

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Lazar Milinković

**Implementacija algoritmov za
probleme najkrajših poti v
geometrijskih grafih**

MAGISTRSKO DELO
UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM DRUGE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: dr. Sergio Cabello

Ljubljana 2017

Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Za objavljane ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za matematiko in fiziko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Namesto te strani **vstavite** original izdane teme diplomskega dela s podpisom mentorja in dekana ter žigom fakultete, ki ga diplomant dvigne v študentskem referatu, preden odda izdelek v vezavo!

IZJAVA O AVTORSTVU MAGISTRSKEGA DELA

Spodaj podpisani Lazar Milinković, z vpisno številko **27122037**, sem avtor magistrskega dela z naslovom:

Implementacija algoritmov za probleme najkrajših poti v geometrijskih grafih

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem magistrsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom dr. Sergia Cabella,
- so elektronska oblika magistrskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko magistrskega dela
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 11. januarja 2016

Podpis avtorja:

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
2	CGAL in uporabljene matematične strukture	5
2.1	CGAL	5
2.1.1	Jedro knjižnice	6
2.2	Kd drevesa	9
2.2.1	Poizvedbe	11
2.2.2	Kd drevesa v CGAL-u	11
2.3	Drevesa najkrajših poti z eno izvirno točko (SSSP)	11
2.4	Graf kvadratne mreže	12
2.5	Delaunayeva triangulacija	12
2.5.1	Delaunayeva triangulacija v CGAL-u	13
2.6	Voronoijev diagram	15
2.6.1	Voronoijev diagram v CGAL-u	17
2.7	Območna drevesa	18
2.7.1	Območna drevesa v CGAL-u	20
3	Teoretični opis algoritmov	23
3.1	Drevo SSSP	23
3.1.1	Eksplisitna uporaba preiskovanja v širino (BFS)	23

3.1.2	Preiskovanje v širino z uporabo grafa kvadratne mreže (grid)	24
3.1.3	Prilagojen algoritem za enotske kroge (SSSP)	25
3.2	Minimalna ločitev z enotskimi krogi	29
3.2.1	Splošni algoritem za ločevanje s krogi	35
3.2.2	Dualnost in dualni prostor	37
3.2.3	Hitrejši algoritem	38
4	Implementacija algoritmov	49
4.1	Drevo SSSP	49
4.1.1	Podatkovna struktura za točko	49
4.1.2	Podatkovna struktura za iskanje najbližjega soseda	50
4.1.3	Izgradnja drevesa	55
4.2	Minimalna ločitev	56
4.2.1	Prilagoditev drevesa SSSP	56
4.2.2	Kd drevo	58
4.2.3	DualPoint - implementacija dualne točke	59
4.2.4	Območno drevo	60
4.2.5	Celotna struktura algoritma	62
4.2.6	Izgradnja minimalnega cikla	64
5	Eksperimenti in rezultati	67
5.1	Uporaba kd dreves namesto VD	67
5.2	Generator vhodnih podatkov	68
5.3	Drevo najkrajših poti	70
5.4	Minimalna ločitev	71
5.4.1	Analiza	78
6	Sklepne ugotovitve	81

Seznam uporabljenih kratic

kratica	pomen
DT	Delaunayeva triangulacija
VD	Voronoijev diagram

KAZALO

Povzetek

V magistrskem delu sta predstavljena dva algoritma, ki obravnavata problem najkrajših poti, in njuni implementaciji. Pri prvem računamo drevo najkrajših poti v grafu nad množico skladnih enotskih krogov, ki so predstavljeni z njihovimi središči. Njegova časovna kompleksnost je $\mathcal{O}(n \log n)$. Drugi algoritem rešuje problem minimalne ločitve. Pri le-tem imamo danih n enotskih krogov ter točki s in t , ki nista vsebovani v nobenem krogu, izračunati pa želimo velikost minimalne množice krogov, za katero velja, da katerakoli pot od točke s do točke t seka enega izmed krogov v množici. Časovna zahtevnost algoritma je $\mathcal{O}(n^2 \log^3 n)$. Oba algoritma sta bila implementirana v programskem jeziku C++ s pomočjo knjižnice za računsko geometrijo CGAL. Pri nekaterih podatkovnih strukturah, ki smo jih uporabili iz knjižnice, smo morali vnesti nekaj sprememb. Hitrost algoritma za najkrajše poti smo primerjali z dvema obstoječima alternativnima algoritmoma, hitrost algoritma za minimalno ločitev pa s splošnim naivnim algoritmom za ta problem. Oba algoritma se izkažeta bolje od alternativ predvsem pri manjših domenah, kjer so točke gosto poseljene in zato graf enotskih krogov vsebuje več povezav.

KAZALO

Abstract

The master thesis presents two algorithms dealing with the shortest path problem and their implementation. The first, recently discovered algorithm computes shortest path trees in unit disk graphs in $\mathcal{O}(n \log n)$ worst-case time, where n is the number of disks. The second algorithm solves in $\mathcal{O}(n^2 \log^3 n)$ worst-case time the minimum-separation problem where we are given n unit disks and two points s and t , not contained in any of the disks, and we want to compute the minimum number of disks one needs to retain so that any curve connecting s to t intersects some of the retained disks. Both algorithms were implemented in C++ programming language with the help of CGAL library. Where necessary, we introduced some changes or additions to CGAL structures to fit our implementation needs. We compared running times of first algorithm with two alternative algorithms for solving the shortest path problem and times of second algorithm with the generic algorithm for solving minimum-separation problem. Both algorithms perform better than their counterparts mainly in smaller domains with densely populated points where unit disk graph consists of a lot of edges.

Poglavje 1

Uvod

V magistrski nalogi smo obravnavali dva geometrijska optimizacijska problema na ravnini, pri katerih osrednjo vlogo predstavljajo enotski krogi. Predstavili smo učinkovita algoritma, ki rešita omenjena problema, opisali njuno implementacijo ter predložili rezultate eksperimentov.

Pri prvem problemu bi radi izračunali drevo najkrajših poti iz neuteženega grafa presekov enotskih krogov. Kot vhod je dana množica \mathcal{D} n krogov enake velikosti, kjer je vsak krog opisan z njegovim središčem. Vozlišča grafa presekov predstavljajo krogi, pri čemer med dvema vozliščema obstaja povezava natanko takrat, ko obstaja presečišče med njunima krogoma D in D' . Graf presekov lahko predstavimo tudi na drug, bolj priročen način, kjer vozlišča predstavlja množica P središč krogov, povezava med dvema točkama p in q pa obstaja, če je njuna evklidska razdalja $\|pq\|$ manjša ali enaka premeru enotskega kroga. Za podan koren $r \in P$ lahko iz takega grafa izračunamo drevo najkrajših poti brez eksplicitne izgradnje grafa, s čimer je časovna zahtevnost algoritma enaka $\mathcal{O}(n \log n)$.

Drugi problem, ki ga obravnavamo, je problem minimalne ločitve. Kot vhod je dana množica \mathcal{D} n enotskih krogov na ravnini in dve točki s in t , ki nista vsebovani v nobenem od krogov iz \mathcal{D} . Pravimo, da \mathcal{D} ločuje s in t , če vsaka pot v ravnini od s do t seka nek krog v \mathcal{D} . Cilj je najti minimalno kardinalno podmnožico množice \mathcal{D} , ki ločuje s in t , kar formalno zapišemo

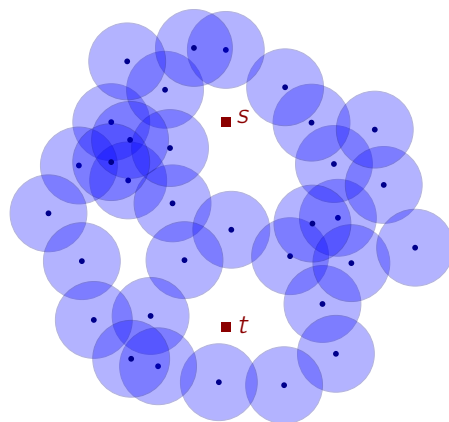
kot

$$\begin{aligned} \min \quad & |\mathcal{D}'| \\ \text{tako da} \quad & \mathcal{D}' \subset \mathcal{D} \\ & \mathcal{D}' \text{ ločuje } s \text{ in } t. \end{aligned}$$

Polinomsko časovno zahtevnost algoritma $\mathcal{O}(n^2 \log^3 n)$ dosežemo tako, da za del rešitve uporabimo algoritem prvega problema za izgradnjo drevesa najkrajših poti. Oba problema sta tako povezana in ju je smiselno obravnavati skupaj.

Enotski krogi so najbolj standarden geometrijski model, ki se uporablja za brezžična senzorska omrežja (zanj se pogosto uporablja kratica UDG). Tak model predstavlja ustrezen kompromis med enostavnostjo in natančnostjo, saj je za bolj natančne modele dosti težje najti učinkovite algoritme. To pomeni tudi, da je izkoriščanje geometrijskih lastnosti modela UDG bolj zahtevno, algoritmi, ki se zanašajo na tak model, pa zaradi nerealističnih predpostavk pogosto odpovejo v praksi (kjer komunikacijski doseg ni idealen krog) [15]. Drevesa najkrajših poti v grafu enotskih krogov igrajo pomembno vlogo pri usmerjanju in se pogosto uporabljajo pri bolj kompleksnih nalogah. Primer take uporabe v senzorskih omrežjih je pri algoritmu za prepoznavanje meja, ki tvorijo luknje s premalo senzorskimi vozlišči. Zaradi takih lukenj veliko požrešnih algoritmov za posredovanje paketov po omrežju odpove, ker predpostavljajo, da je omrežje dovolj gosto [12].

Trenutno poznamo tri algoritme, ki problem najkrajših poti v grafu enotskih krogov rešijo v času $\mathcal{O}(n \log n)$. Prvega, čigar avtorja sta Cabello in Jejčić [7], smo se odločili opisati v magistrskem delu in njegovo implementacijo uporabiti tudi pri problemu minimalne ločitve. Drugi algoritem so razvili Efrat, Itai in Katz [11] in ga je bistveno težje implementirati, poleg tega pa ima hujše konstante skrite v \mathcal{O} -notaciji. Tretji algoritem, ki je bil odkrit pred kratkim, je prav tako možno implementirati in bi se v praksi najbrž obnesel zelo dobro [8]. Ravno zaradi dejstva, da je bil odkrit zelo nedavno, ga nismo



Slika 1.1: Slikovna predstavitev problema. Točki s in t ločuje množica krogov, definiranih z njihovimi središčnimi točkami.

vključili v magistrsko nalogo.

Problem minimalne ločitve je obravnavan že v [6], kjer je podan tudi algoritem s časovno zahtevnostjo $\mathcal{O}(n^3)$ v najslabšem primeru, ki deluje za poljubne like. Z omejitvijo likov na enotne kroge in uporabo več različnih orodij iz računske geometrije lahko zmanjšamo časovno zahtevnost, lažje izvedljiva pa postane tudi implementacija algoritma.

V poglavju 2 je na kratko opisana programska knjižnica CGAL, ki smo jo uporabili pri implementaciji obeh algoritmov. Zanje smo se odločili, ker omogoča dostop do že implementiranih različnih geometrijskih podatkovnih struktur. Pri opisu smo se osredotočili na osrednje ideje jedra knjižnice, na katerem temeljijo vsi ostali deli paketa, ter tiste strukture, ki so bile uporabljene pri implementaciji algoritmov. V poglavju 3 je predstavljen teoretični del algoritmov. Podrobno so opisane vse podatkovne strukture, celotna poteka algoritmov ter njuna časovna in prostorska kompleksnost. V poglavju 4 je predstavljena implementacija algoritmov. Ponovno so opisane vse uporabljene podatkovne strukture - tokrat z implementacijskega vidika - ter vse razširitve in spremembe, ki smo jih dodali h knjižnici CGAL. Podrobno so opisani tudi deli algoritmov, kjer se pojavijo razlike med teoretičnim opisom in implementacijo. V poglavju 5 so predstavljeni rezultati; prikazani so

časi izvajanja in prostorska poraba celotnega algoritma za različno število vhodnih točk.

Poglavje 2

CGAL in uporabljene matematične strukture

V tem poglavju so na kratko opisani programska knjižnica CGAL in podatkovne strukture v dvodimenzionalnem prostoru, uporabljene v naših algoritmih. Za bolj podroben opis glej (citiraj van krevelde, cgal.org in nekaj za bfs, sssp in grid graf).

2.1 CGAL

CGAL (Computational Geometry Algorithms Library) je programski paket, ki omogoča enostaven dostop do učinkovitih in zanesljivih geometrijskih algoritmov v obliki C++ knjižnice. Uporablja se na različnih področjih, ki potrebujejo geometrijsko računanje, kot so geografski informacijski sistemi, računalniško podprto načrtovanje, molekularna biologija, medicina, računalniška grafika in robotika. Knjižnica vsebuje:

- jedro z geometrijskimi osnovami, kot so točke, vektorji, črte, predikati (na primer za relativne položaje točk) in opravila, kot so izračunavanje presekov ter razdalj
- osnovno knjižnico, ki je zbirka standardnih podatkovnih struktur in

geometrijskih algoritmov, kot so konveksna ovojnica v 2D/3D, Delaunayova triangulacija v 2D/3D, ravninski zemljevid, polieder, Voronoijev diagram, območna drevesa (range trees) itd.

- podporna knjižnica, ki ponuja vmesnike do drugih paketov, na primer za V/I in vizualizacijo [5].

Ker cilj magistrske naloge ni bila implementacija osnovnih geometrijskih struktur, ki sicer predstavljajo pomembno osnovo obeh algoritmov, smo se odločili uporabiti omenjeno knjižnico. Posledično je implementacija napisana v jeziku C++. Knjižnica ni vedno ustrezala vsem potrebam implementacije algoritmov, zato smo pri nekaterih njenih strukturah morali spremeniti ali dodati kakšno novo logiko.

2.1.1 Jedro knjižnice

Jedro sestavljajo nespremenljivi geometrijski primitivni objekti konstantne velikosti (točke, vektorji, daljice, trikotniki...) ter funkcije in predikati, ki jih lahko kličemo nad njimi. Poleg tega ponuja osnovne operacije, kot so računanje razdalje, afina transformacija in zaznava presečišč.

Eden od osnovnih problemov, s katerimi se soočimo pri implementaciji geometrijskih algoritmov, je eksaktno računanje z realnimi števili. Zaožroževanje pri uporabi aritmetike nad števili, predstavljenimi s plavajočo vejico, lahko privede do nekonsistentnih odločitev in nepričakovanih napak, kar že pri nekaterih osnovnih geometrijskih algoritmih. CGAL ponuja izbiro številskih tipov in aritmetike. Pri uporabi eksaktne aritmetike dobimo točne rezultate, a po drugi strani se čas izvajanja in prostorska poraba algoritma povečata.

2.1.1.1 Predstavitev objektov jedra

Vsi objekti jedra so predloge s parametrom, ki omogoča uporabniku izbiro predstavitve objektov. Dve družini modelov predstavitve temeljita na kartezični predstavitvi točk, dve pa na homogenični predstavitvi. Pri kartezični

predstavitvi je vsaka točka predstavljena s kartezičnimi koordinatami, ki privzamejo d -dimenzionalni afini evklidski prostor s koordinatnim izhodiščem in d pravokotnimi osmi. Točke (in vektorji) so potem predstavljeni z d -terko $(c_o, c_1, \dots, c_{d-1})$. Pri homogeni predstavitvi so točke predstavljene z $(d + 1)$ -terko (h_o, h_1, \dots, h_d) . V kartezično predstavitev jih lahko pretvorimo s formulo $c_i = h_i/h_d$, ena od možnih homogenih predstavitev točke s kartezičnimi koordinatami pa je $(c_o, c_1, \dots, c_{d-1}, 1)$ (ker homogene koordinate niso enolične). Prednost uporabe homogenih koordinat v CGAL-u je, da se z njimi izognemo uporabi deljenja. Vmesnik objektov v jedru je napisan tako, da hkrati omogoča uporabo kartezične in homogene predstavitve.

Številski tipi

Obe družini predstavitve objektov sta nadalje parametrizirani s številskim tipom za koordinate. CGAL ponuja dva tipa predloge za številске tipe. Eden se nanaša na algebrsko strukturo kolobar, kjer je možno seštevati, odštrevati in množiti, drugi pa na polje, kjer je poleg omenjenih operacij možno tudi deliti. Vgrajeni tip *int* tako spada v prvo skupino, ker operacija deljenja ni inverz množenja, *double* pa v drugo. Če želimo nad katerokoli algebrsko strukturo uporabiti številski tip s poljubno natančnostjo, lahko uporabimo tip *MP_Float*, ki ga ponuja sam CGAL, ali tipe, za katere v CGAL-u obstajajo ovojni razredi ali vmesniki. Primer so tipi iz GMP (*GNU Multiple Precision Arithmetic Library*) in LEDA (*Library of Efficient Data types and Algorithms*) [13].

Če se pri računanju zanašamo samo na vhodne podatke in ne računamo novih točk, lahko uporabimo kartezično predstavitev točk, celo tako s kolobarskim številskim tipom. To velja med drugim za taka računanja, ki vrednotijo predikate, pri katerih ne gre za nič drugega kot računanje determinante. Primeri so računanje triangulacije in konveksne ovojnice. Če pa algoritmi obsegajo tudi računanja novih točk, prihaja do uporabe deljenja, zato moramo uporabiti kartezično predstavitev s številskim tipom za polja - recimo *double* - ali homogeno predstavitev. *double* sicer ni popolnoma na-

tančen, a ga ponavadi uporabljajo tisti, ki jim je pomembna hitrost in se zadovoljijo tudi s približnimi rezultati.

Algoritmi in podatkovne strukture v osnovni knjižnici CGAL so med drugim parametrizirani z razredom geometrijskih značilnosti, ki zajema objekte, nad katerimi algoritmi in strukture delujejo. Za večino slednjih je dovolj za to uporabiti jedro.

2.1.1.2 Geometrija in predikati jedra

CGAL razlikuje med točkami, vektorji in smermi. Točka je točka v evklidskem prostoru E^d , vektor je razlika dveh točk p_1, p_2 ter označuje smer in razdaljo od p_1 do p_2 v vektorskem prostoru \mathbb{R}^d , smer pa je vektor, pri katerem pozabimo na njegovo dolžino. Gre za različne matematične koncepte, ki se pri afinih transformacijah ne obnašajo enako. Poleg tega so v CGAL-u na voljo premice, poltraki, daljice, ravnine, trikotniki, tetraedri, krožnice, sfere, pravokotniki in kvadri.

Dve poljubni točki na premici definirata njeno orientacijo ter razdelitev ravnine na pozitivno in negativno stran. Poltrak je orientiran iz smeri njegovega končnega vozlišča, vozlišča daljic pa so urejena in definirajo isto orientacijo kot premica, na kateri daljice ležijo. Vsi geometrijski objekti imajo metodo za testiranje relativne lokacije dane točke glede na objekt. Ker so objekti in njihove meje predstavljene z istim tipom (na primer sfera in krogla ali krožnica in krog), svojo okolico razdelijo na omejen in neomejen del (krožnica) ali dva neomejena dela (hiperravnina). Vsi objekti so privzeto orientirani, kar pomeni, da je eden od delov označen kot pozitivna, drugi pa kot negativna stran. Prej omenjena metoda torej določa, ali se dana točka nahaja na pozitivni strani, negativni strani ali na meji objekta.

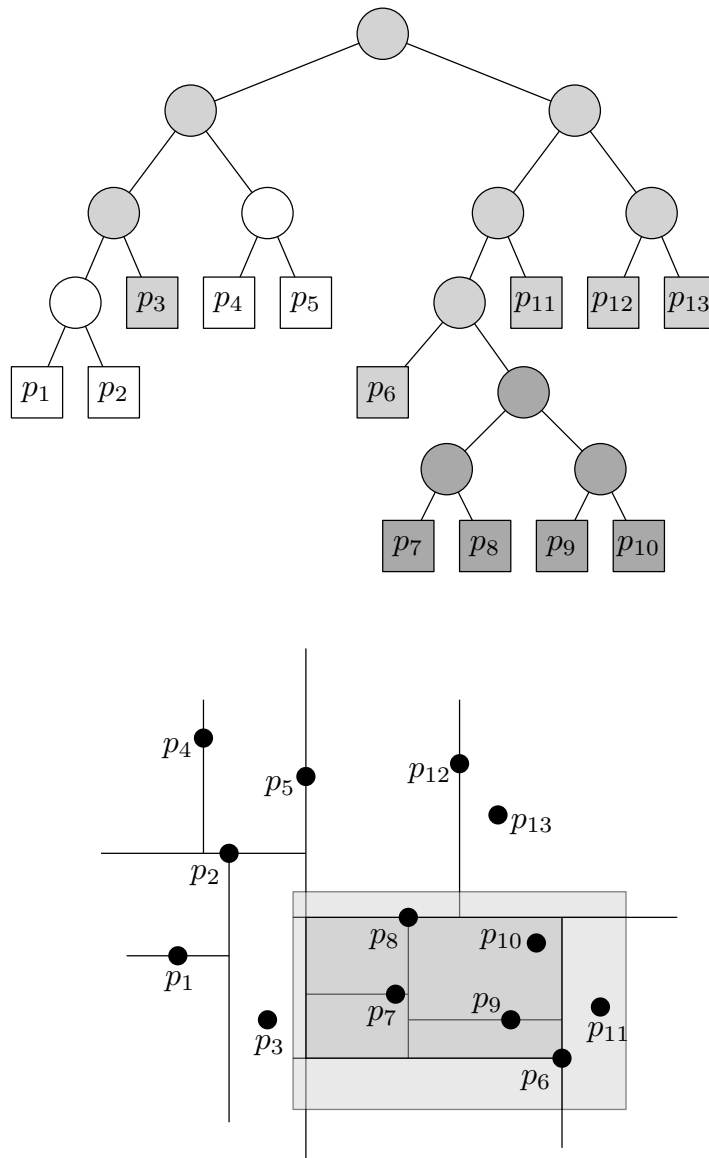
Predikati so osrčje jedra, saj predstavljajo osnovno enoto pri izgradnji algoritmov, zato je njihova pravilnost ključnega pomena pri pravilni implementaciji. Predikati v CGAL-u ne vračajo nujno logičnih vrednosti, ampak tudi vrednosti tipa *enum*. Na voljo so predikati za orientacijo množice točk, primerjavo točk glede na dano zaporedje, primerjavo razdalj in testi

za vsebovanost točke v krogu. Vse ostale metode, ki ne vračajo logičnih ali *enum* vrednosti, se imenujejo konstrukcije, ker vsebujejo računanja novih numeričnih vrednosti, ki so lahko nenatančna, če ni uporabljeno jedro z eksaktnim številskim tipom. Primer take metode, ki je na voljo za večino geometrijskih objektov, je afina transformacija. Druga dva tipična primera sta računanje presečišč med objekti in kvadratne razdalje [5].

