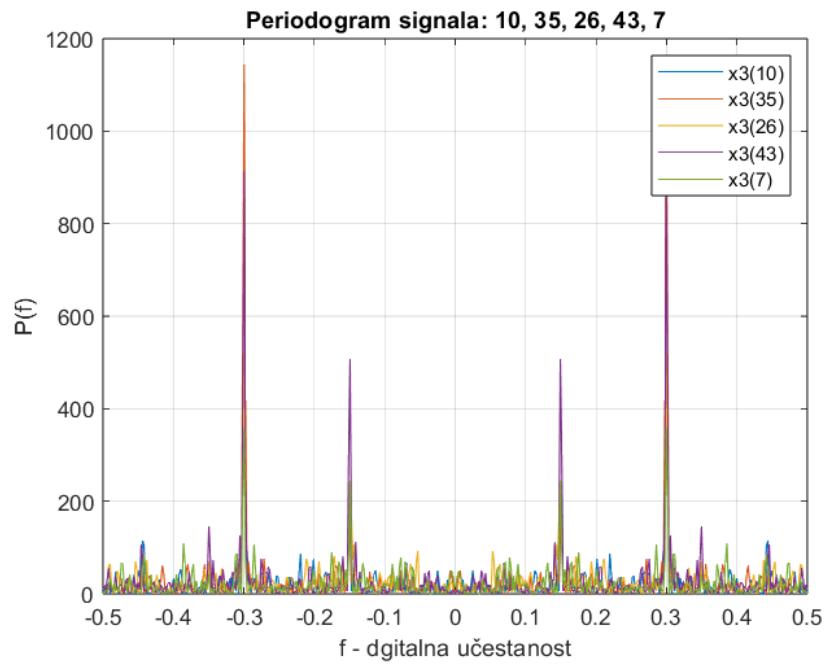


Spektralna analiza signala - **Domaći**

Student: Rastko Lazarević 2022/0247

Avgust 2025

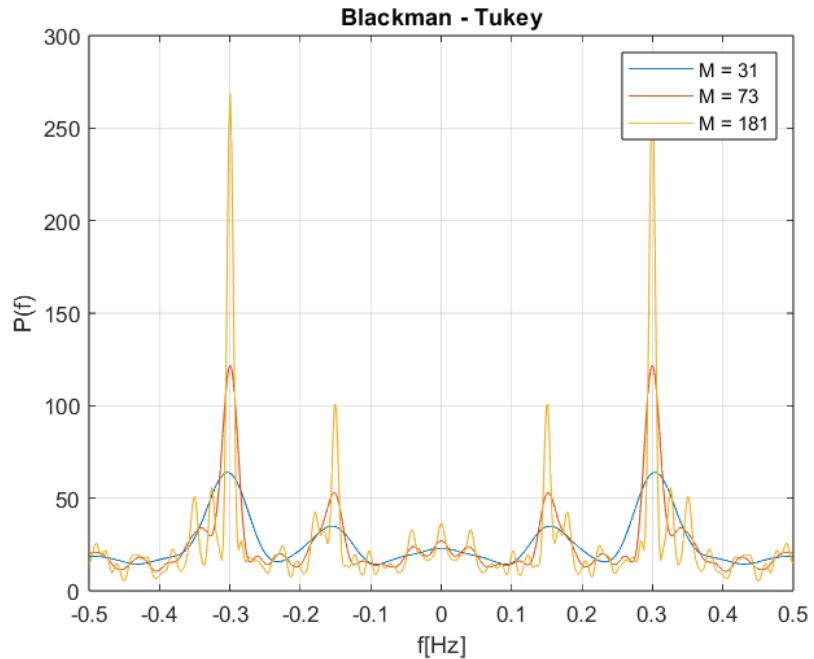
2 Tačka



Slika 1: Periodogram slučajno odabranih sekvenci

Kao što se može primetiti, bitne karakteristike našeg signala su sinusoide na digitalnim učestanostima $f_1 = 0.15$ i $f_2 = 0.30$. U ostatku spektra ne postoje posebne pravilnosti, pa bi se to moglo pripisati šumu.

