Svi ljudi su smrtni."*, *"Sokrat je čovek."* to znači *"Sokrat je smrtan."*.

Iako, u teoriji savršeni zakoni mišljenja, poznati još za vreme Aristotela, a matematički formalizovani za vreme Bool-a, u situacijama kada su prisutne neizvesnosti nisu dovoljni. Prvenstveno, jer u takvim situacijama ukoliko je i moguće napisati logičku formulu, koja interpretira proces zaključivanja, ona je vrlo složena čak i za najmodernije računare, a sa druge strane nije uvek moguće iskazima dodeliti tačnu ili netačnu istinitosnu vrednost.

Logičke vrednosti se u standardnoj (formalnoj) logici interpretiraju vrednostima iz skupa $\{0, 1\}$, čitalac ima pravo ako kaže zašto problem neizvesnosti ne bismo rešili uzimanjem istinitosnih vrednosti iz intervala $[0, 1]$, pri čemu 0 znači sigurno netačan, a 1 sigurno tačan iskaz. Na primer *Naredni ponedeljak je kišovit dan, sa sigurnošću* 0.65. ili *Vreme napolju je sunčano sa sigurnošću* 0.90. Vidimo da su ovakvi iskazi sasvim validni, neizvesnost je prilično dobro modelovana, a čak umeju biti i vrlo informativni. Međutim postavlja se pitanje kako, uopšte, sprovesti zaključivanje ukoliko radimo sa ovakvim iskazima.

Posmtrajmo iskaze *Ako se Nikola Jokić ne povredi, tada Srbija osvaja EuroBasket 2025, sa sigurnošću* 0.75. ili *Ako Srbija igra finale sa Francuskom, Srbija osvaja EuroBasket 2025, sa sigurnošću* 0.55. Ukoliko se Nikola Jokić nije povredio, a finalna utakmica se igra sa Francuskom - kolika je tada sigurnost da Srbija osvaja turnir. Dakle, javlja se potreba da definišemo funkciju koja će ukombinovati ove dve sigurnosti i konstruisati novu. Odnosno standardne logičke operacije treba redefinisati.

U opštem smislu problem je sledeći: "Ako $a$, tada $b$ sa sigurnošću $x$" i "Ako $b$, tada $c$ sa sigurnošću $y$". Znam $a$, kolika je sigurnost za $c$? Treba dodati da je praktično iskustvo pokazalo, da koliko god dobro definišemo gornje funkcije postojaće slučajevi sa nevalidnim rezonovanjem.

Prema tome potrebno je uspostaviti adekvatnu matematičku teoriju, koji razmatrane probleme prevazilazi. Upravo nam u tome pomažu kauzalne i Bajesove mreže!

## 4.2 CarStart problem - kauzalna perspektiva

U svrhu jasnog matematičkog modelovanja, CarStart problem ćemo pojednostaviti. Sužavamo skup mogućih kvarova i uvodimo promenljive sa adekvatnim stanjima - $\{$*da*, *ne*$\}$ za *Gorivo?*, $\{$*da*, *ne*$\}$ za *Čiste svećice?*, $\{$*prazan*, $\frac{1}{2}$, *pun*$\}$ za *Indikator goriva?* i $\{$*da*, *ne*$\}$ za *Start?*.

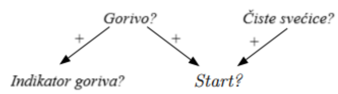
Treba obratiti pažnju da smo ovim postupkom, praktično, izvršili klasterizaciju određenih matematičkih ili fizičkih veličina, što je svojevrstan vid diskretizacije sistema.

Kako bi rekonstruisali način rezonovanja čoveka, opisan u prethodnom poglavlju, koristićemo adekvatnu grafovsku strukturu. Veze u grafu biće formirane na osnovu kauzalnih, uzročno-posledičnih, veza između događaja i stanja u našem sistemu.

Ono što se uočava, jeste da *Gorivo?* i *Čiste svećice?* imaju kauzalan uticaj na *Start?*. Pored toga *Gorivo?* ima kauzalan uticaj i na *Indikator goriva?*. Date zavisnosti su reprezentovane usmerenim grafom ispod. Grane u grafu su usmerene u skladu sa kauzalnošću.


Slika 1: Kauzalno delovanje CarStart problem

Možemo otići korak dalje ako stanjima promenljivih dodelimo smer. Na primer za *Gorivo?*, *Start?* i *Čiste svećice?* definišemo smer od *ne* ka *da*, a promenljivoj *Indikator goriva?* od *prazan* ka *pun*. U našem primeru uviđa se da su svi uticaji pozitivni (sa usvojenim smerovima). To znači da ako se izvesnost uzroka pomera u pozitivnom (negativnom) smeru to će se i izvesnost pogođene varijable pomerati u pozitivnom (negativnom) smeru.




Slika 2: Smer kazualnog delovanja CarStart problem

Takođe, treba napomenuti da ispitivanje smera osim uzročno - posledičnog (kauzalnog) dejstva, možemo analizirati i počevši od promenljive koja je posledica i posmatrati kako uzročna promenljiva reaguje (kao i izmedju onih koji nisu u direktnoj vezi). Ispitivanje uzročno posledičnih veza, odgovarajuće kretanje informacija kroz mrežu i ažuriranje sigurnosti, zapravo i jesu stvari koje karakterišu ljudsko rezonovanje i inteligenciju.

**Napomena:** Pitanje kauzalnosti u modelovanju mreža je vrlo važno pa ćemo ga dodatno prokomentarisati. Naime, posmatrajmo samo promenljive *Gorivo?* i *Indikator goriva?*, ako je *Indikator goriva?* u stanju *prazan* mi lako zaključujemo da je *Gorivo?* u stanju *ne*. Na osnovu ovakvog rezonovanja, može se učiniti da bi granu u našem usmerenom grafu trebalo povući od *Indikator goriva?* ka *Gorivo?*, međutim nećemo postupati na takav način. U kontekstu kauzalnih mreža, mi želimo i kauzalan sled događaja, pa bi adekvatna veza u grafu bila od *Gorivo?* ka *Indikator goriva?*, jer upravo stanje goriva u rezervoaru figuriše (uzrokuje) vrednost indikatora goriva tj. stanje indikatora je posledica stanja goriva u rezervoaru. Slobodnije rečeno, događaj od kog strelica kreće je "stariji".

## 4.3 Kauzalne mreže i d-razdvojenost

Kauzalne mreže se sastoje od skupa promenljivih i skupa usmerenih grana između tih promenljivih. Praktično govoreći, kauzalna mreža jeste usmeren graf, gde se svakom čvoru pridružuje jedna promenljiva. Ovde se koristi terminologija teorije grafova, pa ukoliko imamo granu od promenljive $A$ ka promenljivoj $B$, kažemo da je $A$ roditelj $B$, a $B$ dete od $A$.

Promenljive mogu imati proizvoljan broj stanja (vrednosti). Broj stanja promenljive može biti konačan ili beskonačan (prebrojiv ili neprebrojiv), no u ovom radu mi se bavimo promenljivim sa konačnim brojem stanja.

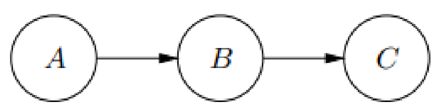
Svaka promenljiva se nalazi u tačno jednom stanju, ali nam ono može biti nepoznato.

Ovde je zgodno mesto da se napomene, da kauzalne mreže prvenstveno imaju za cilj da nam daju strukturu koja će ilustrovati tok ljudskog rezonovanja, ne ulazeći u proračun konkretnih sigurnosti. Daju nam pregled uzročno-posledičnih veza u sekvencama rezonovanja i način opisivanja kako nova saznanja menjaju tok zaključivanja.

Kroz dalji deo ovog poglavlja opisujemo koje su to vrste veza u kauzalnim mrežama tj. načini kako informacije protiču kroz ovakvu strukturu. Bavimo se pitanjem kako znanje ili neznanje o trenutnom stanju promenljive utiče na protok informacija između ostalih promenljivih. Praktično rečeno, iznosimo načine međusobne zavisnosti između promenljivih u kauzalnoj mreži. Kauzalna mreža spada u domen teorije grafova, pa mi sada problemu opisivanja zavisnosti izmđu određenih objekata pristupamo sa tačke linearne algebre, a interesatno je napomenuti da se sličnim pitanjem bavimo u poglavljima **2.5** i **2.7** gde ovom problemu pristupamo sa tačke teorije verovatnoće. Kada uvedemo pojam Bajesove mreže videćemo kako se ova dva pristupa elegantno ukrštaju.

**Terminologija**
Prvo iznosimo terminologiju koju ćemo koristiti u daljem delu rada.
- Za promenljivu kažemo da je *instancionirana* ukoliko njeno stanje poznajemo.
- Uvesti *evidenciju* u kauzalnu mrežu, znači dobiti informaciju o stanju određene promenljive u mreži.
- *Slaba evidencija* daje saznanje da promenljiva nije ili jeste u nekom od stanja, ali je ne instancionirana.
- *Jaka evidencija* daje saznanje o trenutnom stanju promenljive, tj. instancionira je.
- Kažemo da postoji *protok informacija* između promenljivih $A$ i $B$ kauzalne mreže, ukoliko unošenje evidencije o $A$, daje određeni oblik evidencije o $B$ (vidljivo kroz promenu sigurnosti o trenutnom stanju $B$).

**Serijska veza**
Posmotrajmo kauzalnu mrežu na **Slici 3.**. Vidimo da $A$ ima kauzalan uticaj na $B$, a dalje, redno, preko $B$, i na $C$. Ukoliko unesemo novo saznanje za $A$, ono utiče na izvesnost $B$, što se prenosi i na izvesnost promenljive $C$. Takođe, unošenjem novog saznanja o $C$, imamo promenu izvesnosti za $B$ i $C$. Međutim, unošenjem nove informacije o $B$, kanal protoka informacija se prekida, a $A$ i $C$ u takvim okolnostima postaju nezavnisne. Tada kažemo da su promenljive $A$ i $C$ *d-razdvojene*.



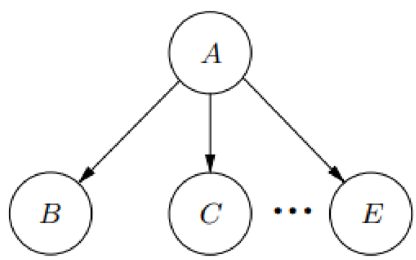

Slika 3: Serijska veza

**Zaključak:** Informacija se može prenositi putem serijske veze, osim ako je poznato stanje promenljive u vezi, koja nije krajnja.