2.2 Kd drevesa

Kd drevo je podatkovna struktura za organizacijo k -dimenzionalnih točk z razbitjem prostora. Najpogosteje se uporablja za območna iskanja in iskanja najbližjih sosedov. Kd drevo je v osnovi binarno drevo, kjer vsako notranje vozlišče razdeli prostor na dva polprostora (polravnini), ki ju ločuje hiperravnina (premica). Točke levo od hiperravnine so vsebovane v levem poddrevesu vozlišča, točke desno od hiperravnine pa v desnem poddrevesu. Smer hiperravnine je odvisna od tega, po kateri dimenziji vozlišče razdeli prostor. Za i -ti nivo drevesa velja, da je hiperravnina, ki razdeli prostor, pravokotna na koordinatno os, ki predstavlja $j = ((i - 1) \bmod k + 1)$ -to dimenzijo prostora. Vozlišče na drugem nivoju dvodimenzionalnega kd drevesa tako razdeli ravnino s premico, ki je vzporedna abscisni osi. Točke v spodnji polravnini se nahajajo v levem poddrevesu vozlišča, točke v zgornji polravnini pa v desnem poddrevesu. Hiperravnina, ki jo predstavlja neko vozlišče v v i -tem nivoju, gre skozi tisto točko, čigar j -ta koordinata predstavlja mediano v množici vseh točk, ki se nahajajo v drevesu s korenem. Točke so shranjene v listih drevesa.

Časovna zahtevnost izgradnje drevesa je $\mathcal{O}(n \log n)$ (na vsakem nivoju drevesa je potrebno izračunati mediano, kar vzame $\mathcal{O}(n)$ časa), prostorska zahtevnost drevesa pa $\mathcal{O}(n)$ [3].



Slika 2.1: Dvodimenzionalno kd drevo.

2.3. DREVEŠA NAJKRAJŠIH POTI Z ENO IZVORNO TOČKO (SSSP)

2.2.1 Poizvedbe

Časovna zahtevnost poizvedbe je $\mathcal{O}(n^{(1-\frac{1}{d})} + k)$, kjer je k število poročanih točk. V splošnem za dvodimenzionalno kd drevo velja, da je območje $reg(v)$, ki ga predstavlja vozlišče v , pravokotnik, ki je lahko neomejen z več strani. Omejen je s hiperravninami (premicami), shranjenih v starših v . Točka je vsebovana v drevesu s korenem v , če je vsebovana v $reg(v)$. Drevo s korenem v med poizvedbo obiščemo le, če poizvedbeno območje (pravokotnik) seka $reg(v)$. Če je $reg(v)$ v celoti vsebovana v poizvedbenem območju, v rezultat dodamo celotno poddrevo v . Če pridemo do lista, preverimo, če je vozlišče shranjeno v njem vsebovano v območju. Primer poizvedbe je prikazan na sliki 2.1 (pri čemer je treba opozoriti, da pri drevesu na sliki za razdelitev prostora ni bila vedno izbrana mediana).

2.2.2 Kd drevesa v CGAL-u

Implementacija podatkovne strukture dosledno sledi njenemu teoretičnemu opisu. Za poizvedbe je uporabljen standarden algoritem, ki rekurzivno preišče drevo. Ko pridemo do nekega vozlišča v drevesu, najprej obiščemo otroka, ki je bližje poizvedbeni točki.

2.3 Drevesa najkrajših poti z eno izvirno točko (SSSP)

Drevo najkrajših poti z eno izvirno točko je vpeto drevo T grafa G s korenem v , za katerega velja, da je razdalja poti od v do $u \in T$ enaka razdalji najkrajše poti od v do u . Tako drevo lahko zgradimo s pomočjo algoritma za iskanje najkrajše poti med dvema danima točkama (tipična primera sta Dijkstrov in Bellman-Fordov algoritem). Izvirno točko v fiksiramo in poženemo algoritem za vse pare (v, u) , $v, u \in G$. Časovna kompleksnost Dijkstrovega algoritma je $\mathcal{O}((m + n) \log n)$, kjer je n število vozlišč, m pa število povezav v G . Če predpostavimo, da za vhodni graf G veljajo določene omejitve (v primeru

našega algoritma povezava med vozliščema v grafu obstaja samo, če je njuna razdalja največ 1), ki se jih da izkoristiti pri izgradnji hitrejšega algoritma, se časovna kompleksnost lahko izboljša.

2.4 Graf kvadratne mreže

Dvodimenzionalni graf kvadratne mreže je $m \times n$ mrežni graf $G_{m,n}$, ki predstavlja kartezični produkt dveh grafov poti z $n - 1$ in $m - 1$ povezavami. Vsi mrežni grafi so dvodelni, kar se da enostavno pokazati s tem, da se vozlišča pobarva z dvema barvama z vzorcem šahovnice.

Vozlišča grafa ponavadi sovpadajo s točkami v ravnini, pri katerih koordinate predstavljajo cela števila: abscisne koordinate imajo vrednosti $1, \dots, n$, ordinatne pa $1, \dots, m$. Dve vozlišči sta povezani, če je njuna razdalja enaka 1, zato takemu grafu pravimo tudi graf enotskih razdalj.

2.5 Delaunayeva triangulacija

Delaunayeva triangulacija nad točkami P je triangulacija $DT(P)$, ki izpolnjuje Delaunayev pogoj. Ta pravi, da se nobena točka iz P ne nahaja znotraj poljubnemu trikotniku očrtanega kroga triangulacije. Taka triangulacija maksimizira minimalni kot med vsemi koti trikotnikov. Množica P s kolinearnimi točkami predstavlja izrojen primer, za katerega ne obstaja nobena Delaunayeva triangulacija. Če točke v P ležijo na istem krogu, rešitev ni enolična.

Med točko p in njenim najbližjim sosedom q , kjer $p, q \in P$, vedno obstaja povezava $pq \in E(DT(P))$, ker je graf najbližjih sosedov nad množico P podgraf Delaunayeve triangulacije. Za dolžino najkrajše poti $dist(\pi(p, q))$ med dvema vozliščema p, q v Delaunayevem grafu velja:

$$dist(\pi(p, q)) \leq 2.418 \times dist(p, q). \quad (2.1)$$

Za izgradnjo triangulacije poznamo več algoritmov. Najpogosteje uporabljeni so:

algoritem z obračanjem Pomembna lastnost dveh trikotnikov ABD in BCD s skupno stranico BD v Delaunayevi triangulaciji je, da je vsota kotov α in γ manjša od 180° . Če ta lastnost ne velja, jo lahko dosežemo z obračanjem trikotnikov, tako da dobimo trikotnika ABC in ACD s skupno stranico AC. Algoritem z obračanjem zgradi navadno triangulacijo, nato pa izvaja operacijo obračanja, dokler vsi trikotniki ne izpolnjujejo Delaunayevga pogoja. Časovna zahtevnost v najslabšem primeru je $\mathcal{O}(n^2)$.

inkrementalni algoritem z vstavljanjem Dodaja točke zaporedoma v obstoječo triangulacijo. Ko je nova točka dodana, se tiste dele Delaunayevga grafa, na katere nova točka vpliva, popravi z obračanjem trikotnikov. V najslabšem primeru je časovna zahtevnost algoritma $\mathcal{O}(n^2)$, ker moramo za vsako dodano točko najti trikotnik, ki jo vsebuje ($\mathcal{O}(n)$), in popraviti vse trikotnike ($\mathcal{O}(n)$). Z nekoliko izboljšanim algoritmom za iskanje lokacije nove točke je pričakovana časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n \log n)$, ker je v povprečju v vsakem koraku obrnjenih $\mathcal{O}(1)$ trikotnikov, iskanje lokacije nove točke pa vzame v povprečju $\mathcal{O}(\log n)$ časa.

deli in vladaaj Točke so rekurzivno razdeljene v dve množici z določeno premico. Delaunayeva triangulacija je izračunana za vsako množico točk posebej, nato pa sta obe triangulaciji združeni vzdolž premice. Združevanje vzame $\mathcal{O}(n)$ časa, tako da je časovna zahtevnost algoritma $\mathcal{O}(n \log n)$. V praksi je deli in vladaaj najhitrejši algoritem za izgradnjo Delaunayeve triangulacije.

2.5.1 Delaunayeva triangulacija v CGAL-u

Razred `Delaunay_triangulation_2` implementira Delaunayevu triangulacijo in deduje iz razreda `Triangulation_2`. Iz slednjega uporablja nekatere metode,

kot so vstavljanje ali lociranje točke, nekatere pa tudi povozi, kot je recimo obračanje trikotnikov, ker trikotnikom v navadni triangulaciji ni potrebno izpolnjevati Delaunayevega pogoja. Poleg tega vsebuje dodatne metode za iskanje najbližjega sosedu in izgradnjo elementov Delaunayevi triangulaciji dualnega Voronoijevega diagrama.

Razred je parametriziran z dvema predlogama. Prvi je razred geometrijskih značilnosti, drugi pa razred podatkovne strukture za triangulacijo. Za slednjega CGAL ponuja privzeti razred *Triangulation_data_structure_2*, ki vsebuje zbirki vozlišč in lic. Razred geometrijskih značilnosti mora biti model koncepta *DelaunayTriangulationTraits_2*, ki je dodelana verzija koncepta *TriangulationTraits_2*. Ta vsebuje predikata za primerjavo koordinat dveh točk in test orientacije treh točk. *DelaunayTriangulationTraits_2* dodatno vsebuje še predikat *side_of_oriented_circle*, ki za štiri dane točke p, q, r, s določi položaj točke s glede na krožnico, ki gre skozi točke p, q in r .

Implementacija izgradnje triangulacije uporablja inkrementalni algoritem z obračanjem [16].

2.5.1.1 Operacije nad strukturo

lociranje točke Je implementirano s sprehodom po povezavah. Sprehod se začne pri vozlišču podanega lica, ali pri naključnem vozlišču, če lica ni podano. Povprečna časovna zahtevnost je $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

vstavljanje nove točke Najprej je uporabljena metoda *locate* za lociranje lica, ki vsebuje novo točko, nato pa se lica razbije na tri dele. Novo triangulacijo se nato popravi z $\mathcal{O}(d)$ obračaji (v povprečju $\mathcal{O}(1)$), kjer je d stopnja novega vozlišča

iskanje najbližjega sosedu Uporabljena je metoda *locate*, nato pa potrebujemo $\mathcal{O}(1)$ časa za najdbo najbližjega sosedu pri enakomerno porazdeljenih vozliščih, v najslabšem primeru pa $\mathcal{O}(n)$ časa

2.5.1.2 Hierarhija triangulacij

Za učinkovito lociranje točk lahko uporabimo razred

Triangulation_hierarchy_2, ki hrani hierarhijo triangulacij. Na najnižjem nivoju se nahaja izvorna triangulacija, nad katero se izvajajo operacije in lociranje točk. Na vsakem višjem nivoju je nato zgrajena triangulacija nad manjšo množico naključno izbranih vozlišč iz triangulacije na predhodnem nivoju (recimo 3% vozlišč). Lociranje točke se izvede od zgoraj navzdol po strukturi: na najvišjem nivoju se naivno izvede poiščba najbližjega sosedu, nato pa se na vsakem naslednjem nivoju najbližjega sosedu poišče s sprehodom po povezavah z začetkom pri najbližjem sosedu, najdenem na višjem nivoju. Taka struktura je najbolj primerna ravno za Delaunayeve triangulacije. Poleg hitrega delovanja na realnih podatkih ima dobro časovno zahtevnost v najslabšem primeru in nizko prostorsko kompleksnost [10].

2.6 Voronoijev diagram

Voronoijev diagram je definiran na množici točk, imenovanih Voronoijeva središča (angleško *sites*), in z metriko oziroma funkcijo razdalje med točkami.

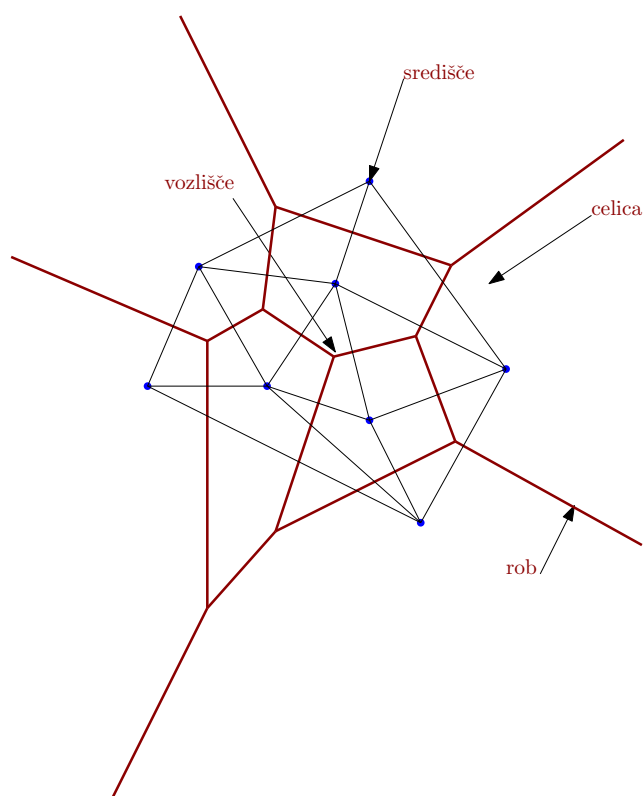
Naj bo $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ množica Voronoijevih središč in naj bo $\delta(x, S_i)$ funkcija razdalje med središčem S_i in neko točko $x \in \mathbb{R}^2$. Množica točk V_{ij} , ki so bližje središču S_i kot središču S_j na podlagi funkcije $\delta(x, \cdot)$, je množica:

$$V_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta(x, S_i) < \delta(x, S_j)\}. \quad (2.2)$$

Množico V_i točk, ki so bližje središču S_i kot kateremu koli drugemu središču, lahko potem definiramo kot množico:

$$V_i = \bigcap_{i \neq j} V_{ij}. \quad (2.3)$$

Množico V_i imenujemo tudi Voronoijeva celica ali Voronijevo lice središča S_i . Lokus točk, ki so enako oddaljene od dveh središč, se imenuje Voronijev bisektor. Povezani podmnožici slednjega pravimo Voronoijev rob. Točki,



Slika 2.2: Evklidski Voronoijev diagram brez degeneracij, označen z rdečimi odebeljenimi povezavami. Voronoijeva središča, obarvana z modro barvo, predstavljajo hkrati tudi vozlišča v Delaunayevi triangulaciji (dualni Voronoijevemu diagramu), ki je označena s tanjšimi črnimi povezavami.

ki je enako oddaljena od treh ali več središč, pravimo Voronoijevo vozlišče. Voronoijev diagram na množici S in z metriko $\delta(x, \cdot)$ je zbirka Voronoijevih celic, robov in vozlišč ter je primer ravninskega grafa.

Celice si ponavadi predstavljamo kot 2-dimenzionalne, robove kot 1-dimenzionalne in vozlišča kot 0-dimenzionalne objekte. Za določene kombinacije središč in metrik to ne drži. Voronoijev diagram z metriko L_1 ali L_∞ lahko na primer vsebuje dvodimenzionalne robove. Takim Voronoijevim diagramom, za katere zgornja omejitev drži in imajo lastnost, da so njihove celice preprosto povezano območje v ravnini, pravimo preprosti Voronoijevi diagrami. Najbolj tipičen primer slednjih je evklidski Voronoijev diagram (slika 2.2), ki ga uporabljamo v našem algoritmu.

2.6.1 Voronoijev diagram v CGAL-u

Knjižnica CGAL vsebuje razred `Voronoi_diagram_2` $\langle DG, AT, AP \rangle$, ki deluje kot prilagoditveni paket. Ta Delaunayevo triangulacijo na podlagi podanih kriterijev prilagodi pripadajočemu Voronoijevemu diagramu, ki je predstavljen kot struktura DCEL (*doubly connected edge list*). Paket je torej zasnovan tako, da na zunaj deluje kot struktura DCEL, znotraj pa v resnici hrani strukturo grafa, ki predstavlja graf triangulacije.

Razred je parametriziran s tremi predlogami. Prvi, *DT*, mora biti model koncepta razreda *DelaunayGraph_2*. Primeri takih struktur so Delaunayeva triangulacija, navadna triangulacija, Apollonov graf in hierarhija triangulacij. Druga predloga, *AT*, predstavlja lastnosti pretvorbe Delaunayeve triangulacije v Voronoijev diagram ter definira tipe struktur in funktorje, ki jih razred potrebuje za dostop do geometrijskih lastnosti Delaunayeve triangulacije. Funktor mora biti recimo definiran za konstrukcijo Voronoijevih vozlišč iz njihovih dualnih lic v Delaunayevi triangulaciji. Pomemben je tudi funktor za poizvedbe najbližjih središč, ki kot rezultat vrne informacijo o tem, koliko in katera središča so enako oddaljena od točke poizvedbe. Bolj konkretno, rezultat je Delaunayevo vozlišče, lice ali rob, na katerem točka poizvedbe leži oziroma z njim sovpada. Če je na primer točka poizvedbe q , enako oddaljena

od treh središč, potem sovpada z nekim Voronoijevim vozliščem, zato funk-
tor vrne Delaunayevo lice, ki je dualno temu vozlišču. Razred, ki predstavlja
Delaunayevo lice, omogoča iteracijo po Delaunayevih vozliščih, ki definirajo
lice, ta pa so dualna trem Voronoijevim središčem.

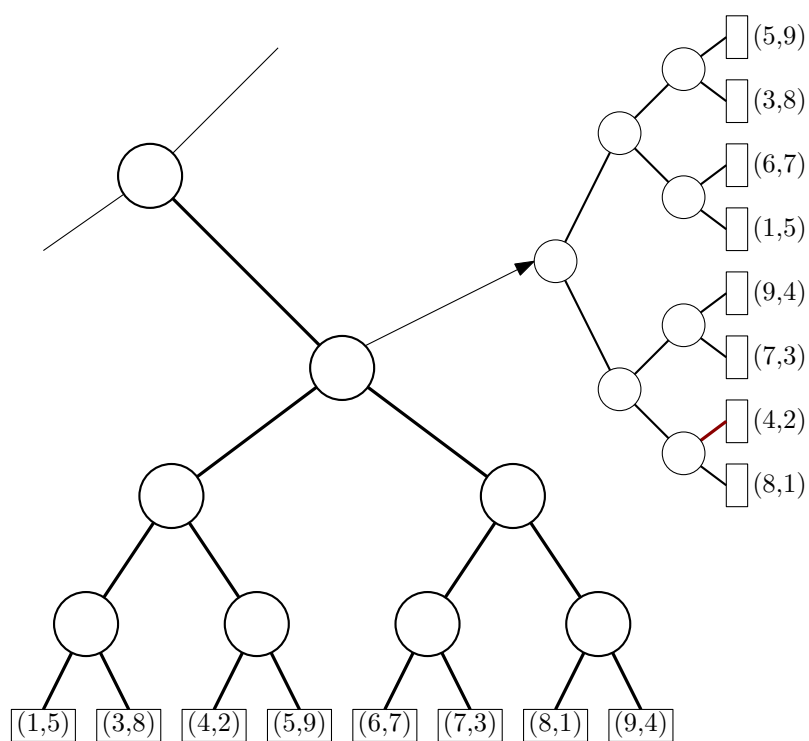
Tretja predloga predstavlja režim prilagoditve Delaunayeve triangulacije
Voronoijevemu diagramu. Če množica središč, ki določa graf Delaunayeve
triangulacije, vsebuje podmnožice središč, ki so v izrojenem položaju, ima
dualni graf - Voronoijev diagram - lahko robove z dolžino nič in po možnosti
tudi celice s ploščino nič. Režim prilagoditve določa, kaj storiti v takih pri-
merih. V našem projektu smo uporabili režim

Delaunay_triangulation_caching_degeneracy_removal_policy_2. Kot pove že
ime, ta tip poskrbi, da so vse zgoraj opisane celice in robovi odstranjeni
iz Voronoijevega diagrama. Poleg tega uporablja predpomnilnik pri ugo-
tavljanju, ali ima določena celica oziroma rob degenerirane lastnosti. Ker
je slednje precej zahtevna operacija, se ta tip izplača pri vhodnih podatkih
(središčih) z veliko izrojenimi primeri [14].

2.7 Območna drevesa

Območna drevesa so še ena podatkovna struktura za poizvedbe nad pra-
vokotnimi območji. V primerjavi s kd drevesi imajo boljši čas poizvedbe
($\mathcal{O}(\log^2 n + k)$), ampak slabšo prostorsko kompleksnost ($\mathcal{O}(n \log n)$). Na-
mesto, da razdelimo prostor izmenično po abscisni in ordinatni osi, imamo
tukaj kot glavno drevo uravnoteženo dvojiško iskalno drevo \mathcal{T} , zgrajeno nad
prvimi koordinatami točk (koordinatami x). Vsako vozlišče v drevesa ima
potem kazalec na uravnoteženo dvojiško iskalno poddrevo $\mathcal{T}_{assoc}(v)$, zgrajeno
nad drugimi (y) koordinatami točk, ki so shranjene v listih poddrevesa v v \mathcal{T}
s korenem v . Primer drevesa je prikazan na sliki 2.3.

