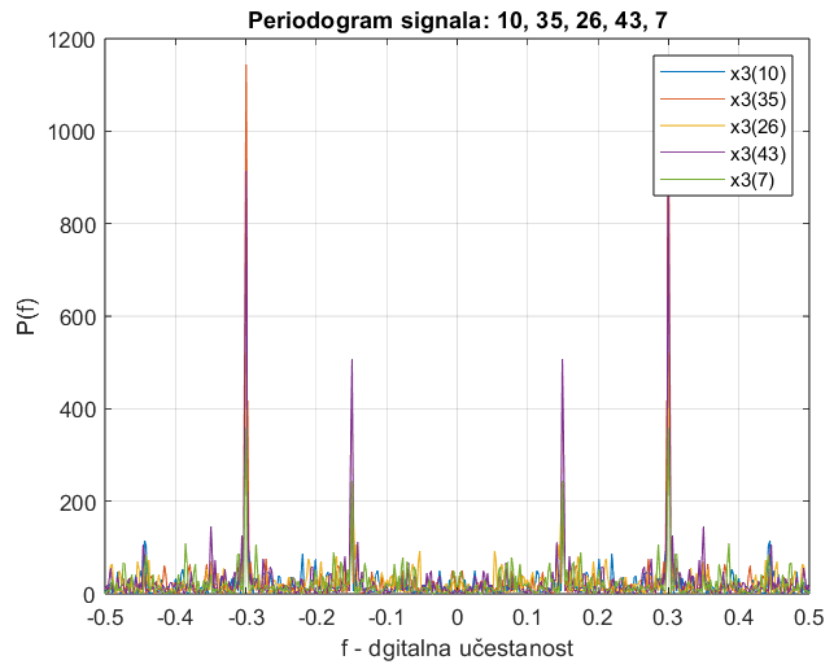


Spektralna analiza signala - **Domaći**

Student: Rastko Lazarević 2022/0247

Avgust 2025

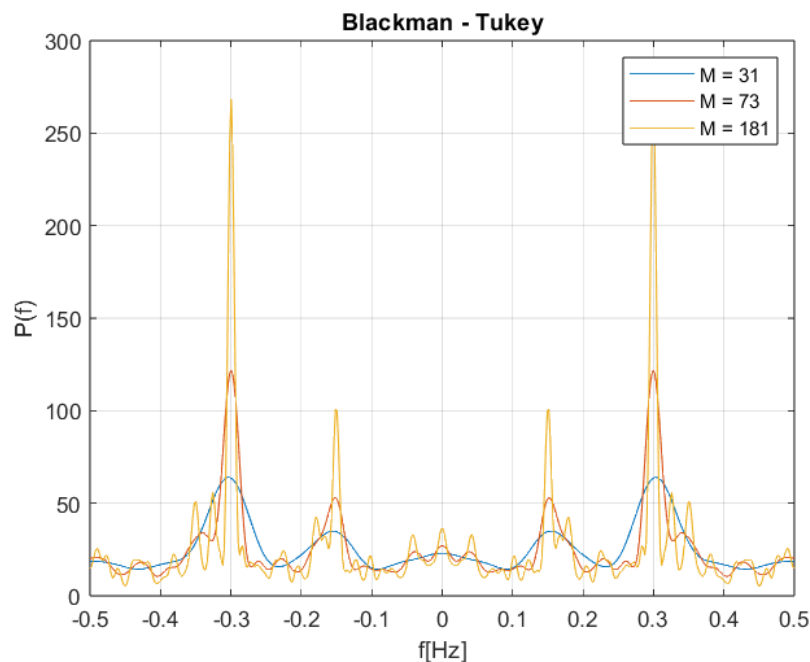
2 Tačka



Slika 1: Periodogram slučajno odabranih sekvenci

Kao što se može primetiti, bitne karakteristike našeg signala su sinusoide na digitalnim učestanostima $f_1 = 0.15$ i $f_2 = 0.30$. U ostatku spektra ne postoje posebne pravilnosti, pa bi se to moglo pripisati šumu.

