Elektrotehnički fakultet u Beogradu

Domaći

Domaći 1 - SSE

Student:
Rastko Lazarević
2022/0247

Profesor:
prof. dr Predrag Tadić
prof. dr Sanja Vujinović

Decembar 2024. god

1 Zadatak

Sistem sa slike modelira prenos informacija primenom optičkih tehonologija. Pri projektovanju komunikacionih sistema, ono na šta uvek obraćamo pažnju jeste mogući gubitak informacija kroz kanal veze, bilo to zbog šuma ili nekih drugih smetnji. Dakle, već to uvodi stohastičku prirodu u naš sistem. Međutim, u ovom slučaju smatramo da imamo idealan prenos informacija od Lasera do Fotodetektora.

Fotodetetktor je deo sistema čiju stohastičku prirodu razmatramo. Preciznije odziv tj. emisiju elektrona u Detektoru na pobudu svetlosnim impulsima.

1.1 Matematički opis

U našem slučaju razmatramo detekciju jedinice u optičkom komunikacionom sistemu.

Elementarni ishodi predstavljaju broj detektovanih elektrona. Kako razmatramo detekciju jedinice, možemo definisati elementarni ishod kao $\omega_k \;-\; k$ detektovanih elektrona, gde $k \in \{12, ..., 18\}$. Sa Ω označavamo skup svih elementarnih ishoda.

Prilikom detekcije jedinice, eksperiment možemo matematički opisati uvođenjem funkcije verovatnoće, tako za dati skup elementarnih ishoda važi:

$$P(\omega_k) = \begin{cases} A \cdot 0.6^{|k-16|} & , k \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

Slučajna promenljiva X - *broj detektovanih elektrona*. Diskretna slučajna promenljiva, sa konačno mnogo vrednosti. Slika skup elementarnih ishoda Ω u $\mathbb{R}$, tako da važi pravilo $\omega_k \mapsto k$. Precizniji matematički je dat pomoću funkcije raspodele verovatnoće

$$P(X = k) = \begin{cases} A \cdot 0.6^{|k-16|} & , k \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

gde je k broj detektovanih elektrona.

Analitički možemo odrediti nepoznati parametar A iz uslova normiranosti $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ imamo $A = \frac{1}{\sum_{k=12}^{18} 0.6^{|k-16|}} = 0.298$.

Funkciju raspodele $F_X(k)$ računamo po definiciji $F_X(k) = P(X \leq k)$ i ona je data sa:
1) $k < 12,\ F_X(k) = 0,$
2) $12 \leq k < 13,\ F_X(k) = 0.0644$
3) $13 \leq k < 14,\ F_X(k) = 0.1718$
4) $14 \leq k < 15,\ F_X(k) = 0.3508$
5) $15 \leq k < 16,\ F_X(k) = 0.6492$
6) $16 \leq k < 17,\ F_X(k) = 0.8282$
6) $17 \leq k < 18,\ F_X(k) = 0.9356$
7) $18 \leq k,\ F_X(k) = 1$

Funkcija mase verovatnoće je data kao: $p_X(k) = \sum_{l=12}^{18} P(X = l) \cdot \delta(l - k)$
$p_X(k) = 0.0644 \cdot \delta(k - 12) + 0.1074 \cdot \delta(k - 13) + 0.10790 \cdot \delta(k - 14) + 0.2983 \cdot \delta(k - 15) + 0.1790 \cdot \delta(k - 16) + 0.1074 \cdot \delta(k - 17) + 0.0644 \cdot \delta(k - 18)$
Računamo matematičko očekivanje slučajne promenljive X kao