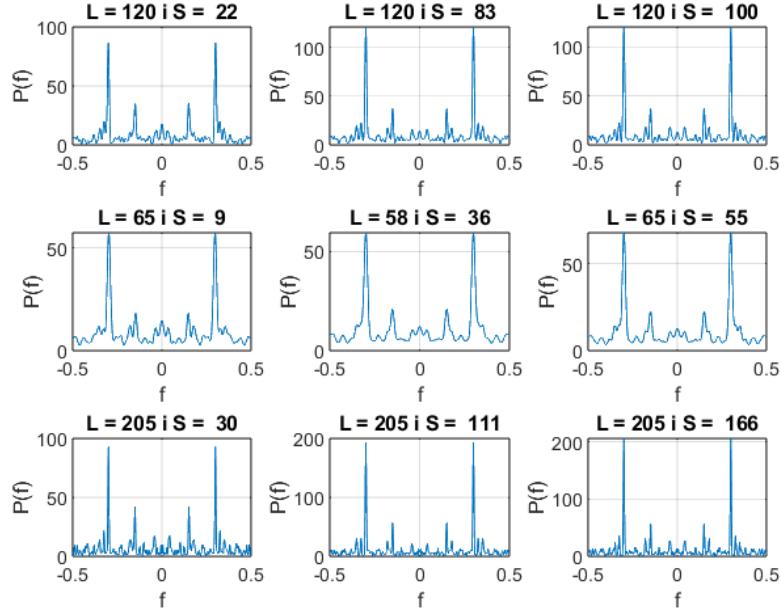
3 Tačka



Slika 2: Blackman - Tukey: $M = 18$ premalo, $M = 73$ optimalno i $M = 181$ preveliko

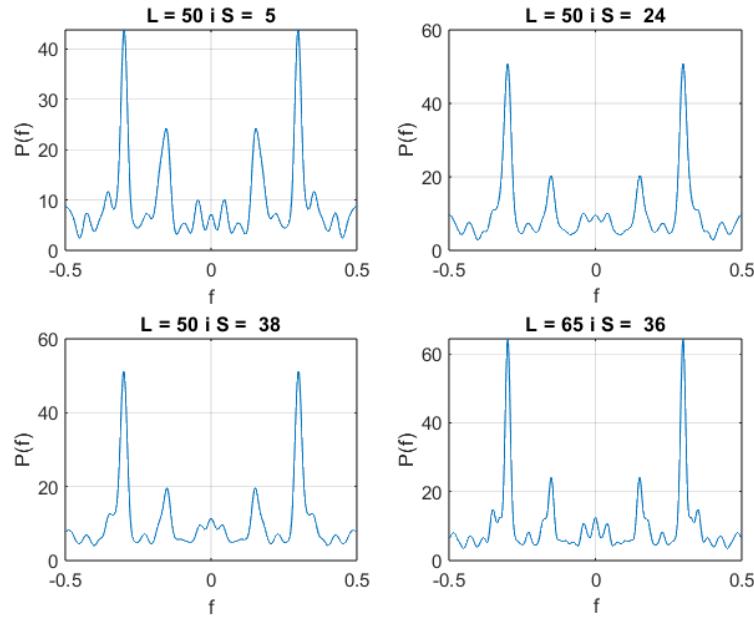
Na osnovu rezultata eksperimenta u Matlab-u dobijamo gornji rezultat. Primećimo da je za premalo M frekvencijska rezolucija prilično loša, tj. "razmazana". U slučaju velikog M , vidimo da dolazi do pojave drugih pikova, "oscilacija". Iako su manji, mogu narušiti informativnost prikaza i dobijenih vrednosti pri analizi. Osim tog vizuelnog momenta, varijansa estimacije raste ukoliko M raste. Za optimalno M imamo dobru kombinaciju rezolucije i čuvanja informacije tj. varijanse.

4 Tačka



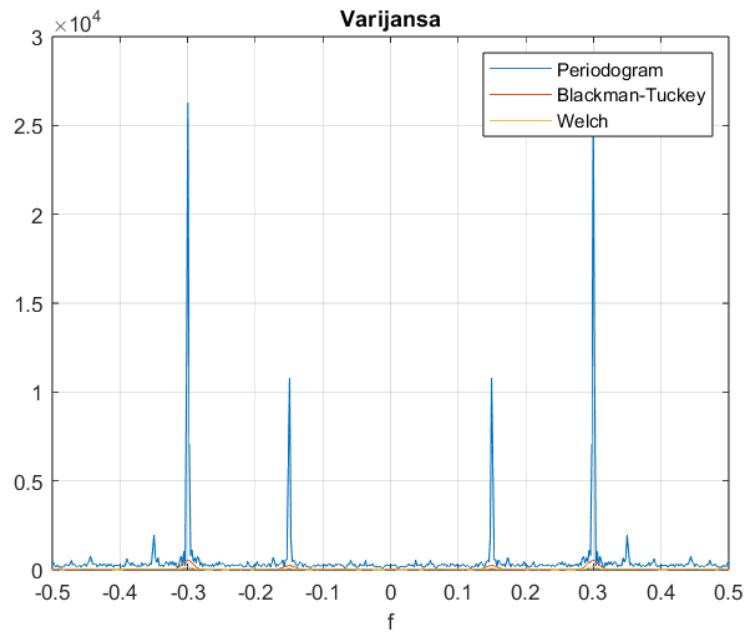
Slika 3: Welch metoda - odabir parametara L i S

Ovde posmatramo različite dužine prozorskih sekvenci i preklapanja među njima. Pratimo trend promene i biramo najbolju opciju u vizuelnom smislu. Osim toga, iz teorije znamo da ukoliko je L kraće, imamo više podsekvenci pa je efekat usrednjavanja veći. Ako L smanjujemo gubi se informaciju o glavnim komponentama, vidimo da se rezolucija smanjuje. Ako se broj tačaka u kojima se preklapaju podsekvence poveća, one postaju korelisanje pa varijansa estimacije raste, međutim usrednjavanje je izraženje.