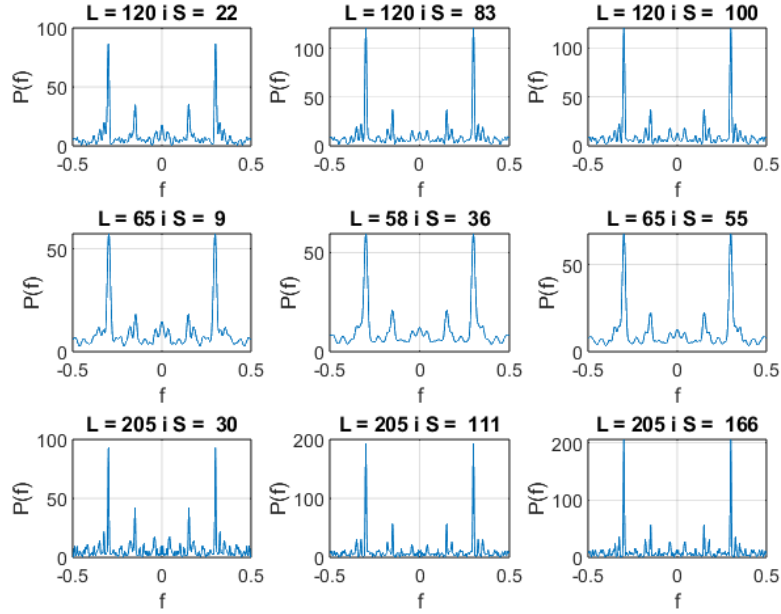
3 Tačka



Slika 2: Blackman - Tukey: $M = 18$ premalo, $M = 73$ optimalno i $M = 181$ preveliko

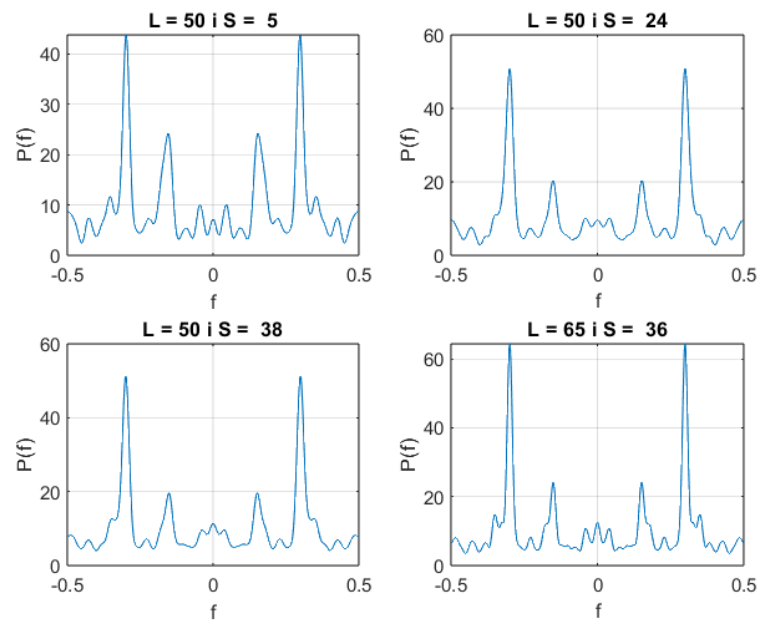
Na osnovu rezultata eksperimenta u Matlab-u dobijamo gornji rezultat. Primećimo da je za premalo M frekvencijska rezolucija prilično loša, tj. "razmazana". U slučaju velikog M , vidimo da dolazi do pojave drugih pikova, "oscilacija". Iako su manji, mogu narušiti informativnost prikaza i dobijenih vrednosti pri analizi. Osim tog vizuelnog momenta, varijansa estimacije raste ukoliko M raste. Za optimalno M imamo dobru kombinaciju rezolucije i čuvanja informacije tj. varijanse.

4 Tačka



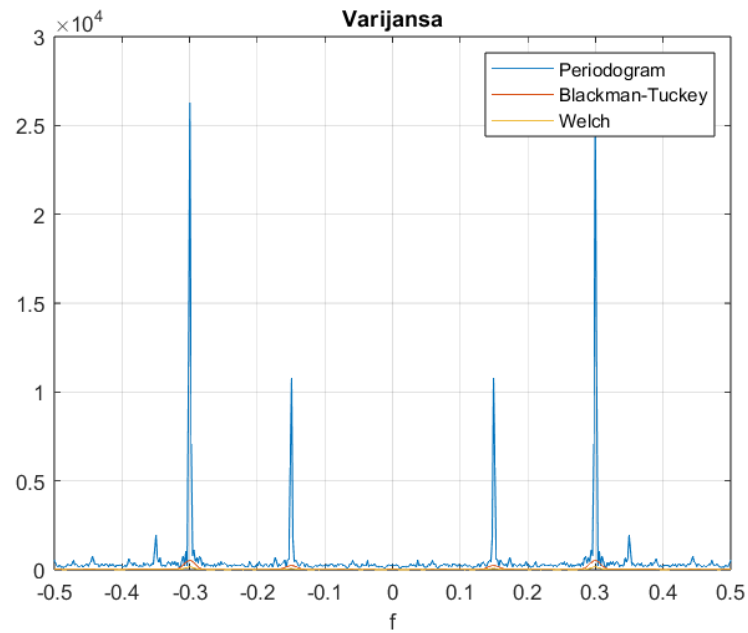
Slika 3: Welch metoda - odabir parametara L i S