$$E\{X\} = \sum_k P(X = k) \cdot k = \sum_{k=12}^{18} P(X = k) \cdot k$$

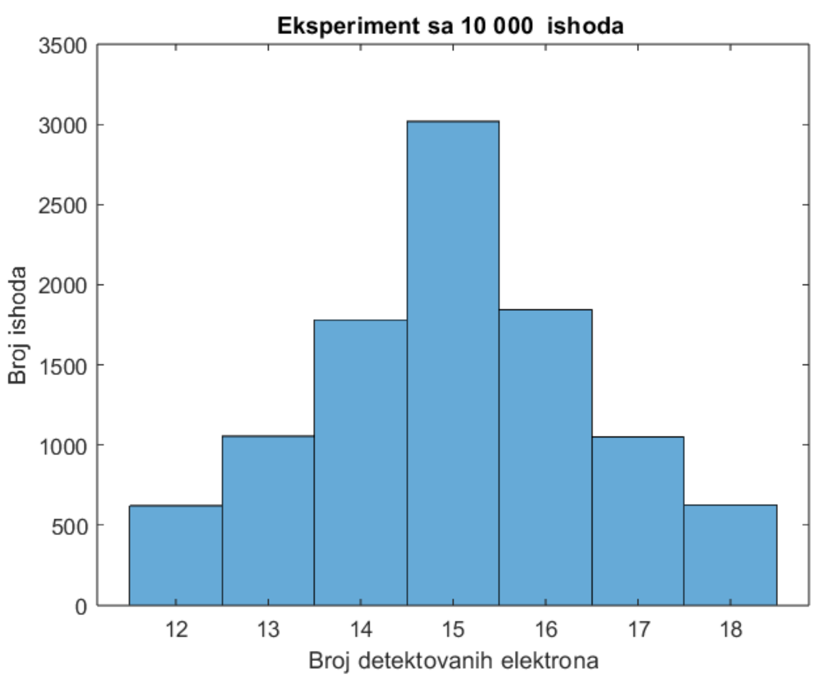
Tada $E\{X\} = 15.00$.
Računamo varijansu slučajne promenljive X kao

$$\mathrm{Var}\{X\} = \sigma^2 = E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

Imamo $E\{X\}^2 = 225$ i dobijamo
$E\{X^2\} = \sum_k P(X = k) \cdot k^2 = \sum_{k=12}^{18} P(X = k) \cdot k^2 = 227.3771$, pa je tada $\mathrm{Var}\{X\} = \sigma^2 = 2.3771$

1.2 Simulacija eksperimenta

Dajemo histogram simulacije i kod koji smo koristili.



Slika 1: Eksperiment sa 10000 ishoda

```
%% Simulacija eksperimenta - detekcija jedinice
N=1e4;
rand_vec=rand(N,1);
out=zeros(N,1);

for i=1:N
    tmp=rand_vec(i);
    if tmp<0.0644
        out(i,1)=12;
    elseif tmp<0.1718
         out(i,1)=13;
    elseif tmp<0.3508
            out(i,1)=14;
    elseif tmp<0.6492
            out(i,1)=15;
    elseif tmp<0.8282
            out(i,1)=16;
    elseif tmp<0.9356
            out(i,1)=17;
    else
        out(i,1)=18;
    end
end

figure(1)
histogram(out)
title("Eksperiment sa 10 000  ishoda ")
xlabel("Broj detektovanih elektrona")
ylabel("Broj ishoda")
```

Slika 2: Kod za eksperiment

1.3 Procena FMV i FRV

Broj povoljnih ishoda čitamo pomoću histograma. Ukupan broj ishoda je $N = 10000$

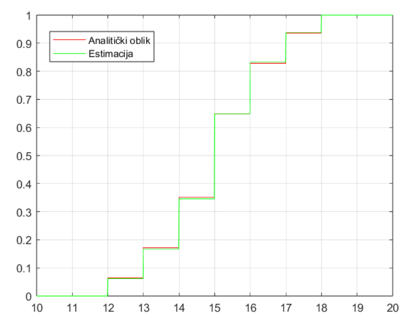
k	12	13	14	15	16	17	18
broj ishoda	622	1055	1782	3018	1844	1051	628
$\hat{p}_X(k)$	0.0622	0.1055	0.1782	0.3018	0.1844	0.1051	0.0628

Tabela 1: Procena mase verovatnoće

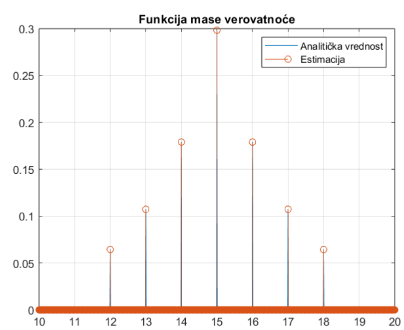
A jasno je da u ostalim tačkama $\hat{p}_X(k) = 0$.
Sada estimiramo funkciju raspodele verovatnoće.
1) $k < 12,\ F_X(k) = 0,$
2) $12 \leq k < 13,\ F_X(k) = 0.0622$
3) $13 \leq k < 14,\ F_X(k) = 0.1677$