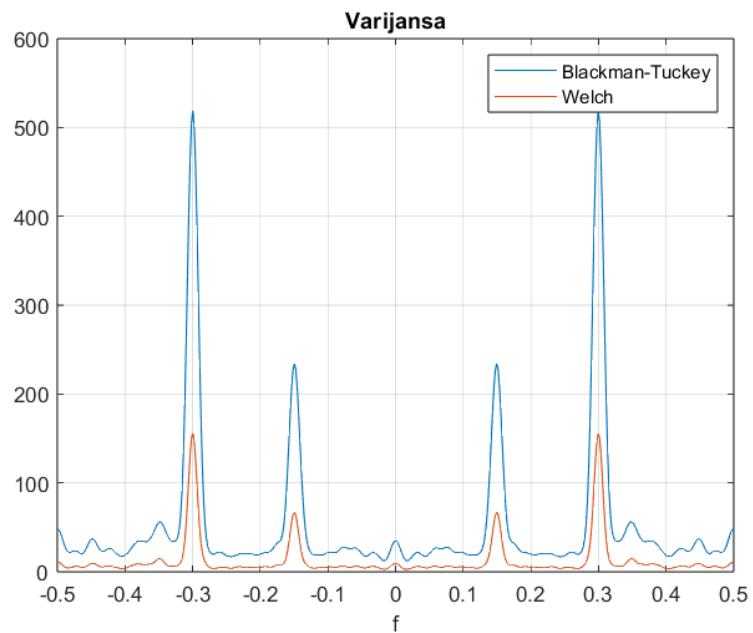
Slika 4: Welch metoda - dodatna analiza

5 Tačka



Slika 5: Poređenje varijansi

Primećujemo da periodogram ima mnogo veću varijansu nego BT i Welch. Ovakav rezultat je teorijski opravdan, jer su BT i Welch estimatori SGS, koji imaju cilj smanjenje varijanse u odnosu na periodogram.



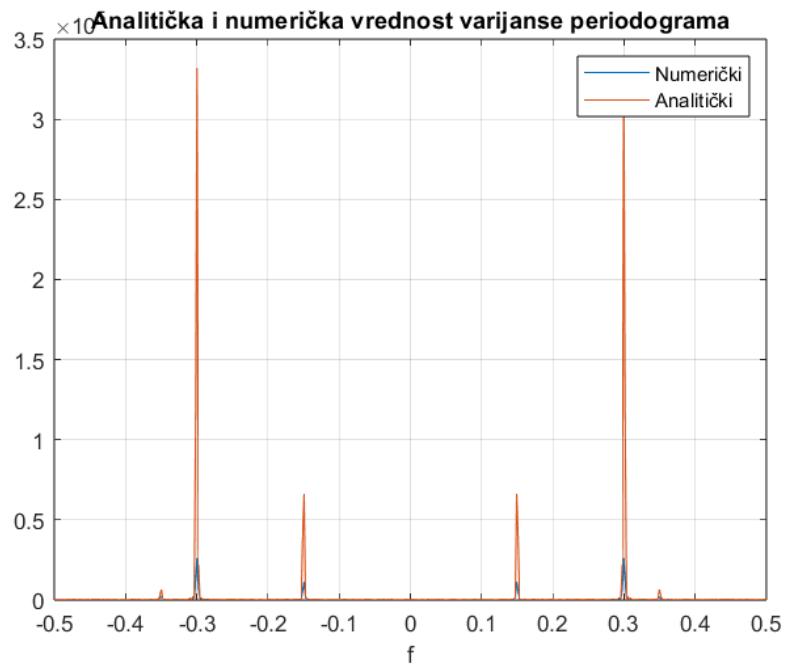
Slika 6: Poredenje varijansi samo BT i Welch