Poizvedba $[x : x'] \times [y : y']$ v taki strukturi poteka na sledeč način: v
glavnem drevesu iščemo z intervalom $x : x'$, dokler ne pridemo do vozlišča
 v_{split} , kjer se iskanje razcepi na dva dela. Iskanje nadaljujemo v smeri nje-



Slika 2.3: Dvodimenzionalno območno drevo.

govega levega otroka in pri vsakem obiskanem vozlišču v , kjer se pot iskanja nadaljuje levo, označimo njegovega desnega otroka. Podobno nadaljujemo v smeri desnega otroka vozlišča v_{split} in označimo levega otroka obiskanega vozlišča v , pri katerem se iskanje nadaljuje v desno. V tem trenutku imamo označenih $\mathcal{O}(\log n)$ poddreves. Za vsako poddrevo s korenom v $P(v)$ naredimo poizvedbo $[y : y']$ na sekundarnem drevesu $\mathcal{T}_{assoc}(v)$, ki hrani vse točke iz $P(v)$.

Dejanske točke so shranjene v drevesih \mathcal{T}_{assoc} . Na danem nivoju drevesa \mathcal{T} je neka točka $p \in P$ shranjena v natanko enem drevesu \mathcal{T}_{assoc} . Iz tega sledi, da vsa drevesa \mathcal{T}_{assoc} na poljubnem nivoju drevesa T porabijo skupaj $\mathcal{O}(n)$ prostora. Ker je globina drevesa \mathcal{T} $\mathcal{O}(\log n)$, je prostorska zahtevnost območnih dreves $\mathcal{O}(n \log n)$.

Časovna zahtevnost enodimenzionalne poizvedbe v poddrevesu $\mathcal{T}_{assoc}(v)$ je $\mathcal{O}(\log n + k_v)$, kjer je k_v število vrnjenih točk. Celotni čas poizvedbe je $\sum_v \mathcal{O}(\log n + k_v)$, torej vsota vseh obiskanih vozlišč v T . Ker je dolžina obeh iskalnih poti (ki se razcepita pri vozlišču v_{split}) enaka $\mathcal{O}(\log n)$, in je vsota $\sum_v k_v$ enaka številu vseh vrnjenih točk poizvedbe k , je časovna zahtevnost celotne poizvedbe $\mathcal{O}(\log^2 n + k)$ [4].

2.7.1 Območna drevesa v CGAL-u

Vhodni podatkovni tip za d -dimenzionalno območno drevo je zbirka, ki vsebuje podatkovni tip za d -dimenzionalno točko in po želji tip vrednosti, s katerim lahko shranimo poljubni podatek. Primer uporabe slednjega bi lahko bila množica točk, ki sestavljajo več večkotnikov. Vsako vozlišče drevesa bi potem kot ključ shranilo neko točko, kot vrednost pa poligon, kateremu ta točka pripada.

Razred za območno drevo je popolnoma generičen, kar pomeni, da z njim lahko definiramo večnivojska drevesa. d -dimenzionalno večnivojsko drevo (z d nivoji) je na d -tem nivoju preprosto drevo, na k -tem nivoju, $1 \leq k \leq d-1$, pa drevo, kjer vsako notranje vozlišče vsebuje večnivojsko drevo dimenzije $d-k+1$. $k-1$ -dimenzionalno drevo, ki je vgnezdено drevo v k -dimenzionalnem

drevesu \mathcal{T} , imenujemo podnivojsko drevo drevesa \mathcal{T} .

Razred je neodvisen tako od vrste podatkov kot od njihove konkretne predstavitve. Za tako splošnost moramo definirati, kako je predstavljeno drevo na vsakem nivoju in kako so vhodni podatki organizirani. Drevesa z dimenzijo k , $1 < k < 4$, so zato v CGAL-u definirana v lastnih razredih, pripravljenih za takojšnjo uporabo. Ko je drevo enkrat zgrajeno, dodajanje ali brisanje podatkov iz njega ni več mogoče.

Drevo je parametrizirano s tremi predlogami: podatki, oknom in geometrijskimi značilnostmi. Prvi definira vrsto podatkov, drugi poizvedbeno območje, tretji pa podajajo implementacijo metod, ki jih drevo uporablja za dostop do podatkov. Da bi se izognili uporabi vgnezdjenih predlog za argumente (do česar pride, če bi drevo na vsakem nivoju imelo predlogo za tip poddrevesa), so drevesa definirana s pomočjo objektnega programiranja. CGAL je definiral virtualni bazni razred *Tree_base*, iz katerega je izpeljan razred *Range_tree_d*. Konstruktorju slednjega moramo kot argument podati prototip poddrevesa tipa *Tree_base*, ki je lahko zopet objekt razreda *Range_tree_d*. Za zaustavitev rekurzije je iz *Tree_base* izpeljan še razred *Tree_anchor*, čigar konstruktor ne pričakuje nobenega argumenta. Tako opisana konstrukcija sledi modelu prototipa in v njej je poddrevo sicer definirano s pomočjo objektnega programiranja v času izvajanja programa, kar pa predstavlja zanemarljiv časovni strošek.

Poglavje 3

Teoretični opis algoritmov

Naj bo P množica točk, ki predstavljajo središča krogov \mathcal{D} . P predstavlja vhod našega algoritma in vse operacije ter uporabljene podatkovne strukture se vrtijo okrog te množice. Kardinalnost množice je enaka n .

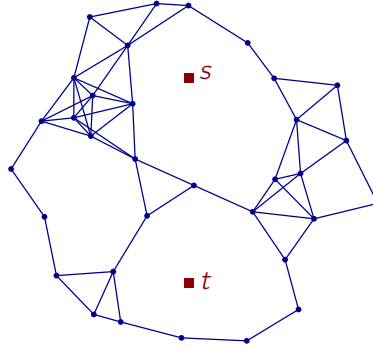
Naj bo $G(P)$ graf z množico vozlišč P s povezavo med točkama $p, q \in P$, če velja $|pq| \leq 1$, kjer je uporabljena evklidska metrika (glej sliko 3.1). Vse povezave so neutežene.

V nadaljevanju bomo namesto $G(P)$ pisali preprosto G , brez izgube splošnosti pa predpostavili, da je $z = (0, 0)$ in $z' = (0, s)$. zz' je torej daljica, v nadaljevanju imenovana σ , ki je vsebovana v koordinatni osi y . Če dana vhodna daljica ne leži na osi y , lahko naredimo translacijo nad σ in P . Če daljica ni niti navpična, lahko naredimo tudi rotacijo daljice in točk, kjer pa je treba upoštevati, da pri tem pride do numeričnih napak in se prave razdalje med točkami izgubijo.

3.1 Drevo SSSP

3.1.1 Eksplicitna uporaba preiskovanja v širino (BFS)

Najenostavnejši način izgradnje drevesa najkrajših poti nad množico točk P je uporabiti preiskovanje v širino nad grafom $G(P)$. V vrsti hranimo še ne



Slika 3.1: Graf $G(P)$, zgrajen nad množico P v sliki 1.1.

obiskane točke, ki so sosedne že obiskanim (na začetku je to izbrani koren). Vsaki točki, ki jo obiščemo, nastavimo za starša sosedno točko, prek katere smo do nje prišli, in ji nastavimo razdaljo, ki je za 1 večja od razdalje nje-nega starša. Prav tako jo označimo kot obiskano točko in s tem preprečimo, da bi neko točko dodali v vrsto več kot enkrat. Psevdokoda algoritma je prikazana na sliki 3.2. Očitna slabost algoritma je nujnost izgradnje grafa $G(P)$, ki ima časovno zahtevnost $\mathcal{O}(n^2)$. Časovna zahtevnost izgradnje drevesa najkrajših poti je $\mathcal{O}(n + |E|)$, kjer $|E|$ predstavlja število povezav v grafu. To pomeni, da je izgradnja drevesa časovno odvisna od gostote grafa (ker povezave v grafu $G(P)$ obstajajo samo med točkami z razdaljo največ 1), in v najslabšem primeru je čas izgradnje kvadratičen. Prednost uporabe algoritma s preiskovanjem v širino je enostavnost rešitve (in implementacije). V situacijah, kjer ima graf $G(P)$ malo povezav in je vnaprej znan ali ga je treba izračunati v vsakem primeru, ima tak algoritem tudi očitno prednost pred ostalimi rešitvami.

3.1.2 Preiskovanje v širino z uporabo grafa kvadratne mreže (grid)

Graf enotske kvadratne mreže je med drugim uporaben za preiskovanje v širino kot alternativa klasičnemu algoritmu BFS nad grafom enotskih raz-

dalj. Vsaki točki iz dane množice P lahko izračunamo njen ključ tako, da poiščemo spodnje levo vozlišče celice grafa kvadratne mreže, v kateri se točka nahaja (glej sliko 3.3). Graf $G(P)$ lahko tako predstavimo s slovarjem, kjer ključi predstavljajo vozlišča grafa kvadratne mreže, kot vrednosti pa hranijo seznam vseh točk v celici, ki se nahaja zgoraj desno od ključa. Preiskovanje v širino nad takim grafom poteka tako, da za dano točko preverimo samo tiste kandidate, ki se nahajajo v isti ali eni izmed sosednjih celic grafa kvadratne mreže, točki pa povežemo, če je njuna razdalja največ 1.

3.1.3 Prilagojen algoritem za enotske kroge (SSSP)

V tem poglavju je opisan algoritem za izgradnjo drevesa SSSP (ang. single source shortest path). Gre za preiskovanje v širino nad grafom $G(P)$ brez dejanske izgradnje grafa. Vhod algoritma je torej P , pri izgradnji drevesa pa se uporablja abstrakten graf $G(P)$. Primer drevesa je prikazan na sliki 3.4.

Algoritem dobi kot vhod poleg množice P izvorno točko $s \in P$ in nato inkrementalno v vsaki iteraciji dodaja točke h grafu. Množico točk, dodanih k drevesu v i -ti iteraciji, označimo kot

$$W_i = \{p \in P \mid d_{G(P)}(s, p) = i\}.$$

Velja torej $W_0 = \{s\}$. Za izgradnjo W_i ne potrebujemo celotnega grafa, zgrajenega do $i - 1$ -te iteracije, temveč samo množico W_{i-1} . Za vsak $q \in W_i$ velja, da je povezan z natanko eno točko p v množici W_{i-1} , ki je izmed točk v W_i najbližje q .

Pri izgradnji W_i ne pregledujemo vseh še ne dodanih točk. Že v samem začetku najprej zgradimo Delaunayevo triangulacijo $DT(P)$, ki nam je v pomoč pri iskanju primernih kandidatov za W_i . To so:

- točke, ki so sosedne W_{i-1} v $DT(P)$
- točke, ki so sosedne (do tega trenutka zgrajeni) W_i v $DT(P)$.

Lema 3.1. *Naj bo p točka v $P \setminus \{s\}$, za katero velja $d(s, p) < \infty$. Obstajata točka w v P in pot π v $DT(P)$ od w do p , za kateri velja $d(s, w) + 1 = d(s, p)$ in $d(s, p_j) = d(s, p)$ za vsako notranje vozlišče p_j v π .*

Dokaz. Naj bo $i = d(s, p)$, w pa naj bo točka z $d(s, w) = i - 1$, ki je najbližje p po evklidski razdalji. Ker $d(s, p) < \infty$, mora veljati $\|w - p\| \leq 1$. Naj bo D_{wp} krog s premerom wp .

Predpostavimo, da daljica wp ne gre skozi nobeno vozlišče grafa $VD(P)$. Pobljže si pogledjmo zaporedje Voronoijevih celic $cell(p_1, P), \dots, cell(p_k, P)$, ki ga seka daljica wp , ko se sprehodimo od w do p (glej sliko 3.5). Očitno velja $w = p_1$ in $p = p_k$. Za vsak $1 \leq j < k$ je povezava $p_j p_{j+1}$ vsebovana v $DT(P)$, ker sta si celici $cell(p_j, P)$ in $cell(p_{j+1}, P)$ sosedni prek neke točke v wp . Pot $\pi = p_1 p_2 \dots p_k$ je zato vsebovana v $DT(P)$ in povezuje w s p . Za katerikoli indeks j , kjer $1 < j < k$, naj bo a_j katerakoli točka v $wp \cap cell(p_j, P)$. Ker velja $\|a_j p_j\| \leq \{\|a_j w\|, \|a_j p\|\}$, je točka p_j vsebovana v D_{wp} . Potem je celotna pot π vsebovana v D_{wp} , in ker je premer D_{wp} največ 1, je vsaka povezava poti π tudi v $G(P)$. S tem sklenemo, da je π pot v $DT(P) \cap G(P)$.

Vzemimo katerokoli točko p_j v π , ki je potem vsebovana v D_{wp} . Ker $\|w - p_j\| \leq \|w - p\| \leq 1$, velja $d(s, p_j) \leq d(s, w) + 1 = i$. Ker $\|p_j - p\| \leq \|w - p\| \leq 1$, velja $d(s, p_j) \geq d(s, p) - 1 = i - 1$. Ampak izbira w kot točke najbližje p pomeni, da $d(s, p_j) \neq i - 1$, ker $\|p_j - p\| < \|w - p\|$. Zato velja $d(s, p_j) = i$. Iz tega sklenemo, da za vsa notranja vozlišča p_j v π velja $d(s, p_j) = i$. \square

Celotni algoritem, ki ga poimenujmo *UnweightedShortestPath*, je prikazan na sliki 3.6.

Lema 3.2. *Na koncu algoritma $UnweightedShortestPath(P, s)$ velja:*

$$\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : W_i = \{p \in P \mid d(s, p) = i\}. \quad (3.1)$$

Poleg tega za vsako točko $p \in P \setminus \{s\}$ velja $dist[p] = d(s, p)$ in če velja $d(s, p) < \infty$, potem obstaja najkrajša pot v $G(P)$ od s do p , v kateri je zadnja povezava $\pi[p]p$.

Dokaz. Za dokaz uporabimo indukcijo nad i . $W_0 = \{s\}$ je nastavljen v vrstici 6 in kasneje ne spremeni vrednosti. Za $i = 0$ potem izjava velja.

Preden obravnavamo indukcijski korak, izpostavimo, da so množice W_0, W_1, \dots parno disjunktne. To je razvidno tudi iz psevdokode. Točka p je v vrstici 22 dodana v nek W_i takrat, ko nastavimo $\text{dist}[p] = i$ v vrstici 19. Po tem je pogoj v vrstici 16 vedno neresničen in p ni dodan v nobeno drugo množico W_j .

Vzemimo katerikoli $i \geq 0$. Po indukcijski predpostavki velja

$$W_{i-1} = \{p \in P \mid d(s, p) = i - 1\}. \quad (3.2)$$

V algoritmu dodamo točke v W_i samo v vrstici 22. Če je p dodan v W_i , potem velja $\|p - w\| \leq 1$ za nek $w \in W_{i-1}$ zaradi pogoja v vrstici 18. Potem vsak p , dodan v W_i , zadostuje pogoju $d(s, p) \leq i$. Ker $p \notin W_{i-1}$, iz disjunkcije množic W_0, W_1, \dots sledi $d(s, p) = i$. Sklenemo, da

$$W_i \subseteq \{p \in P \mid d(s, p) = i\}. \quad (3.3)$$

Da dobimo vsebovanost v drugo smer, naj bo p neka točka, za katero velja $d(s, p) = i$. Pokazati moramo, da je z algoritmom p dodan v W_i . Vzemimo točko w in pot $\pi = p_1 \dots p_k$, zagotovljeno z lemo 3.1. Z indukcijsko predpostavko imamo $w = p_1 \in W_{i-1}$ in zato je w dodan v Q v vrstici 10. V nekem trenutku je povezava $p_1 p_2$ obravnavana v vrstici 15 in točka p_2 je dodana v W_i in Q . Zaradi indukcije so potem vse točke p_3, \dots, p_k dodane v W_i in Q (po možnosti v različnem vrstnem redu). Sledi, da je $p_k = p$ dodan v W_i in zato

$$W_i = \{p \in P \mid d(s, p) = i\}. \quad (3.4)$$

Ker je p dodan v W_i ob istem času, ko je nastavljen $\text{dist}[p] = i$, sledi, da $\text{dist}[p] = i = d(s, p)$. Ker $\pi[p] \in W_{i-1}$ in $\|p - \pi[p]\| \leq 1$ (vrstice 17, 18 in 20), obstaja najkrajša pot v $G(P)$ od s do p , ki uporablja $(i - 1)$ -to povezavo poti od s do $\pi[p]$, po indukciji pa ji sledi povezava $\pi[p]p$. \square

Da dobimo odgovor na vprašanje, ali je nek kandidat p vsebovan v W_i , uporabimo podatkovno strukturo, ki zna v zglednem času najti najbližjega sosedo q in preveriti, če je razdalja med njima manjša ali enaka 1.

Lema 3.3. *Za izgradnjo drevesa SSSP potrebuje algoritem $UnweightedShortestPath(P, s)$ $\mathcal{O}(n \log n)$ časa, kjer je n velikost množice P .*

Dokaz. Glavne opazke, uporabljene v dokazu, so sledeče:

- vsaka točka v P je dodana v Q največ enkrat v vrstici 10 in enkrat v vrstici 21,
- izvajanje vrstic 13-22 za točko q vzame $\mathcal{O}(\deg_{DT(P)}(q) \log n)$ časa,
- vsota stopenj v $DT(P)$ je $\mathcal{O}(n)$,
- v vrstici 9 porabimo $\mathcal{O}(n \log n)$ časa skupaj za vse iteracije

Sledijo podrobnosti.

Delaunayeva triangulacija nad n točkami se lahko izračuna v času $\mathcal{O}(n \log n)$. Inicializacija v vrsticah 1-7 tako porabi $\mathcal{O}(n \log n)$ časa. Dokazati moramo še, da tudi zanka v vrsticah 8-22 vzame $\mathcal{O}(n \log n)$ časa.

Izvajanje vrstic 9-11 vzame $\mathcal{O}(|W_{i-1}| \log |W_{i-1}|) = \mathcal{O}(|W_{i-1}| \log n)$ časa. Vsaka kasnejša poizvedba najbližjega sosedu se izvede v času $\mathcal{O}(\log n)$.

Vsaka izvedba vrstic 16-22 se izvede v času $\mathcal{O}(\log n)$, kjer je najbolj zahteven korak poizvedba v vrstici 17. Vsaka izvedba vrstic 13-22 se izvede v času $\mathcal{O}(\deg_{DT(P)}(q) \cdot \log n)$, ker se vrstice 16-22 izvedejo $\deg_{DT(P)}(q)$ -krat.

Obravnavajmo eno izvedbo vrstic 9-22. Točke so dodane v Q v vrsticah 10 in 21. V slednji je točka p dodana v Q natanko takrat, ko je dodana v W_i (v vrstici 22). Iz tega sledi, da je p dodana v Q natanko takrat, ko pripada množici $W_{i-1} \cup W_i$. Poleg tega je vsaka točka iz $W_{i-1} \cup W_i$ dodana v Q natanko enkrat: za vsako točko p , ki je dodana v Q , velja $dist[p] \leq i < \infty$, in kasneje ne bo več dodana zaradi pogoja v vrstici 16. Iz tega sledi, da se zanka v vrsticah 12-22 izvede v času

$$\sum_{q \in W_{i-1} \cup W_i} \mathcal{O}(\deg_{DT(P)}(q) \cdot \log n). \quad (3.5)$$

Tako lahko omejimo porabljen čas v zanki v vrsticah 8-22 z

$$\sum_i \mathcal{O} \left(|W_i| \log n + \sum_{q \in W_{i-1} \cup W_i} (\deg_{DT(P)}(q) \cdot \log n) \right). \quad (3.6)$$

Z uporabo leme 3.2, ki pravi, da so množice W_0, W_1, \dots parno disjunktne, ter relacijama $\sum_i |W_i| \leq n$ in

$$\sum_{q \in P} \deg_{DT(P)}(q) = 2 \cdot |E(DT(P))| = \mathcal{O}(n), \quad (3.7)$$

časovna kompleksnost iz 3.6 postane $\mathcal{O}(n \log n)$. \square

Izrek 3.4. *Naj bo P množica n točk v ravnini in naj bo s točka v P . V času $\mathcal{O}(n \log n)$ lahko iz neuteženega grafa $G(P)$ izračunamo drevo najkrajših poti s korenom s .*

Dokaz. Zaradi leme 3.3 porabi algoritem *UnweightedShortestPath*(P, s) $\mathcal{O}(n \log n)$ časa. Zaradi leme 3.2 tabela $\pi[\cdot]$ pravilno opisuje drevo najkrajših poti v $G(P)$ s korenom s in $\text{dist}[\cdot]$ pravilno opisuje razdalje najkrajših poti v $G(P)$. \square

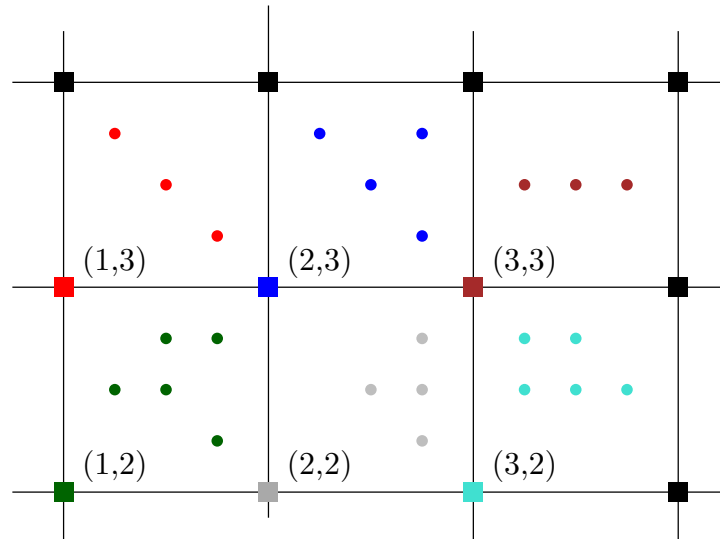
3.2 Minimalna ločitev z enotskimi krogi

Cabello in Giannopoulos [6] sta predstavila splošen algoritem za problem minimalne ločitve, ki se v najslabšem scenariju izvede v kubičnem času. Algoritem deluje za poljubne smiselne oblike, kot so recimo daljice ali elipse, in ne samo za enotske kroge. Njegova splošnost je sicer prednost, a po drugi strani ne izkorišča nobenih lastnosti enotskih krogov.