Uzmimo primer sa **Slike 4.**, gde imamo *Kiša?* sa stanjima *{ne, slabo, srednje, jako}*, *Vodostaj?* sa stanjima *{nizak, srednji, visok}* i *Poplava?* sa stanjima *{ne, da}*. Ukoliko ne znamo stanje promenljive *Vodostaj?* protok informacije se dešava, pa ako je jaka kiša poplava je sve izvesnija, ili ako jeste poplava sve je izvesnije da kiša ide ka jakoj. Sa druge strane, ako znamo stanje promenljive *Vodostaj?*, saznanje da se desila poplava neće nam reći ništa novo o kiši (što već ne bismo mogli da zaključimo na osnovu, već prisutne, informacije o *Vodostaju?*).


Slika 4: Primer serijske veze

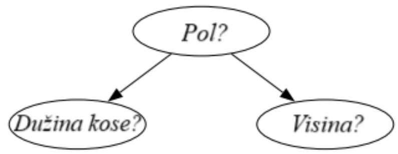
**Divergirajuća veza**
Neka je data kauzalna mreža kao na **Slici 5**. Vidimo strukturu gde je data promenljiva $A$ i promenljive $B, C, ..., E$, njena deca. Protok informacija među decom odvija se, sve do momenta dok nemamo poznatu informaciju o $A$. Unošenje nove informacije o $A$, blokira protok informacija među decom. Tada kažemo da su promenljive $B, C, ..., E$ *d-razdvojene*.




Slika 5: Divergirajuća veza

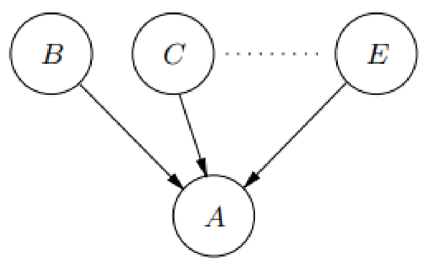
**Zaključak:** Informacija se može prenositi putem divergirajuće veze, osim ako roditeljska promenljiva nije instancionirana.

Posmtrajući primer sa **Slike 6**. Imamo promenljivu *Pol?* sa stanjima *{M,Ž}*, *Dužina kose?* sa stanjima *{duga, kratka}* i *Visina?* sa stanjima *{nizak ( <168cm), visok ( >168cm)}*. Ukoliko ne poznajemo pol osobe koju posmtramo, činjenica da ima dugu kosu, daje veću izvesnost da je ženskog pola, te i da je niska. Ukoliko je osoba visoka, izvesnost da je muškog pola je veća, te onda postaje izvesnije i da ima kratku kosu. Međutim, ako je *Pol?* u stanju *M*, unošenje nove informacije o *Dužini kose?* ne utiče na stanje promenljive *Visina?*.



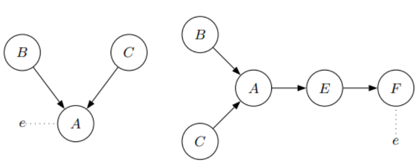

Slika 6: Primer divergirajuće veze

**Konvergirajuća veza**
Analizirajmo kauzalnu mrežu sa **Slike 7**. Primećujemo strukturu mreže, gde imamo promenljive $B$, $C$,.., $E$ koje su roditelji promenljivoj $A$. Ukoliko nemamo evidenciju o $A$, protok informacija između roditeljskih promenljivih se blokira, tj. u tom slučaju one su nezavisne. Tada kažemo da su promenljive $B, C, ..., E$ *d-razdvojene.*
Ako unesemo informaciju o $A$ (o detetu), uspostavlja se protok informacija između roditeljskih promenljivih tj. nisu više nezavisne. Slično važi i ako nemamo ili imamo evidenciju o detetu od $A$. **Slika 8.** to i ilustruje.




Slika 7: Konvergirajuća veza

**Zaključak:** Informacija se može preneti putem konvergirajuće veze samo ako je promenljiva deteta ili nekog od detetovih potomaka instacionirana. **Slika 9.**[1]

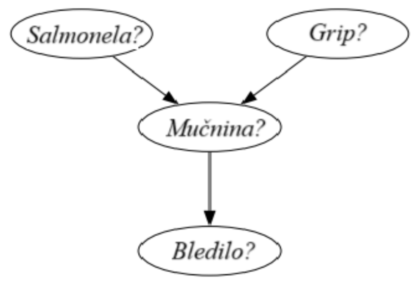



Slika 8: Evidencije u konvergirajućoj vezi

Razmotrimo primer sa **Slike 9**. Tu nam figurišu promenljive *Bledilo?*, *Mučn-*

[1] U daljem delu rada na ovaj način vizuelno označavamo evidenciju.

*ina?*, *Salmonela?* i *Grip?* svi sa stanjima *{da, ne}*. Ukoliko nemamo poznatu informaciju o promenljivim *Bledilo?* i *Mučnina?*, bilo koje saznanje o *Salmonela?* neće uticati na *Grip?* i obrnuto. Nasuprot tome, ako znamo da je osoba bleda to je izvesnije da je osobi muka. U takvoj situaciji, činjenica da osoba ima grip, povećava izvesnost da osoba nema salmonelu, dakle zavisnost postoji.




Slika 9: Primer konvergirajuće veze

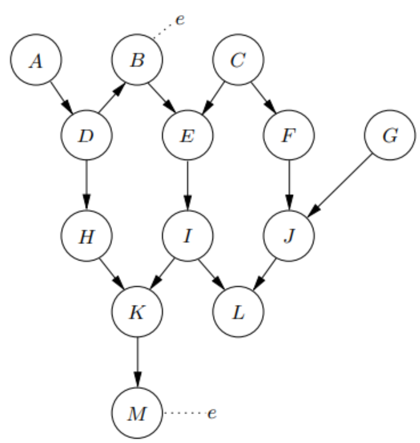
Kroz ove primere primetili smo da promenljive mogu postati zavisne ili nezavisne, ukoliko jeste ili nije prisutna određena količina informacija o drugim promenljivim. Dakle, pod različitim uslovima odnos promenljivih u smislu zavisnosti može da se razlikuje. Do sličnog zaključka smo došli u glavi **2.7**, kada smo razmatrali zavisnost slučajnih promenljivih. Priča koju smo sada ispričali predstavlja samo vid dodatne potvrde, da slučajne promenljive koje su nezavisne mogu postati uslovno zavisne, kao i da promenljive koje su zavisne mogu postati uslovno nezavisne. Efekat da dva objekata, posmatrana nad različitim skupom podataka, menjaju međusobnu zavisnost je poznat pod nazivom *Simpsonov efekat.*

### 4.3.1 d-razdvojenost

Izneti tipovi veza predstavljaju sve moguće načine na koje informacije mogu da se prenose kroz promenljive u mreži. Uočavajući neke od gornjih veza, možemo ispitivati zavisnost bilo koje dve promenljive i razmatrati kako se mreža ponaša pri unošenju novih evidencija. Već smo pomenuli pojam d-razdvojenosti, a sada ga formalno definišemo i sumiramo sve prethodne zaključke.
**Definicija:** Dve različite promenljive $A$ i $B$ u kauzalnoj mreži su d-razdvojene ("d" za *"directed graph"*) ukoliko za svaki put između $A$ i $B$ postoji promenljiva $V$ (različita od $A$ i $B$) tako da ili
- *veza između promenljivih je redna ili divergirajuća, a $V$ je instancionirana, ili*
- *veza je konvergirajuća, a imamo da je $V$ ili bilo koji njegov potomak instancioniran.*
U suprotnom kažemo da su promenljive $A$ i $B$ *d-povezane.*
Na **Slici 10.** možemo videti primer složenije kauzalne mreže.
Promenljive $B$ i $M$ su "pod uticajem" jake evidencije, tj. instancionirane su.

Ukoliko bi uneli evidenciju o promenljivoj $A$, ona će se putem redne veze preneti do promenljive $D$, ali neće do promenljive $E$, jer je promenljiva $B$ instancionirana (put je blokiran). Evidencija se, takođe, putem redne veze prenosi i to promenljivih $H$ i $K$. Primetimo strukturu konvergirajuće veze između $H$, $K$, $M$ i $I$, kako je $M$ instancionirana, protok informacije se dešava i između $H$ i $I$. Dalje kroz rednu vezu i do $E$ i $C$. Analogno, rednom vezom, evidencija se prenosi kroz $C$, $F$, $J$ i $K$. Konačno zaključujemo da je put $A$ - $D$ - $H$ - $K$ - $I$ - $E$ - $C$ - $F$ - $J$ - $L$ *d-povezan.* Sa druge strane, jasno je i da je $A$ u ovakvoj strukturi mreže *d-razdvojena* od promenljive $G$.

Treba istaći da iako su dve promenljive *d-povezane* evidencija o jednoj ne mora




Slika 10: d-razdvojenost

nužno menjati naša uverenje o drugoj. Napomenimo odmah, da ne bi došlo do zabune, u našem primeru $A$ i $B$ su *d-povezane.* No ovde je jasno da uvođenjem nove informacije o $A$, naša uverenja o $B$ se ne menjaju, jer je $B$ instancionirana. Kako bi izbegli konfuziju, nekada ćemo reći da su $A$ i $B$ *strukturno nezavisne*, ako su d-razdvojene.

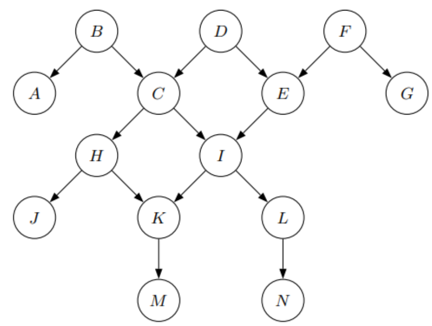
U vezi sa pričom o d-razdvojenosti uvodimo novi pojam.

**Definicija:** *Markovljev pokrivač* promenljive $A$ je skup promenljivih koji sadrži sve roditelje od $A$, svu decu od $A$ i promenljive koje imaju zajedničko dete sa promenljivom $A$.

**Tvrđenje:** Neka je data promenljiva $A$ i neka je dat njen Markovljev pokrivač. Ukoliko su sve promenljive Markovljevog pokrivača instancionirane, tada je $A$ d-razdvojena od ostatka mreže.

Na **Slici 11.** vidimo primer kauzalne mreže gde Markovljev pokrivač promenljive $I$ predstavlja skup $\{C,\ E,\ H,\ K,\ L\}$.

Sve u svemu, čitav smisao d-razdvojenosti ima za cilj da u strukturalnom smislu kauzalne mreže modeluje nezavisnost između promenljivih. To u kontekstu baratanja nesigurnostima ilustruje činjenicu: ako su promenljive $A$ i




Slika 11: Markovljev pokrivač

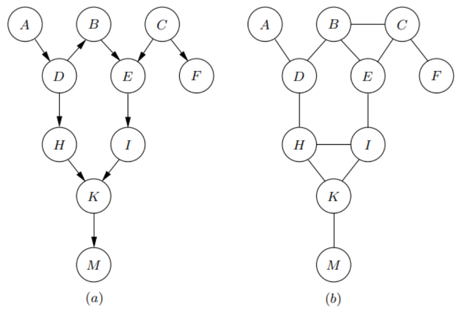
$B$ d-razdvojene to znači da promena sigurnosti promenljive $A$ nema uticaj na promenu sigurnosti promenljive $B$, nikakav protok informacija se ne dešava. Kako još uvek nismo formalno uveli mehanizme rada sa nesigurnostima, ovu priču ćemo opširnije razraditi u narednom poglavlju.