Medijana periodogram: 259,98

Medijana BT: 24,86

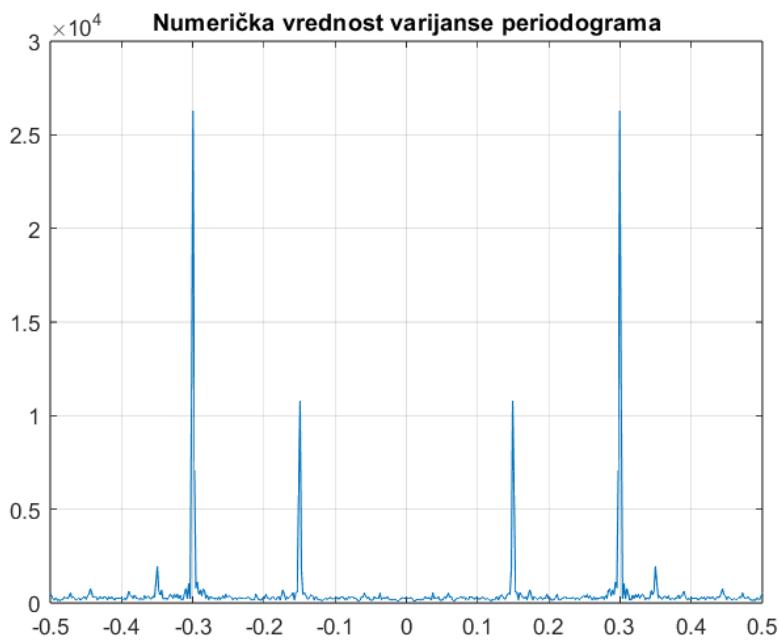
Medijana Welch: 5,915

6 Tačka



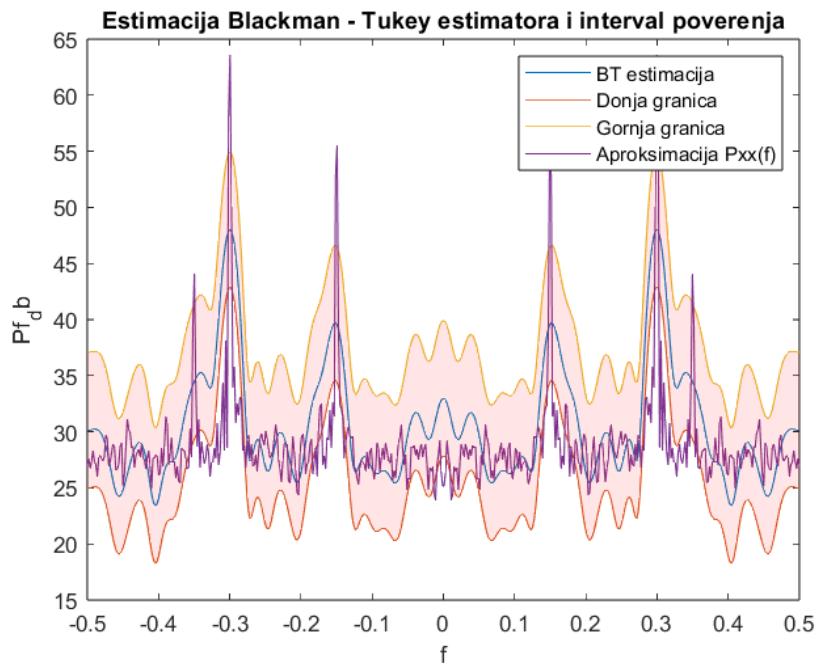
Slika 7: Poređenje analitičke i numeričke varijanse

Primećujemo da postoji značajno odstupanje na učestanostima sinusoida. To je posledica činjenice da je analitički izraz izведен pod prepostavkom da je šum beo. U ostatku spektra nema značajnih razlika.