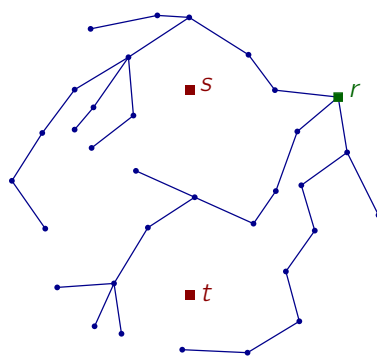
V tem poglavju je opisan algoritem, ki problem minimalne ločitve z enotskimi krogi reši v skoraj kvadratičnem času. Izboljšava temelji na treh sestavinah:

```
BFS( $G, s$ )
1  // za vsako povezavo  $e \in G.E$  velja  $dist(e) \leq 1$ 
2  for  $u \in G.V - \{s\}$ 
3       $u.visited = \text{false}$ 
4       $u.dist = \infty$ 
5       $u.\pi = \text{NIL}$ 
6   $s.visited = \text{true}$ 
7   $s.dist = 0$ 
8   $s.\pi = \text{NIL}$ 
9   $Q = \emptyset$ 
10 enqueue( $Q, s$ )
11 while  $Q \neq \emptyset$ 
12      $u = \text{dequeue}(Q)$ 
13     for  $(u, v) \in G.E$ 
14         if  $v.visited == \text{false}$ 
15              $v.visited = \text{true}$ 
16              $v.dist = u.dist + 1$ 
17              $v.\pi = u$ 
18             enqueue( $Q, v$ )
```

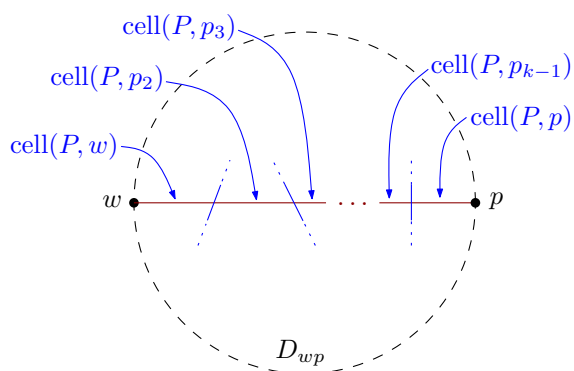
Slika 3.2: Pseudokoda eksplicitnega (splošnega) algoritma za izgradnjo drevesa najkrajših poti s preiskovanjem v širino.



Slika 3.3: Primer mrežnega grafa, v katerem do točk posamezne celice dostopamo prek vozlišča grafa (ključa), ki sovpada s spodnjim levim vozliščem celice. Točke so predstavljene z isto barvo kot njihov ključ.



Slika 3.4: Primer drevesa najkrajših poti z določenim korenom r nad množico P v sliki 1.1.



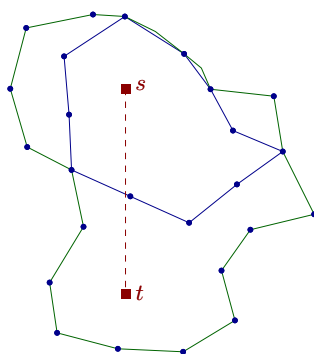
Slika 3.5: Grafična predstavitev dokaza leme 3.1.

```

UNWEIGHTEDSHORTESTPATH( $P, r$ )
1  zgradi Delaunayevo triangulacijo  $DT(P)$ 
2  for  $p \in P$ 
3       $dist[p] = \infty$ 
4       $\pi[p] = \text{NIL}$ 
5   $dist[r] = 0$ 
6   $W_0 = \{r\}$ 
7   $i = 1$ 
8  while  $W_{i-1} \neq \emptyset$ 
9      zgradi pod. strukturo za poizvedbe
      najbližjega sosedu v  $W_{i-1}$ 
10      $Q = W_{i-1}$  // generator točk kandidatk
11      $W_i = \emptyset$ 
12     while  $Q \neq \emptyset$ 
13          $q$  poljubna točka v  $Q$ 
14         odstrani  $q$  iz  $Q$ 
15         for  $qp$  povezava v  $DT(P)$ 
16             if  $dist[p] = \infty$ 
17                  $w =$  najbližji sosed  $p$  v  $W_{i-1}$ 
18                 if  $|pw| \leq 1$ 
19                      $dist[p] = i$ 
20                      $\pi[p] = w$ 
21                     dodaj  $p$  v  $Q$ 
22                     dodaj  $p$  v  $W_i$ 
23      $i = i + 1$ 
24  return  $dist[\cdot]$  in  $\pi[\cdot]$ 

```

Slika 3.6: Algoritem iz [7] za izračun neuteženega drevesa najkrajših poti.



Slika 3.7: Minimalna podmnožica točk iz slike 1.1, ki ločuje s in t , med seboj povezanih z modrimi povezavami. Podmnožica je vedno zaprta pot.

- reinterpretacija generičnega algoritma za kroge. V izvirnem algoritmu moramo označiti točko znotraj vsake oblike. Pri krogih je izbira očitna - njihovo središče. S tem se opis in interpretacija algoritma poenostavi.
- učinkovit algoritem za drevesa najkrajših poti nad grafom G . Primeren kandidat je algoritem, opisan v poglavju 3.1.3, ker izkorišča lastnosti grafa G . V praksi bi se verjetno dobro obnesel tudi algoritem iz [8].
- kompaktna obravnava povezav v G z uporabo sledečih orodij iz računske geometrije: območnih dreves, iskanja najbližjega sosedu in dualnosti med točko in premico.

Primer najkrajšega cikla, ki predstavlja rešitev problema minimalne ločitve, je prikazan na sliki 3.7.

3.2.1 Splošni algoritem za ločevanje s krogi

Naj sprehod W v grafu $G = G_{\leq 1}(P)$ definira ravninsko poligonsko krivuljo na očitni način: točke v P povežemo med seboj z daljicami v danem zaporedju iz W . Notacijo bomo naredili ohlapnejšo in z W označili kar samo krivuljo. Za poljubno vpeto drevo T iz G in poljubno povezavo $e \in E(G) \setminus E(T)$ naj bo $\text{cycle}(T, e)$ edinstven cikel v $T + e$. Za poljubni sprehod v G naj bo $\text{cr}_2(st, W)$ število presečišč med daljico st in krivuljo W po modulu 2. Naslednja lastnost je implicitna v [6]:

Naj bo T vpeto drevo iz G . Množica enotskih krogov s središči v P ločuje s in t natanko takrat, ko obstaja taka povezava $e \in E(G) \setminus E(T)$, da velja $\text{cr}_2(st, \text{cycle}(T, e)) = 1$.

Posledica tega je, da poiskati minimalno ločitev pomeni isto kot poiskati najkrajši cikel v G , ki ima liho število presečišč z daljico st . Še več, iskanje lahko omejimo na konkretno družino ciklov. Naj bo W^* poljuben optimalen cikel in naj bo r^* poljubno vozlišče iz W^* . Fiksirajmo drevo najkrajših poti T_{r^*} v G s korenom r^* . Potem množica ciklov $\{\text{cycle}(T_{r^*}, e) \mid e \in$

```

GENERICMINIMUMSEPARATION( $P, s, t$ )
1   $best = \infty$  // dolžina trenutno najboljše ločitve
2  for  $r \in P$ 
3      ( $dist[ ]$ ,  $\pi[ ]$ ) = drevo najkrajših poti iz  $r$  v  $G(P)$ 
      // izračunaj  $N[ ]$ 
4       $N[r] = 0$ 
5      for  $p \in P \setminus \{r\}$  v nepadajočih vrednostih od  $dist[p]$ 
6           $N[p] = N[\pi[p]] + cr_2(st, p\pi[p]) \pmod{2}$ 
7      for  $pq \in E(G(P))$ 
8          if  $N[p] + N[q] + cr_2(pq, st) \pmod{2} = 1$ 
9               $best = \min\{best, dist[p] + dist[q] + 1\}$ 
10 return  $best$ 

```

Slika 3.8: Prilagoditev splošnega algoritma za izračun minimalne ločitve z enotskimi krogi.

$E(G) \setminus E(T_{r^*})$ vsebuje optimalno rešitev. To sledi iz tako imenovanega tri-potnega pogoja, opisanega v [6]. Ker je r^* neznan, preverimo kar vse korene (v primerih, kjer je optimalna rešitev velika, to pripelje do možnosti uporabe randomiziranega algoritma, kjer nekatere korene izberemo naključno). Velikost optimalne rešitve je dana z

$$\min\{1 + d_G(r, p) + d_G(r, q) \mid r \in P, pq \in E(G) \setminus E(T_r), cr_2(st, cycle(T_r, pq)) = 1\}.$$

Vrednosti $cr_2(st, cycle(T_r, e))$ lahko za posamezno povezavo e izračunamo v konstantnem amortiziranem času s preprostim knjigovodstvom. Poglejmo fiksno drevo T_r . Za vsako točko $p \in P$ shranimo $N[p]$ kot pariteto števila presečišč poti v T_r iz r do p . Ko p ni koren drevesa, lahko vrednost $N[p]$ izračunamo s pomočjo njegovega starša kot $N[p] = N[\pi[p]] + cr_2(st, p\pi[p])$.

V psevdokodi algoritma (vrstice 4-6) je postopek enako opisan, čeprav lahko vrednosti $N[p]$ računamo tudi hkrati z računanjem drevesa najkrajših poti T_r .

Za vsako drevo najkrajših poti T_r imamo potem

$$\begin{aligned} \forall pq \in E(G) \setminus E(T_r) : \\ \mathbf{cr}_2(st, cycle(T_r, pq)) &= N[p] + N[q] + \mathbf{cr}_2(st, pq) \pmod{2} \\ \forall pq \in E(T_r) : \\ 0 &= N[p] + N[q] + \mathbf{cr}_2(st, pq) \pmod{2} \end{aligned}$$

ker se presečišča, ki smo jih šteli dvakrat, izničijo po modulu 2. Podrobneje, pot v T_r iz r do najmanjšega skupnega prednika p in q je upoštevana dvakrat. Iz tega sledi, da je dovolj za vse povezave pq v G preveriti, če je vsota $N[p] + N[q] + \mathbf{cr}_2(st, pq)$ enaka 0 po modulu 2. Končni algoritem je podan na sliki 3.8.

Poglejmo si časovno kompleksnost algoritma. Za vsako točko $r \in P$ moramo izračunati drevo najkrajših poti v G . Kot smo omenili v poglavju 3.1.3, je to izvedljivo v času $\mathcal{O}(n \log n)$. Za vsako povezavo pq potem porabimo $\mathcal{O}(1)$ časa. Za vsako točko r to skupaj zneso $\mathcal{O}(n \log n + |E(G)|)$ časa, kar v najslabšem primeru pomeni kubično časovno zahtevnost. Boljši čas lahko dobimo s kompaktno obravnavo vseh povezav v G , ki je opisana v poglavju 3.2.3.

3.2.2 Dualnost in dualni prostor

Točka v ravnini ima dva parametra: koordinati x in y . Nenavpična premica v ravnini ima prav tako dva parametra: smerni koeficient in odsek na ordinatni osi. To pomeni, da lahko naredimo bijektivno preslikavo množice točk v množico premic. Pri nekaterih preslikavah se lahko nekatere lastnosti množice točk prenesejo v določene lastnosti množice premic. Lep primer so tri točke na premici, ki se preslikajo v tri premice, ki grejo skozi isto točko. Preslikavam, ki to omogočajo, pravimo dualne transformacije. Za dualno

transformacijo pravimo, da objekte preslika iz primarnega v dualni prostor. Sliki objekta v dualnem prostoru pravimo *dvojniki*. Preprost primer dualne transformacije je sledeč. Naj bo $p = (p_x, p_y)$ točka v ravnini. Njen dvojniki p^* je premica, definirana kot $p^* = (y = p_x x - p_y)$. Dvojniki premice $l : y = mx + b$ je taka točka p , da za njo velja $p^* = l$. Ali drugače rečeno, $l^* = (m, -b)$.

Določene lastnosti, ki držijo v primarnem, držijo tudi v dualnem prostoru. Naj bo p točka, l pa premica v ravnini. Dualna transformacija $o \mapsto o^*$ ima naslednje lastnosti:

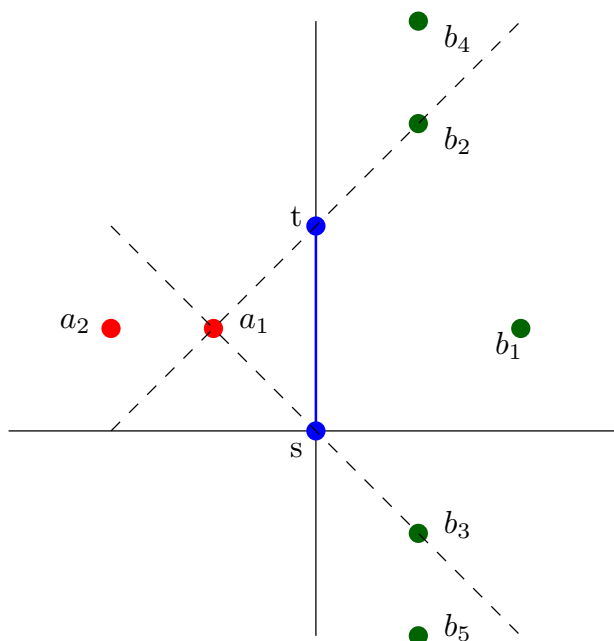
- ohranja vsebovanost: $p \in l$ natanko takrat, ko velja $l^* \in p^*$
- ohranja vrstni red: p leži nad l natanko takrat, ko l^* leži nad p^* .

Dualno transformacijo se lahko uporabi tudi na drugih objektih, kot so recimo daljice. Smiselna izbira za s^* , kjer je s daljica pq , bi bila unija vseh dvojnikov točk na s . Rezultat je neskončna množica premic, ki se sekajo v eni točki. Grafično si to lahko predstavljamo kot unijo dveh območij s^* , ki sta omejeni s premicama p^* in q^* in se stikata v točki njunega presečišča (glej tudi sliko) [2].

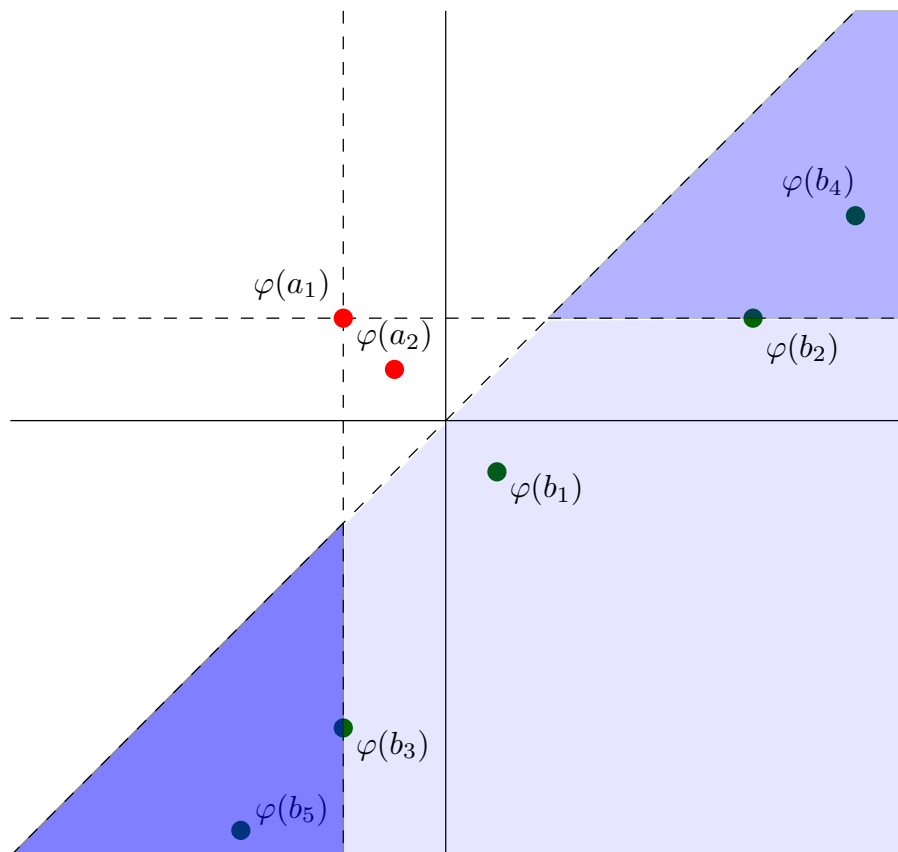
3.2.3 Hitrejši algoritem

Uporabili bomo podatkovno strukturo v naslednji lemi. V osnovi gre za večnivojsko podatkovno strukturo, ki vsebuje dvodimenzionalno območno drevo T , slednje pa na vsakem vozlišču sekundarnega drevesa hrani podatkovno strukturo za iskanje najbližjega sosedu.

Lema 3.5. *Naj bo B množica točk s pozitivnimi koordinatami x . B lahko predprocesiramo v času $\mathcal{O}(n \log^3 n)$, tako da lahko za vsako točko $a \in A$ z negativno koordinato x v času $\mathcal{O}(\log^3 n)$ določimo, če je množica $\{b \in B \mid ab \text{ seka } \sigma \text{ and } |ab| \leq 1\}$ prazna. Z isto podatkovno strukturo lahko obravnavamo poizvedbe za ugotavljanje, ali je množica $\{b \in B \mid ab \text{ ne seka } \sigma \text{ and } |ab| \leq 1\}$ prazna.*



Slika 3.9: Množici A (rdeči točki) ter B (zelene točke) levo in desno od daljice st (zgornja slika). Črtkani črti predstavljata premici, čigar koeficienta sta uporabljena za izračun koordinat dualne točke $\varphi(a_1)$, predstavljata pa tudi vidno polje točke a_1 .



Slika 3.10: Spodaj so prikazane točke iz slike 3.9 v dualnem prostoru. Obarvano območje v sredini predstavlja prostor, v katerem se nahajajo vse take dualne točke $\varphi(b)$, za katere velja $b \in B(a_1)$. Obarvani območji levo in zgoraj predstavljata prostor dualnih točk $\varphi(b)$, za katere velja, da je presečišče premice a_1b z osjo y pod oziroma nad daljico st .

Dokaz. Za potrebe dokaza uporabimo dualnost, opisano v prejšnjem poglavju, in območna drevesa.

Naj bo \mathbb{L} množica nenavpičnih premic, σ^* pa množica točk dualnih nevertikalnim daljicam, ki sekajo daljico $\sigma = st$:

$$\sigma^* = \{l^* \mid l \in \mathbb{L}, l \cap \sigma \neq \emptyset\}$$

V dualnem prostoru je množica σ^* *horizontal slab*

$$\sigma^* = \{(m, -c) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq c \leq s\},$$

ker velja predpostavka $s = (0, 0)$ and $t = (0, \tau)$, kjer $\tau \geq 0$.

Za vsako točko $b \in B$ naj bo L_b^* množica točk, dualnih premicam, ki gredo skozi b in sekajo σ :

$$L_b^* = \{\ell^* \mid \ell \in \mathbb{L}, b \in \ell, \text{ in } \sigma \cap \ell \neq \emptyset\}.$$

V dualnem prostoru je L_b^* daljica, ki je popolnoma vsebovana v slabu σ^* in ima krajišči $(\varphi_1(b), 0)$ in $(\varphi_2(b), -\tau)$ na obeh njegovih mejah. $\varphi_1(b)$ predstavlja smerni koeficient premice, ki seka točki $(0, 0)$ in b , $\varphi_2(b)$ pa smerni koeficient premice, ki seka točki $(0, \tau)$ in b .

Definirajmo točko preslikave $\varphi(b) = (\varphi_1(b), \varphi_2(b))$. Funkcija preslikave φ torej preslika točke z nenegativnimi koordinatami x v točke v ravnini.

Za vsak $b \in B$ velja neenakost $\varphi_1(b) \geq \varphi_2(b)$. Točke B lahko razdelimo v tri skupine glede na predznaka koordinat točke preslikave $\varphi(b)$ in za vsako skupino je neenakost očitna:

$$\begin{aligned} b_1 &\in \{(x, y) \mid (x, y) \in B, y < 0\} \Rightarrow \varphi_1(b), \varphi_2(b) < 0 \text{ in } \varphi_1(b) > \varphi_2(b) \\ b_2 &\in \{(x, y) \mid (x, y) \in B, 0 \leq y < \tau\} \Rightarrow \varphi_1(b) > 0, \varphi_2(b) < 0 \\ b_3 &\in \{(x, y) \mid (x, y) \in B, y \geq \tau\} \Rightarrow \varphi_1(b) > 0, \varphi_2(b) \geq 0 \text{ in} \\ &\quad \varphi_1(b) > \varphi_2(b) \end{aligned}$$

Enakost velja le v primeru, ko sta premici, ki definirata obe koordinati, isti. Do slednjega pride pri točkah b s koordinato x enako 0.