**Predački i moralni graf**
Problem ispitivanja d-razdvojenosti između promenljivih $A$ i $B$ nad zadatim skupom jakih evidencija u mreži $\mathcal{C}$ (promenljivih sa jakim evidencijama), je ekvivalentan problemu ispitivanja svih puteva između $A$ i $B$, uz proveru da li su takvi putevi d-razdvajajući. Osim toga, ručna provera d-povezanosti kroz analizu svih mogućih veza među promenljivim ume da bude veoma naporna i sklona greškama. Imajući sve to u vidu iznosimo dosta formalniji postupak provere d-razdvojenosti.

**Korak 1** - Formiramo *predački graf*: Koristimo sve promenljive iz skupa $\{A, B\} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ i odgovarajuće grane kauzalne mreže, gde $\mathcal{D}$ predstavlja skup svih promenljivih od kojih imamo direktan put do promenljivih iz $\{A, B\} \cup \mathcal{C}$.
$\mathcal{D}$ zapravo predstavlja skup svih predaka promenljivih iz $\{A, B\} \cup \mathcal{C}$.
**Korak 2** - Unosimo neusmerene grane između svaka dva čvora sa zajedničkim detetom.
**Korak 3** - Uklanjamo usmerene grane u predačkom grafu i zamenjujemo ih neusmerenim. Na ovaj način formirali smo *moralni graf.*
**Korak 4** - Analiziramo putnu povezanost $A$ i $B$. Ako svi putevi između $A$ i $B$ sadrže barem jednu promenljivu iz $\mathcal{C}$, tada su $A$ i $B$ d-razdvojene za dato $\mathcal{C}$.
Prikazani postupak ilustruje vrlo jasnu i nedvosmislenu proceduru, koju je za datu kauzalnu mrežu i skup promenljivih sa evidencijama vrlo pristupačno programirati.

## 4.4 Bajesove mreže

Sva priča koju smo izneli o kauzalnim mrežama tiče se modelovanja kvalitativne strane rezonovanja u prisustvu neizvesnosti. Međutim, i dalje ostaje nedoumica

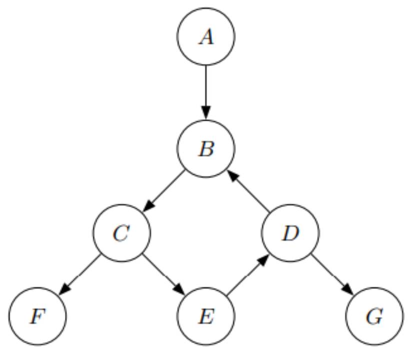



Slika 12: Deo (a) opisuje *predački graf* kauzalne mreže sa **Slike 10.**, kada proveravamo d-razdvojenost $A$ i $F$, za dati skup evidencija $\{B, M\}$. Deo (b) predstavlja odgovarajući *moralni graf*.

kako raditi sa konkretnim vrednostima nesigurnosti, tj. kako sprovesti modelovanje kvantitativne strane rezonovanja u prisustvu neizvesnosti. Bajesove mreže ovaj problem prevazilaze primenom teorije verovatnoće.

Bajesova mreža je oblik grafovske strukture, čijim vezama dodeljujemo kvantitativnu stranu, *težine*. Kako smo već rekli da koristimo aparaturu teorije verovatnoće, može se naslutiti da ukoliko imamo promenljivu $A$ i njeno dete $B$, da će grani koja ih povezuje odgovarati $P(A|B)$. Ukoliko $B$ ima još jednog roditelja, $C$, tada će adekvatan opis za ovakvu vezu biti $P(B|A, C)$. Čitaocu se ostavlja da razmisli zašto $P(A|B)$ i $P(A|C)$ ne daju ispravan opis ovakve kauzalne veze.

U kontekstu teorije grafova interpretirati Bajesove mreže kao težinski graf nije najispravnije, jer smo već iz gornjeg primera videli da dodeljivanje vrednosti $P(dete|roditelj)$ granama ne daje uvek ispravan i dovoljan opis situacije. Treba napomenuti da kod Bajesovih mreža zahtevamo mreže koje ne sadrže cikluse, pa mreža sa **Slike 13.** nije ispravan model Bajesove mreže. Probleme u kojima imamo povratni prenos informacija tj. ciklus izazovno je modelovati kauzalnim strukturama, međutim postoje neke nekauzalne koje se nose sa ovim problemom. Dalje Iznosimo formalnu definiciju Bajesove mreže.




Slika 13:

**Definicija:** Bajesova mreža se sastoji iz sledećih elemenata:
- *Skupa promenljivih i usmerenih veza između tih promenljivih,*
- *Svaka promenljiva* [2] *ima konačan broj međusobno isključivih stanja,*
- *Promenljive zajedno sa usmerenim granam formiraju* direktan usmeren graf (DAG - "directed acyclic graph"), tj. graf u kome ne postoje ciklusi,
- *Svakoj promenljivoj* $A$ *sa roditeljima* $B_1, B_2, ..., B_n$ *dodeljujemo uslovnu raspodelu verovatnoće* $P(A|B_1\ ,...,\ B_n)$.[3]

Ukoliko $A$ nema roditeljskih promenljivih, njoj dodeljujemo bezuslovnu raspodelu $P(A)$. Iako su bezuslovne raspodele matematički neophodan element, kroz prethodni deo rada videli smo da i čovek pri rezonovanju poseduje određena uverenja o situaciji, apriori. Verodostojnost i validnost apriorne raspodele vrlo je važna za kvantitavni deo mreže, o čemu će još biti reči u daljem delu rada.

Na **Slici 14.** vidimo validan model Bajesove mreže, bez ciklusa.

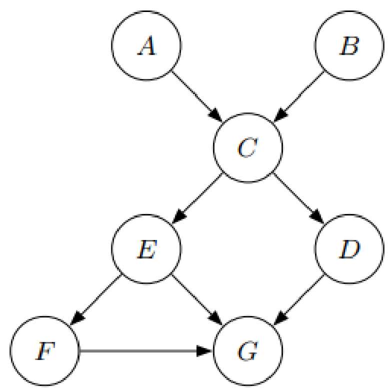
Iz definicije Bajesove mreže ni u jednom momentu ne zahtevamo kauzalnost. Što znači da prilikom projektovanja Bajesovih mreža kauzalan poredak strelica nije nužna stvar. Sa druge strane, ono što je neophodno proveravati jesu osobine d-razdvojenosti promenljivih u modelu, kako bi obezbedili da stanje u mreži odgovara našim percepcijama uslovne zavisnosti u realnom rezonovanju. Značaj kauzalnih mreža se ogleda u tome, da pružaju vrlo siguran i matematički formalizovan pristup za proveru d-razdvojenosti.

### 4.4.1 Pravilo lanca

Neka su date slučajne promenljive $A_1, ..., A_n$, skup $\mathcal{U} = \{A_1, ..., A_n\}$ nazivamo *univerzumom*. Bajesovu mrežu nad proizvoljnim univerzumom, u daljem delu rada, oznčavaćemo sa $BN$.

[2] Ono što u kontekstu kauzalnih i Bajesovih mreža nazivamo promenljivim sa više stanja, odgovara pojmu *slučajne promenljive* koju smo definisali u poglavlju **2.**

[3] Vidimo da je Bajesova mreža, zapravo, usmeren graf, čijim čvorovima dodeljujemo određen oblik numerčkih težina, a ne granama.




Slika 14: Bajesova mreža sa ciklusom

Za dati univerzum slučajnih promenljivih, združena raspodela verovatnoće $P(\mathcal{U}) = P(A_1\ , ...,\ A_n)$ je potpun opis verovatnoće. To znči da iz $P(\mathcal{U})$, možemo dobiti bilo koju drugu raspodelu od interesa. Međutim, ovde se javlja problem, jer $P(\mathcal{U})$ raste eksponencijalno u odnosu na broj promenljivih. Eksponencijalnu složenost želimo da izbegnemo, posebno kada projektujemo velike sisteme, stoga u ovom poglavlju iznosimo mehanizam kojim optimizuje dati problem.
**Teorema.**(Generalno pravilo lanca) Neka je dat skup slučajnih promenljivih $\mathcal{U} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Tada za združeni zakon raspodele važi sledeća jednakost:

$$P(\mathcal{U}) = P(A_n|A_1, ..., A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1, ..., A_{n-2})\ ...\ P(A_2|A_1)P(A_1).$$

*Dokaz:* Direktno iz **Teoreme 2.** glave **2.4**.
Gornja teorema ne rešava problem eksponencijalne složenosti $P(\mathcal{U})$, međutim vrlo je važna za razumevanje naredne teoreme, koja upravo to radi. Iznosimo tvrđenje, koje je od krucijalne važnosti za Bajesove mreže.

**Teorema.** (Pravilo lanca za Bajesove mreže) Neka je data Bajesova mreža nad univerzumom slučajnih promenljivih $\mathcal{U} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Tada je Bajesova mreža opisana na jedinstven način raspodelom $P(\mathcal{U})$, datom kao proizvod odgovarajućih uslovnih raspodela, i to na sledeći način:

$$P(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i|\mathrm{pa}(A_i)),$$

gde $\mathrm{pa}(A_i)$ predstavlja sve roditelje promenljive $A_i$.
Bitno je istaći da za ovako definisano $P(\mathcal{U})$ važi:
- *Jeste verovatnoća*, zadovoljava osnovne aksiome verovatnoće,
- *Koenzistentnost*, reflektuje osobine Bajesove mreže - u smislu prisutnih uslovnih zavisnosti između promenljivih (pojedini članovi proizvoda) i d-razdvojenosti (sam proizvod),

- *Jedinstvenost*, ukoliko distribucija $P(\mathcal{U})$ opisuje Bajesovu mrežu, onda ona mora biti proizvod uslovnih verovatnoća, koje odgovaraju onima u mreži.
Dokaz ove teoreme je nešto složeniji, pa ga u ovom radu izostavljamo.

### 4.4.2 Unošenje evidencije

Kao što smo ranije rekli, Bajesove mreže jesu alat za računanje novih verovatnoća, ukoliko smo uneli nove informacije. Kroz prethodni deo rada najviše smo se bavili jakim evidencijama, oblika "$A = x_1$", gde je $A$ promenljiva, a $x_1$ njeno trenutno stanje.

U nastavku se bavimo unošenjem nešto slabije evidencije, preciznije razmatramo sledeći problem. Neka je data promenljiva $A$ sa $n$ stanja i raspodelom verovatnoće $P(A) = (x_1, ..., x_n)$. Ukoliko smo dobili informaciju, $e$ da su sva stanja promenljive $A$ nemoguća osim stanja $i$ i $j$, tada je prilično lako doći do združene raspodele $P(A, e) = (0, ..0, x_i, 0, ..., 0, x_j, 0, ..., 0)$.