Slika 8: Samo numerička vrednost

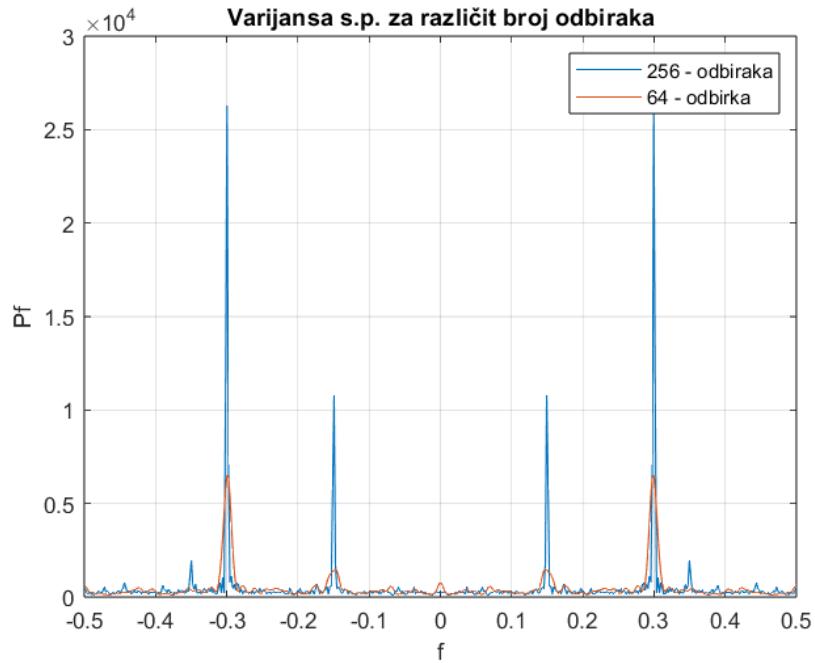
7 Tačka



Slika 9: Interval poverenja Blackman - Tukey

Aproksimacija $P_{xx}(f)$ је у великој мери садрžана у интервалу погрешка BT естимације.

8 Tačka



Slika 10: Analiza varijanse za različit broj odbiraka slučajnog procesa

Medijana za 64 odbiraka: 293.527

Medijana za 256 odbiraka: 259.982

Što je duža sekvenca kod periodograma za sinusoidalne komponente, to je manji efekat curenja spektra, pa se energija sve više koncentriše u vrhovima koji odgovaraju sinusoidama. Zbog toga, ti pikovi imaju veću amplitudu, a varijansa estimacije raste. Kod beleg šuma, varijansa periodograma se kreće približno oko kvadrata varijanse samog šuma, pa se ne javljaju značajne promene kada se menja dužina sekvence, za razliku od sinusoidalnog signala. Takođe, medijane varijansi ne odstupaju previše za različite vrednosti N, jer najveći deo spektra i čini ravni deo šuma (uzrok promene medijane, je uticaj promene dužine sekvence na sinuside). Sekvencu dužine 256 smo smanjili za 75%. Primećujemo da se medijana varijanse poveća za oko 12% u tom slučaju.

9 Kod koji realizuje gornje rezultate

```
1 clc;
2 close all;
3 clear all;
4 %
5 % Parametar
6 %2022/0247
7 q = mod(0+2+4+7,5);
8
9 % Učitavanje podataka
10 data = open('x3.csv');
11 x3 = data.x3;
12
13 %% Prikaz signala u vremenskom domenu
14
15 t=0:1:255;
16
17 plot(t,x3);grid on;
18 xlabel("n[odb]");
19 ylabel("x3(n)");
20
21 %% Frekvenčnska analiza k-te realizacije procesa
22
23 k = 10;
24 x3_r = x3(k,:);
25
26 N = 2^(nextpow2(length(x3))+1);
27 X3_r = fft(x3_r,N)/length(x3_r);
28 X3_r(2:N/2+1) = 2*X3_r(2:N/2+1);
29
30 X3_r = X3_r(1:N/2+1);
31 f_fft = 0:1/N:1/2;
32
33 figure(1);
34 title("AFK")
35 plot(f_fft,abs(X3_r)); grid on;
36 xlabel("f - digitalna učestanost");
37 ylabel("|X(f)|");
38
39 figure(2);
40 title("FFK")
41 plot(f_fft,unwrap(angle(X3_r))); grid on;
42 xlabel("f - digitalna učestanost");
43 ylabel("arg{X(f)}");
44
45 %% PERIODOGRAM
46 f = -0.5:1/499:0.5;
47
48
```

```

49 rand_num = [10 35 26 43 7];
50 figure(1)
51 for num = rand_num
52     Pper = per(x3(num,:),f);
53     plot(f,Pper);grid on;hold on
54 end
55 xlabel("f - digitalna učestanost");
56 ylabel("P(f)");
57 title("Periodogram signala: " + num2str(rand_num(1)) + ...
58     ", " + num2str(rand_num(2)) + ", " + num2str(rand_num(3)) + ...
59     ", " + num2str(rand_num(4)) + ", " + num2str(rand_num(5)));
60
61 legend("x3(" + num2str(rand_num(1)) + ")",
62        "x3(" + num2str(rand_num(2)) + ")",
63        "x3(" + num2str(rand_num(3)) + ")",
64        "x3(" + num2str(rand_num(4)) + ")",
65        "x3(" + num2str(rand_num(5)) + ")");
66
67 disp("Bitne odlike našeg signala su harmonici na 0.15 i 0.30.");
68 disp("Sinusoide na digitalnim učestanostima 0.15 i 0.30.")
69
70
71 %% Blackman-Tukey zatvaranje prozora
72 P_015 = [];
73 P_044 = [];
74 B = [];
75
76
77 %eksperiment
78 i = 1;
79 for M = 1:2:255
80     break
81     Pbt = bt_psd(x3(35,:),f,M,'bart');
82     figure(i);
83     plot(f,Pbt);grid on;
84     xlabel('f[Hz]');ylabel('P(f)');
85     title("Blackman - Tukey " + num2str(M));
86     i = i + 1;
87
88     %B=[B M];
89     %P_015 = [P_015 Pbt(1301)];
90     %P_044 = [P_044 Pbt(1889)];
91
92     answ = input('', "s");
93     if answ == "d"
94         %sledeći
95         continue
96     else
97         break