4) $14 \leq k < 15,\ F_X(k) = 0.3459$
5) $15 \leq k < 16,\ F_X(k) = 0.6477$
6) $16 \leq k < 17,\ F_X(k) = 0.8321$
6) $17 \leq k < 18,\ F_X(k) = 0.9372$
7) $18 \leq k,\ F_X(k) = 1$

Sada ćemo grafički predstaviti funkciju mase i raspodele verovatnoće i njihove procene.



Slika 3: Funkcija raspodele verovarnoće



Slika 4: Funkcija mase verovarnoće

```
%% fmv
u=zeros(size(k));
u(k==12)=0.0644;
u(k==13)=0.1074;
u(k==14)=0.1790;
u(k==15)=0.2983;
u(k==16)=0.1790;
u(k==17)=0.1074;
u(k==18)=0.0644;
figure(2);
plot(k,u);grid("on");hold("on");

ue=zeros(size(k));
ue(k==12)=0.0622;
ue(k==13)=0.1055;
ue(k==14)=0.1782;
ue(k==15)=0.3018;
ue(k==16)=0.1844;
ue(k==17)=0.1051;
ue(k==18)=0.0628;
stem(k,u);grid("on");hold("on");
title("Funkcija mase verovatnoće");
legend("Analitička vrednost","Estimacija")
```

Slika 5: Funkcija mase verovarnoće

```
%% Grafički prikazi
k=10:0.01:20;
y=zeros(size(k));
ye=zeros(size(k));

y(k<12)=0;
y(k>=12 & k<13)=0.0644;
y(k>=13 & k<14)=0.1718;
y(k>=14 & k<15)=0.3508;
y(k>=15 & k<16)=0.6492;
y(k>=16 & k<17)=0.8282;
y(k>=17 & k<18)=0.9356;
y(18<=k)=1;
figure(1)
plot(k,y,'r')
grid("on");hold("on")
ye(k<12)=0;
ye(k>=12 & k<13)=0.0622;
ye(k>=13 & k<14)=0.1677;
ye(k>=14 & k<15)=0.3459;
ye(k>=15 & k<16)=0.6477;
ye(k>=16 & k<17)=0.8321;
ye(k>=17 & k<18)=0.9372;
ye(18<=k)=1;

plot(k,ye,'g');hold("on");
legend("Analitički oblik","Estimacija");
```

Slika 6: Funkcija verovarnoće
raspodele

1.4 Očekivanje i varijansa

Dobijamo procene $\hat{\sigma} = 2.3302$ i $\hat{m} = 15.0072$.

```
%% Estimacija ocekivanja i varijanse
|
mx=sum(out)/N
sigmax=sum((out-mx).^2)/(N-1)
```

Slika 7: Procena očekivanja i varijanse

	Očekivanje	Varijansa
Prava vrednost	15	2.3771
Procena	15.0072	2.3302

Tabela 2: Prikaz prave vrednosti i procene

2 Zadatak

Data je funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} a & , -5 \leq y < 0 \\ \frac{a}{2} & , 0 \leq y < 3 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

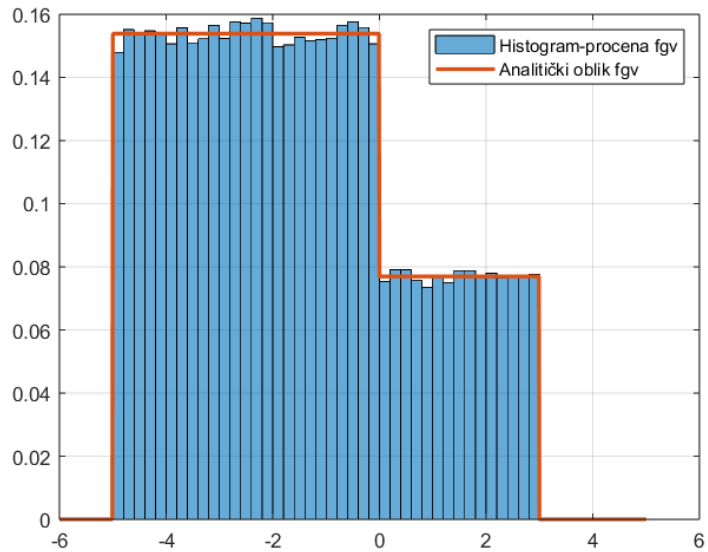
Iz uslova normiranosti $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = 1$ nalazimo a. Važi $5a + \frac{3}{2}a = 1$ pa je $a = \frac{2}{13}$.
Odredimo funkciju raspodele verovatnoće.Važi $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$
pa imamo