Ovde posmatramo različite dužine prozorskih sekvenci i preklapanja među njima. Pratimo trend promene i biramo najbolju opciju u vizuelnom smislu. Osim toga, iz teorije znamo da ukoliko je L kraće, imamo više podsekvenci pa je efekat usrednjavanja veći. Ako L smanjujemo gubi se informaciju o glavnim komponentama, vidimo da se rezolucija smanjuje. Ako se broj tačaka u kojima se preklapaju podsekvence poveća, one postoju korelisanije pa varijansa estimacije raste, međutim usrednjavanje je izraženije.



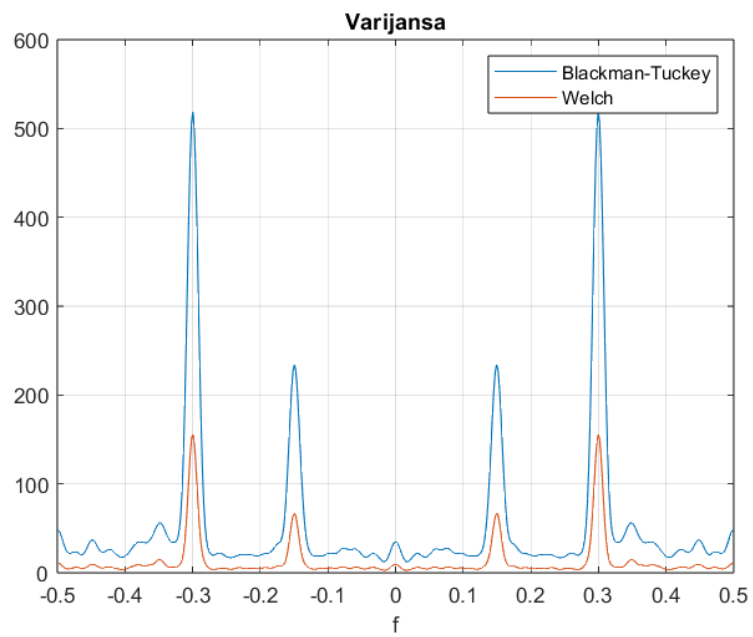
Slika 4: Welch metoda - dodatna analiza

5 Tačka



Slika 5: Poređenje varijansi

Primećujemo da periodogram ima mnogo veću varijansu nego BT i Welch. Ovakav rezultat je teorijski opravdan, jer su BT i Welch estimatori SGS, koji imaju cilj smanjenje varijanse u odnosu na periodogram.



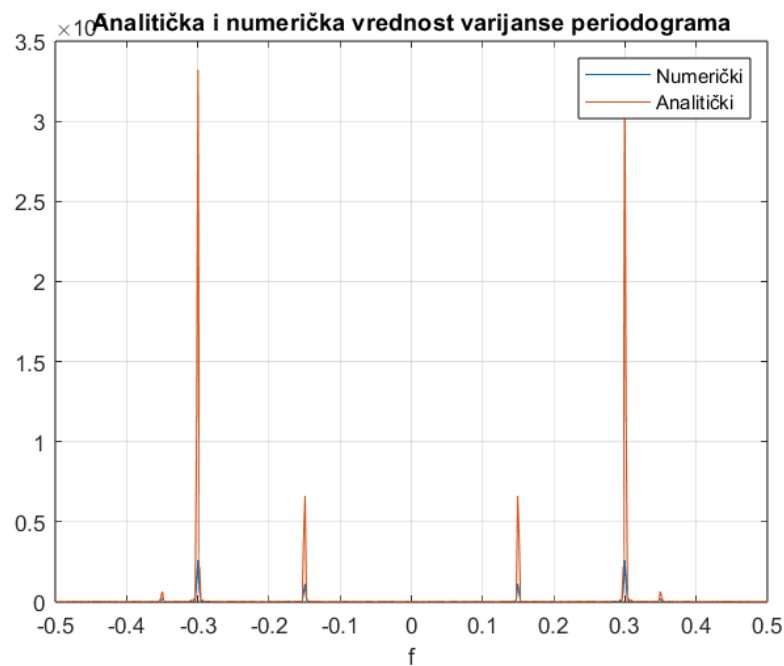
Slika 6: Poređenje varijansi samo BT i Welch