```

```

99     end
100
101    end
102    %figure(255);
103    %plot(B,P_015);grid on;hold on;
104    %plot(B,P_044);
105    %legend("f = 0.15","f = 0.44");
106    % xlabel("M - duzina prozorske funkcije")
107
108
109    % skiciranje
110 M0 = [31 73 181];
111
112 figure(2);
113 for M = M0
114     Pbt=bt_psd(x3(25,:),f,M,'bart');
115     plot(f,Pbt);grid on;hold on;
116     xlabel('f[Hz]');ylabel('P(f)');
117 end
118 title("Blackman - Tukey");
119 legend("M = "+num2str(M0(1)), "M = "+num2str(M0(2)), "M = "+num2str(M0(3)));
120
121
122 disp("Optimalan odbabir dužine prozora: M = 73");
123
124 %% Welch zatvaranje prozora
125
126 % Lmax = 256
127 % Startna merenja, koja sam modifikovao u zavinosti od
128 % dinamike promene L i S
129 % 1) L = 65      S = 9
130 % 2) L = 65      S = 36
131 % 3) L = 65      S = 52
132 % -----
133 % 4) L = 152     S = 22
134 % 5) L = 152     S = 83
135 % 6) L = 152     S = 122
136 % -----
137 % 7) L = 205     S = 30
138 % 8) L = 205     S = 111
139 % 9) L = 205     S = 166
140
141 %53 32
142 LS=[120 22;120 83;120 100;65 9;58 36;65 55;205 30;205 111;205 166];
143
144 figure(3);
145 for i = 1:length(LS)
146     L = LS(i,1);
147     S= LS(i,2);
148

```

```

149     w=hamming(L);
150     Pwlc=welchp(x3(25,:),L,S,f,w);
151     subplot(3,3,i)
152     plot(f,Pwlc);grid on;
153     xlabel("f");
154     ylabel("P(f)");
155     title("L = "+num2str(L)+" i S = "+num2str(S));
156 end
157
158 % dodatna merenja
159 % L = 50      S = 5
160 % L = 50      S = 24
161 % L = 50      S = 38
162
163 LS=[50 5;50 24;50 38;65 36];
164 figure(10)
165 for i = 1:length(LS)
166     L = LS(i,1);
167     S= LS(i,2);
168
169     w=hamming(L);
170     Pwlc=welchp(x3(25,:),L,S,f,w);
171     subplot(2,2,i)
172     plot(f,Pwlc);grid on;
173     xlabel("f");
174     ylabel("P(f)");
175     title("L = "+num2str(L)+" i S = "+num2str(S));
176 end
177
178
179
180 disp("Odabirano: L = 65 i S = 36.");
181
182
183 %% Računanje varijanse Periodogram
184 Num_r = 50;
185 EX_per = zeros(1,length(f));
186 out_per = zeros(Num_r,length(f));
187
188 for i = 1 : Num_r
189     out_per(i,:) = per(x3(i,:),f);
190     EX_per = EX_per + out_per(i,:);
191 end
192 EX_per = EX_per/Num_r;
193
194 VarX_per = zeros(1,length(f));
195 for i = 1:length(f)
196     VarX_per(i) = sum((out_per(:,i)-EX_per(i)).^2);
197 end
198