Ovde treba primetiti da $P(e)$ dobijamo marginalizacijom združene verovatnoće $P(A, e)$ po promenljivoj $A$. Takođe, $P(A, e)$ dobili smo množenjem $P(A)$ sa $(0, ..., 0, 1, 0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$, gde su jedinice na $i$-toj i $j$-toj poziciji.

**Definicija:** Neka je $A$ promenljiva sa $n$ stanja. *Traženje* slučajne promenljive $A$ jeste $n$-dimenzionalna tablica (vektor) nula i jedinica.

U notacijskom smislu evidenciju oblika *$A$ je na $i$-toj ili $j$-toj poziciji* označavamo sa $e$, dok odgovarajuću tablicu traženja označavamo sa $\mathbf{e}$.
Ukoliko je data združena raspodela verovatnoće $P(\mathcal{U})$, za datu evidenciju nad $A$, važi jednakost:

$$P(\mathcal{U}, e) = P(\mathcal{U}) \cdot \mathbf{e}$$

Što znači da iz polazne tabele , koja odgovara $P(\mathcal{U})$, svaku vrednost gde $A$ uzima stanje različito od $a_i$ ili $a_j$ stavljamo na 0, a ostala ostavljamo nepromenjenim.
Primetimo da marginalizacijom dobijamo $P(e) = \sum_{\mathcal{U}} P(\mathcal{U}, e) = \sum_{\mathcal{U}} (P(\mathcal{U}) \cdot \mathbf{e})$
**Teorema.** Neka je $BN$ Bajesova mreža nad univerzumom promenljivih $\mathcal{U}$ i neka su $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$ traženja, tada

$$P(\mathcal{U}, e) = \prod_{A \in \mathcal{U}} P(A \mid \mathrm{pa}(A)) \cdot \prod_{j=1}^{m} \mathbf{e}_j$$

i za $A \in \mathcal{U}$ važi

$$P(A|e) = \frac{\sum_{\mathcal{U} \setminus \{A\}} P(\mathcal{U}, e)}{P(e)}.$$

Evidencija koju možemo dobiti ne mora uvek biti instancioniranje ili informacija da trenutno stanje nije ili jeste deo nekog podskupa stanja. Dakle, vrlo često evidenciju nije moguće interpretirati kao traženje. Razmotrimo evidencije oblika - promenljiva $A$ je sa dvostruko većom sigurnošću u stanju $a_1$ nego u stanju $a_2$. Ovakva evidencija se naziva *evidencija verovatnoće*. Dati iskaz, evidencija, može se reprezentovati raspodelom $(0.67, 0.33)$, a gornja Teorema i dalje važi.

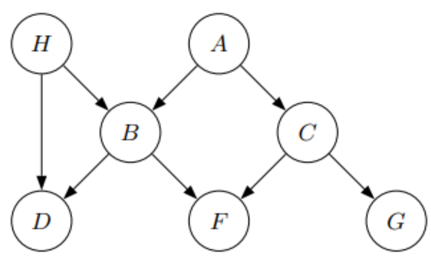
Kako nije razumljivo šta znači da evidencija verovatnoće bude tačna, $P(e)$ ne može biti interpretirana kao verovatnoća evidencije (kao da imamo raspodelu verovatnoće, verovatnoće). Osim toga, ni $P(\mathcal{U}, e)$ nema jasan i pregledan oblik.

Uzimajući u obzir sve ovo, u nastavku rada nećemo se baviti evidencijama verovatnoće, mada treba istaći da teorija Bajesovih mreža omogućava rad sa ovakvim evidencijama.

### 4.4.3 Računanje verovatnoća u praksi

U glavi **4.4.1** smo diskutovali, o tome da Bajesova mreža nad skupom promenljivih $\mathcal{U}$, već ne za toliko veliki broj promenljivih postaje vrlo složena za opisivanje, posebno kada koristimo zajedničku raspodelu $P(\mathcal{U})$ i generalno pravilo lanca. Kao što smo videli, ovaj račun se značajno optimizuje primenom pravila lanca za Bajesove mreže. Videli smo da je to kompletan opis Bajesove mreže, a sada ćemo da ga ilustrujemo kroz primer. Osim toga, u primeru ćemo izvršiti i unošenje evidencija, mada ćemo se time baviti više u nekom od narednih poglavlja.

Posmatrajmo Bajesovu mrežu sa **Slike 15.**, pretpostavimo da svaka promenljiva




Slika 15: Bajesova mreža bez ciklusa

ima 10 stanja, da je data jaka evidencija $e = \{D = d, F = f\}$, a mi želimo da izračunamo $P(A \mid e)$.
Iz pravila lanca za Bajesove mreže imamo:
$P(\mathcal{U},\ e) = P(A,\ B,\ C,\ d,\ f,\ G,\ H) =$
$= P(A)P(H)P(B \mid H,\ A)P(C \mid A)P(d \mid B,\ H)P(f \mid B,\ C)P(G \mid C)$

Napomenimo da $P(d \mid B,\ H)$ označava tablicu nad promenljivim $B$ i $H$. U takvom slučaju kažemo da je tablica uslovne raspodele verovatnoće *instancionirana* sa $D = d$. Za Bajesovu mrežu sa slike, ukoliko bi koristili združenu raspodelu verovatnoće, radili bismo sa tablicom koja sadrži $10^7$ vrednosti. Kako naša tablica sadrži i evidencije, račun bi se mogao svesti na tablicu sa $10^5$ vrednosti, što je i dalje mnogo.

Ukoliko se koristimo Bajesovim pravilom lanca račun se svodi na rad sa $10 + 10 + 1000 + 100 + 1000 + 1000 + 100 = 3120$ vrednosti (broj vrednosti koji odgovara svakoj raspodeli iz proizvoda bez evidencija, redom). Međutim kada uvedemo i evidencije, račun se svodi na rad sa manje od 1000 vrednosti. Moramo se složiti da je ovo neverovatna ušteda i optimiziacija, kako u smislu memorijskih resursa, tako i u smislu procesorske moći i utrošene energije na obradu mnogo manje količine podataka.

Kako bi izračunali $P(A,\ e)$, vršimo marginalizaciju združene raspodele po promenljivim $B,\ C,\ G$ i $H$. Vršimo marginalizaciju jedne po jedne promenljive, a treba istaći da redosled marginalizacije ne utiče na rezultat. Izvršimo marginalizaciju po promenljivoj $G$.

$\sum_G P(A,\ B,\ C,\ d,\ f,\ G,\ H) =$
$= \sum_G P(A)P(H)P(B \mid H,\ A)P(C \mid A)P(d \mid B,\ H)P(f \mid B,\ C)P(G \mid C)$

Kako samo zadnji član, desnog dela jednakosti, sadrži $G$, jednakost se svodi na:
$\sum_G P(A,\ B,\ C,\ d,\ f,\ G,\ H) =$
$= P(A)P(H)P(B \mid H,\ A)P(C \mid A)P(d \mid B,\ H)P(f \mid B,\ C) \sum_G P(G \mid C)$

Dakle, potrebno je izračunati $\sum_G P(G \mid C)$. Iz osobina verovatnoće lako dobijamo da $\sum_G P(G \mid C) = 1$, pa prema tome imamo:

$P(A,\ B,\ C,\ d,\ f,\ H) = \sum_G P(A,\ B,\ C,\ d,\ f,\ G,\ H) =$
$= P(A)P(H)P(B \mid H,\ A)P(C \mid A)P(d \mid B,\ H)P(f \mid B,\ C)$

Izvršimo sada marginalizaciju po promenljivoj $H$.
$\sum_H P(A,\ B,\ C,\ d,\ f,\ H) =$
$= P(A)P(C \mid A)P(f \mid B,\ C) \sum_H P(H)P(B \mid H,\ A)P(d \mid B,\ H)$

Množimo tablice $P(H),\ P(B \mid H,\ A),\ P(d \mid B,\ H)$, vršimo marginalizaciju promenljive $H$, a kao rezultat dobijamo tablicu $T(A,\ B,\ d)$. Tada važi:

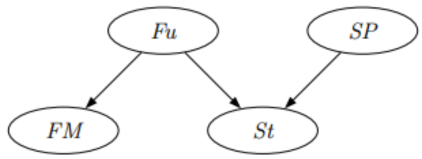
$$P(A,\ B,\ C,\ d,\ f) = P(A)P(C \mid A)P(f \mid B,\ C)T(A,\ B,\ d)$$

Sličan postupak ponavljamo za promenljive $B$ i $C$.

Izložena metodologija se često u literaturi naziva *eliminacija promenljivih* i može biti opisana na sledeći način: polazimo od skupa tablica $\mathcal{T}$, kada želimo da izvršimo marginalizaciju po promenljivoj $X$ - uzimamo sve tablice iz $\mathcal{T}$ koje sadrže $X$, množimo ih i marginalizujemo $X$, dobijenu tablicu dodajemo u $\mathcal{T}$, pri čemu tablice koje sadrže $X$ više nisu deo skupa $\mathcal{T}$.

### 4.4.4 Nova perspektiva - CarStart problem

Kako smo prošli svu uvodnu priču o kauzalnim i Bajesovim mrežama, vratimo se na naš primer sa početka. Ponovo ćemo analizirati CarStart problem, ali tako da primenimo nova znanja i napravimo rekapitulaciju svega što smo izneli u ovom poglavlju.
Na osnovnu kauzalne strukture sa **Slike 1.** formiramo Bajesovu mrežu kao na slici ispod.
Pri čemu, *Fu* odgovara promenljivoj *Gorivo?*, *SP* promenljivoj *Čiste svećice?*,




Slika 16: CarStart problem

*FM Indikatoru goriva?* i *St* promenljivoj *Start?*. Već na početku ovog poglavlja smo rekli u kojim stanjima mogu biti pojedine promenljive.
Univerzum date Bajesove mreže je $\mathcal{U} = \{Fu,\ SP,\ St,\ FM\}$. Združenu raspodelu, po pravilu lanca za Bajesove mreže, računamo kao:

$$P(\mathcal{U}) = P(Fu)P(Sp)P(FM \mid Fu)P(St \mid Fu,\ SP)$$

Dakle, za kvantitativno modelovanje Bajesove mreže neopphodno je znati raspodele $P(Fu),\ P(SP),\ P(FM \mid Fu),\ P(St \mid Fu,\ SP)$.