Medijana periodogram: 259,98

Medijana BT: 24.86

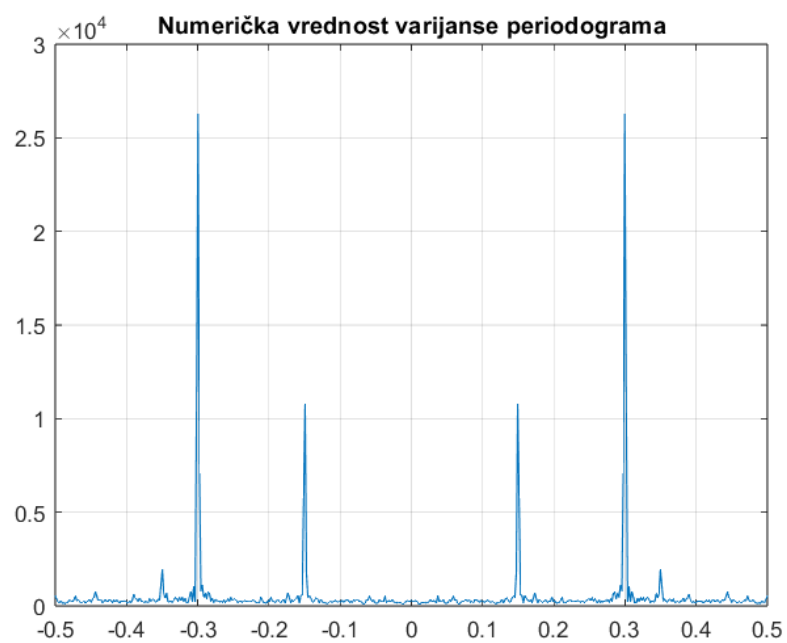
Medijana Welch: 5.915

6 Tačka



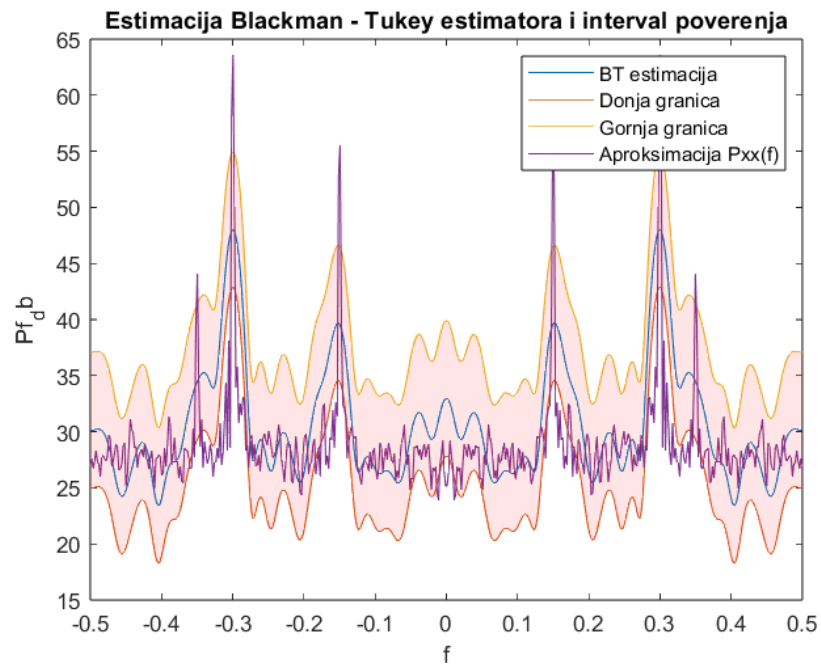
Slika 7: Poređenje analitičke i numeričke varijanse

Primećujemo da postoji značajno odstupanje na učestanostima sinusoida. To je posledica činjenice da je analitički izraz izveden pod pretpostavkom da je šum beo. U ostatku spektra nema značajnih razlika.