Iz zgornje neenakosti sledi, da točke preslikave $\varphi(b)$ vedno ležijo na polravnini $x \geq y$ in da je smerni koeficient premice, na kateri leži daljica L_b^* , nepozitiven. Podobno lahko ugotovimo, da za vsak $a \in A$ točka $\varphi(a)$ leži na polravnini $\varphi_2(a) > \varphi_1(a)$ in da ima premica, na kateri leži daljica L_a^* , pozitiven smerni koeficient.

Naj bo $a \in A$ in $b \in B$. Daljica ab seka daljico σ natanko takrat, ko L_a^* seka L_b^* , ker daljico ab v dualnem prostoru predstavlja ravno presečišče L_a^* in L_b^* . Iz tega sledi naslednja lastnost:

$$ab \cap \sigma \neq \emptyset \iff \varphi_1(a) \leq \varphi_1(b) \text{ in } \varphi_2(a) \geq \varphi_2(b).$$

Z drugimi besedami: za točko $a \in A$ množico točk $b \in B$, kjer ab seka σ , sestavljajo točke b , pri katerih se $\varphi(b)$ nahaja v drugem kvadrantu koordinatnega sistema z izhodiščem $\varphi(a)$. (Bolj natančno, gre za točke $\varphi(b)$, ki se nahajajo v preseku drugega kvadranta omenjenega koordinatnega sistema s polravnino $x \geq y$. Glej sliko 3.10.)

Za shranjevanje množice točk $\varphi(B)$, kjer je vsaka točka $b \in B$ asociirana s točko preslikave $\varphi(b)$, lahko uporabimo dvodimenzionalno območno drevo. Na vsakem vozlišču v sekundarnega drevesa shranimo podatkovno strukturo za poizvedbe najbližjega sosedu nad kanonično množico $P(v)$, ki vsebuje točke shranjene pod v v sekundarnem drevesu.

Za vsako točko poizvedbe $a \in A$ lahko točke $b \in B$, kjer ab seka σ , dobimo s poizvedbo na območnem drevesu, ki vrne točke $\varphi(B)$ v kvadrantu

$$\{(x, y) \mid \varphi_1(a) \leq x \text{ in } \varphi_2(a) \geq y\}.$$

To pomeni, da množico $\{b \in B \mid ab \text{ seka } \sigma\}$ dobimo kot unijo kanoničnih podmnožic $P(v_1), \dots, P(v_k)$ za $k = \mathcal{O}(\log^2 n)$ vozlišč v sekundarnem drevesu. Za vsako tako podmnožico $P(v_i)$ naredimo poizvedbo najbližjega sosedu za točko a . Če za nek v_i najdemo najbližjega sosedu, ki je za razdaljo največ

1 oddaljen od a , potem vemo, da je množica $\{b \in B \mid ab \text{ seka } \sigma \text{ in } |ab| \leq 1\}$ neprazna. V nasprotnem primeru je množica prazna.

Čas zgraditve dvodimenzionalnega območnega drevesa je $\mathcal{O}(n \log n)$. Vsaka točka se pojavi v $\mathcal{O}(\log^2 n)$ kanoničnih podmnožicah $P(v)$. To pomeni, da $\sum_v |P(v)| = \mathcal{O}(n \log^2 n)$, kjer vsota iterira skozi vsa vozlišča v v sekundarnem drevesu. Ker za vsak v zgradimo podatkovno strukturo za iskanje najbližjega sosedu, kar vzame $\mathcal{O}(|P(v)| \log |P(v)|)$ časa, je skupna časovna zahtevnost zgraditve podatkovne strukture $\mathcal{O}(n \log^3 n)$.

Za poizvedbe dvodimenzionalno območno drevo vzame $\mathcal{O}(\log^2)$ časa, da najde $\mathcal{O}(\log^2)$ vozlišč v_1, \dots, v_k , tako da velja

$$\bigcup_{i=1}^k P(v_i) = \{b \in B \mid ab \text{ seka } \sigma\},$$

potem pa dodatno potrebujemo $\mathcal{O}(\log n)$ časa za vsako vozlišče, da naredimo poizvedbo najbližjega sosedu. Poizvedbe za $\{b \in B \mid ab \text{ ne seka } \sigma \text{ in } |ab| \leq 1\}$ naredimo z isto podatkovno strukturo nad točkami v drugih dveh kvadrantih (glej sliko 3.10). \square

Podatkovna struktura za poizvedbe najbližjega sosedu v lemi 3.5 ima časovno zahtevnost zgraditve $\mathcal{O}(n \log n)$ in časovno zahtevnost poizvedbe $\mathcal{O}(\log n)$. Če bi uporabili neko drugo podatkovno strukturo za poizvedbe najbližjega sosedu s časom zgraditve $T_c(n)$ in časom poizvedbe $T_q(n)$, bi čas zgraditve v lemi 3.5 postal $\mathcal{O}(T_c(n \log^2 n))$, čas poizvedbe pa $\mathcal{O}(T_q(n) \cdot \log^2 n)$.

Iz teoretičnega vidika bi bilo bolj učinkovito izračunati unijo

$$\bigcup_{b \in B} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, |(x, y)b| \leq 1, (x, y) \text{ seka } \sigma\}$$

in tam rešiti problem določanja položaja (ang. *point location*). Ker območja ne morejo imeti veliko presečišč z daljico σ , lahko dobimo dobre asimptotične meje. V praksi pa se izkaže, da je izboljšava rezultata zanemarljiva.

Obravnavajmo zdaj fiksni koren r . Predpostavimo, da so drevo najkrajših poti T_r ter tabele $\pi[\]$, $dist[\]$ and $N[\]$ že izračunane. Točke združimo glede

na njihovo razdaljo od r :

$$W_i = \{p \in P \mid \text{dist}[p] = i\}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Standardna lastnost dreves najkrajših poti je, da se razdalji dveh sosednih točk od korena r razlikujeta za največ 1. To pomeni, da so sosedi točke $p \in P$ v G vsebovani v $W_{\text{dist}[p]-1} \cup W_{\text{dist}[p]} \cup W_{\text{dist}[p]+1}$. To lastnost bomo uporabili pri našem algoritmu.

Naredimo skupine L_i^j in R_i^j (kjer L pomeni “levo” in R pomeni “desno”), definirane kot

$$\begin{aligned} L_i^j &= \{p \in P \mid \text{dist}[p] = i, p.x < 0, N[p] = j\}, \text{ kjer } j = 0, 1 \text{ in } i = 0, 1, \dots \\ R_i^j &= \{p \in P \mid \text{dist}[p] = i, p.x > 0, N[p] = j\}, \text{ kjer } j = 0, 1 \text{ in } i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Zanimajo nas povezave pq v G , za katere velja $N[p] + N[q] + \text{cr}_2(st, pq) = 1 \pmod{2}$. Z upoštevanjem simetrije je to ekvivalentno parom točk (p, q) v enem od naslednjih dveh primerov:

- za nek $i \in \mathbb{N}$ in nek $j \in \{0, 1\}$ imamo $p \in L_i^j \cup R_i^j$, $q \in L_i^{1-j} \cup R_i^{1-j} \cup L_{i-1}^{1-j} \cup R_{i-1}^{1-j}$, $|pq| \leq 1$, in pq ne seka st ;
- za nek $i \in \mathbb{N}$ in nek $j \in \{0, 1\}$ imamo $p \in L_i^j \cup R_i^j$, $q \in L_i^j \cup R_i^j \cup L_{i-1}^j \cup R_{i-1}^j$, $|pq| \leq 1$, in pq seka st .

Oba primera se da učinkovito rešiti z enim od naslednjih primerov:

- Če želimo iskati kandidate $(p, q) \in L_i^j \times L_{i'}^{1-j}$ (ki ne morejo sekati st , ker ležijo na isti strani osi y), najprej preprocesiramo $L_{i'}^{1-j}$ za poizvedbe najbližjega sosedu. Potem za vsako točko p v L_i^j naredimo poizvedbo nad podatkovno strukturo, da najdemo njenega najbližjega sosedu q_p v $L_{i'}^j$. Če za nek p velja $|pq_p| \leq 1$, smo našli povezavo pq_p v G , za katero velja $\text{cr}_2(\text{cycle}(T_r, pq_p)) = 1$ in $\text{dist}[p] + \text{dist}[q_p] + 1 = i + i' + 1$. Če za vsak p velja $|pq_p| > 1$, potem $L_i^j \times L_{i'}^{1-j}$ ne vsebuje nobene povezave iz G . Če $m = |L_i^j| + |L_{i'}^{1-j}|$, je skupni čas izvajanja $\mathcal{O}(m \log m)$.

- Če želimo iskati kandidate $(p, q) \in L_i^j \times R_{i'}^j$, ki sekajo st , najprej preprocesiramo $R_{i'}^j$ v podatkovno strukturo, kot smo opisali v lemi 3.5. Nato za vsako točko $p \in L_i^j$ naredimo poizvedbo na podatkovni strukturi za take točke q , da pq seka st . Če kot rezultat dobimo neprazno množico, potem obstaja pq v G , za katero velja $p \in L_i^j$, $q \in R_{i'}^j$, $\text{cr}_2(\text{cycle}(T_r, pq)) = 1$ in $\text{dist}[p] + \text{dist}[q] + 1 = i + i' + 1$. V nasprotnem primeru ne obstaja nobena povezava $pq \in L_i^j \times R_{i'}^j$, ki bi sekala st . Za $m = |L_i^j| + |R_{i'}^j|$ je skupni čas izvajanja $O(m \log^3 m)$.
- Če želimo iskati kandidate $(p, q) \in L_i^j \times R_{i'}^{1-j}$, ki ne sekajo st , najprej preprocesiramo $R_{i'}^{1-j}$ v podatkovno strukturo, kot smo opisali v lemi 3.5. Nato za vsako točko $p \in L_i^j$ naredimo poizvedbo na podatkovni strukturi za take točke q , da pq ne seka st . Preostali potek algoritma je podoben kot v prejšnji točki.

Sklenemo lahko, da vsakega od primerov lahko rešimo v času $O(m \log^3 m)$ v najslabšem primeru, kjer je m število točk udeleženih v posameznem primeru. Z iteracijo čez vse možne vrednosti i je zdaj to preprosto pretvoriti v algoritem, ki porabi $O(n \log^3 n)$ časa za vsak koren r . Za primer z enotskimi krogi ta algoritem izboljša čas splošnega algoritma.

Izrek 3.6. *Problem minimalne ločitve n enotskih krogov lahko rešimo v času $O(n^2 \log^3 n)$.*

Dokaz. Naj bodo P središča krogov in - tako kot prej - obravnavajmo graf $G = G_{\leq 1}(P)$. Za vsak $r \in P$ zgradimo drevo najkrajših poti in množice $W_i, L_i^0, L_i^1, R_i^0, R_i^1$ za vsak i v času $O(n \log n)$. Nato imamo največ n iteracij, kjer za vsako iteracijo i porabimo $O(|W_i \cup W_{i-1}| \log^3 |W_i \cup W_{i-1}|)$ časa. Množice w_i so disjunktne in če seštejemo čase vseh iteracij, je čas izvajanja za posamezen koren $r \in P$ enak $O(n \log^3 n)$.

Pravilnost algoritma sledi iz dejstva, da računa isto kot splošni algoritem. □

Opis algoritma v obliki psevdokode prikazan na sliki 3.11. Kot pri splošnem algoritmu spremenljivka *best* hrani dolžino trenutno najkrajšega cikla. Na

```

SEPARATIONUNITDISKSCompact( $P, s, t$ )
1   $best = n + 1$  // dolžina trenutno najboljše ločitve
2  for  $r \in P$ 
3       $(dist[ ], \pi[ ]) = \text{drevo najkrajših poti s korenom } r \text{ v } G_{\leq 1}(P)$ 
      // Izračunaj nivoje  $W_i$ 
4      for  $i = 0 \dots n$ 
5           $W_i = \text{nov prazen seznam}$ 
6      for  $p \in P$ 
7          dodaj  $p$  v  $W_{dist[p]}$ 
      // Izračunaj  $N[ ]$  za vse elemente v  $W_i$ 
      // in zgradi  $L_i^0, L_i^1, R_i^0, R_i^1$ 
8       $N[r] = 0$ 
9      for  $i = 1 \dots n$ 
10         for  $p \in W_i$ 
11              $N[p] = N[\pi[p]] + cr_2(st, p\pi[p]) \pmod{2}$ 
12             if  $p$  levo od  $y$  osi
13                 dodaj  $p$  v  $L_i^{N[p]}$ 
14             if  $p$  desno od  $y$  osi
15                 dodaj  $p$  v  $R_i^{N[p]}$ 

```

Slika 3.11: Nov algoritem za minimalno ločitev z enotskimi krogi (prvi del).

začetku lahko njeno vrednost nastavimo na $n + 1$. Če algoritem konča z isto vrednostjo spremenljivke, potem za dane točke ne obstaja rešitev za problem minimalne ločitve. Ko obravnavamo določen koren r , nas zanimajo samo cikli s korenem r in dolžino največ $best$. Ker ima poljuben cikel, ki gre skozi vozlišče v W_i , dolžino najmanj $2i$, lahko obravnavamo samo indekse i , za katere velja $2i < best$. Poleg tega lahko dodatno omejimo iskanje (kar sicer ni opisano v algoritmu, je pa uporabljeno pri implementaciji) tako, da najprej obravnavamo pare, ki tvorijo cikel z dolžino $2i$, na primer $L_i^0 \times L_{i-1}^1$, in šele potem tiste z dolžino $2i + 1$, na primer $L_i^0 \times L_i^1$. Z uporabo takega zaporedja lahko končamo z iskanjem za koren r takoj, ko najdemo povezavo v *while*


```

1       $i = 1$ 
2      while  $2i < best$  in  $W_i \neq \emptyset$ 
           // dolžina  $2i$ ; znotraj vsake strani  $y$  osi
3      išči kandidate v  $L_i^0 \times L_{i-1}^1, L_i^1 \times L_{i-1}^0, R_i^0 \times R_{i-1}^1, R_i^1 \times R_{i-1}^0$ 
           // dolžina  $2i$ ; čez  $y$  os skozi  $\sigma$ 
4      išči kandidate, ki sekajo  $\sigma$  v
5       $L_i^0 \times R_{i-1}^0, L_i^1 \times R_{i-1}^1, L_{i-1}^0 \times R_i^0, L_{i-1}^1 \times R_i^1$ 
           // dolžina  $2i$ ; čez  $y$  os mimo  $\sigma$ 
6      išči kandidate, ki ne sekajo  $\sigma$  v
7       $L_i^0 \times R_{i-1}^1, L_i^1 \times R_{i-1}^0, L_{i-1}^0 \times R_i^1, L_{i-1}^1 \times R_i^0$ 
           // dolžina  $2i + 1$ ; znotraj vsake strani  $y$  osi
8      išči kandidate v  $L_i^0 \times L_i^1, R_i^0 \times R_i^1$ 
           // dolžina  $2i + 1$ ; čez  $y$  os skozi  $\sigma$ 
9      išči kandidate, ki sekajo  $\sigma$  v  $L_i^0 \times R_i^0, L_i^1 \times R_i^1$ 
           // dolžina  $2i + 1$ ; čez  $y$  os mimo  $\sigma$ 
10     išči kandidate, ki ne sekajo  $\sigma$  in  $L_i^0 \times R_i^1, L_i^1 \times R_i^0$ 
11      $i = i + 1$ 
12 return  $best$ 

```

Slika 3.12: Nov algoritem za minimalno ločitev z enotskimi krogi (drugi del).

zanki, in preidemo na naslednji koren.

Poglavje 4

Implementacija algoritmov

4.1 Drevo SSSP

Algoritem za izgradnjo drevesa SSSP smo implementirali z mislijo na možnost njegove neposredne uporabe v algoritmu za ločevanje s krogi. Posledično smo spustili nekaj funkcionalnosti dreves, ki jih kasneje v programu ne potrebujemo, po drugi strani pa dodali stvari, ki se ne tičejo drevesa, so pa potrebne kasneje. Tako na primer ne moremo dostopati do otrok vozlišč drevesa, po drugi strani pa pri dodajanju točk k drevesu te sproti tudi uvrstimo v eno izmed množic $L0$, $L1$, $R0$ in $R1$.

Za implementacijo smo uporabili razred *SSSPTree* s štirimi zasebnimi atributi. Vsi so sezname točk tipa vector in vsaka hrani eno izmed omenjenih množic. Konstruktor kot vhodne parametre sprejme seznam točk P , točko izvora r in daljico st ter zgradi drevo. Metoda *getAllSets* v seznamu vrne vse štiri attribute.

4.1.1 Podatkovna struktura za točko

Algoritem zgradi drevo implicitno. To pomeni, da kot rezultat ne dobimo nobene nove strukture, ampak konstruktor vsako točko doda v enega od štirih seznamov in pri tem spremeni vrednost dveh njenih atributov:

dist hrani razdaljo do korena drevesa. Koren drevesa ima za razdaljo vrednost 0, točke, ki jih ni moč doseči iz korena, pa največjo možno vrednost števila tipa *int*, tj. *numeric_limits < int >::max()*

parent hrani deljen kazalec (*shared_ptr < Point_2 >*) na svojega starša v drevesu

visited hrani logično vrednost (*true* ali *false*), ki pove, če je vozlišče bilo že dodano v drevo. To bi sicer lahko izvedeli tudi preko atributa *dist*

Noben imed omenjenih atributov ni del razreda *Point_2* v CGAL, zato smo jih sami dodali. S pomočjo kazalca na starša se je tako od vsake točke drevesa možno sprehoditi do korena, nasprotno pa to ne velja.

4.1.2 Podatkovna struktura za iskanje najbližjega sosa

Kot smo omenili pri teoretičnem opisu algoritma v prejšnjem poglavju, pri gradnji množice W_i točke kandidatke testiramo tako, da poiščemo njihove najbližje sosede v množici W_{i-1} . Nad slednjo zgradimo VD, točke kandidatke pa uporabimo za poizvedbe nad tako strukturo.

V praksi se pri uporabi knjižnice CGAL izkaže, da je za iskanje najbližjega sosa bolje uporabiti Delaunayev triangulacijo. Do tega sklepa smo prišli z analizo implementacije obeh struktur:

Za iskanje najbližjega sosa z Voronoijevim diagramom uporabimo funkcijo *locate(Point q)*, ki za rezultat vrne Voronoijevo središče, vozlišče, ali rob. V našem primeru vedno iščemo najbližje Voronoijevo središče, tako da v primeru, da je rezultat vozlišče ali rob, vrnemo enega od enako oddaljenih središč. Ker v CGAL-u objekt Voronoijevega diagrama interno hrani strukturo Delaunayev triangulacije, v praksi potemtakem pravzaprav

iščemo vozlišče v Delaunayevi triangulaciji. Funkcija *locate* za izračun uporablja funktor za iskanje najbližjega Delaunayevega vozlišča, ki je definiran z drugo predlogo Voronoijevega diagrama. Imenuje se *Delaunay_triangulation_nearest_site_2*. Ta nato kliče funkcijo *nearest_vertex(Point q)* v Delaunayevi triangulaciji.

Rezultat slednje je pravzaprav tisto, kar iščemo od samega začetka, zato se lahko znebimo Voronoijevega diagrama kot vmesnika in direktno uporabljamo Delaunayevo triangulacijo. Poleg poenostavitve kode in rešitve pa je pomemben faktor tudi optimizacija. Teoretična časovna kompleksnost iskanja najbližjega sosedja je $\mathcal{O}(\log n)$, povprečna časovna zahtevnost funkcije *nearest_vertex(Point q)*, ki za najdbo najbližjega vozlišča uporablja sprehod po povezavah triangulacije (ang. *line walk*), pa je $\mathcal{O}(\sqrt{n})$. Delaunayeva triangulacija v CGAL-u vsebuje tudi funkcijo *nearest_vertex(Point q, Face_handle hint)*, kateri kot drugi argument podamo lice v Delaunayevi triangulaciji, pri katerem se iskanje začne. Če znamo podati dobro začetno lice, se časovna kompleksnost bistveno zmanjša (na k korakov, kjer $k \ll n$). Problem pri uporabi Voronoijevega diagrama je potem tudi ta, da njena funkcija *locate* ne podpira dodatnega argumenta za začetno lice. Tudi če bi tako funkcijo napisali sami, bi nastal problem pri tem, kako najti primerno lice oziroma kako dostopati do njega. Sama izbira lica v DT pa je očitna. Za točko q , ki jo dobimo iz vrste, in točko p , s katero tvorita povezavo v $DT(P)$ (glej psevdokodo 3.6), imamo za poizvedbo točki p najbližjega vozlišča dve možnosti za dobrega kandidata za začetno lice. Če $q \in DT(W_{i-1})$, je dober kandidat katerokoli lice vozlišča q , sicer pa je to katerokoli lice starša točke q v drevesu SSSP, ker je starš zagotovo vsebovan v $DT(W_{i-1})$.

Za razliko od Voronoijevega diagrama, ki ima samo metodo za vstavljanje ene točke v strukturo, Delaunayeva triangulacija vse-

buje tudi metodo, ki kot argument sprejme seznam točk. Te nato prostorsko sortira, preden jih eno po eno doda v strukturo [9]. Prednost sortiranja je v tem, da so bili deli strukture, ki so obravnavani med vstavljanjem, z veliko verjetnostjo obravnavani tudi pri prejšnjem vstavljanju, in se zato z večjo verjetnostjo nahajajo v pomnilniku *cache* kot v glavnem pomnilniku. Uporaba sortiranja ni optimalna izbira na vseh primerih vhodnih podatkov. Pri našem algoritmu se je izkazalo, da algoritem deluje počasneje, zato smo metodo prilagodili tako, da točk ne sortira. To niti ni toliko presenetljivo: vhodne točke, ki jih DT v i -ti iteraciji dobi iz seznama W_{i-1} , so deloma že smiselno sortirane. Z analizo si pogledajmo, kako je zgrajen seznam W_1 , ki vsebuje točke z razdaljo 1 od korena r . Za iskanje sosedov vozlišča r uporabimo krožni iterator, ki se začne pri poljubnem sosedu in se nato s pomočjo lic premika do naslednjega. Sosedu si zato sledijo v smiselnem zaporedju, v katerem so tudi shranjeni v seznam W_1 . Ko obiščemo vse sosede, moramo obiskati še vse sosede sosedov. Začnemo pri prvem obiskanem sosedu, in zopet s krožnim iteratorjem pogledamo vse sosede, in tako naprej do ostalih. V splošnem velja, da bodo sosede soseda i bolj blizu sosedom soseda $i + 1$ kot soseda $i + 2$, in s prvimi bolj verjetno tvorili povezavo v $DT(W_1)$ kot z drugimi. Drugače povedano: za novonastali trikotnik, ki je dodan v triangulacijo, je velika verjetnost, da meji na trikotnik, dodan v prejšnjem koraku.