```

```

199 VarX_per = VarX_per/(Num_r-1);
200 %medianPer_r = median((out_per(:)-sum(out_per(:))/50/length(f)).^2);
201 medianPer_f = median(VarX_per);
202
203 %% Računanje varijanse Welch
204
205 w=hamming(65);
206
207 EX_welch = zeros(1,length(f));
208 out_welch = zeros(Num_r,length(f));
209
210 for i = 1:Num_r
211     out_welch(i,:) = welchp(x3(i,:),65,36,f,w);
212     EX_welch = EX_welch + out_welch(i,:);
213 end
214 EX_welch = EX_welch/Num_r;
215
216
217 VarX_welch = zeros(1,length(f));
218 for i = 1:length(f)
219     VarX_welch(i) = sum((out_welch(:,i)-EX_welch(i)).^2);
220 end
221
222 VarX_welch = VarX_welch/(Num_r-1);
223
224 medianWelch_f = median(VarX_welch);
225
226 %% Računanje varijanse Blackman - Tukey
227
228 EX_bt = zeros(1,length(f));
229 out_bt = zeros(Num_r,length(f));
230
231 for i=1:Num_r
232     out_bt(i,:) = bt_psd(x3(i,:),f,73,'bart');
233     EX_bt= EX_bt + out_bt(i,:);
234 end
235 EX_bt = EX_bt/Num_r;
236
237 VarX_bt = zeros(1,length(f));
238 for i=1:length(f)
239     VarX_bt(i) = sum((out_bt(:,i) - EX_bt(i)).^2);
240 end
241
242 VarX_bt = VarX_bt/(Num_r-1);
243
244 medianBT_f = median(VarX_bt);
245
246 %% poređenje varijanse
247
```

```

249 figure(5);
250 plot(f,VarX_per);hold on;
251 plot(f,VarX_bt);hold on;
252 plot(f,VarX_welch);hold on;grid on;
253 xlabel('f')
254 title("Varijansa");
255 legend("Periodogram","Blackman-Tuckey","Welch")
256 legend("Blackman-Tuckey","Welch")
257
258 %% Poređenje rezultata i dobijene varijanse Periodograma
259 var_analitical = zeros(1,length(f));
260
261 for i = 1:length(f)
262     var_analitical(i) = EX_per(i)^2*(1+(sin(2*pi*256*f(i))/sin(2*pi*f(i))/256)^2);
263 end
264
265 figure(6);
266 plot(f,VarX_per);grid on;hold on;
267 plot(f,var_analitical);
268 legend("Numerički","Analitički");
269 title("Analitička i numerička vrednost varijanse periodograma")
270 xlabel("f");
271
272 figure(11)
273 plot(f,VarX_per);grid on;hold on;
274 title("Numerička vrednost varijanse periodograma")
275
276
277
278 %% Intervali poverenja Blackman - Tukey
279 %% Intervali poverenja Blackman - Tukey
280
281 M = 73;
282 N = 256;
283 bartlett(M);
284
285 ni = ceil(2*N/sum(bartlett(M).^2));
286
287 alpha = 0.05;
288
289 q_L = icdf('Chisquare', 1 - alpha/2, ni);
290 q_R = icdf('Chisquare', alpha/2, ni);
291
292 L = ni*out_bt(25,:)/q_L;
293 R = ni*out_bt(25,:)/q_R;
294
295 figure(7);
296 title("Interval poverenja");
297 plot(f,10*log(out_bt(25,:)));hold on;
298 plot(f,10*log(L));hold on;

```

```

299 plot(f,10*log(R));hold on;
300 plot(f,10*log(EX_per));
301 fill([f, fliplr(f)], [10*log(L), fliplr(10*log(R))], 'r', ...
302     'FaceAlpha', 0.1, 'EdgeColor', 'none');
303 xlabel('f');
304 ylabel("Pf_db");
305 legend("BT estimacija", "Donja granica", "Gornja granica", "Aproksimacija Pxx(f)");
306 title("Estimacija Blackman - Tukey estimatora i interval poverenja");
307
308
309 %% Simulacija sa kraćim sekvencama signala
310
311 EX_per_2 = zeros(1,length(f));
312 out_per_2 = zeros(Num_r,length(f));
313
314 for i=1:Num_r
315     out_per_2(i,:) = per(x3(i,1:64),f);
316     EX_per_2 = EX_per_2 + out_per_2(i,:);
317 end
318 EX_per_2 = EX_per_2/Num_r;
319
320 VarX_per_2 = zeros(1,length(f));
321 for i=1:length(f)
322     VarX_per_2(i) = sum((out_per_2(:,i)-EX_per_2(i)).^2);
323 end
324
325 VarX_per_2 = VarX_per_2/Num_r;
326
327 medianPer_f_2 = median(VarX_per);
328
329 figure(8);
330 plot(f,VarX_per);grid on;hold on;
331 plot(f,VarX_per_2);
332 xlabel("f");
333 ylabel("Pf")
334 title("Varijansa s.p. za različit broj odbiraka");
335 legend("256 - odbiraka","64 - odbirka");
336
337
338
339
340
341
342
343 %% Testiranje funkcija 1
344 Test = ispisiRedoveFajla('P01_test_sekvenca_1.csv');
345
346 %% Testiranje funkcija 2
347
348 %[k,r]=akf(Test);