Navodimo apriorne raspodele $P(Fu) = (0.98,\ 0.02)$, $P(SP) = (0.96,\ 0.04)$, a takođe neophodne uslovne raspodele su date u **Tablici 9.** i **Tablici 10.** U našem proračunu gde god imamo uređen par $(x,\ y)$, numeričke vrednosti odgovaraju stanjima $(da,\ ne)$ odgovarajuće sluačajne promenljive ( stanja svake promenljive smo još ranije definisali ).

| | $Fu = da$ | $Fu = ne$ |
|---|---|---|
| $Fm = pun$ | 0.39 | 0.001 |
| $Fm = \frac{1}{2}$ | 0.60 | 0.001 |
| $Fm = prazan$ | 0.01 | 0.998 |

Tablica 9: $P(Fm \mid Fu)$

| | $Fu = da$ | $Fu = ne$ |
|---|---|---|
| $Sp = da$ | (0.99, 0.01) | (0,1) |
| $Sp = ne$ | (0.01, 0.99) | (0,1) |

Tablica 10: $P(St \mid Fu,\ SP)$

,

Analizirajmo sada situaciju iz našeg primera, auto ne startuje tj. evidencija koju uvodimo u analizu jeste $St = ne$.

Iznesimo još združenu raspodele naše Bajesove mreže za $St = ne$, **Tablica 11**. Treba napomenuti, da obično želimo da radimo sa tablicama koje sadrže do tri promenljive koje figurišu.

| | $Fm = pun$ | $Fm = \frac{1}{2}$ | $Fm = prazan$ |
|---|---|---|---|
| $Sp = da$ | $(0.00367,\ 1.9 \cdot 10^{-5})$ | $(0.00564,\ 1.9{\cdot}10^{-5})$ | $(9.4 \cdot 10^{-5}, 0.0192)$ |
| $Sp = ne$ | $(0.01514,\ 8 \cdot 10^{-7})$ | $(0.0233,\ 8 \cdot 10^{-7}\ )$ | $(0.000388,\ 0.000798)$ |

Tablica 11: $P(Fu,\ Fm,\ SP,\ St = ne)$

Marginalizacijom promenljivih $FM$ i $Fu$ iz **Tablice 11.** dobijamo raspodelu $P(SP,\ St = ne) = (0.02864,\ 0.03965)$. Osim toga primenom teoreme totalne verovatnoće imamo $P(St = ne) = P(SP = da, St = ne) + P(SP = ne, St = ne) = 0.02864 + 0.03965 = 0.06829$. Primenom Bajesove formule za slučajnce promenljive imamo $P(SP \mid St = no) = (\frac{0.02864}{0.06829},\ \frac{0.03965}{0.06829}) = (0.42, 0.58)$
Sličnim postupkom dolazimo do $P(Fu \mid St = no) = (0.71,\ 0.29)$.

Zamislimo da smo dobili tačnu informaciju sa *Indikatora goriva*, tako da važi $FM = \frac{1}{2}$. Sada u našem modelu rezonovanja imamo dve jake evidencije pa, je nova združena raspodela data **Tablicom 12.**
Marginalizacijom promenljive $Sp$ iz raspodele i normiranjem, dobijamo $P(Fu \mid St = no, FM = \frac{1}{2}) = (0.999,\ 0.001)$, dok marginalizacijom i normiranjem promenljive $Fu$ iz raspodele dobijamo $P(Sp \mid St = no,\ FM = \frac{1}{2}) = (0.196, 0.804)$.

| | $Fu = da$ | $Fu = ne$ |
|---|---|---|
| $Sp = da$ | 0.00564 | $1.9 \cdot 10^{-5}$ |
| $Sp = ne$ | 0.0233 | $8 \cdot 10^{-7}$ |

Tablica 12: $P(Fu,\ Fm = \frac{1}{2},\ SP,\ St = da)$

# 5 Primeri i prinicipi modelovanja Bajesovih mreža

## 5.1 Razumevanje strukture

Kao što smo videli, jedna od glavnih ideja Bajesovih mreža jeste da nam omogući estimaciju izvesnosti pojedinih događaja. Pre svega, treba istaći da je to od izuzetne važnosti za događaje koji nisu direktno opservabilni ili je njihovo merenje veoma skupo. Prvi i jedan od glavnih zadataka pri modelovanju mreže je uočiti ovakve događaje, koje ćemo nazivati *hipotezama.* Utvrdivši sve ovakve događaje, grupišemo ih u potpune i međusobno isključive skupove na osnovu kojih formiramo *promenljive - hipoteze.*

Kako imamo cilj estimirati određene veličine, potrebno je obezbediti kanale informacija koje nam mogu reći nešto više o promenljivim-hipotezama. Imajući ovo u vidu, drugi zadatak je da grupišemo odgovarajuće setove informacije i formiramo *informacione promenljive.* U kontekstu Bajesovih mreža unošenje informacije u model biće reprezentovane kroz jaku ili slabu evidenciju, upravo na nekoj od informacionih promenljivih.

Pri modelovanju Bajesovih mreža, pokazalo se da je dobra praksa prvo utvrditi promenljive koje figurišu, pa se tek onda baviti pitanjem usmerenih veza među njima, bile one kauzalne ili ne.

### 5.1.1 Milk Test

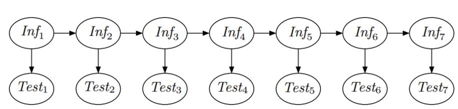
Razmatramo situaciju u kojoj želimo da identifikujemo ispravnost kravljeg mleka. Kao indikator ispravnosti mleka koristićemo test ispravnosti. U slučaju idealno tačnog i validnog testa ne postoji problem. Međutim, test nije idealan, što znači da može dati pozitivan rezultat za ispravno mleko, kao i negativan rezultat za inficirano.

Mleko može biti inficirano ili ne, takvi događaji čine međusobno isključiv i potpun sistem događaja, pa na osnovu njih formiramo promenljivu - hipotezu *Inficiranost?* sa stanjima $\{da, ne\}$. Još definišemo informacionu promenljivu *Test?* sa stanjima $\{poz, neg\}$, koja karakteriše informaciju da li je test dao pozitivan ili negativan rezultat.


Slika 17:

Na **Slici 17.** vidimo kauzalnu vezu, koja je uspostavljena između ovih promenljivih. Ovde je očigledno da *Inficiranost?* figuriše *Test?*, ali treba istaći da u kompleksnijim sistemima, nepromišljenim pristupimo, često možemo pobrkati odnos uzrok posledica.

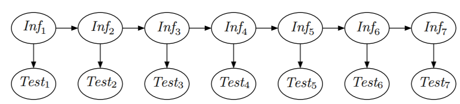
Stanje novog mleka se može menjati tokom vremena, npr. ukoliko krava ozdravi ili ipak zadobije infekciju. Bolji uvid u situaciju i veću informativnost možemo imati ukoliko rezultate testova pratimo u periodu od nekoliko dana. Želimo da saznanja iz prošlosti inkorporiramo u trenutni zaključak, koji treba da donesemo. Na **Slici 18.** vidimo mrežu koja udružuje informacije u periodu od sedam dana.




Slika 18:

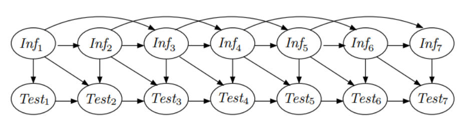
Kroz ovako modelovanu mrežu, implicitno su uvedene neke pretpostavke. Prvo možemo primetiti da je $Inf_{i-1}$, ukoliko je dato $Inf_i$, d-razdvojeno od $Inf_{i+1}$. Ovo predstavlja svojstvo *Markovljevog procesa*, gde je budućnost uslovljena samo sadašnjošću. Sa druge strane, vrlo je jasno da u realnosti inficiranost za veliki deo oboljenja nema svojstvo Markovljevog procesa, jer je po svojoj prirodi pojava koja zahteva duži vremenski period. Prema tome, model nije validan i trebalo bi ga modifikovati.

Na **Slici 19.** iznosimo primer modifikovane mreže, gde uvodimo vezu između $Inf_{i-1}$ i $Inf_{i+1}$. Takođe, na ovaj način smo uveli *memoriju* u sistem, dužine 2 dana. Još treba napomenuti da iako nikad nećemo znati tačno stanje promenljivih $Inf_i$, uvođenjem novih veza mi približavamo naš model realnom stanju stvari, što kao posledicu ima bolju estimaciju veličina od interesa, a to su upravo stanaja promenljivih $Inf_i$.




Slika 19:

Druga pretpostavka koju možemmo uočiti, jeste da su svaka dva testa, $Test_i$, d-razdvojena ukoliko je poznata neka od promenljivih $Infi$, među njima. To znači da činjenica da je test juče bio pogrešan, ne utiče na činjenicu da će danas biti tačan. Ukoliko to ne ilustruje realno stanje, mrežu možemo modifikovati na sledeći način. Sada $Test_i$ poseduje memoriju dužine jednog dana.




Slika 20:

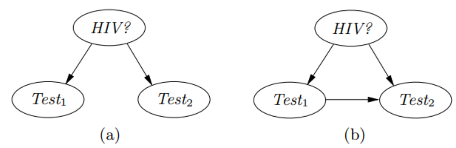
**Modelovanje testa**

Ukoliko nisu dostupne specifične osobine testa, pri modelovanju Bajesovih mreža uzima se ista sigurnost da test bude pozitivan, iako osoba nije inficirana i da test bude negativan, a da osoba jeste inficirana.[4] Osim toga možemo diskutovati o ponovljivosti testa, tj. o tome da li će novo testiranje zaista uneti novu informaciju. Pokazalo se da prvo treba razmotriti od čega najviše zavisi zašto test daje pogrešne rezultate.

Najčešće, ukoliko postoji objektivna pretpostavka ili razlog, zašto test daje pogrešan rezultat ponovno merenje neće dati ništa novo. Nasuprot tome, ukoliko je osobina testa da povremeno napravi grešku, ponovno merenje će ipak biti informativno. Posmatrajmo, test za hiv. U prvom slučaju greši, jer krv sadrži

[4]Test može biti za bilo koju pojovu, ne samo inficiranost.

određene osobine, a drugom slučaju bez utvđenih razloga. U kontekstu Bajesovih mreža, takve mehanizme grešaka možemo modelovati na sledeći način.



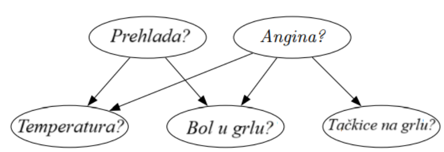

Slika 21: Struktura (a) ilustruje situaciju kada je novo merenje informtivno u smislu promene krajnjeg ishoda testiranja, dok struktura (b) pokazuje slučaj kada novo merenje uvek daje isti rezultat.

### 5.1.2 Prehlada ili Angina

Primetili smo bol u grlu i želimo da zaključimo da li smo prehlađeni ili imamo anginu. Kako bi doneli zaključak merimo temperaturu i posmatramo da li na grlu postoje žute tačkice.

Na osnovu svih mogućih ishoda događa formiramo promenljive-hipoteze *Prehlada?* sa stanjima {*ne, da*}, *Angina?* sa stanjima {*ne, srednja, jaka*}. Drugi pristup bi bio da sve ove događaje svedemo pod jednu promenljivu *Bolest?* sa stanjima {*ne, prehlada, srednja angina, jaka angina*}. Međutim zadržaćemo model sa dve promenljive-hipoteze i smatraćemo da se *Angina?* i *Prehlada?* međusobno isključuju.