Za učinkovito iskanje začetnega lica smo napisali razširitev razreda DT, imenovano *DTWithFaceMap*. Hrani zasebni slovar *pointsToFaceHandlers*, ki kot ključ hrani kazalec na objekt tipa *Point_2*, kot vrednost pa objekt tipa *DT_Face_handle*. Vsebuje tudi dodatno metodo za vstavljanje, ki kot argument sprejme seznam vozlišč tipa *DT_vertex_handle*. Iz vsakega objekta vozlišča dobi ven točko tipa *Point_2*, ki jo vstavi v DT z metodo *insert(Point_2q)*, ki je že definirana v razredu DT. Ta metoda vrne nov objekt vozlišča, ki je bilo

dodano v strukturo. Objekt hrani informacijo o točki q in licu f , na katerega vozlišče meji. Par $\langle q, f \rangle$ nato shranimo v slovar *pointsToFaceHandlers*.

Pomembno dejstvo, ki ga je potrebno izpostaviti, je sledeče. Teoretično gledano je množica točk v $DT(W_i)$ podmnožica točk v $DT(P)$. Ker CGAL razlikuje vozlišča in točke, triangulaciji za vozlišče v , ki ga obe vsebujeta, hranita vsak svoj lasten objekt. Oba objekta vozlišča hranita referenco na isto instanco točke.

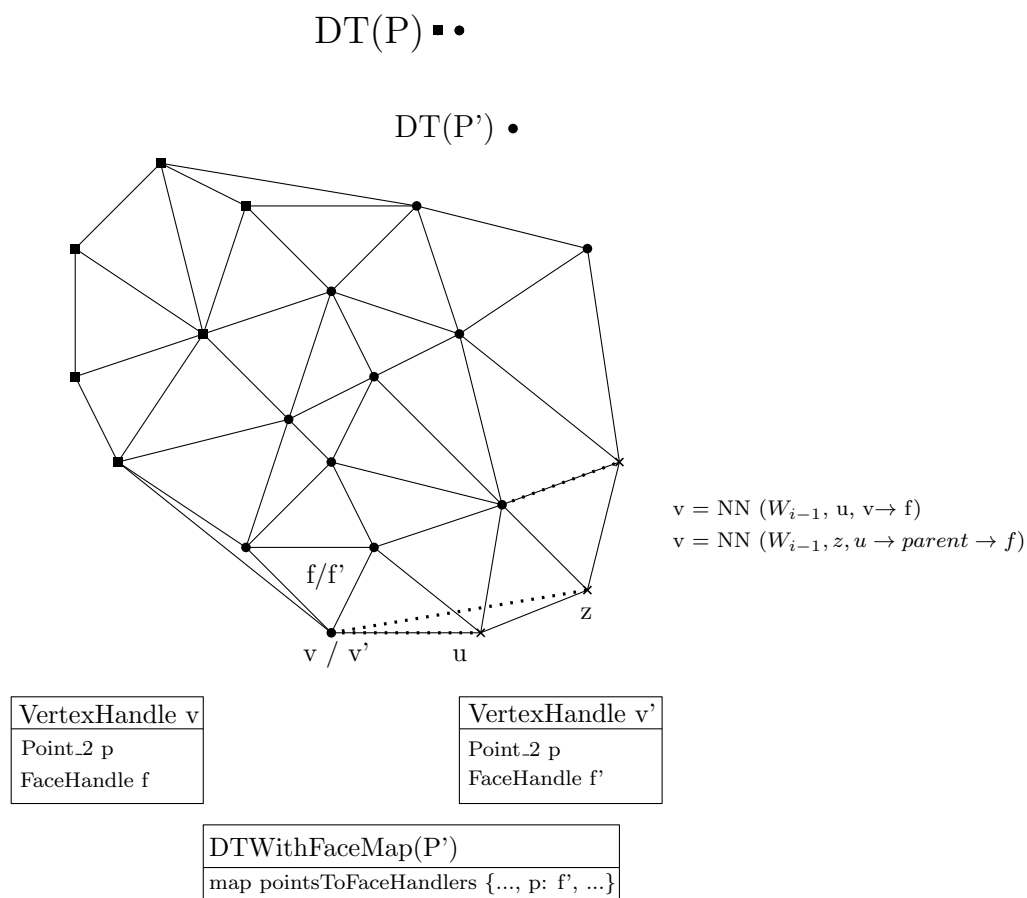
Koda, ki se izvede za posamezno vozlišče p , je sledeča:

```
f = DT::insert((*p)->point(), f)-> face();
pointsToFaceHandlers[&((*p)->point())] = f;
```

```
1 Face_handle getFaceFromPoint(const Point_2* p) {
2   return pointsToFaceHandlers[p];
3 }
4
5 ptrdiff_t insert(vector<DH_vertex_handle> points) {
6   size_type n = this->number_of_vertices();
7   Face_handle f;
8   for (vector<DH_vertex_handle>::iterator p = points.
9         begin(); p != points.end(); ++p) {
10    f = DT::insert((*p)->point(), f)->face();
11    pointsToFaceHandlers[&((*p)->point())] = f;
12  }
13  return this->number_of_vertices() - n;
14 }
```

Listing 4.1: sample code

Kot vidimo v kodi, metoda poleg najbližjega soseda vrne tudi spremenljivko logičnega tipa, ki nam pove, če je razdalja med točko poizvedbe in njenim najbližjim sosedom manjša ali enaka 1.



Slika 4.1: .

4.1.3 Izgradnja drevesa

Za drevo SSSP smo napisali razred SSSPTree. Lahko je uporabljen samostojno ali za potrebe problema ločitve. Ponuja dva konstruktorja; prvi je SSSPTree(Iterator begin, Iterator end), drugi pa kot tretji argument sprejme še daljico *st*. Metoda *createTreeFromRoot(Point_2 r)* zgradi drevo s podanim korenem. Če je bil uporabljen drugi konstruktor, se bodo v tej metodi poleg izgradnje drevesa izvedle še dodatne operacije, ki so opisane v naslednjem poglavju.

Konstruktor najprej zgradi DT nad P . Nato za izvirno točko $r \in P$ s pomočjo metode *locate* poišče vozlišče v DT, s katerim sovpada. Pri tem preventivno preveri, da je tip rezultata, ki ga vrne *locate*, resnično *Delaunay_Vertex_Handle*, sicer $r \notin P$. Za vse točke v P velja predpostavka, da sta vrednosti njihovih atributov *dist* in *parent* ponastavljeni. Velja torej $\forall p \in P : p.dist = \infty, p.parent = nullptr$.

Za generatorja točk kandidatk uporabljamo objekt tipa *deque*, primeren za hranjenje elementov v vrsti. V teoretičnem opisu algoritma smo za $q \in Q$ rekli, da je poljubna točka v Q . V implementaciji je q vedno prva točka v vrsti, kar je bolj optimalno, kot smo omenili v poglavju 4.1.2. Za W_i in W_{i-1} v zanki hranimo seznam Delaunayevih vozlišč (objekte tipa *DT_Vertex_Handle*). Seznam W_{i-1} vstavimo v strukturo *DTWithFaceMap*.

Za vsak $q \in Q$ poiščemo lice f , ki ga bomo uporabili kot namig pri iskanju najbližjega soseda. Če je razdalja q enaka i , pomeni, da q ni vsebovan v W_{i-1} oziroma strukturi *DTWithFaceMap*. Ker pa je q že v drevesu SSSP, lahko dostopamo do točke qs (tipa *Point_2*), ki je njen starš. Lice f dobimo tako, da poiščemo vrednost objekta v mapi *pointsToFaceHandlers*, kot ključ pa uporabimo kazalec na starša qs . Če je razdalja q manjša od i , kot ključ uporabimo kar kazalec na točko, ki jo interno hrani q .

Povezave oziroma sosede q najdemo s krožnim iteratorjem, ki ga vrne metoda *incident_vertices(q)* v DT. Ker ima v CGAL implementaciji DT poleg standardnih vozlišč še eno neskončno vozlišče, ki je sosedno vsem ostalim,

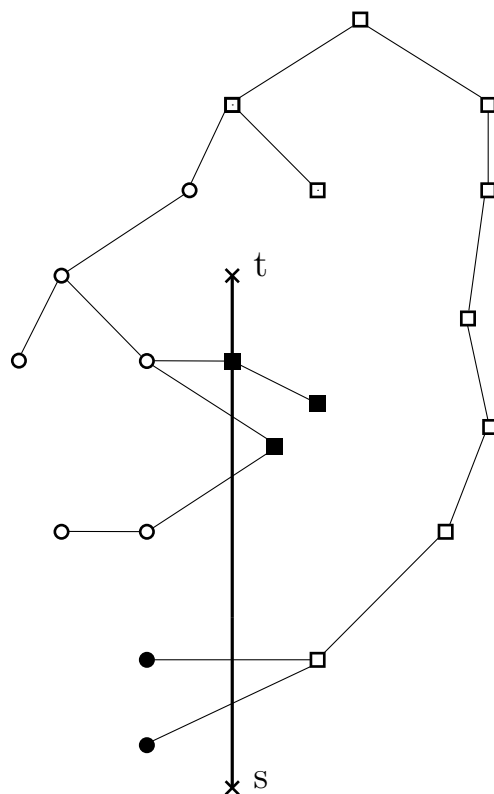
moramo takega soseda ignorirati. Za ostale sosede p najprej preverimo, če je njena točka bila že obiskana. Če ni, poiščemo njenega najbližjega soseda w v W_{i-1} z metodo *nearestVertex*, ki ji kot argument podamo p in lice f . Če $|pw| \leq 1$, usvarimo objekt tipa *shared_ptr < Point_2 >*, ki hrani kazalec na w . Ta objekt nato nastavimo kot starša točki v p . Točko tudi označimo kot obiskano in ji nastavimo razdaljo i , vozlišče p pa vstavimo v seznam W_i . Na koncu iteracije i seznam W_{i-1} zamenjamo z W_i .

Zadnji dve točki nista omenjeni v psevdokodi, ker njuna uporabnost pride v poštev šele kasneje pri ločevanju s krogi. *updateNr* vrne novo vrednost za atribut *nr* točke p . Funkcija preveri, če daljica pw seka st in če jo, vrne $(w.getNr() + 1) \% 2$, sicer vrne $w.getNr()$. *categorize* točko p na podlagi njenega atributa *nr* in relativnega položaja glede na st (ki je ali levo ali desno) doda v enega od štirih seznamov $l0$, $l1$, $r0$ ali $r1$.

4.2 Minimalna ločitev

4.2.1 Prilagoditev drevesa SSSP

Ko je SSSPTree uporabljen izključno za izgradnjo drevesa, je vse, kar pravzaprav naredimo, to da vsem danim točkam v DT nastavimo kazalec na njihovega starša, ki ga hranijo kot atribut. Če za inicializacijo objekta razreda SSSPTree uporabimo konstruktor, ki poleg točk sprejme kot tretji argument še daljico st , bo metoda za izgradnjo drevesa poleg staršev točkam nastavila še vrednosti atributov *nr* in jih kategorizirala tako, da jih bo dodala v enega od štirih seznamov tipa *vector*, ki jih razred SSSPTree hrani kot zasebne attribute. Seznami sovpadajo z razredi $L0$, $L1$, $R0$, $R1$, kjer seznam $R0$ hrani točke, ki ležijo desno od daljice st in imajo vrednost atributa *nr* enako 0. Seznami v resnici kot elemente hranijo zopet sezname, šele ti pa dejansko hranijo točke glede na njihovo razdaljo od korena drevesa. Seznam $R0$ tako na i -tem mestu hrani seznam, ki vsebuje vse točke drevesa z razdaljo i in ostalimi že omenjenimi lastnostmi.



Slika 4.2: Vozlišča drevesa SSSP, ki so označena glede na skupino, v katero so uvrščena glede na daljico st . S krogi so označena vozlišča L_0 , s polnimi krogi vozlišča L_1 , s kvadrati vozlišča R_0 in s polnimi kvadrati vozlišča R_1 .

Za točko p izračunamo nr ali število presečišč med daljico st in potjo pr (kjer je r koren drevesa) po modulu 2 tako, da prevzamemo vrednost nr njegovega starša q in jo spremenimo samo v primeru, če daljica qp seka st . Za to uporabimo funkcijo v CGAL-u $do_intersect(seg1, seg2)$. Ker obstaja možnost, da p ali q ležita na daljici st ali sta kolinearna z njenima krajiščema (ker je st vedno navpična daljica, to pomeni, da imajo vse tri enako vrednost koordinate y), je potrebno definirati, kaj storiti v takem primeru. Za točke s tako levo vedno določimo, da so desno od st . V primeru, da p leži na st , moramo zato za spremembo njenega atributa nr poleg presečišč preveriti tudi, da se q in p nahajata na različni strani. $p.nr \neq q.nr$, kjer $p \in st$, velja torej natanko takrat, ko se q nahaja levo od p . S tem dodatnim pogojem preprečimo nepričakovano obnašanje algoritma (glej sliko. NARIŠI PRIMER TREH TOČK qps , KJER JE p NA ST , in pokaži, da imata brez dodatnega pogoja q in s enak nr).

Časovna zahtevnost izračuna vrednosti nr je konstantna. Enako velja za kategorizacijo, ki poleg nr izračuna še orientacijo s predikatom on_left . Za dostop do podseznama, kamor vstavimo točke glede na kategorizacijo in razdaljo od korena drevesa, uporabimo operator $[]$, za vstavljanje točke pa metodo $push_back(p)$. Oba zagotavljata amortizirano časovno zahtevnost $\mathcal{O}(1)$. S tem, ko sproti izračunamo $N[p]$ za vsako točko drevesa ter podseznane L_i^0, L_i^1, R_i^0 in L_i^1 , se znebimo bloka 3–5 v teoretičnem opisu algoritma, ki bi nam sicer vzel $O(n)$ časa.

4.2.2 Kd drevo

Za podatkovno strukturo s poizvedbami najbližjega sosedu smo sprva hoteli uporabiti VD, vendar smo se kasneje odločili za Kd drevo. Razlog za to je implementacija VD v knjižnici CGAL. Ker je prostorska kompleksnost VD $\mathcal{O}(n)$, bi pričakovali, da poraba prostora raste linearno z večanjem VD. Izkaže se, da je rast počasnejša od linearne, kar pomeni, da na primer 100 VD objektov velikosti 10 porabi več prostora kot 10 objektov velikosti 100. Posledično poraba prostora ni enaka za vsak nivo drevesa, temveč z globino

raste. Ko smo testirali implementacijo kd dreves v CGAL-u, smo ugotovili tudi, da je čas izgradnje strukture bistveno krajši kot pri VD. Primerjave med izradnjama obeh podatkovnih struktur (procesorski čas in poraba RAM-a) so prikazane v poglavju 5. DT prav tako ne pride v poštev, ker brez dobrega začetnega lica, ki ga v tem primeru ne moremo zagotoviti, poizvedba s prehodom vzame $O(\sqrt{n})$ časa.

Kot osnovo smo za poizvedbe najbližjega sosedu uporabili funkcijo *search* v razredu *Kd_tree*, ki je namenjena območnemu iskanju. Razlog za to je, da nas po lemi 3.5 v resnici ne zanima najbližji sosed, ampak poljubna točka, ki je od poizvedbene točke oddaljena največ 1. Kot argument sprejme *OutputIterator*, kamor se shranjujejo objekti, ki jih poizvedba vrne, in *FuzzyQueryItem*, ki je v dvodimenzionalnem primeru lahko krog ali pravokotnik in določa območje iskanja. Podamo mu lahko vrednost ϵ , ki določa stopnjo mehкости (ang. fuzzyness) in se jo uporablja pri aproksimacijskih poizvedbah, ki pa jih v našem algoritmu nismo potrebovali. Tip, ki smo ga uporabili, je *Fuzzy_circle* s središčem, ki ga določa točka poizvedbe in polmerom 1. Časovna kompleksnost funkcije *search* oziroma območnega iskanja v kd drevesu enaka $\mathcal{O}(\sqrt{n} + k)$, kjer je k število vrnjenih točk znotraj območja iskanja. Ker naš algoritem zahteva čas $\mathcal{O}(\log n)$, smo v razredu *Kd_tree* napisali podobno funkcijo, ki vrne par $(\text{boolean}, \text{Point}_2)$. Kot smo omenili, nas v resnici namesto najbližje točke zanima le, če območje iskanja vsebuje kakšno točko. To pomeni, da lahko iskanje po kd drevesu zaključimo v tistem trenutku, ko ugotovimo, da je ta pogoj izpolnjen. Konkretno je ta pogoj izpolnjen takrat, ko za neko poddrevo ugotovimo, da se njegove točke v celoti nahajajo v območju iskanja. Naša metoda v tem primeru vrne par *true* in prvo točko v takem poddrevesu. S tem za poizvedbe zagotovimo povprečno časovno zahtevnost $\mathcal{O}(\log n)$.

4.2.3 DualPoint - implementacija dualne točke

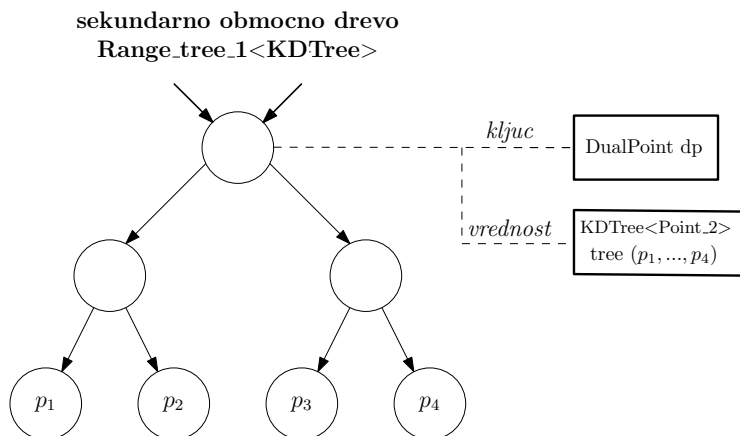
Odločili smo se razlikovati po tipu med navadnimi točkami in točkami v dualnem prostoru, ki izhajajo iz premic v primarnem prostoru. Za sle-

dnje smo naredili razred *DualPoint*, ki hrani dva atributa. Prvi je točka v dualnem prostoru tipa *Point_2*, poimenovan *point*. Drugi je kazalec na točko tipa *Point_2*, poimenovan *originalPoint*. Če *point* predstavlja točko $(\varphi_1(b), \varphi_2(b))$ (glej poglavje 3.2.3), potem *originalPoint* predstavlja točko b . Konstruktor razreda kot argumenta sprejme točko b ter daljico σ in s pomočjo funkcije *imagePoint*(*Point_2* b , *Segment_2* σ) izračuna točko preslikave. Kazalec na točko v primarnem prostoru hranimo zato, da ko delamo poizvedbo nad območnim drevesom, ki hrani dualne točke, lahko iz rezultata enostavno dostopamo do primarne točke, ki nas v resnici zanima.

4.2.4 Območno drevo

Za dvodimenzionalna območna drevesa smo uporabili implementacijo v knjižnici CGAL, ki jo predstavlja razred *Range_tree_2*. Vsako vozlišče hrani par *ključ* in *vrednost*. *Vrednost* dodatno opisuje vozlišče in je lahko tudi prazna, ključ pa se uporablja pri izgradnji drevesa in poizvedbah. Oba argumenta sta predlogi, kar pomeni, da moramo pri konstrukciji drevesa zanj podati konkretna tipa. Za ključ smo uporabili naš razred *DualPoint*, kot vrednost pa vsako vozlišče hrani svoje kd drevo. Zaradi tega smo morali vnesti nekaj sprememb v CGAL-u. Razred za značilnosti območnih dreves *Range_tree_map_traits_2* je parametriziran z modelom predstavitve dvodimenzionalnih točk tipa *Point_2* in s tipom ta vrednost. Drevo torej kot ključ vedno uporabi objekt tipa *Point_2* $< K >$, kjer je K model predstavitve (v naši implementaciji je ta vedno *Cartesian* $< double >$). Iz razreda značilnosti smo zato odstranili prvi parameter in v njem zamenjali tip ključa na *DualPoint*. Spremeniti smo morali tudi operatorja za primerjavo ključev v razredih *C_Compare_1* (za primarno drevo) in *C_Compare_2* (za sekundarno drevo). Funkciji kličeta predikata *compare_x* oziroma *compare_y* neposredno nad objekti obeh ključev. Ker so objekti v našem primeru tipa *DualPoint*, smo funkciji spremenili tako, da predikatoma poda atribut ključev *point*, ki je tipa *Point_2* in hrani točko v dualnem prostoru.