Slika 8: Samo numerička vrednost

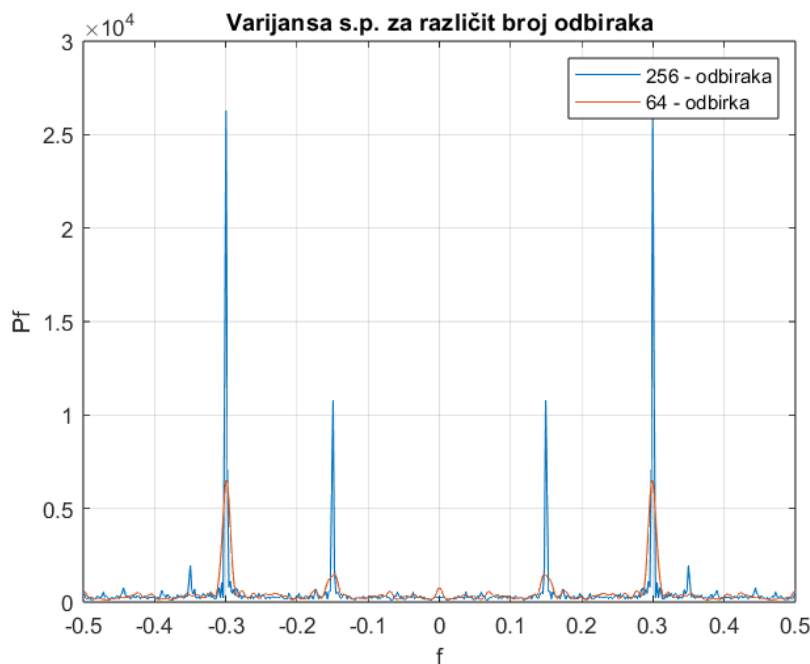
7 Tačka



Slika 9: Interval poverenja Blackman - Tukey

Aproksimacija $P_{xx}(f)$ je u velikoj meri sadržana u intervalu poverenja BT estimacije.

8 Tačka



Slika 10: Analiza varijanse za različit broj odbiraka slučajnog procesa

Medijana za 64 odbiraka: 293.527

Medijana za 256 odbiraka: 259.982

Što je duža sekvenca kod periodograma za sinusoidalne komponente, to je manji efekat curenja spektra, pa se energija sve više koncentriše u vrhovima koji odgovaraju sinusoidama. Zbog toga, ti pikovi imaju veću amplitudu, a varijansa estimacije raste. Kod belog šuma, varijansa periodograma se kreće približno oko kvadrata varijanse samog šuma, pa se ne javljaju značajne promene kada se menja dužina sekvence, za razliku od sinusoidalnog signala. Takođe, medijane varijansi ne odstupaju previše za različite vrednosti N , jer najveći deo spektra i čini ravni deo šuma (uzrok promene medijane, je uticaj promene dužine sekvence na sinusoidu). Sekvencu dužine 256 smo smanjili za 75%. Primećujemo da se medijana varijanse poveća za oko 12% u tom slučaju.

9 Kod koji realizuje gornje rezultate

```
1  clc;
2  close all;
3  clear all;
4  %%
5  % Parametar
6  %2022/0247
7  q = mod(0+2+4+7,5);
8
9  % Učitavanje podataka
10 data = open('x3.csv');
11 x3 = data.x3;
12
13 %% Prikaz signala u vremenskom domenu
14
15 t=0:1:255;
16
17 plot(t,x3);grid on;
18 xlabel("n[odb]");
19 ylabel("x3(n)");
20
21 %% Frekvencijska analiza k-te realizacije procesa
22
23 k = 10;
24 x3_r = x3(k,:);
25
26 N = 2^(nextpow2(length(x3))+1);
27 X3_r = fft(x3_r,N)/length(x3_r);
28 X3_r(2:N/2+1) = 2*X3_r(2:N/2+1);
29
30 X3_r = X3_r(1:N/2+1);
31 f_fft = 0:1/N:1/2;
32
33 figure(1);
34 title("AFK")
35 plot(f_fft,abs(X3_r)); grid on;
36 xlabel("f - digitalna učestanost");
37 ylabel("|X(f)|");
38
39 figure(2);
40 title("FFK")
41 plot(f_fft,unwrap(angle(X3_r))); grid on;
42 xlabel("f - digitalna učestanost");
43 ylabel("arg{X(f)}");
44
45 %% PERIODOGRAM
46 f = -0.5:1/499:0.5;
47
48
```

```

49 rand_num = [10 35 26 43 7];
50 figure(1)
51 for num = rand_num
52     Pper = per(x3(num,:),f);
53     plot(f,Pper);grid on;hold on
54 end
55 xlabel("f - digitalna učestanost");
56 ylabel("P(f)");
57 title("Periodogram signala: " + num2str(rand_num(1)) + ...
58       ", " + num2str(rand_num(2)) + ", " + num2str(rand_num(3)) + ...
59       ", " + num2str(rand_num(4)) + ", " + num2str(rand_num(5)));
60
61 legend("x3(" + num2str(rand_num(1)) + ")", ...
62        "x3(" + num2str(rand_num(2)) + ")", ...
63        "x3(" + num2str(rand_num(3)) + ")", ...
64        "x3(" + num2str(rand_num(4)) + ")", ...
65        "x3(" + num2str(rand_num(5)) + ")", ...);
66
67 disp("Bitne odlike našeg signala su harmonici na 0.15 i 0.30.");
68 disp("Sinusoide na digitalnim učestanostima 0.15 i 0.30.")
69
70
71
72 %% Blackman-Tukey zatvaranje prozora
73 P_015 = [];
74 P_044 = [];
75 B = [];
76
77
78 %eksperiment
79 i = 1;
80 for M = 1:2:255
81     break
82     Pbt = bt_psd(x3(35,:),f,M,'bart');
83     figure(i);
84     plot(f,Pbt);grid on;
85     xlabel('f[Hz]');ylabel('P(f)');
86     title("Blackman - Tuckey " + num2str(M));
87     i = i + 1;
88
89     %B=[B M];
90     %P_015 = [P_015 Pbt(1301)];
91     %P_044 = [P_044 Pbt(1889)];
92
93     answ = input('','s');
94     if answ == "d"
95         %sledeći
96         continue
97     else
98         break