Kao informacione promenljive uvodimo *Bol u grlu?* sa stanjima {*ne, da*}, *Tačkice na grlu?* sa stanjima {*ne, da* i *Temperatura?* sa stanjima {*niska, normalna, visoka*}. Vodeći računa, prvenstveno o kauzalnim uticajima, mrežu modelujemo kao na **Slici 21.**

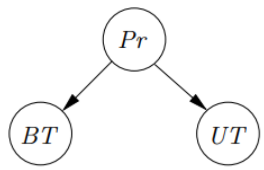



Slika 22:

Pri modelovanju mreže najviše smo pazili na kauzalne uticaje, dok smo pitanje protoka informacija i d-razdvojenosti ostavili po strani. No, primetimo da poznavanje stanja *Angine?* znači blokadu informacija između *Temprature?* i *Tačkica na grlu?*. Ukoliko se ne slažemo sa takvom pretpostavkom možemo, na primer, uvesti granu od *Tačkica na grlu?* ka *Temprratura?*.

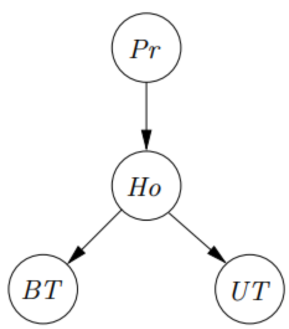
### 5.1.3 Inseminacija

Izvršena je inseminacija krave. Nakon 6 meseci, moguće je izvršiti da li je krava trudna ili ne. Kao mehanizam provere koristimo dva različita testa.
Promenljiva-hipoteza, koja odgovara trudnoći, je *PR?* sa stanjima {*da, ne*}. Definišemo i informacione promenljive *BT?*, koja odgvara testu krvi, sa stanjima {*poz, neg*} i test urina, *UT?* sa stanjima {*poz, neg*}. Posmatrajuću kauzalnost i uzročno-posledične veze formiramo strukturu kao na **Slici 23.**



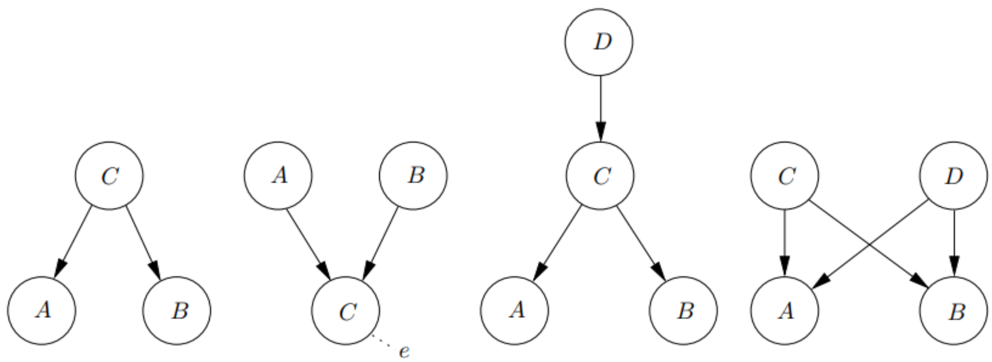

Slika 23:

Razmotrimo malo detaljnije naš model. Ukoliko pretpostavimo slučaj da nam je poznato da li je krava trudna ili ne, vidimo da stanje krvi i urina postoju nezavisne promenljive. Sa druge strane, ako konsultujemo eksperta i on se ne složi sa takvom postvakom stvari, zaključujemo da naš model nije dobar. Prevazilaženje ovakve situacije može se postići dodavanjem usmerene grene između $BT$ i $UT$, međutim nećemo tako postupiti. U ovom slučaju, mnogo prirodniji i često prisutan način prevazilaženja ovakvog problema jeste uvođenje nove promenljive. U našem primeru ispostavlja se da su stanje urina i krvi, posledica hormonalnog stanja krave, a koje je uslovljeno time da li je krava trudna ili ne. Prema tome, možemo uvesti promenljivu koja reprezencuje hormonalni status, *Ho?*. Sada možemo izmeniti naš polazni model i to na sledeći način.




Slika 24:

Kako promenljiva *Ho?* nije ni informaciona ni promenljiva hipoteza nju nazivamo *posredujuća promenljiva*. Pri projektovanju Bajesovih mreža najčešće se koriste za razrešavanje situacija gde želimo da modelujemo (uslovnu) zavisnost među promenljivim. Primere takvih situacija, koje se često sreću, navodimo na **Slici 25.**




Slika 25:

### 5.1.4 Pojednostavljena poker igra

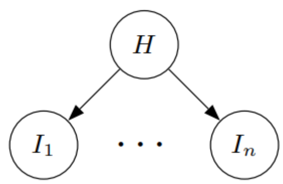
### 5.1.5 Naivni Bajesov model

Za razliku od gornjih modela, gde se modeluju specifične (ne)zavisnosti, a koji mogu postati prilično složeni, Naivni Bajesov model je prilično jednostavan i jasan. Posedujemo jednu promenljivu-hipotezu, koja ima kauzalan uticaj na set informacionih promenljivih, koje su međusobno nezavisne za datu promenljivu-hipotezu. Na **Slici 25.** je dat Naivni model Bajesove mreže. Pod pretpostvakom da su informacione promenljive uslovno nezavisne, račun verovatnoće se značajno pojednostavljuje. Sada ćemo izvršiti analizu matematičkog dela naivnog Bajesovog modela.

- Za datu promenljivu-hipotezu, neophodno je znati apriornu raspodelu verovatnoće, $P(H)$.
- Za svaku informacionu promenljivu neophodno je znati uslovnu raspodelu $P(I_i|H)$.
- Za bilo koji set merenja $f_1, ..., f_n$, koja odgovaraju varijablama $I_1, ..., I_n$, važi $P(f_1, ..., f_n|H) = \prod_{i=1}^{n} P(f_i|H)$. - Koristeći prethodnu jednakost, računamo aposteriornu verovatnoću po formuli:

$$P(H|f_1, ..., f_n) = \frac{1}{\mu} P(f_1, ..., f_n|H) = \frac{1}{\mu} \prod_{i=1}^{n} P(f_i|H)$$

, gde je vrednost $\mu = P(f_1, ..., f_n)$ konstanta normiranja.




Slika 26:

Kao što smo videli u primeru inseminacije, ukoliko je prisutna zavisnost među informacionim promenljivim, treba razmotriti validnost modela. Sa druge strane, praksa je pokazala da i u slučajevima zavinosti između informacionih-promenljivih, pri određenim primenama poput dijagnostičkih sistema, naivni Bajes može dati prilično dobre rezultate. Razlog tome je što nas u takvim sistemima zanima poredak verovatnoća, a ne konkretne vrednosti.

### 5.1.6 Kauzalnost

## 5.2 Određivanje uslovnih verovatnoća

Uslovne verovatnoće koje treba poznavati pri modelovanju Bajesovih mreža se nazivaju *parametri* mreže. Izvor za određivanje pomenutih parametara može da leži u frekvencijama iz pouzdane baze podataka ili čak da se zasniva na subjektivnim (ekspertskim) procenama. U nastavku poglavlja, kroz nekoliko primera, se bavimo ovim problemom.

### 5.2.1 Milk Test

U slučaju ovog problema, koji je bio razmatran u poglavlju **5.1.1**, prvenstveno je neophodno odrediti $P(Inficiranost?)$ i $P(Test|Inficiranost?)$. Proizvođač testa je dužan da uz test dostavi vrednosti verovatnoća da je test *lažno negativan* i *lažno pozitivan*, tj. $P(Test = poz \mid Inficiranost = ne)$ i $P(Test =$

$neg \mid Inficiranost = da$). Neka su u našem primeru obe vrednosti 0.01. Međutim i dalje ostaju nepoznate verovatnoće ispravnog rada testa, kao i apriori raspodela $P(Inficiranost?)$.

Želimo da estimiramo raspodelu $P(Inficiranost?)$. Pretpostavićemo da je neko vreme farmer slao mleko specijalizovanoj laboratoriji koja ima idealan test, kao i da farma ima 50 krava. Kao rezultat praćenja dobili smo da u proseku jednom mesečno imamo inficirano mleko. Dodatno, smatramo da sve krave imaju istu verovatnoću da daju inficirano mleko, kao i da su epidemije zaraze različitih krava nezavisne. Dakle želimo da estimiramo $\lambda$, gde važi $P(Inficiranost = da) = \lambda$. Specijalizovan test sprovodimo na uzorku od 50 krava, pa važi da je verovatnoća da mleko nije inficirano $(1-\lambda)^{50} = \frac{29}{30}$. Tada dobijamo da je:

$$\lambda = 1 - (\frac{29}{30})^{0.02} = 0.007$$

Preostale verovatnoće se sada lako računaju, pa možemo reći da smo ovim kompletirali naš model.

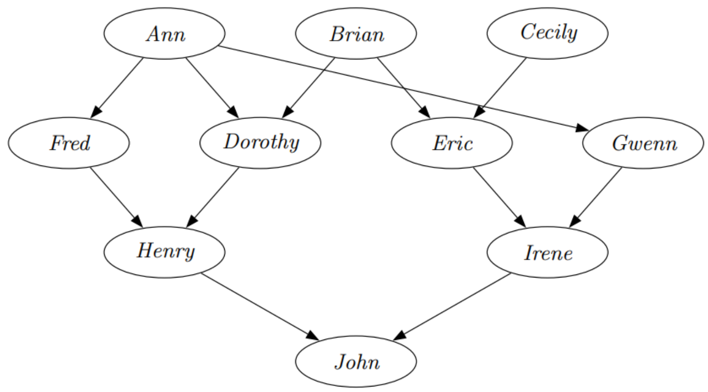
Ukoliko razmatramo sedmodnevni model koji poseduje memoriju jednog dana, sa **Slike 19**, neophodno je još poznavati raspodelu $P(Inf_{i+1} \mid Inf_i)$. Dva parametra koja trebamo estimirati su verovatnoća izlečenja i verovatnoća inficiranja. Ovde estimaciju vršimo na osnovu iskustva. Data raspodela je data tablicom.

Ako želimo da formiramo sedmodnevni model, koji poseduje memoriju dužine 2 dana za infekciju, neophodno je poznavati raspodelu $P(Inf_{i+1} \mid Inf_i,\ Inf_{i-1})$. Uz iskustvo i razumne pretpostakve možemo uspostaviti raspodelu kao sa tablice.