Pri inicializaciji drevesu podamo seznam parov dualnih točk in praznih



Slika 4.3: .

kd dreves. Nato se iterativno sprehodimo (tako kot pri preiskovanju v širino) po prvem nivoju drevesa - primarnem drevesu - s funkcijo *traverse_and_populate_with_data*. Za vsako vozlišče pokličemo funkcijo *build_Kd_on_layer2*, ki rekurzivno od spodaj navzgor za vsako vozlišče v sekundarnem drevesu, na katerega kaže vozlišče v primarnem drevesu, vstavi v (do tistega trenutka prazno) njegovo kd drevo točke, ki jih hranita kd drevesi njegovih otrok. Pri listih je v kd drevo vstavljena točka, čigar dualna točka je uporabljena kot ključ vozlišča. Rekurzivni klic funkcije se torej kliče pred vstavljanjem točk v kd drevo. S pomočjo rekurzije je vsakemu notranjemu vozlišču v sekundarnem drevesu seznam točk v njegovem poddrevesu, ki ga potrebujemo za izgradnjo njegovega kd drevesa, direktno podan preko kd dreves njegovih otrok. Če bi kd drevesa gradili od zgoraj navzdol v sekundarnem drevesu, bi morali za vsako vozlišče narediti sprehod po njegovem poddrevesu. Primarno drevo za razliko od sekundarnih ne hrani nobenih dreves kot vrednosti v svojih vozliščih.

4.2.4.1 Poizvedbe v območnem drevesu

Razredu *Range_tree_d* smo za poizvedbe dodali funkcijo *window_query_impl_modified*, ki kot osnovo uporablja obstoječo funkcijo *window_query_impl*. Argumenti funkcije so *OutputIterator*, kamor se vsta-

vljajo vrnjene točke, interval I , ki ga definirata dve dualni točki, tretji argument, ki ga v obstoječi funkciji ni, pa je točka a , ki jo uporabimo za poizvedbe najbližjega sosedu v kd drevesih. Pri dvodimenzionalnih območnih drevesih je geometrijska predstavitev intervala pravokotnik; levo krajišče intervala ustreza spodnjemu levemu oglišču pravokotnika, desno krajišče pa zgornjemu desnemu oglišču. Interval je zaprt.

Če za vozlišče w v primarnem drevesu ugotovimo, da njegovo celotno poddrevo ustreza pogoju poizvedbe, nadaljujemo s preiskovanjem v njegovem sekundarnem drevesu. Če za vozlišče v v sekundarnem vozlišču ugotovimo, da so vsa vozlišča v njegovem poddrevesu vsebovana v intervalu I , ne dodamo vso poddrevo v rezultat, kot je to storjeno v izvirni metodi, temveč opravimo še poizvedbo najbližjega sosedu (z območnim iskanjem) točke a v kd drevesu vozlišča v . Če poizvedba vrne neprazen rezultat, lahko iskanje v območnem drevesu zaključimo. Za vsako obiskano vozlišče w v primarnem drevesu prav tako preverimo, če je vsebovano v intervalu I . Če je temu tako, točko, iz katere izhaja dualna točka, ki predstavlja ključ vozlišča w , vrnemo kot rezultat. Enako velja za obiskana vozlišča v sekundarnem drevesu.

Interval I je odvisen od točke poizvedbe a in tega, ali v drevesu iščemo tako točko b , da ab seka st ali ne. Če ja, potem je območje iskanja drugi kvadrant v dualnem prostoru (glej sliko 3.10), sicer sta to prvi in tretji kvadrant. Za te potrebe smo napisali metodi *rangeTree_query* in *rangeTree_query_complement*. Pri prvi je iz točke poizvedbe a interval konstruiran kot pravokotnik s spodnjim levim ogliščem $(a.x, -\infty)$ in zgornjim desnim ogliščem $(\infty, a.y)$. Pri drugi metodi sta konstruirana dva intervala: prvi ima za levo krajišče točko $(-\infty, -\infty)$ in za desno krajišče točko a , drugi pa za levo krajišče točko a , za desno pa točko (∞, ∞) . Najprej se naredi poizvedba s prvim intervalom in le če slednja ne vrne nobenega rezultata, se poizvedba naredi tudi z drugim intervalom.

4.2.5 Celotna struktura algoritma

Program kot prvi argument sprejme tekstovno datoteko, ki vsebuje po

eno točko v vsaki vrstici kot par koordinat. Kot drugi argument je podano začetno krajišče daljice σ , točka s , kot tretji pa točka t kot končno krajišče daljice. Nato se pokliče glavna metoda programa, v kateri se izvedejo vsi izračuni in se okvirno ujema z 3.11.

Najprej se inicializira objekt *SSSPTree*, ki v konstruktorju zgradi DT. Za vsako točko $r \in P$ se nato zgradi drevo s korenom r . Iz drevesa dobimo ven štiri sezname $L0, L1, R0, R1$. V *while* zanki nato preverimo kandidate v istem vrstnem redu, kot so nanizani v 3.11. Za kandidate na isti strani daljice st se pokliče metoda *nnSeparation*, za ostale pa *rangeSeparation*.

V metodi *nnSeparation* za vse pare množic točk (S_1, S_2) na isti strani daljice st in ki tvorijo cikel dolžine $2i$ zgradimo kd drevo nad S_2 , za vsako točko $p \in S_1$ pa v drevesu z območnim iskanjem poiščemo prvo točko q , ki je od p oddaljena za največ 1. To naredimo z metodo v razredu *KdTree*, ki smo jo napisali sami. Preprosta optimizacija, ki smo jo dodali v algoritem, je ta, da vnaprej zavržemo tiste pare, pri katerih je ena od množic prazna. S tem bistveno pohitrimo algoritem (glej poglavje 5), saj nima smisla delati poizvedbe nad praznim drevesom ali zgraditi drevesa, nad katerim ne bomo naredili nobene poizvedbe.

V *rangeSeparation* preverimo pare v sledečem vrstnem redu: $L_i^0 \times R_{i-1}^0$, $L_i^1 \times R_{i-1}^0$, $L_i^1 \times R_{i-1}^1$, $L_i^0 \times R_{i-1}^1$, $L_{i-1}^0 \times R_i^0$, $L_{i-1}^0 \times R_i^1$, $L_{i-1}^1 \times R_i^0$, $L_{i-1}^1 \times R_i^1$, $L_i^0 \times R_i^0$, $L_i^0 \times R_i^1$, $L_i^1 \times R_i^0$, $L_i^1 \times R_i^1$. Območnih dreves ne gradimo za vsak par posebej, temveč enkrat za vsako od množic $R_{i-1}^0, R_{i-1}^1, R_i^0, R_i^1$, če je to potrebno. Tudi tukaj namreč ne preverjamo parov, pri katerih je ena od množic prazna. Za pare, kjer iščemo kandidate, ki sekajo st , uporabimo metodo *rangeTree_query*, za kandidate, ki ne sekajo st , pa metodo *rangeTree_query_complement*. Na koncu z metodo *nnSeparation* preverimo še zadnja dva para $L_i^0 \times L_i^1$ in $R_i^0 \times R_i^1$. S takim zaporedjem parov lahko v trenutku, ko naletimo na prvi par, ki vrne neprazen rezultat, prenehamo z iskanjem z ostalimi pari, zaključimo zanko in s tem iskanje cikla za koren r .

4.2.6 Izgradnja minimalnega cikla

Ko dobimo par točk $a, b \in P$, ki določata minimalno zaprto pot, ki ločuje točki s in t , v seznam shranimo vse točke, ki tvorijo cikel. S pomočjo funkcije *getParent()* lahko za vsako točko p v drevesu $SSSP(r, P)$ dobimo njegovega starša in s tem pot $T_r[p]$ v obratnem vrstnem redu (z začetkom pri točki p in koncem pri točki r), ki jo označimo kot $T_r^{-1}[p]$. Pot $T_r[p]$ brez točke r označimo z $T_{r-1}[p]$. Cikel lahko potem dobimo z združitvijo dveh poti $T_r^{-1}[a] + T_{r-1}[b]$, ki se vedno stikata v natanko eni točki, tj. korenu drevesa. Z drugimi besedami: najmanjši skupni prednik (ang. *lowest common ancestor*) točk a in b v drevesu najkrajših poti $SSSP(r, P)$ je vedno r . Če to ne bi veljalo in bi bil njun najmanjši skupni prednik točka r^* , bi potem obstajal krajši cikel v drevesu $SSSP(r^*, P)$, kjer bi a in b določala minimalno zaprto pot in bi bil njun najmanjši skupni prednik zopet točka r^* . Z združitvijo obeh poti dobimo pot (a, \dots, r, \dots, b) . Vrnjen seznam predstavlja cikel, v katerem je začetna točka shranjena samo enkrat. Za dolžino najbolj optimalne poti se do konca izvajanja programa hrani vsota dolžin točk a in b . Dolžina, ki jo program vrne kot rezultat, je povečana za 1.

```

PSEVDOKODA GLAVNEGA ALGORITMA(Iterator begin, Iterator end,
Segment2 st)
1  (Point2, Point2, int) best = (null, null, MAX VALUE)
   // izračunaj DT
2  SSSPTree ssspTree(begin, end, st)
3  for r ∈ P
4      ssspTree.createTreeFromRoot(r)
5      vector l0 = ssspTree.getL0()
   // podobno za l1, r0, r1
6      i = 1
7      int maxDist = l0.size()
8      while  $2i < best \ \&\& \ 2i \leq maxDist$ 
9          (Point2, Point2, int) result = nnSeparation(l0, l1, r0, r1, i)
10         if result[2] < best[2]
11             best = result
12             break
13         result = rangeSeparation(l0, l1, r0, r1, i, st)
14         if result[2] < best[2]
15             best = result
16             break
17         i ++
   // resetiraj vrednosti atributov v točkah DT
18     ssspTree.resetTree()
19 return makeCycle(best)

```

Slika 4.4: Celotni algoritem minimalne ločitve

```

NNSEPARATION(vector l0, vector l1, vector r0, vector r1, int i, Segment2 st)
1  (Point2, Point2, int) best = (null, null, MAX VALUE)
2  vector  $L_i^0 = l0[i]$ 
3  vector  $L_{i-1}^0 = l0[i - 1]$ 
   // podobno za l1, r0, r1
4  vector groups = [ $L_{i-1}^0, L_i^1, L_i^0, L_{i-1}^1, R_{i-1}^0, R_i^1, R_i^0, R_{i-1}^1$ ]
5  vector pairs = [(0, 1), (2, 3), (4, 5), (6, 7), (1, 2), (5, 6)]
6  for pair : pairs
7      vector p0 = groups[pair.first]
8      vector p1 = groups[pair.second]
9      if (!p0.empty() && !p1.empty())
10         KDTree kdtree(p1.begin(), p1.end())
11         for q : p0
12             (bool, Point2) result = kdtree.customSearch(q)
13             if (result[0])
14                 Point2 nearest = result[1]
15                 best = (q, nearest, q.getDist() + nearest.getDist())
16         return best
17 return best

```

Slika 4.5: Prilagoditev splošnega algoritma za izračun minimalne ločitve z enotskimi krogi.

Poglavje 5

Eksperimenti in rezultati

Eksperimente smo izvedli na prenosnem računalniku z operacijskim sistemom Windows 10, procesorjem CPU i7-6700HQ z 2.6 Ghz in 8GB spomina. Za vizualizacijo domen, vhodnih podatkov in rezultatov smo napisali skripte v programskem jeziku *python* in pri tem uporabili knjižnico *Matplotlib*. Vsi časi v poročanih tabelah uporabljajo sekundo kot enoto, pri tabelah s porabo prostora pa je enota MB.

5.1 Uporaba kd dreves namesto VD

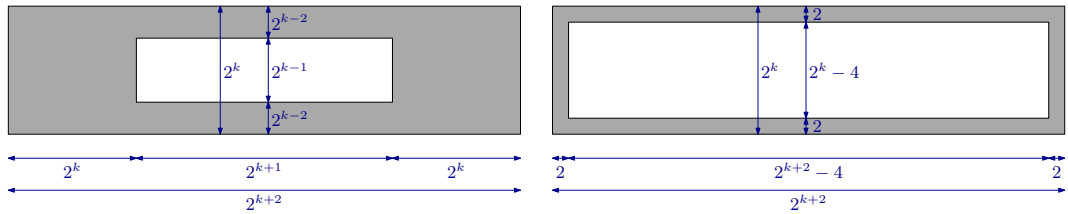
Kot strukturo za iskanje najbližjega sosedu znotraj območnega drevesa smo prvotno hoteli uporabiti VD, a smo kmalu prišli do spoznanja, da njegova implementacija v CGAL-u ni dovolj ustrezna. Prva težava, ki smo jo že omenili, je časovna zahtevnost iskanja najbližjega sosedu, ki je enaka $\mathcal{O}(\sqrt{n})$. Za

number of točk	50k	100k	250k	500k	750k	1mio
CPU(VD) [s]	0.0859	0.196	0.562	1.2667	2.0495	2.9304
CPU(kd drevo) [s]	0.0025	0.0047	0.0126	0.025	0.0375	0.0497

Tabela 5.1: Povprečni čas izradnje Voronoijevega diagrama in kd drevesa v sekundah.

number of točk	50k	100k	250k	500k	750k	1mio
RAM(VD) [mb]	7.2	14.4	34.3	68.9	103.6	137.9
RAM(kd drevo) [mb]	1.9	3.8	9.5	19	28.5	38.1

Tabela 5.2: Velikost prostora v megabajtih, ki ga zasede en objekt Voronoi-jevega diagrama in kd drevesa.

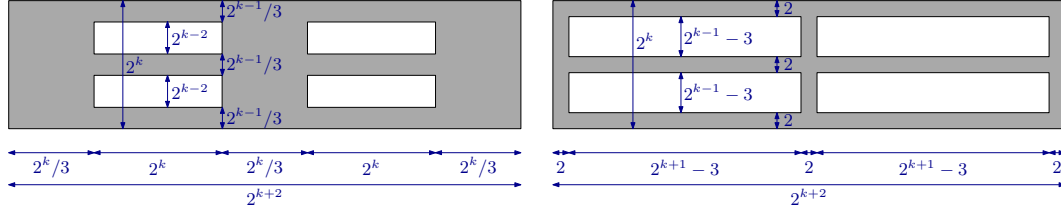


Slika 5.1: .

prepočasno se je izkazala tudi sama izgradnja strukture. Primerjava časov izgradnje VD in kd dreves je za različno število točk prikazana v tabeli 5.1. Testi so se izvedli na prenosniku s procesorjem i5-5200U z 2.20Ghz, prikazani časi pa so povprečje desetih iteracij testa. Sami objekti VD v CGAL-u porabijo tudi bistveno več prostora kot kd drevesa, kar je prikazano v tabeli 5.2. Glavni problem s prostorom, ki ni prikazan v tabeli, je v VD z majhnim številom točk. Če območno drevo hrani 100 točk, ima v korenu sekundarnega drevesa shranjeno strukturo za poizvedbe najbližjega soseda s 100 točkami. Po drugi strani ima drevo 100 listov in v vsakem je shranjena struktura z eno točko. Implementacija VD krši teoretično prostorsko kompleksnost območnega drevesa, ki temelji na tem, da vsi nivoji drevesa porabijo podobno veliko prostora. 10 VD-jev s 1000 točkami tako porabi 3,3mb prostora, 10000 VD-jev z eno točko pa kar 200mb.

5.2 Generator vhodnih podatkov

Točke smo generirali naključno znotraj sledečih poligonskih domen: pravokotnik brez lukenj, pravototnik z manjšo luknjo, pravokotnik z večjo luknjo,



Slika 5.2: .

pravokotnik s štirimi manjšimi luknjami in pravokotnik s štirimi večjimi luknjami. Natančne dimenzije domen so prikazane na slikah 5.1 in 5.2. Konkretno smo uporabili domene, kjer je imel zunanji pravokotnik dimenzije $4 \times 1, 8 \times 2, \dots, 128 \times 32$. Velikost vhodnih podatkov je bila 1K, 2K, 5K, 10K, 20K in 50K točk. Podatke smo generirali enkrat in nato zapisali v tekstovno datoteko. Pri testiranju problema minimalne ločitve smo točko s postavili na sredino luknje, t pa vertikalno nad s in zunanjim pravokotnikom. Pri domenah s štirimi luknjami smo s postavili na sredino zgornje leve luknje. Prvi dve točki v tekstovni datoteki, ki hrani vhodne podatke, sta vedno obravnavani kot točki s in t . Domen s premajhnimi luknjami nismo uporabili za problem minimalne ločitve, ker je višina lukenj manjša od 1 in bi drevo najkrajših poti vsebovalo povezave med točkama na nasprotnih straneh luknje. S tem bi se vloga luknje izgubila in bi kot rešitev dobili trivialni cikel.

Pri večjih domenah in manjših vhodnih podatkih je bil izziv zapolniti prostor, ki je pogoj za obstoj rešitve minimalnega problema, saj so točke bolj razpršene. Za vhodne podatke sicer nismo zahtevali pogoja, da je njihov graf G povezan, smo pa želeli, da je velikost največje komponente G dovolj podobna velikosti celotnega grafa G . S tem smo povečali možnost obstoja rešitve in dosegli, da smo dejansko testirali želeno število vhodnih podatkov. Nekatere kombinacije (na primer 1000 točk na domeni z zunanjim pravokotnikom 128×32) smo zato izpustili, pri drugih pa smo problem rešili tako, da smo za začetnih m generiranih točk preverili, da imajo vsaj k sosedov (točk, od katerih so oddaljene za največ 1) med trenutnimi vhodnimi podatki. Če pogoj ni bil izpolnjen, smo generirano točko zavrgli. S tem smo generator na

začetku spodbudili k zapolnjevanju prostora domene. Vrednosti m in k smo nastavili za vsako kombinacijo posebej s pomočjo kalibracije. k se je gibal med 3 in 5 (manjši k pomeni hitrejšo zapolnjevanje prostora, zato smo ga uporabili pri večjih domenah), m pa okrog številke 500. Smiselno zaporedje generiranih točk smo pri eksperimentih nevtralizirali tako, da so točke pred uporabo algoritmov naključno sortirane.

5.3 Drevo najkrajših poti

Implementacijo algoritma SSSP smo primerjali z dvema očitnima alternativnima algoritmoma za drevesa najkrajših poti. Pri prvi eksplicitno zgradimo graf $G = G_{\leq 1}(P)$ tako, da za vse možne pare $p, q \in P$ dodamo povezavo pq v strukturo grafa, če je razdalja med p in q največ 1. Za dan koren r nato za izgradnjo drevesa uporabimo splošno iskanje v širino (BFS). Predprocesiranje (izgradnja grafa $G_{\leq 1}(P)$) ima kvadratno časovno zahtevnost, čas izgradnje drevesa pa je odvisen od gostote grafa. Za vsako točko iz vhodnega seznama, ki ga nespremenjenega hranimo ves čas, zgradimo vozlišče. Za vozlišče grafa smo napisali strukturo *GraphNode*, ki hrani točko tipa *Point_2*, kazalec na starša in sosedo kot seznam indeksov, ki določajo položaj sosedo/točke v vhodnem seznamu. Za vsako vozlišče preverimo razdaljo do ostalih vozlišč (brez simetričnih primerov; skupno preverimo torej $\frac{n(n-1)}{2}$ parov) in za vsak par vozlišč z razdaljo največ 1 dodamo drug drugega v seznam sosedov. Drevo najkrajših poti potem zgradimo s klasičnim algoritmom za preiskovanje v širino (glej 3.2).

Kot drugo alternativo uporabimo mrežo enotskih razdalj (glej poglavje 2.4). Dve točki (x, y) in (x', y') se nahajata v isti celici mreže natanko takrat, ko velja $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor) = (\lfloor x' \rfloor, \lfloor y' \rfloor)$. Vse točke v celici c shranimo v seznam $\ell(c)$. Vse neprazne seznane $\ell(c)$ shranimo v slovar, v katerem je kot ključ uporabljeno spodnje levo oglišče celice. S tako strukturo nato izvedemo nekakšno preiskovanje v širino. Seznam $\ell(c)$ celice c hrani točke, ki še niso bile obiskane z drevesom najkrajših poti. Ko procesiramo točko p v celici c , moramo

kot kandidate obravnavati vse ostale točke v $\ell(c)$ in točke v seznamih osmih sosednih celic. Vsaka točka, ki je sosedna p , je nato odstranjena iz seznama svoje celice. Predprocesiranje (izgradnja slovarja) ima linearno časovno zahtevnost, čas izgradnje drevesa pa je odvisen od porazdelitve točk. Enostavno se da najti primere, kjer bi bil ta čas kvadratičen. Za vsako najkrajše drevo slovar zgradimo od začetka. Ker je čas, ki ga porabimo za to, zanemarljiv, čas predprocesiranja za mrežo ni prikazan med rezultati. Za seznam točk v celicah smo pri implementaciji uporabili strukturo *list* in ne *vector*. Razlog za to je ta, da je vsaka točka slej ko prej odstranjena iz seznama svoje celice. *vector* v C++ omogoča samo brisanje vsebine elementa na i -tem mestu, ne pa brisanja samega elementa oziroma je časovna kompleksnost tega $O(n)$. Po drugi strani *list* porabi nekaj več spomina, ker vsak element hrani še kazalca na prejšnji in naslednji element, ima enak čas vstavljanja elementa na konec seznama kot *vector*, vendar je časovna kompleksnost brisanja (in vstavljanja) elementa sredi seznama $O(1)$, ker samo preveže njegovega predhodnika in naslednika. Za slovar celic smo uporabili strukturo *unordered_map*, ki kot ključ hrani par celih števil, ki predstavljajo spodnje levo oglišče celice. Za ključ smo morali definirati tudi dobro *hash* funkcijo, odporno na trke (ang. *collisions*). Uporabili smo Cantorjevo funkcijo $\pi(k_1, k_2) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2$.