```

```

99     end
100
101 end
102     %figure(255);
103     %plot(B,P_015);grid on;hold on;
104     %plot(B,P_044);
105     %legend("f = 0.15", "f = 0.44");
106     %xlabel("M - duzina prozorske funkcije")
107
108
109 % skiciranje
110 MO = [31 73 181];
111
112 figure(2);
113 for M = MO
114     Pbt=bt_psd(x3(25,:),f,M,'bart');
115     plot(f,Pbt);grid on;hold on;
116     xlabel('f[Hz]');ylabel('P(f)');
117 end
118 title("Blackman - Tukey");
119 legend("M = "+num2str(MO(1)),"M = "+num2str(MO(2)),"M = "+num2str(MO(3)));
120
121
122 disp("Optimalan odbabir dužine prozora: M = 73");
123
124 %% Welch zatvaranje prozora
125
126 % Lmax = 256
127 % Startna merenja, koja sam modifikovao u zavisnosti od
128 % dinamike promene L i S
129 % 1) L = 65      S = 9
130 % 2) L = 65      S = 36
131 % 3) L = 65      S = 52
132 % -----
133 % 4) L = 152     S = 22
134 % 5) L = 152     S = 83
135 % 6) L = 152     S = 122
136 % -----
137 % 7) L = 205     S = 30
138 % 8) L = 205     S = 111
139 % 9) L = 205     S = 166
140
141 %53 32
142 LS=[120 22;120 83;120 100;65 9;58 36;65 55;205 30;205 111;205 166];
143
144 figure(3);
145 for i = 1:length(LS)
146     L = LS(i,1);
147     S= LS(i,2);
148

```

```

149     w=hamming(L);
150     Pwlc=welchp(x3(25,:),L,S,f,w);
151     subplot(3,3,i)
152     plot(f,Pwlc);grid on;
153     xlabel("f");
154     ylabel("P(f)");
155     title("L = "+num2str(L)+" i S = "+num2str(S));
156 end
157
158 % dodatna merenja
159 % L = 50      S = 5
160 % L = 50      S = 24
161 % L = 50      S = 38
162
163 LS=[50 5;50 24;50 38;65 36];
164 figure(10)
165 for i = 1:length(LS)
166     L = LS(i,1);
167     S = LS(i,2);
168
169     w=hamming(L);
170     Pwlc=welchp(x3(25,:),L,S,f,w);
171     subplot(2,2,i)
172     plot(f,Pwlc);grid on;
173     xlabel("f");
174     ylabel("P(f)");
175     title("L = "+num2str(L)+" i S = "+num2str(S));
176 end
177
178
179
180 disp("Odabirano: L = 65 i S = 36.");
181
182
183 %% Računanje varijanse Periodogram
184 Num_r = 50;
185 EX_per = zeros(1,length(f));
186 out_per = zeros(Num_r,length(f));
187
188 for i = 1 : Num_r
189     out_per(i,:) = per(x3(i,:),f);
190     EX_per = EX_per + out_per(i,:);
191 end
192 EX_per = EX_per/Num_r;
193
194 VarX_per = zeros(1,length(f));
195 for i = 1:length(f)
196     VarX_per(i) = sum((out_per(:,i)-EX_per(i)).^2);
197 end
198