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < -5 \\ \frac{2}{13}y \ + \frac{10}{13} & , -5 \leq y < 0 \\ \frac{10}{13} + \frac{1}{13}y & , 0 \leq y < 3 \\ 1 & , 3 \leq y \end{cases}$$

Na osnovu teoreme imamo da je $Y = g(X)$, gde $X -$ unif $[0,\ 1]$, dato sa $g(X) = F_Y^{-1}(X)$. Odnosno

$$g(x) = \begin{cases} \frac{13}{2}x - 5 & , 0 \leq x < \frac{10}{13} \\ 13x - 10 & , \frac{10}{13} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Normalizovan histogram i funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive Y.ž



Slika 8: Funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive Y

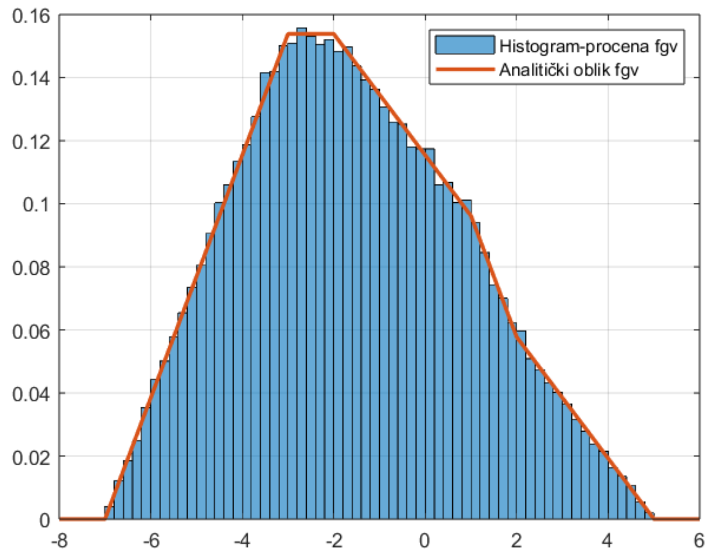
Data je promenljiva Z – Unif $[-2,\ 2]$. Treba odrediti fgv slučajne promenljive $W = Y + Z$.
Fgv slučajne promenljive Z je data sa

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ,\ -2 \leq z < 2 \\ 0 & ,\ \text{inače} \end{cases}$$

Na osnovu teorijskih rezultata i zbog činjenice da su Y i Z nezavisne (lako se vidi iz njihovih fgv), $f_W(w) = f_Z(w) * f_Y(w)$. Tada:

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & ,\ w \leq -7 \\ \frac{1}{26}(w+7) & ,\ 7 < w \leq -3 \\ \frac{2}{13} & ,\ -3 < w \leq -2 \\ \frac{1}{52}(6-w) & ,\ -2 < w \leq 1 \\ \frac{1}{52}(7-2w) & ,\ 1 < w \leq 2 \\ \frac{1}{52}(5-w) & ,\ 2 < w \leq 5 \\ 0 & ,\ 5 < w \end{cases}$$

Dalje možemo uporediti analitički oblik funkcije i procenu pomoću normalizovanog histograma.



