

**Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu**

10. februar 2026

**19E052MEH – Dinamika mehaničkih sistema**

## **Projektni zadatak**

Kretanje kuglice po rotirajućoj paraboli

**Studenti:** Lazar Miović, Mihailo Bogdanić

**Broj indeksa:** 2024/0246, 2024/0304

**Datum:** 10. februar 2026

Školska 2025/26. godina

## 1. Postavka problema

Mala kuglica mase  $m$  postavljena je tako da može da klizi bez trenja po žici koja je savijena u obliku parabole  $z = br^2$ , gdje je  $b$  pozitivna konstanta. Žica rotira oko svoje ose simetrije ( $z$ -ose) konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$ .

Zadatak je izabrati proizvoljne numeričke vrijednosti, izvesti jednačine kretanja koristeći Lagranžov pristup, pretvoriti algebarska ograničenja u diferencijalna primjenom *constraint stabilization* metode i prikazati rezultate simulacije.

## 2. Izvođenje jednačina kretanja

### 2.1. Energija i Lagranžijan

Sistem posmatramo u cilindričnom koordinatnom sistemu  $(r, \theta, z)$ . Kinetička energija  $T$  i potencijalna energija  $U$  date su izrazima:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

$$U = mgz \quad (2)$$

Lagranžijan sistema je  $L = T - U$ :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (3)$$

### 2.2. Funkcije veze (Ograničenja)

Sistem ima dva ograničenja:

1. Rotacija konstantnom ugaonom brzinom:  $\theta = \omega t$
2. Kretanje po paraboli:  $z = br^2$

Zapisujemo ih u formi  $f_k(q, t) = 0$ :

$$f_1 = \theta - \omega t = 0 \quad (4)$$

$$f_2 = z - br^2 = 0 \quad (5)$$

### 2.3. Lagranž-Ojlerove jednačine prve vrste

Opšti oblik jednačina sa množiocima ograničenja glasi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad (6)$$

Izračunavanjem parcijalnih izvoda ograničenja:

- Za  $f_1$ :  $\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 1$ , ostali su 0.
- Za  $f_2$ :  $\frac{\partial f_2}{\partial r} = -2br$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 1$ , ostali su 0.

Dobijamo tri diferencijalne jednačine kretanja:

**1. Za koordinatu  $r$ :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} \quad (7)$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \lambda_2(-2br) \implies m\ddot{r} + 2br\lambda_2 = mr\dot{\theta}^2 \quad (8)$$

**2. Za koordinatu  $\theta$ :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \lambda_1(1) \implies mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = \lambda_1 \implies mr^2\ddot{\theta} - \lambda_1 = -2mr\dot{r}\dot{\theta} \quad (10)$$

**3. Za koordinatu  $z$ :**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \quad (11)$$

$$m\ddot{z} + mg = \lambda_2(1) \implies m\ddot{z} - \lambda_2 = -mg \quad (12)$$

## 2.4. CSM

Umjesto algebarskih jednačina  $f = 0$ , koristimo stabilizovanu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$\ddot{f} + 2\xi\dot{f} + \xi^2 f = 0 \quad (13)$$

gdje je  $\xi$  konstanta stabilizacije.

**Za ograničenje  $f_1 = \theta - \omega t$ :**

$$\ddot{\theta} = -2\xi(\dot{\theta} - \omega) - \xi^2(\theta - \omega t) \quad (14)$$

**Za ograničenje  $f_2 = z - br^2$ :** Diferenciranjem dobijamo:

$$\dot{f}_2 = \dot{z} - 2br\dot{r} \quad (15)$$

$$\ddot{f}_2 = \ddot{z} - 2b(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) = \ddot{z} - 2br\ddot{r} - 2b\dot{r}^2 \quad (16)$$

Uvrštavanjem u CSM jednačinu dobijamo vezu između ubrzanja  $\ddot{z}$  i  $\ddot{r}$ :

$$-2br\ddot{r} + \ddot{z} = 2b\dot{r}^2 - 2\xi(\dot{z} - 2br\dot{r}) - \xi^2(z - br^2) \quad (17)$$

## 2.5. Sistem u matričnom obliku

Kombinovanjem dinamičkih jednačina i CSM jednačina, formiramo sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatima  $[\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{z}, \lambda_1, \lambda_2]^T$ :

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 2br \\ 0 & mr^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2br & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr\dot{\theta}^2 \\ -2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ -mg \\ \text{CSM}_\theta \\ \text{CSM}_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Gdje su  $\text{CSM}_\theta$  i  $\text{CSM}_z$  desne strane jednačina izvedenih u poglavlju 2.4.