5.4 Minimalna ločitev

Kot merilo uspešnosti algoritma za minimalno ločitev smo njegove rezultate primerjali z rezultati splošnega algoritma za ločevanje, opisanega v poglavju 3.2.1. Za potrebe implementacije splošnega algoritma smo razredu *Point_2* dodali še atribut *neighbours*, ki za posamezno točko hrani seznam kazalcev na njene sosede v grafu G . Najprej z inicializacijo objekta *SSSPTree* zgradimo $DT(P)$. Nato se algoritem z iteratorjem sprehodi čez vozlišča triangulacije, pred katerih lahko dostopamo do objektov točk. Za vsako vozlišče u gremo ponovno skozi iterator vozlišč, le da ima ta začetek pri trenutnem vozlišču (skupno število iteracij je torej $\frac{n \times (n-1)}{2}$). Za vsako vozlišče v druge

Pravokotnik brez lukenj		20K točk		
dimenzije pravokotnika		4×1	8×2	16×4
predprocesiranje SSSP		0.025	0.027	0.025
povprečje za koren s SSSP		0.131	0.130	0.127
predprocesiranje BFS		25.057	20.433	17.773
povprečje za koren z BFS		3.406	1.359	0.404
mreža		1.605	1.647	0.695
		32×8	64×16	128×32
predprocesiranje SSSP		0.025	0.025	0.026
povprečje za koren s SSSP		0.126	0.129	0.136
predprocesiranje BFS		17.734	17.347	17.179
povprečje za koren z BFS		0.088	0.025	0.009
mreža		0.227	0.089	0.053
		50K točk		
		4×1	8×2	16×4
predprocesiranje SSSP		0.091	0.091	0.070
povprečje za koren s SSSP		0.592	0.562	0.375
predprocesiranje BFS		>3min	159.812	144.965
povprečje za koren z BFS	omejitev RAM-a		9.378	2.789
mreža		11.567	13.660	4.592
		32×8	64×16	128×32
predprocesiranje SSSP		0.071	0.070	0.069
povprečje za koren s SSSP		0.377	0.372	0.366
predprocesiranje BFS		140.404	131.854	132.475
povprečje za koren z BFS		0.584	0.144	0.044
mreža		1.346	0.432	0.187

Tabela 5.3: Times for shortest paths in Pravokotnikih without luknje.

Pravokotnik 1 small hole		10K točk		
dimenzije pravokotnika	4×1	8×2	16×4	
predprocesiranje SSSP	0.021	0.012	0.012	
povprečje za koren s SSSP	0.104	0.059	0.060	
predprocesiranje BFS	8.500	4.300	4.100	
povprečje za koren z BFS	1.183	0.318	0.091	
mreža	0.486	0.513	0.168	
	32×8	64×16	128×32	
predprocesiranje SSSP	0.012	0.012	0.012	
povprečje za koren s SSSP	0.061	0.064	0.070	
predprocesiranje BFS	4.100	4.000	4.000	
povprečje za koren z BFS	0.026	0.008	0.003	
mreža	0.072	0.035	0.026	
		20K točk		
	4×1	8×2	16×4	
predprocesiranje SSSP	0.027	0.026	0.025	
povprečje za koren s SSSP	0.142	0.137	0.136	
predprocesiranje BFS	24.813	19.817	18.396	
povprečje za koren z BFS	3.253	1.328	0.467	
mreža	2.181	2.627	0.668	
	32×8	64×16	128×32	
predprocesiranje SSSP	0.025	0.025	0.025	
povprečje za koren s SSSP	0.136	0.138	0.145	
predprocesiranje BFS	17.976	17.542	17.313	
povprečje za koren z BFS	0.108	0.031	0.011	
mreža	0.262	0.104	0.060	

Tabela 5.4: Times for shortest paths in Pravokotnikih with a small hole.

Pravokotnik 4 small luknje		10K točk		
dimenzije pravokotnika	32×8	64×16	128×32	
SSSP preprocessing	0.021	0.018	0.018	
povprečje za koren s SSSP	0.056	0.058	0.064	
predprocesiranje BFS	6.291	6.102	6.364	
povprečje za koren z BFS	0.033	0.010	0.004	
mreža	0.064	0.031	0.023	
		20K točk		
predprocesiranje SSSP	0.027	0.026	0.026	
povprečje za koren s SSSP	0.125	0.126	0.131	
predprocesiranje BFS	18.325	17.887	17.256	
povprečje za koren z BFS	0.102	0.031	0.010	
mreža	0.230	0.096	0.055	

Tabela 5.5: Časi za najkrajše poti v pravokotnikih s 4 manjšimi luknjami.

Pravokotnik 4 večje luknje		5K točk		
dimenzije pravokotnika	32×8	64×16	128×32	
predprocesiranje SSSP	0.007	0.009	0.009	
povprečje za koren s SSSP	0.027	0.028	0.026	
predprocesiranje BFS	1.420	1.420	1.390	
povprečje za koren z BFS	0.007	0.003	0.002	
mreža	0.019	0.013	0.010	
		10K točk		
predprocesiranje SSSP	0.012	0.018	0.019	
povprečje za koren s SSSP	0.057	0.054	0.053	
predprocesiranje BFS	5.740	5.660	5.720	
povprečje za koren z BFS	0.028	0.013	0.007	
mreža	0.060	0.038	0.027	

Tabela 5.6: Časi za minimalno ločevanje s 4 večjimi luknjami.

iteracije preverimo $\text{dist}(u.p, v.p)$ in če je ta največ 1, v seznam $u.p.\text{neighbours}$ dodamo kazalec na točko $v.p$. Ker se drugi iterator ne začne s prvim vozliščem, povezavo uv shranimo samo enkrat.

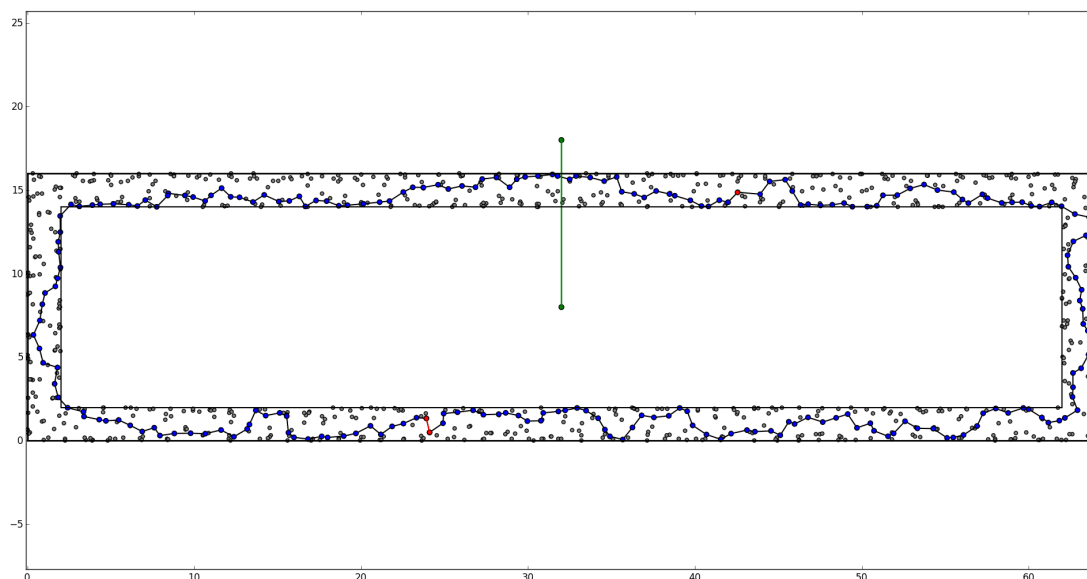
V glavni zanki se zopet sprehodimo skozi iterator vozlišč in za vsako njegovo točko r zgradimo drevo $\text{SSSPTree}(r)$. S tem se za vsako točko p hkrati izračuna tudi število presečišč poti rp z st po modulu 2. Z dodatno zastavico v konstruktorju drevesa smo izklopili kategorizacijo točk v štiri sezname, saj tukaj ni potrebna. Čez povezave $E(G)$ se sprehodimo tako, da gremo zopet z iteratorjem čez vsa vozlišča in za vsako točko vozlišča preverimo vse njegove sosedes s pomočjo seznama kazalcev.

Pravokotnik 1 manjša luknja	2K točk			
dimenzije pravokotnika	8×2	16×4	32×8	64×16
nov algoritem za ločevanje	65	64	53	38
splošni algoritem	215	87	43	29

Tabela 5.7: Časi za minimalno ločevanje z eno manjšo luknjo.

Pravokotnik 4 luknje	2K točk, manjše luknje		
dimenzije pravokotnika	32×8	64×16	128×32
nov algoritem za ločevanje	29	35	35
splošni algoritem	80	40	30
	5K točk, večje luknje		
nov algoritem za ločevanje	413	451	388
splošni algoritem	416	266	206

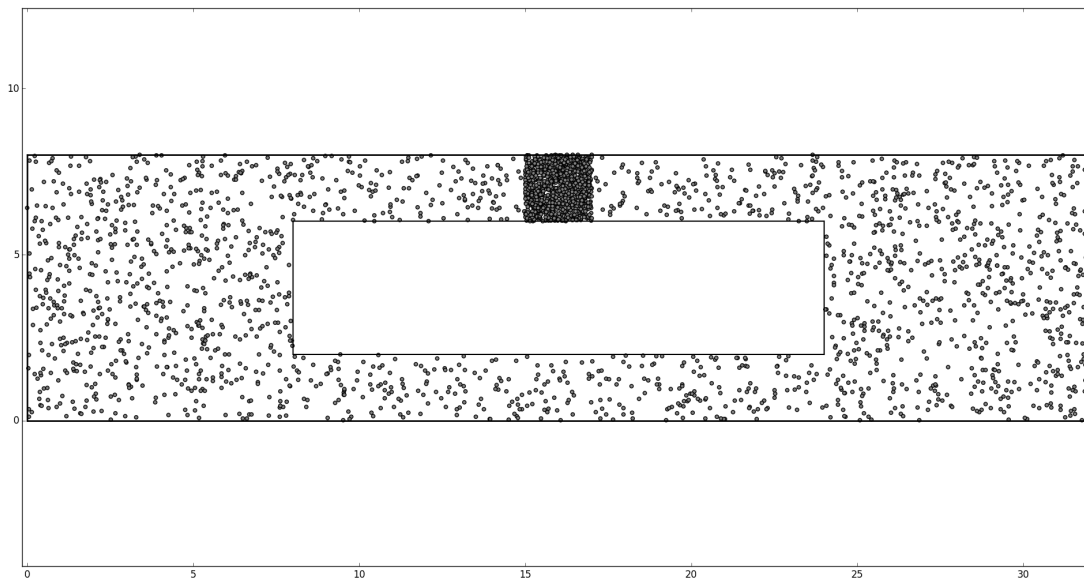
Tabela 5.8: Časi za minimalno ločevanje s 4 luknjami.



Slika 5.3: Primer rezultata - najkrajšega cikla - algoritma za minimalno ločitev. Modre točke so del poti cikla, samostojna rdeča točka predstavlja koren drevesa r , s katerim smo našli cikel, par rdečih točk p, q pa z rdečo povezavo najkrajši poti od r do p in r do q združi v cikel. Zelena daljica predstavlja daljico st .

Pravokotnik brez lukenj	50K točk		
dimenzije pravokotnika	4×1	8×2	16×4
SSSP	25.2	22.3	20.1
mreža	23.2	22.4	22.2
	32×8	64×16	128×32
SSSP	19.3	19	18.7
BFS	204.2	68.8	28.5
mreža	21.9	22	23

Tabela 5.9: Max ram brez lukenj.



Slika 5.4: Primer eksperimenta, kjer se nov algoritem za ločevanje odreže bistveno bolje od splošnega algoritma. 2000 izvirnim točkam smo dodali 1000 novih točk blizu st , ki s tem bistveno povečajo velikost množice $E(G(P))$.

Pravokotnik s 4 velikimi luknjami dimenzije pravokotnika	5K točk		
	32×8	64×16	128×32
SSSP	3.1	2.8	2.5
BFS	4.2	2.9	2.3
mreža	2.7	2.7	2.9
10K točk			
SSSP	5.6	5.0	4.5
BFS	12.6	7.6	5.3
mreža	4.9	4.9	5.1

Tabela 5.10: Max ram - velike luknje

Pravokotnik s 4 luknjami	2K točk, manjše luknje		
dimenzije pravokotnika	32×8	64×16	128×32
nov algoritem za ločevanje	5.4	3.3	2
splošni algoritem	2.9	2.1	1.8
5K točk, večje luknje			
nov algoritem za ločevanje	12.9	8.1	5.8
splošni algoritem	8.7	6	4.2

Tabela 5.11: Max ram - velike luknje

Časovna porast za 11K točk (1K zgoščenih)	
predprocesiranje SSSP	9.7%
povprečje za koren s SSSP	13.6%
predprocesiranje BFS	21.9%
povprečje za koren z BFS	56.5%
mreža	25%

Tabela 5.12: Časi za minimalno ločevanje s 4 luknjami.

5.4.1 Analiza

Za razliko od SSSP algoritma BFS in mreža nimata nikakršne garancije za najslabši primer. Za oba lahko zgradimo takšne vhodne množice P , pri katerih bo njuna izvedba zelo počasna. Kot primer smo testirali P s 10000 točkami v pravokotniku, ki ima dimenzije 32×8 in majhno luknjo. Med krajiščema daljice st smo nato v majhnem zgoščenem prostoru dodali še dodatnih 1000 točk. Širina tega prostora je 1, tako da se število povezav v grafu G bistveno poveča. Čas izvajanja je glede na prvotno instanco najmanj narastel za SSSP, največ pa za BFS (glej tabelo 5.12).

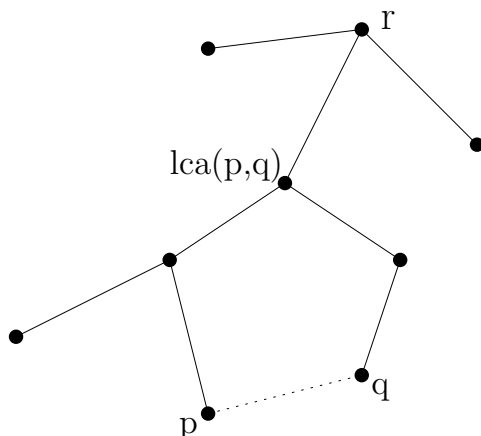
Podobno smo storili z algoritmom za minimalno ločevanje. Uporabili smo enako območje s 500 in 1000 dodatnimi točkami. V prvem primeru

nov algoritem porabi 94 sekund (skoraj trikrat več kot brez dodatnih točk), splošni algoritem pa 435 (šestkrat več kot brez dodatnih točk). V drugem primeru nov algoritem porabi 173 sekund, splošni algoritem pa več kot 15 minut. Podobno kot pri eksperimentih z drevesi najkrajših poti se tudi tukaj nov algoritem izkaže bolje v primerih, kjer so točke bolj gosto poseljene in je med njimi več povezav. Delež dreves, ki jih moramo zgraditi, da najdemo najkrajši cikel, je odvisen od velikosti lukenj oziroma širine območja, kjer se točke nahajajo, kar vpliva na dolžino cikla. Pri ožjih območjih je manjše število možnih poti in verjetnost, da naletimo na tako drevo, čigar koren je del najkrajšega cikla, je s tem večja. Zaradi večjih lukenj je tudi dolžina cikla večja in je tako razmerje med številom točk v ciklu in številom vseh točk večji.

Zaradi omenjenih lastnosti eksperimentov in enakomerne razporeditve točk v njih je najkrajši cikel najden praktično v trenutku. Ker je večina možnih ciklov podobne dolžine kot najkrajši cikel, se pri eksperimentih tudi ne izrazi optimizacijski doprinos pogoja $2i < best$ v glavni zanki algoritma. Razliko bi lahko ponazorili z eksperimentom brez lukenj, kjer bi zelo malo ciklov imelo enako dolžino. Zaradi velike variacije dolžin ciklov in dolžine najkrajšega cikla slednjega ne bi odkrili tako hitro, bi pa z omenjenim pogojem velik delež ciklov vnaprej zavrgli.

Še ena možna optimizacija algoritma, ki je nismo naknadno implementirali, ker se ne obnese v naših eksperimentih, bi bila za najden trenutno najkrajši cikel, ki ga tvorita točki p in q , ugotoviti, če je koren drevesa enak najmanjšemu skupnemu predniku $lca(p, q)$ obeh točk v drevesu (glej sliko 5.5). Če temu ni tako, potem vemo, da obstaja krajši cikel, ki ga dobimo z drevesom, ki ima za koren točko $lca(p, q)$, zato tak cikel določimo kot trenutno najkrajšega. Do takega drevesa bi sicer prišli slej ko prej, a pri primerih, kjer imajo cikli zelo različne dolžine, lahko s pogojem $2i < best$ do takrat, ko pridemo do tega drevesa, zavrzemo dosti ciklov vnaprej.

Pri porabi spomina se SSSP v povprečju odreže najboljše. Splošni BFS se odreže bistveno slabše pri manjših območjih, kjer je število povezav v grafu



G večje. Rezultati mreže ne odstopajo znatno. Pri bolj gostih območjih se izkaže malenkost bolje kot SSSP, najmanjšo porabo pa ima pri srednje velikih območjih. Je edini od algoritmov, ki mu poraba spomina malenkost naraste pri največjem območju. To gre pripisati temu, da je zaradi enakomerne razporeditve točk potrebno zgraditi več celic v večjih območjih.

Poraba spomina novega algoritma za ločevanje je po drugi strani nekoliko večja kot pri splošnem algoritmu. Razmerje sicer malenkost pade pri 5K točkah glede na 2K točk. Porabo spomina smo približno izmerili tudi na območju 32×8 z eno luknjo in 20K točk (približno zato, ker porabe nismo merili celotni čas izvajanja, ki bi bil precej velik). Novi algoritem porabi 45MB spomina, splošni pa 85MB. Razlog za večjo porabo spomina novega algoritma pri manj točkah najbrž leži v tem, da kljbu manjši prostorski kompleksnosti nekaj dodatnega spomina zasede sama izgradnja CGAL struktur območnih in kd dreves.

Poglavje 6

Sklepne ugotovitve

Čeprav se algoritem za minimalno ločevanje načeloma obnaša bolje od splošnega algoritma, obstajajo tudi še rezerve. Implementirali bi lahko tudi prilagojen algoritem, ki bi se obnašal različno glede na velikost množic L_i^j in R_i^j , ki je pogosto precej majhna. To smo deloma tudi storili tako, da smo izpustili obravnavo tistih parov, kjer je bila ena od množic prazna. Lahko pa bi šli tudi korak dlje. Z eksperimenti bi lahko našli točko preloma za velikost obeh množic, pri kateri se začne splačati uporabiti kar "brute force" metodo in preveriti vse možne pare $(p, q), p \in L_i^j, q \in R_i^j$. Velik vpliv na to ima predvsem velikost L_i^j , torej število poizvedb. Pohitritev, ki jo dobimo s takšnim algoritmom, bi lahko demonstrirali z eksperimenti, kjer so točke neenakomerno razporejene. S tako množico točk P bi imeli tako gosta kot redka območja točk in algoritem bi se obnašal glede na to, na kakšnem območju se nahajajo točke v L_i^j in R_i^j . Namesto iskanja točke preloma bi lahko uporabili tudi preprosto heuristiko s časovno zahtevnostjo obeh metod. Naj bo n velikost množice L in m velikost množice R . Uporaba kd dreves bi se s heuristiko potem splačala, če $(n + m) \log m < nm$ (kjer $(n + m) \log m$ predstavlja skupno časovno zahtevnost izgradnje kd drevesa z m elementi in n poizvedb, nm pa časovno zahtevnost *brute force* metode). Podobno bi se območna drevesa splačala, če $(n + m) \log^3 m < nm$.

Literatura

- [1] M. d. Berg, O. Cheong, M. v. Kreveld, and M. Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 2008.
- [2] M. d. Berg, O. Cheong, M. v. Kreveld, and M. Overmars. Duality. [1], pages 177–179.
- [3] M. d. Berg, O. Cheong, M. v. Kreveld, and M. Overmars. Kd-trees. [1], pages 99–105.
- [4] M. d. Berg, O. Cheong, M. v. Kreveld, and M. Overmars. Range trees. [1], pages 105–109.
- [5] H. Brönnimann, A. Fabri, G.-J. Giezeman, S. Hert, M. Hoffmann, L. Kettner, S. Pion, and S. Schirra. 2D and 3D linear geometry kernel. In *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.9 edition, 2016.
- [6] S. Cabello and P. Giannopoulos. The complexity of separating points in the plane. *Algorithmica*, 74(2):643–663, 2016.
- [7] S. Cabello and M. Jeřič. Shortest paths in intersection graphs of unit disks. *Comput. Geom.*, 48(4):360–367, 2015.
- [8] T. M. Chan and D. Skrepetos. All-pairs shortest paths in unit-disk graphs in slightly subquadratic time. In *27th International Symposium*

-
- on Algorithms and Computation, ISAAC 2016*, volume 64 of *LIPIcs*, pages 24:1–24:13, 2016.
- [9] C. Delage and O. Devillers. Spatial sorting. In *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.6 edition, 2015.
 - [10] O. Devillers. Improved incremental randomized delaunay triangulation. In *Proceedings of the 14th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 106–115, 1998.
 - [11] A. Efrat, A. Itai, and M. J. Katz. Geometry helps in bottleneck matching and related problems. *Algorithmica*, 31(1):1–28, 2001.
 - [12] Q. Fang, J. Gao, and L. J. Guibas. Locating and bypassing routing holes in sensor networks. In *Proc. Mobile Networks and Applications*, volume 11, pages 187–200, 2006.
 - [13] M. Hemmer, S. Hert, S. Pion, and S. Schirra. Number types. In *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.9 edition, 2016.
 - [14] M. Karavelas. 2D voronoi diagram adaptor. In *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.6 edition, 2015.
 - [15] Y. Wang, J. Gao, and J. S. Mitchell. Boundary recognition in sensor networks by topological methods. In *Proceedings of the 12th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking, MobiCom '06*, pages 122–133, 2006.
 - [16] M. Yvinec. 2D triangulation. In *CGAL User and Reference Manual*. CGAL Editorial Board, 4.6 edition, 2016.