```

```

349
350    %f=-0.5:1/50:0.5;
351    %Pbt=per(Test,f);
352    %figure(11);
353
354    %plot(f,Pbt);
355
356

1 function Pwelch=welchp(x,L,S,f,w)
2 % Welch metod
3 % x - odbirci ulaznog signala
4 % L - dužina segmenta
5 % S - preklapanje između segmenata
6 % f - frekvencijska osa
7 % w - prozorska funkcija dužine L
8
9 if length(w)~=L
10    disp("Dužina prozorske funkcije ne odgovara traženoj dužini segmenta!");
11    return
12 end
13
14 M=length(f);
15 N=length(x);
16
17 segments=my_buffer(x,L,S);
18 K=size(segments);
19 K=K(1);
20 Pwelch=zeros(1,M);
21 w=w';
22 for i=1:K
23
24    segment=segments(i,:).*w;
25
26    Pper=per(segment,f);
27    Pwelch=Pwelch+Pper;
28 end
29
30 Pwelch=Pwelch/K;
31
32 end
33

1 function Pper=per(x,f)
2 % Periodogram
3 % x - odbirci ulaznog signala
4 % f - frekvencijska osa
5
6 M=length(f);
7 N=length(x);

```

```

8      Pper=zeros(1,M);
9
10     for k=1:M
11         for n=1:N
12             Pper(k)=Pper(k)+x(n)*exp(-1j*2*pi*f(k)*(n-1));
13         end
14         Pper(k)=abs(Pper(k))^2/N;
15     end
16
17
18 end

1 function segments=my_buffer(vec, M, S)
2 % M - dužina podsegmenata
3 % S - preklapanje izmedju susednih segmenata
4
5 s=0;
6 segments=[];
7 if S>M
8     error("Duzina preklapanja, veca od duzine prozora")
9 end
10 if M>length(vec)
11     error("Duzina prozora, veca od duzine signala")
12 end
13 if M<=0
14     error("Duzina prozora nije validna!");
15 end
16
17 if S<0
18     error("Duzina preklapanja medju segmentima nije validna!");
19 end
20
21 %važno zbog ideje, na koji je funkcija realizovana
22 if S==0
23     S=M;
24 else
25     S=M-S;
26 end
27
28 while true
29     row=zeros(1,M);
30     k=1;
31     for i=s+1:s+M
32         if i>length(vec)
33             break
34         end
35         row(k)=vec(i);
36         k=k+1;
37     end
38

```

```

39 segments=[segments;row];
40
41 if s+M>=length(vec)
42     break
43 end
44 s=s+S;
45
46 end
47

1 function MPper=mper(x,K,f)
2 % Usrednjeni periodogram
3 % x - odbirci ulaznog signala
4 % K - broj segmenata na koje usrednjavamo
5 % f - frekvencijska osa
6
7 N=length(x);
8 L=ceil(N/K);
9 w=rectwin(L);
10 MPper=welchp(x,L,0,f,w');
11
12 end

1 function Psdbt=bt_psd(x,f,M,wind)
2 % x - odbirci ulaznog signala
3 % f - frekvencijska osa
4 % M - dužina prozorske funkcije, M<N i M neparno
5 % wind - tip prozorske funkcije
6
7 if mod(M,2)==0
8     disp("Dužina prozorske funkcije je neparan broj");
9     return
10 end
11
12 N=length(x);
13 L=length(f);
14
15 [~,Rxx]=akf(x);
16
17 w=zeros(1,2*N-1);
18 switch wind
19     case 'bart'
20         w1=bartlett(M);
21     case 'parzen'
22         w1=parzenwin(M);
23     otherwise
24         w1=bartlett(M);
25 end
26
27 for k=N-(M-1)/2:N+(M-1)/2

```

```

28     w(k)=w1(k-N+(M-1)/2+1);
29 end
30
31 Psdbt=zeros(1,L);
32 for i=1:L
33     for k=1:2*N-1
34         Psdbt(i)=Psdbt(i) + w(k)*Rxx(k)*exp(-1j*2*pi*f(i)*(k-N));
35     end
36 end
37
38 end
39

1 function [ P ] = bt(x,w,f)
2
3 [~,r]=akf(x);
4 N=length(x);
5 M=length(w); % simetrican, M-neparno
6
7 w1=zeros(1,2*N-1);
8 for k=N-(M-1)/2:N+(M-1)/2
9     w1(k)=w(k-N+(M-1)/2+1);
10    end
11
12 rw=r.*w1;
13 P=zeros(1,length(f));
14 for i=1:length(f)
15     for k=1:2*N-1
16         P(i)=P(i)+rw(k)*exp(-1j*2*pi*f(i)*(-N+k));
17     end
18 end
19
20 end
21
22

1 function [k_o, r]=akf(x)
2 % Autokorelaciona funkcija
3 % x - odbirci ulaznog signala
4
5 N=length(x);
6 k_o=-(N-1):1:(N-1);
7 r=zeros(1,2*N-1);
8
9 for k=0:N-1
10     tmp=0;
11     for m=0:N-1-k
12         tmp = tmp + conj(x(m+1))*x(m+k+1);
13     end
14     r(k+N)=tmp/N;

```

```
15      r(N-k)=conj(r(k+N));  
16  end  
17  
18  end
```