```

```

199 VarX_per = VarX_per/(Num_r-1);
200
201 %medianPer_r = median((out_per(:)-sum(out_per(:))/50/length(f)).^2);
202 medianPer_f = median(VarX_per);
203
204 %% Računanje varijanse Welch
205
206 w=hamming(65);
207
208 EX_welch = zeros(1,length(f));
209 out_welch = zeros(Num_r,length(f));
210
211 for i = 1:Num_r
212     out_welch(i,:) = welchp(x3(i,:),65,36,f,w);
213     EX_welch = EX_welch + out_welch(i,:);
214 end
215 EX_welch = EX_welch/Num_r;
216
217
218 VarX_welch = zeros(1,length(f));
219 for i = 1:length(f)
220     VarX_welch(i) = sum((out_welch(:,i)-EX_welch(i)).^2);
221 end
222
223 VarX_welch = VarX_welch/(Num_r-1);
224
225 medianWelch_f = median(VarX_welch);
226
227 %% Računanje varijanse Blackman - Tukey
228
229 EX_bt = zeros(1,length(f));
230 out_bt = zeros(Num_r,length(f));
231
232 for i=1:Num_r
233     out_bt(i,:) = bt_psd(x3(i,:),f,73,'bart');
234     EX_bt= EX_bt + out_bt(i,:);
235 end
236 EX_bt = EX_bt/Num_r;
237
238 VarX_bt = zeros(1,length(f));
239 for i=1:length(f)
240     VarX_bt(i) = sum((out_bt(:,i) - EX_bt(i)).^2);
241 end
242
243 VarX_bt = VarX_bt/(Num_r-1);
244
245 medianBT_f = median(VarX_bt);
246
247 %% poređenje varijanse
248

```



```

249 figure(5);
250 plot(f,VarX_per);hold on;
251 plot(f,VarX_bt);hold on;
252 plot(f,VarX_welch);hold on;grid on;
253 xlabel('f')
254 title("Varijansa");
255 legend("Periodogram","Blackman-Tukey","Welch")
256 legend("Blackman-Tukey","Welch")
257
258 %% Poređenje rezultata i dobijene varijanse Periodograma
259 var_analitical = zeros(1,length(f));
260
261 for i = 1:length(f)
262     var_analitical(i) = EX_per(i)^2*(1+(sin(2*pi*256*f(i))/sin(2*pi*f(i)))/256)^2);
263 end
264
265 figure(6);
266 plot(f,VarX_per);grid on;hold on;
267 plot(f,var_analitical);
268 legend("Numerički","Analitički");
269 title("Analitička i numerička vrednost varijanse periodograma")
270 xlabel("f");
271
272 figure(11)
273 plot(f,VarX_per);grid on;hold on;
274 title("Numerička vrednost varijanse periodograma")
275
276
277
278 %% Intervali poverenja Blackman - Tukey
279 %% Intervali poverenja Blackman - Tukey
280
281 M = 73;
282 N = 256;
283 bartlett(M);
284
285 ni = ceil(2*N/sum(bartlett(M).^2));
286
287 alpha = 0.05;
288
289 q_L = icdf('Chisquare', 1 - alpha/2, ni);
290 q_R = icdf('Chisquare', alpha/2, ni);
291
292 L = ni*out_bt(25,:)/q_L;
293 R = ni*out_bt(25,:)/q_R;
294
295 figure(7);
296 title("Interval poverenja");
297 plot(f,10*log(out_bt(25,:)));hold on;
298 plot(f,10*log(L));hold on;

```

```

299 plot(f,10*log(R));hold on;
300 plot(f,10*log(EX_per));
301 fill([f, fliplr(f)], [10*log(L), fliplr(10*log(R))], 'r', ...
302      'FaceAlpha', 0.1, 'EdgeColor', 'none');
303 xlabel('f');
304 ylabel("Pf_db");
305 legend("BT estimacija", "Donja granica","Gornja granica","Aproksimacija Pxx(f)");
306 title("Estimacija Blackman - Tukey estimatora i interval poverenja");
307
308
309 %% Simulacija sa kraćim sekvencama signala
310
311 EX_per_2 = zeros(1,length(f));
312 out_per_2 = zeros(Num_r,length(f));
313
314 for i=1:Num_r
315     out_per_2(i,:) = per(x3(i,1:64),f);
316     EX_per_2 = EX_per_2 + out_per_2(i,:);
317 end
318 EX_per_2 = EX_per_2/Num_r;
319
320 VarX_per_2 = zeros(1,length(f));
321 for i=1:length(f)
322     VarX_per_2(i) = sum((out_per_2(:,i)-EX_per_2(i)).^2);
323 end
324
325 VarX_per_2 = VarX_per_2/Num_r;
326
327 medianPer_f_2 = median(VarX_per);
328
329 figure(8);
330 plot(f,VarX_per);grid on;hold on;
331 plot(f,VarX_per_2);
332 xlabel("f");
333 ylabel("Pf")
334 title("Varijansa s.p. za različit broj odbiraka");
335 legend("256 - odbiraka","64 - odbirka");
336
337
338
339
340
341
342
343 %% Testiranje funkcija 1
344 Test = ispisiRedoveFajla('P01_test_sekvenca_1.csv');
345
346 %% Testiranje funkcija 2
347
348 %[k,r]=akf(Test);