Za model koji uključuje i korektnost prethodnog testa, neophodno je znati $P(Inf_{i+1} \mid Inf_i,\ Inf_{i-1}, Test_i)$. Vidimo da ovde imamo raspodelu u kojoj figurišu 4 promenljive. Ako pretpostavimo da će tačan test sa verovatnoćnom 0.999 biti tačan opet i da će netačan test biti netačan sa verovatnoćom 0.90, moguće je popuniti tablicu u kojoj figurišu 4 promenljive. Međutim, modifikaciom modela i uvođenjem posredujuće promenljive, $Cor_i$, numerički proračuni su jednostavniji i tablice su manje. Izgled novog modela iznosimo na **Slici 27.**, a odgovarajuće raspodele su date u tablicama...

### 5.2.2 Genetska struktura

Posmtrajmo porodično stablo konja, sa **Slike 28.** Poznato je da je John rođen sa veoma opakom naslednom bolešću, koju prenosi recesivan gen. On je odmah premešten sa farme, a njegovi roditelji su uklonjeni iz uzgoja. Kako bi očuvali reprodukciju, cilj nam je da procenimo koje su šanse da preostali konji poseduju takav gen.
Jedina informaciona promenljiva u našoj mreži je John. Pre nego je uvedena informacija da je John bolestan, on je mogao imati jedan od naredna tri genotipa $AA$ - zdrav, $aA$ - nosilac i $aa$ - bolestan. Sve ostale promenljive u Bajesovoj mreži su promenljive-hipoteze. Na osnovu saznanja iz genetike utvrđena je sledeća raspodela.




Slika 27:

| | $aa$ | $aA$ | $AA$ |
|---|---|---|---|
| $aa$ | (1, 0, 0) | (0.5, 0.5, 0) | (0, 1, 0) |
| $aA$ | (0.5, 0.5, 0) | (0.25, 0.5, 0.25) | (0, 0.5, 0.5) |
| $AA$ | (0, 1, 0) | (0, 0.5, 0.5) | (0, 0, 1) |

Tablica 13: Raspodela $P(dete \mid majka,\ otac)$, uređena trojka $(x,\ y,\ z)$ odnosi se na verovatnoće deteta $(aa,\ aA,\ AA)$

Ono što sigurnamo znamo, jeste da John-ovi roditelji sigurno nisu bolesni. Imajući to u vidu, raspodelu za John-a dobijamo elimanicijom po promenljivoj $aa$, koja je data u tablici.

| | $aA$ | $aA$ |
|---|---|---|
| $aA$ | (0.25, 0.5, 0.25) | (0, 0.5, 0.5) |
| $AA$ | (0, 0.5, 0.5) | (0, 0, 1) |

Tablica 14: Raspodela $P(dete \mid majka,\ otac)$ za Johna-a

Takođe, stvar koju smo već istakli, jeste da promenljive koje su roditelj ne mogu biti bolesne. Prema tome, potrebno je modifikovati i njihovu raspodelu, eliminacijom $aa$ iz Tablice 14.

Primetimo da Fred-u i Gwenn nedostaje jedan roditelj. Uvodimo posredujuće promenljive $L$ i $K$, sa pretpostavkom da nisu bolesni. Ovim je model skoro gotov, međutim još uvek treba uneti apriorne raspodele, koje su neophodne. Ovu raspodelu ćemo estimirati teorijskim rezultatima genetike o učestanosti

| | $aA$ | $aA$ |
|---|---|---|
| $aA$ | (0.67, 0.33) | (0.5, 0.5) |
| $AA$ | (0.5, 0.5) | (0.5, 0.5) |

Tablica 15: Raspodela $P(dete \mid majka,\ otac)$ za roditeljske promenljive, uz uklonjeno $aa$

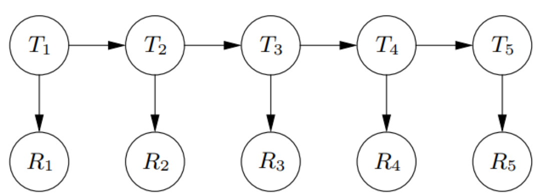
nosećih gena, $aA$. Rećemo da je apriorna raspodela data sa $(aA,\ AA) = (0.001,\ 0.999)$. Donje mreže prikazuju stanje Bajesove mreže sa određenim evidencijama. Ovde se otvara pitanje osetljivosti na apriornu raspodelu, o čemu će biti diskusije u nastavku rada.

#### 5.2.3 Pojednostavljena poker igra

#### 5.2.4 Prenos simbol - stringova

Dva simbola (**a, b**), formiraju osnov jezika $L$ i prenose se putem kanala veze. Svaka reč je okružena karakterom razdvajanja, $c$. Prilikom prenosa, zbog šuma, može doći do loše identifikacije simbola. Posmatramo slučaj prenosa reči dužine pet. Naš zadatak je da formiramo model koji će nam obezbediti verovatnoće da poslat simbol, odgovara primljenom.

Informacione promenljvie su $R_1, ...,\ R_5$, predstavljaju primljeni simbol, a mogu uzimati stanja $a$, $b$ i $c$. Imamo promenljive-hipoteze $T_1, ..., T_5$, simboli koje šaljemo, a mogu uzimati stanja $a$ i $b$. Kauzalan uticaj se može uspostaviti između $R_i$ i $T_i$. Osim toga i između $T_i$ i $T_{i+1}$, jer je moguća stvar da će određeni parovi simbola biti učestaliji. Sličan rezon se može dodatno proširiti na 3 i 4 simbola, ali u taj proračun nećemo ulaziti. Model je dat na slici.




Slika 28:

Na osnovu iskustva i dostpunih podataka, možemo definisati uslovnu verovatnuću $P(R_i \mid T_i)$ kao u tablici 16.
U svrhu računanja $P(T_i \mid T_{i+1})$ posmatraćemo frekvencije pojavljivanja sa tablice 17. Gde prvi red predstavlja zadnja 3 simbola, a prva kolona prva dva simbola.
Dodatno iznosimo apriornu raspodelu za $T_1$ (0.5, 0.5). Koristeći frekvencije iz

| | $T = a$ | $T = b$ |
|---|---|---|
| $R = a$ | 0.80 | 0.15 |
| $R = a$ | 0.10 | 0.8 |
| $R = c$ | 0.10 | 0.05 |

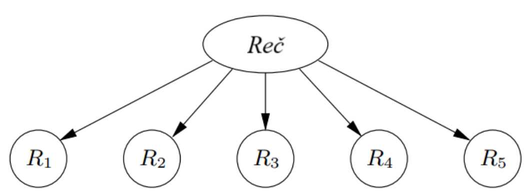
Tablica 16: $P(R \mid T)$

| | ***aaa*** | ***aab*** | ***aba*** | ***abb*** | ***baa*** | ***bab*** | ***bba*** | ***bbb*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***aa*** | 0.017 | 0.021 | 0.019 | 0.019 | 0.045 | 0.068 | 0.045 | 0.068 |
| ***ab*** | 0.033 | 0.040 | 0.037 | 0.038 | 0.011 | 0.016 | 0.010 | 0.015 |
| ***ba*** | 0.011 | 0.014 | 0.010 | 0.010 | 0.031 | 0.046 | 0.031 | 0.045 |
| ***bb*** | 0.050 | 0.060 | 0.056 | 0.057 | 0.016 | 0.023 | 0.015 | 0.023 |

Tablica 17: Frekvencije reči dužine 5 u jeziku $L$. Na primer frekvencija reči $bbaab$ je 0.060

tablice 17, marginalizaciju, apriornu raspodelu za $T_1$ i fundamentalno pravilo možemo dobiti sve ostale raspodele, $P(T_{i+1} \mid T_i)$, gde $i = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Alternativno, model je moguće modelovati kao na slici. Reč ima 32 stanja, a podatke iz tablice 17. ćemo koristiti kao apriornu raspodelu. Ovakav pristup je dobar ukoliko je naš jezik formiran na malom skupu simbola i ako posmatramo kraće reči. Nećemo reći i da je prvi pristup idealan. Naime, treba voditi računa da li je model sa slike previše uprošćen i da li može verodostojno reprezentovati zavisnosti iz tablice 17. Balans između ova dva pristupa diskutujemo u nekom od narednih poglavlja.




Slika 29:

#### 5.2.5 Prehlada ili Angina

Ovaj primer je karakterističan po tome što su iznete raspodele date prvenstveno na osnovu ličnog iskustva. Neophodno je estimirati raspodele $P(Prehlada?)$,

$P(Angina?)$, $P(Tackice\ na\ grlu? \mid Angina?)$, $P(Bol\ u\ grlu? \mid Angina?,\ Prehlada?)$, $P(Temperatura? \mid Prehlada?,\ Angina?)$. Prema tome koliko se puta probudimo sa anginom ili prehladom možemo napraviti estimaciju $P(Prehlada?) = (0.97, 0.03)$ i $P(Angina?) = (0.993, 0.005, 0.002)$. Raspodelu $P(Tackice\ na\ grlu? \mid Angina?)$, estimiramo iz činjenice da kada nemamo Anginu ili je ona slaba ne vidimo tačkice, ali i kada je jaka ne znači da ćemo ih videti. To je dato sa $P(Tackice\ na\ grlu? \mid Angina? = jaka) = (0.1, 0.9)$. Raspodelu $P(Temperatura? \mid Prehlada?,\ Angina?)$ treba potražiti od eksperta iz ove oblasti.

**Raspodela *P(Bol u grlu? | Angina?, Prehlada?)***

| | $Angina? = no$ | $Angina? = srednja$ | $Angina? = jaka$ |
|---|---|---|---|
| $Prehlada? = ne$ | 0.05 | 0.7 | 1 |
| $Prehlada? = da$ | 0.4 | 0.85 | 1 |

Tablica 18: $P(Bol\ u\ grlu? = da \mid Prehlada?,\ Angina?)$

Objasnimo kako smo došli do pojedinih vrednosti. Ukoliko ne bolujem od prehlade ili angine 0.05 je verovatnoća da imam bol u grlu iz nekog drugog razloga. Dakle ovde su pokriveni svi ostali mogući uzroci. Ukoliko nemam prehladu, a imam srednje jaku anginu, 0.7 je verovatnoća da ću imati bol u grlu. Kada je angina jaka sigurno je da ću imati bol u grlu. U slučaju prehlade i jake angine jasno je da je bol u grlu neminovan. Osim toga, u slučaju kada nemam anginu, a imam prehladu verovatnoća je 0.4 da imamo bol u grlu. Poslednju estimaciju, srednja angina i prehlada, je teže izvesti, zbog nedostatka iskustva. Možemo koristiti uslovne verovatnoće koje smo naveli iznad: od 100 dana, probudiću se pet dana sa nepoznatim razlogom bola u grlu. Od preostalih 95 dana, prehlada daje bol u grlu kod 0.4 njih, odnosno 38 dana. Od preostalih 57 dana, blaga angina će izazvati upalu grla 0.7 njih: 39,9 dana. Ukupno, ako imam i blagu anginu i prehladu, ja će imati upalu grla u 82,9 jutra od 100. Broj 82,9 označava nepreciznost procene, a iz psiholoških razloga postavljamo verovatnoću na 0,85. Ovakav postupak formulizujemo u glavi *noisy - or*.