## 2.6. Sile ograničenja

Generalisane sile ograničenja određuju se preko Lagranžovih množilaca  $\lambda_k$  i parcijalnih izvoda funkcija veze:

$$F_r^{\text{con}} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} = -2br\lambda_2 \quad (19)$$

$$F_\theta^{\text{con}} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \lambda_1 \quad (20)$$

$$F_z^{\text{con}} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = \lambda_2 \quad (21)$$

Ukupna sila reakcije žice na kuglicu  $N$  dobija se kao vektorski zbir radijalne i vertikalne komponente reakcije:

$$N = \sqrt{(F_r^{\text{con}})^2 + (F_z^{\text{con}})^2} \quad (22)$$

Važno je napomenuti da  $F_\theta^{\text{con}}$  predstavlja **moment sile** (jedinica Nm) oko  $z$ -ose, dok su  $F_r^{\text{con}}$  i  $F_z^{\text{con}}$  sile (jedinica N).

## 3. Numerički rezultati i analiza

Za simulaciju su korišćeni sljedeći parametri:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 1 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  i parametar stabilizacije  $\xi = 10$ .

### 3.1. Trajektorija kuglice

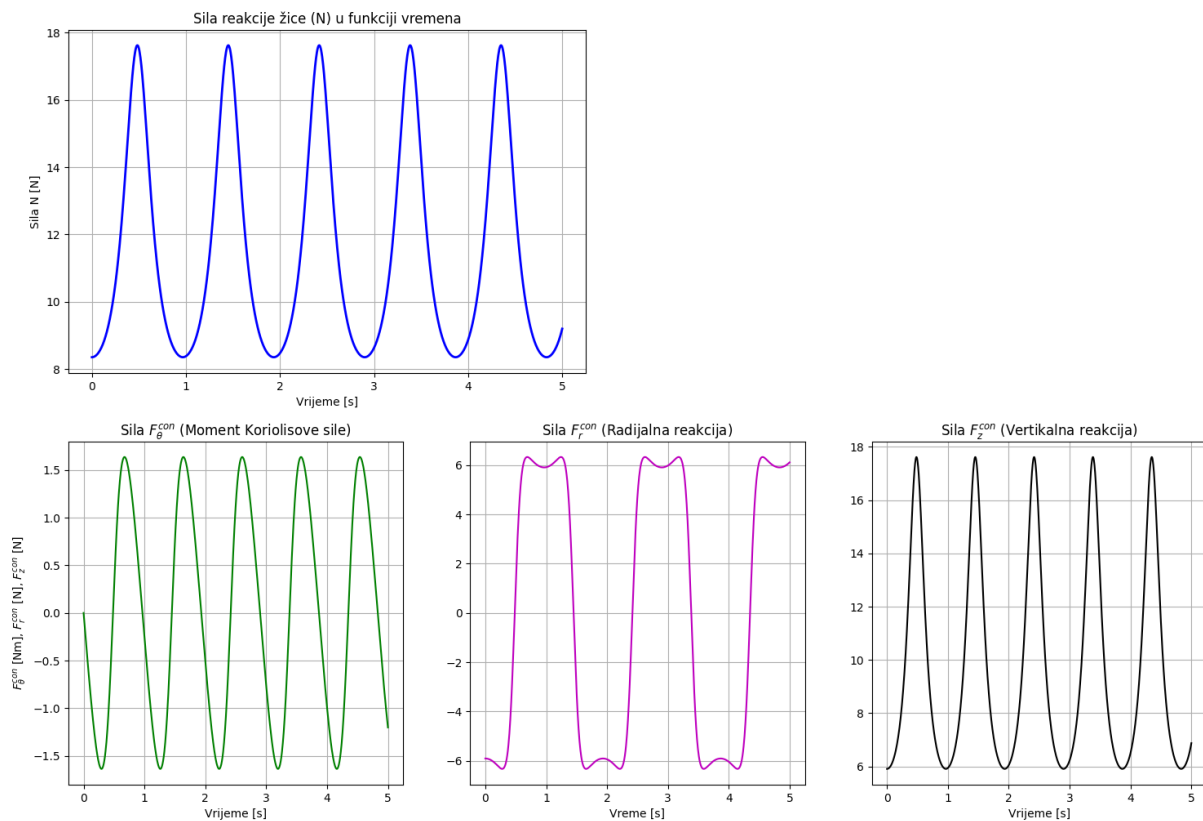


Slika 1: Prikaz kretanja kuglice u cilindričnom sistemu: (lijevo) 3D trajektorija, (sredina) Polarni prikaz, (desno) Profil parabole (žice).

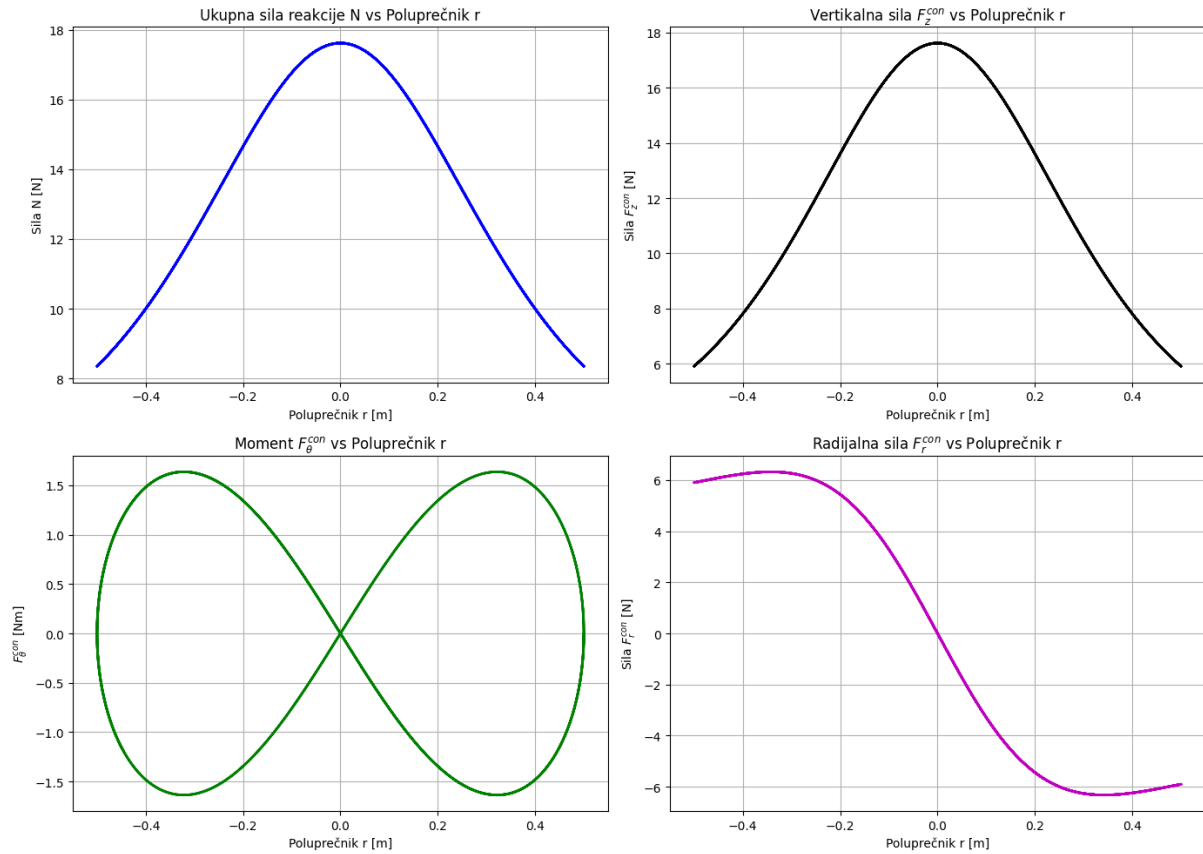
Kao što se vidi na slici 1, kuglica vrši složeno kretanje koje se sastoji od rotacije oko  $z$ -ose i oscilovanja duž parabole. Polarni prikaz jasno demonstrira periodičnu promenu radijusa, dok profil parabole potvrđuje da se kretanje odvija striktno po žici.