Slika 9: Funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive $W = Y + Z$

Kod za dobijene ilustracije se nalazi ispod.

```
%% ZADATAK 2 %%
clc
clear all
N=1e5;

t=-8:0.01:6;
fy=zeros(size(t));
fy(t>=-5 & t<0)=2/13;
fy(t>=0 & t<3)=1/13;

X=rand(N,1);

Y(X>=0 & X<10/13)=13/2*X(X>=0 & X<10/13)-5;
Y(X>=10/13 & X<=1)=13*X(X>=10/13 & X<=1)-10;

figure(1);
histogram(Y,'Normalization', 'pdf');grid("on");hold("on")
plot(t,fy, 'LineWidth', 2);hold("on");grid("on")
legend("Histogram-procena fgv","Analitički oblik fgv")
```

Slika 10: Kod za fgv Y

```
fz=zeros(size(t));
fz(t>=-2 & t<=2)=1/4;

Z=-2+rand(N,1)*4;

fw=zeros(size(t));
fw(-7<t & t<=-3)=(t(-7<t & t<=-3)+7)/26;
fw(-3<t & t<=-2)=2/13;
fw(-2<t & t<=1)=(6-t(-2<t & t<=1))/52;
fw(1<t & t<=2)=(7-2*t(1<t & t<=2))/52;
fw(2<t & t<=5)=(5-t(2<t & t<=5))/52;

W=Y'+Z;
figure(2)
histogram(W,'Normalization', 'pdf');hold on;grid on;

plot(t,fw,'LineWidth',2);hold on;
legend("Histogram-procena fgv","Analitički oblik fgv")
```

Slika 11: Kod za fgv $W = Y + Z$

3 Zadatak

Imamo dat slučajan vektor $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{I})$. Ukoliko izvršimo linearnu transformaciju $\mathbf{Y}{=}\mathbf{A}_y\mathbf{X}$, tada je kovariaciona matrica $\mathbf{R}_y = E\{(\mathbf{Y}-E\ \mathbf{Y})(\mathbf{Y}-E\ \mathbf{Y})^T\}$. Kako važi $E\mathbf{Y} = E\{\mathbf{A}_y\mathbf{X}\} = \mathbf{A}_y E\mathbf{X} = 0$, onda imamo $\mathbf{R}_y = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\} = E\{\mathbf{A}_y\mathbf{X}(\mathbf{A}_y\mathbf{X})^T\} = E\{\mathbf{A}_y\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{A}_y^T\} = \mathbf{A}_y\mathbf{A}_y^T$, jer $\mathbf{R}_X = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\} = \mathbf{I}$.
Istim postupkom $\mathbf{R}_z = \mathbf{A}_z\mathbf{A}_z^T$.
Sada ćemo da odredimo nepoznate elemente matrice $\mathbf{R}_y$.Važi jednakost:

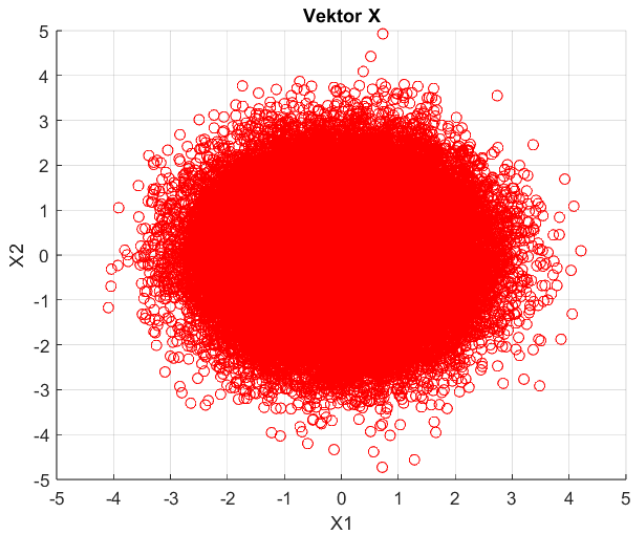
$$\mathbf{A}_y\mathbf{A}_y^T = \begin{bmatrix} a_{11,\ y}^2 + a_{12}^2 & a_{11,\ y}\, a_{21,\ y} \\ a_{21,\ y}\, a_{11,\ y} & a_{21,\ y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Odakle dobijamo $a_{21,\ y} = \sqrt{3},\ a_{11,\ y} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ a_{12,\ y} = \sqrt{\frac{5}{3}}$. Na vrlo sličan način dobijamo $a_{12,\ z} = \sqrt{2},\ a_{22,\ z} = \frac{-2.2}{\sqrt{2}},\ a_{12,\ z} = \sqrt{3 - \frac{2.2^2}{3}}$.
Dalje računamo: $\rho(X_1,\ X_2) = 0$, $\rho(Y_1,\ Y_2) = \frac{Cov(Y_1,\ Y_2)}{\sqrt{(var(Y_1)var(Y_2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$,
$\rho(Z_1,\ Z_2) = \frac{Cov(Z_1,\ Z_2)}{\sqrt{(var(Z_1)var(Z_2}} = \frac{-2.2}{\sqrt{6}}$
Matrice:

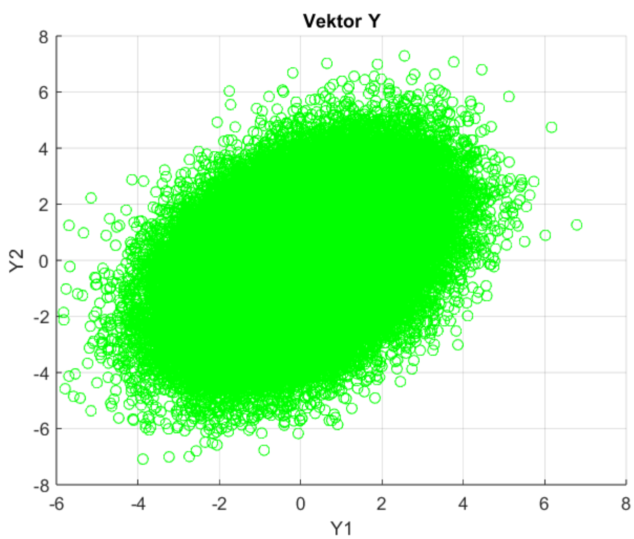
$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 0.5774 & 1.291 \\ 1.7321 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1.4142 \\ 0.7616 & -1.5556 \end{bmatrix}$$

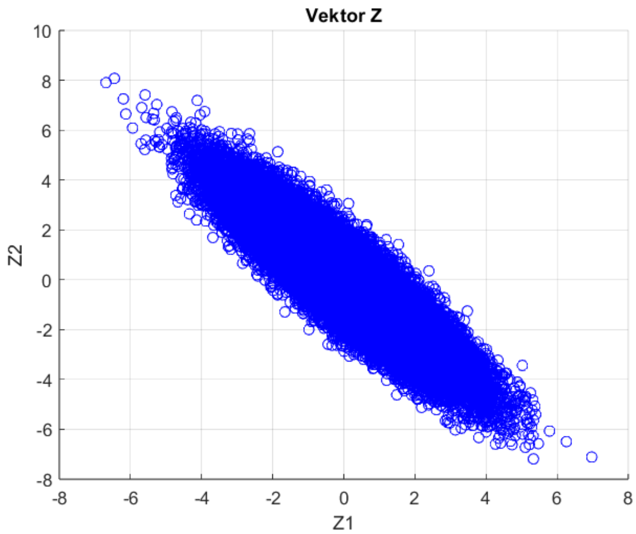
Traženi grafici:



Slika 12: Slučajan vektor X



Slika 13: Slučajan vektor Y



Slika 14: Slučajan vektor Z

Kod za treći zadatak:

```
%% zadatak 3
clc;
clear all;
N=1e5;
X_1=randn(1,N);
X_2=randn(1,N);
X=[X_1;X_2];

Ay=[1/sqrt(3) sqrt(5/3);sqrt(3) 0];
Az=[0 sqrt(2);sqrt(3-2.2*2.2/2) -2.2/sqrt(2)]

Y=Ay*X;
Z=Az*X;


figure(1)
scatter(X_1,X_2,'red'); hold on; grid on;xlabel("X1");ylabel("X2")
title("Vektor X")
figure(2)
scatter(Y(1,:),Y(2,:),'green'); hold on; grid on;xlabel("Y1");ylabel("Y2")
title("Vektor Y")
figure(3);
scatter(Z(1,:),Z(2,:),'blue'); hold on; grid on;xlabel("Z1");ylabel("Z2")
```

Slika 15: Kod za treci zadatak