```

```

349
350 %f=-0.5:1/50:0.5;
351 %Pbt=per(Test,f);
352 %figure(11);
353
354 %plot(f,Pbt);
355
356

1  function Pwelch=welchp(x,L,S,f,w)
2  % Welch metod
3  % x - odbirci ulaznog signala
4  % L - dužina segmenta
5  % S - preklapanje između segmenata
6  % f - frekvencijska osa
7  % w - prozorska funkcija dužine L
8
9  if length(w)~=L
10     disp("Dužina prozorske funkcije ne odgovara traženoj dužini segmenta!");
11     return
12 end
13
14 M=length(f);
15 N=length(x);
16
17 segments=my_buffer(x,L,S);
18 K=size(segments);
19 K=K(1);
20 Pwelch=zeros(1,M);
21 w=w';
22 for i=1:K
23
24     segment=segments(i,:).*w;
25
26     Pper=per(segment,f);
27     Pwelch=Pwelch+Pper;
28 end
29
30 Pwelch=Pwelch/K;
31
32 end
33

1  function Pper=per(x,f)
2  % Periodogram
3  % x - odbirci ulaznog signala
4  % f - frekvencijska osa
5
6  M=length(f);
7  N=length(x);

```

```

8
9 Pper=zeros(1,M);
10
11 for k=1:M
12     for n=1:N
13         Pper(k)=Pper(k)+x(n)*exp(-1j*2*pi*f(k)*(n-1));
14     end
15     Pper(k)=abs(Pper(k))^2/N;
16 end
17
18 end

1 function segments=my_buffer(vec, M, S)
2 % M - dužina podsegmenta
3 % S - preklapanje između susednih segmenata
4
5 s=0;
6 segments=[];
7 if S>M
8     error("Duzina preklapanja, veca od duzine prozora")
9 end
10 if M>length(vec)
11     error("Duzina prozora, veca od duzine signala")
12 end
13 if M<=0
14     error("Duzina prozora nije validna!");
15 end
16
17 if S<0
18     error("Duzina preklapanja medju segmentima nije validna!");
19 end
20
21 %važno zbog ideje, na koji je funkcija realizovana
22 if S==0
23     S=M;
24 else
25     S=M-S;
26 end
27
28 while true
29     row=zeros(1,M);
30     k=1;
31     for i=s+1:s+M
32         if i>length(vec)
33             break
34         end
35         row(k)=vec(i);
36         k=k+1;
37     end
38

```

```

39 segments=[segments;row];
40
41 if s+M>=length(vec)
42     break
43 end
44 s=s+S;
45
46 end
47
1  function MPper=mper(x,K,f)
2  % Usrednjeni periodogram
3  % x - odbirci ulaznog signala
4  % K - broj segmenata na koje usrednjavamo
5  % f - frekvencijska osa
6
7  N=length(x);
8  L=ceil(N/K);
9  w=rectwin(L);
10 MPper=welchp(x,L,0,f,w');
11
12 end
13
14 function Psdbt=bt_psd(x,f,M,wind)
15 % x - odbirci ulaznog signala
16 % f - frekvencijska osa
17 % M - dužina prozorske funkcije, M<N i M neparno
18 % wind - tip prozorske funkcije
19
20 if mod(M,2)==0
21     disp("Dužina prozorske funkcije je neparan broj");
22     return
23 end
24
25 N=length(x);
26 L=length(f);
27
28 [~,Rxx]=akf(x);
29
30 w=zeros(1,2*N-1);
31 switch wind
32     case 'bart'
33         w1=bartlett(M);
34     case 'parzen'
35         w1=parzenwin(M);
36     otherwise
37         w1=bartlett(M);
38 end
39
40 for k=N-(M-1)/2:N+(M-1)/2

```

```

28     w(k)=w1(k-N+(M-1)/2+1);
29 end
30
31 Psdbt=zeros(1,L);
32 for i=1:L
33     for k=1:2*N-1
34         Psdbt(i)=Psdbt(i) + w(k)*Rxx(k)*exp(-1j*2*pi*f(i)*(k-N));
35     end
36 end
37
38 end
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000

```

```
15      r(N-k)=conj(r(k+N));  
16  end  
17  
18  end
```