### 3.2. Analiza sila reakcije

Analiza dinamike sila reakcije sprovedena je posmatranjem njihove zavisnosti od vremena (Slika 2) i od radijalnog položaja  $r$  (Slika 3).



Slika 2: Zavisnost generalisanih sila ograničenja i ukupne reakcije u funkciji vremena.

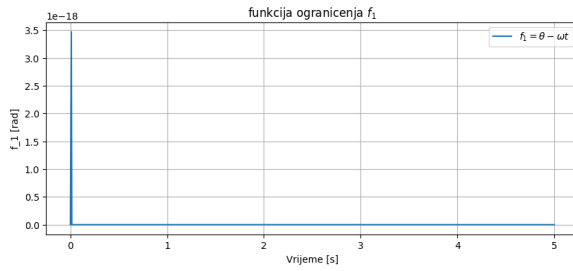
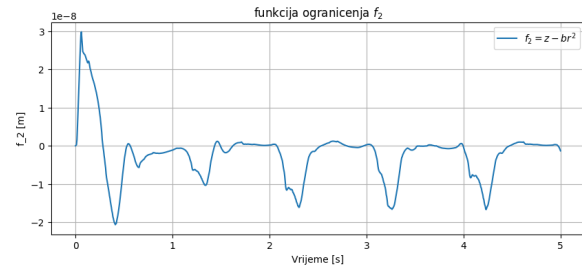
Slika 3: Zavisnost sila ograničenja od radijalnog položaja  $r$ .

Objedinjenom analizom oba grafika uočavaju se sledeće:

- Sve generalisane sile su periodične funkcije vremena.
- $N$ : Pikovi ukupne sile reakcije  $N$  u vremenskom domenu (Slika 2) odgovaraju prolasku kuglice kroz tjeme parabole ( $r \approx 0$ ). Na grafiku zavisnosti od  $r$  (Slika 3), ovo se manifestuje kao globalni maksimum u koordinatnom početku. Fizički, ovo je očekivano jer u dnu parabole kuglica poseduje maksimalnu kinetičku energiju.
- $F_\theta$ : Na grafiku zavisnosti od  $r$ , moment  $F_\theta$  formira histerezis. To znači da za istu vrednost poluprečnika  $r$ , moment sile ima dve različite vrijednosti (pozitivnu i negativnu). Ovo objašnjava oscilacije oko nule u vremenskom domenu: kada se kuglica udaljava od centra ( $\dot{r} > 0$ ), moment inercije raste i žica mora da ubrzava rotaciju (pozitivan moment), dok se pri povratku ka centru ( $\dot{r} < 0$ ) dešava suprotno.
- $F_r$  i  $F_z$ : Ove dve sile zajedno drže kuglicu na paraboli. Vertikalna sila  $F_z$  je uvek pozitivna jer mora da nosi težinu kuglice i gura je uzbrdo, dok radijalna sila  $F_r$  deluje ka unutrašnjosti krivine kako bi poništila centrifugalnu silu i spriječila da kuglica izleti sa žice.

### 3.3. Zavisnost jednačina ograničenja u funkciji vremena

Prikazana je zavisnost funkcija ograničenja od vremena.

(a) Greška ograničenja  $f_1$ (b) Greška ograničenja  $f_2$ 

Slika 4: Numerička provjera ograničenja primjenom CSM metode.

Slika 4 potvrđuje kvalitet numeričkog rešenja:

- Greška prvog ograničenja ( $f_1 = \theta - \omega t$ ) je reda veličine  $10^{-18}$  rad.
- Greška drugog ograničenja ( $f_2 = z - br^2$ ) je reda veličine  $10^{-8}$  m.

Ove greške su zanemarljivo male za mehanički sistem ovih dimenzija

## 4. Zaključak

Izveden je matematički model kretanja kuglice po rotirajućoj paraboli primjenom Lagranžovih jednačina. Sistem je uspješno riješen numerički. Dobijeni rezultati (trajektorija i sile) su fizički konzistentni, a analiza zavisnosti jednačine ograničenja potvrđuje ispravnost primjenjenog numeričkog postupka.