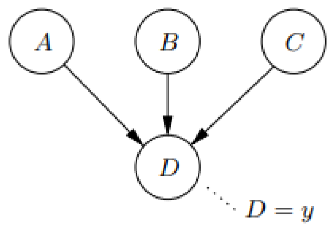
### 5.2.6 Zašto kauzalne mreže?

## 5.3 Metode modelovanja

### 5.3.1 Neusmerene relacije

Česta pojava je da pri modelovanju Bajesovih mreža treba uvesti određen oblik zavisnosti između promenljivih $A$, $B$ i $C$. Zavisnost, vrlo često, modelujemo unošenjem odgovarajućih grana u mrežu. Nekada je teško, ili nemoguće, odrediti smer tih grana, a sa druge strane može se desiti da sama struktura modela ne podržava vezu u smislu nastanka ciklusa. Ovakav problem može biti prevaziđen primenom strukture, koja odgovara konvergirajućoj vezi.

Neka $R(A,\ B,\ C)$ opisuje vezu, koristeći 0 i 1, i to tako da važi $R(A,\ B,\ C) = 1$, za sve validne konfiguracije $A,\ B, C$. Uvedimo promenljivu $D$, sa stanjima $\{y,\ n\}$, tako da su $A,\ B$ i $C$ njeni roditelji, kao na slici. Promenljivoj $D$ dodeljujemo determinističke uslovne verovatnoće $P(D = y \mid A,\ B,\ C) = R(A,\ B,\ C)$ i $P(D = n \mid A,\ B,\ C) = 1 - R(A,\ B,\ C)$.
U ovakvoj strukturi Bajesove mreže, promenljivu $C$ nazivamo *promenljivom ograničenja*. Dodeljivanjem vrednosti $y$ promenljivoj $D$ forsiramo uspostavljanje relacije ograničenja.



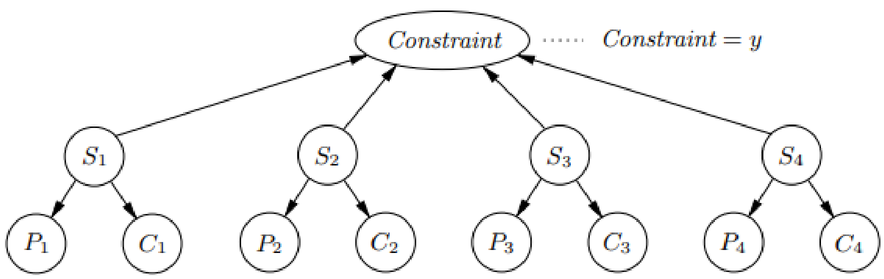

Slika 30:

**Primer:** Ukoliko želimo da modelujemo da su $A,\ B$ i $C$ uvek u istom stanju, tada možemo uvesti promenljivu D, kao što je ranije objašnjeno, i dodeliti joj uslovnu raspodelu kao u tablici 19. Vredi prokomentarisati da je jasno prisutna zavisnost $A,\ B$, i $C$, ali da je ne možemo ostvariti uvođenjem, samo grana.

| | $C = y$ | | $C = n$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $B = y$ | $B = n$ | $B = y$ | $B = n$ |
| $A = y$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $A = n$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

Tablica 19: Uslovna verovatnoća $P(D = y \mid A,\ B,\ C) = R(A,\ B,\ C)$ za promenljivu ograničenja $D$ modeluje da su $A,\ B$ i $C$ u istom stanju

**Primer:** Ilustrovaćemo klasifikatorski model. Nakon nepropisnog korišćenja mašine za veš, neophodno je upariti dva para čarapa, koja je sada teže razlikovati. Za klasifikaciju koristimo oblik i boju. Promenljive $S_i$ imaju dva stanja $t_1$ i $t_2$, za dva tipa čarapa. Promenljiva $C_i$, kao stanja ima dve vrste boja i promenljive $P_i$ sadrže stanja koja odgovaraju obliku čarapa.




Slika 31:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ |
| $S_2$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_2$ |
| $S_3$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_2$ |
| $S_4$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_1$ | $t_2$ |
| $P$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tablica 20: $P = P(Constraint = y \mid S1,\ S2,\ S3,\ S4) = R(\ S1,\ S2,\ S3,\ S4)$, $t1$ i $t2$ su dva stanja promenljivih $S1,\ S2,\ S3,\ S4$

Problematika se dalje razrađuje u okviru oblasti *lančanih grafova*, o čemu neće biti reči u ovom radu.

### 5.3.2 Noisy - or

Kada je data promenljiva $A$, koja poseduje više roditelja, neophodno je specifirati $P(A \mid \mathbf{c})$, za svaku konfiguraciju roditeljskih promenljivih $\mathbf{c}$. Često takva specifikacija roditeljskih promenljivih može biti veoma neočekivana čak i za eksperte iz tih oblasti. Osim toga, ukoliko uzimamo informacije iz baze podataka, zbog specifičnosti konfiguracije, broj slučaja može biti mali. Sa druge strane, neke veličine možemo sasvim dobro estimirati (bilo ekspert, bilo na osnovu baze podataka), ali nam one nisu direktno potrebne. Na primer, imamo vrlo dobre estimacije $P(A \mid B)$ i $P(A \mid C)$, ali nam je potrebno $P(A \mid B,\ C)$. Pored toga, često je korisno uvesti razumne pretpostavke koje redukuju broj raspodela koje treba poznavati.

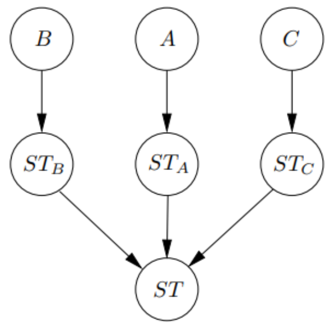
Vratimo se na primer **Prehlada ili angina?**. Treba estimirati $P(Bol\ u\ grlu? \mid Prehlada?,\ Angina?)$. Poznajemo $P(Bol\ u\ grlu? \mid Prehlada?)$ i $P(Bol\ u\ grlu? \mid Angina?)$ i pitamo se da li postuji postupak kojim možemo dovoljno dobro estimirati nepoznatu raspodelu, kombinujući dve poznate.
Poznato je da važe sledeći iskazi:
- „nepoznati uzrok“, koji u 0.05 slučaja izaziva bol u grlu
- prehlada, koja izaziva bol u grlu sa verovatnoćom 0.4
- angina, koja kada je blaga izaziva bol u grlu sa verovatnoćom 0.7, a kada je ozbiljna sigurno izaziva bol u grlu.

To se može interpretirati na sledeći način. Ako imam *blagu anginu*, tada ću imati bol u grlu, osim ako ga neki spoljašnji faktori ne spreči, verovatnoća takvog spoljašnjeg uticaja je 0.3. Ako imam *prehladu*, u tom slučaju, neki inhibitor može sprečiti bol u grlu sa verovatnoćom 0.6. Takođe, nepoznati uzrok bola u grlu biće potisnut u 0.95 slučaja. Pod pretpostvakom da su faktori suzbijanja nezavisni dobijamo raspodelu kao u tablici 21.

| | $Angina? = no$ | $Angina? = srednja$ | $Angina? = jaka$ |
|---|---|---|---|
| $Prehlada? = ne$ | 0.05 | $1 - 0.95 \cdot 0.3$ | 1 |
| $Prehlada? = da$ | $1 - 0.95 \cdot 0.6$ | $1 - 0.95 \cdot 0.3 \cdot 0.6$ | 1 |

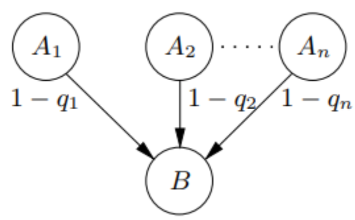
Tablica 21: $P(Bol\ u\ grlu? = da \mid Prehlada?,\ Angina?)$, primetimo da se estimacija ovakvim pristupom razlikuje od one sa tablice 18.

Drugi način da se reprezentuje gornji proračun je da se polazni model mreže izmeni. Posmatrajmo model sa slike 32. Uveli smo posredujuće promenljive $ST_A$, $ST_B$ i $ST_C$, tako da $ST_A$ oslikava uticaj Angine na Bol u grlu, $ST_C$ uticaj prehlade na bol u grlu i slično $ST_B$ je posredujaća promenljiva između ostalih uzroka i bola u grlu. Treba napomenuti da ovakva struktura ima za glavni cilj da gornju pretpostavku nezavisnosti nekih veličina prenese direktno na model mreže. Osim toga, promenljive $ST_A$, $ST_B$ i $ST_C$ predstavljaju i inhibitore. Dakle, pretpostavka o tome da su inhibitori nezavisni se na ovaj način može postići u modelu mreže. Iz gornje tablice možemo dobiti uslovne verovatnoće $P(ST_B \mid B)$, $P(ST_A \mid A)$ i $P(ST_C \mid C)$, dok uslovna raspodela $ST$




Slika 32:

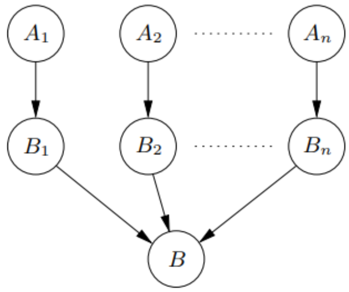
odgovara zakonu logikog ili. Marginalizacijom ovakve raspodele po $ST_A$, $ST_B$ i $ST_C$ dobijamo gornju tablicu. Sada ćemo da iznesemo nešto generalniji oblik




Slika 33:

ovakvog postupka. Neka su date binarne promenljive $A_1, ..., A_n$ koje iscrpljuju sve uzroke stanja promenljive $B$, pogledati sliku 33. Svaki događaj $A_i = y$ uzrokuje $B = y$, osim ako ga inhibitor ne sprečava u tome sa verovatnoćom $q_i$ tj. $P(B = n \mid A_i = y) = qi$. Pod pretpostavkom da su svi inhibitori nezavisni, imamo da važi $P(B = n \mid A_1,\ A_2, ..., A_n) = \prod_{j \in Y} q_j$, gde je $Y$ skup indeksa promenljivih u stanju $y$.
Na primer $P(B = y \mid A_1 = y,\ A_2 = y,\ A_3 = ... = A_n = n) = 1 - q_1 q_2$. Mada ovakav proračun možemo izbeći pomoću modela sa slike 34, što smo već videli ranije. Ukoliko se odlučimo da naš problem modelujemo na ovakav način, treba biti oprezan, jer postoje određena ograničena, poput toga da zahtevamo da važi $P(B = y \mid A_1 = \ = A_n = n) = 0$.

Osim toga, *noisy - max* je naziv za model u kom promenljive nisu binarne, dok *noisy - and* predstavlja komplementaran pristup, gde uzročne promenljive zajedno doprinose posmatranom događaju.




Slika 34:

### 5.3.3 Razvođenje