

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

10. februar 2026

19E052MEH – Dinamika mehaničkih sistema

Projektni zadatak

Kretanje kuglice po rotirajućoj paraboli

Studenti: Lazar Miovčić, Mihailo Bogdanić

Broj indeksa: 2024/0246, 2024/0304

Datum: 10. februar 2026

Školska 2025/26. godina

1. Postavka problema

Mala kuglica mase m postavljena je tako da može da klizi bez trenja po žici koja je savijena u obliku parabole $z = br^2$, gdje je b pozitivna konstanta. Žica rotira oko svoje ose simetrije (z -ose) konstantnom ugaonom brzinom ω .

Zadatak je izabrati proizvoljne numeričke vrijednosti, izvesti jednačine kretanja koristeći Lagranžov pristup, pretvoriti algebarska ograničenja u diferencijalna primjenom *constraint stabilization* metode i prikazati rezultate simulacije.

2. Izvođenje jednačina kretanja

2.1. Energija i Lagranžian

Sistem posmatramo u cilindričnom koordinatnom sistemu (r, θ, z) . Kinetička energija T i potencijalna energija U date su izrazima:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

$$U = mgz \quad (2)$$

Lagranžian sistema je $L = T - U$:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (3)$$

2.2. Funkcije veze (Ograničenja)

Sistem ima dva ograničenja:

1. Rotacija konstantnom ugaonom brzinom: $\theta = \omega t$
2. Kretanje po paraboli: $z = br^2$

Zapisujemo ih u formi $f_k(q, t) = 0$:

$$f_1 = \theta - \omega t = 0 \quad (4)$$

$$f_2 = z - br^2 = 0 \quad (5)$$

2.3. Lagranž-Ojlerove jednačine prve vrste

Opšti oblik jednačina sa množiocima ograničenja glasi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad (6)$$

Izračunavanjem parcijalnih izvoda ograničenja:

- Za f_1 : $\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 1$, ostali su 0.
- Za f_2 : $\frac{\partial f_2}{\partial r} = -2br$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 1$, ostali su 0.

Dobijamo tri diferencijalne jednačine kretanja:

1. Za koordinatu r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} \quad (7)$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \lambda_2(-2br) \implies m\ddot{r} + 2br\lambda_2 = mr\dot{\theta}^2 \quad (8)$$

2. Za koordinatu θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \lambda_1(1) \implies mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} = \lambda_1 \implies mr^2\ddot{\theta} - \lambda_1 = -2mrr\dot{\theta} \quad (10)$$

3. Za koordinatu z :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \quad (11)$$

$$m\ddot{z} + mg = \lambda_2(1) \implies m\ddot{z} - \lambda_2 = -mg \quad (12)$$

2.4. CSM

Umjesto algebarskih jednačina $f = 0$, koristimo stabilizovanu diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$\ddot{f} + 2\xi\dot{f} + \xi^2 f = 0 \quad (13)$$

gdje je ξ konstanta stabilizacije.

Za ograničenje $f_1 = \theta - \omega t$:

$$\ddot{\theta} = -2\xi(\dot{\theta} - \omega) - \xi^2(\theta - \omega t) \quad (14)$$

Za ograničenje $f_2 = z - br^2$: Diferenciranjem dobijamo:

$$\dot{f}_2 = \dot{z} - 2brr \quad (15)$$

$$\ddot{f}_2 = \ddot{z} - 2b(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) = \ddot{z} - 2brr\ddot{r} - 2b\dot{r}^2 \quad (16)$$

Uvrštavanjem u CSM jednačinu dobijamo vezu između ubrzanja \ddot{z} i \ddot{r} :

$$-2brr\ddot{r} + \ddot{z} = 2b\dot{r}^2 - 2\xi(\dot{z} - 2brr\dot{r}) - \xi^2(z - br^2) \quad (17)$$

2.5. Sistem u matričnom obliku

Kombinovanjem dinamičkih jednačina i CSM jednačina, formiramo sistem linearnih algebarskih jednačina po nepoznatima $[\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{z}, \lambda_1, \lambda_2]^T$:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 2br \\ 0 & mr^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2br & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr\dot{\theta}^2 \\ -2mrr\dot{\theta} \\ -mg \\ \text{CSM}_\theta \\ \text{CSM}_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

Gdje su CSM_θ i CSM_z desne strane jednačina izvedenih u poglavlju 2.4.

2.6. Sile ograničenja

Generalisane sile ograničenja određuju se preko Lagranžovih množilaca λ_k i parcijalnih izvoda funkcija veze:

$$F_r^{\text{con}} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} = -2br\lambda_2 \quad (19)$$

$$F_\theta^{\text{con}} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \lambda_1 \quad (20)$$

$$F_z^{\text{con}} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = \lambda_2 \quad (21)$$

Ukupna sila reakcije žice na kuglicu N dobija se kao vektorski zbir radijalne i vertikalne komponente reakcije:

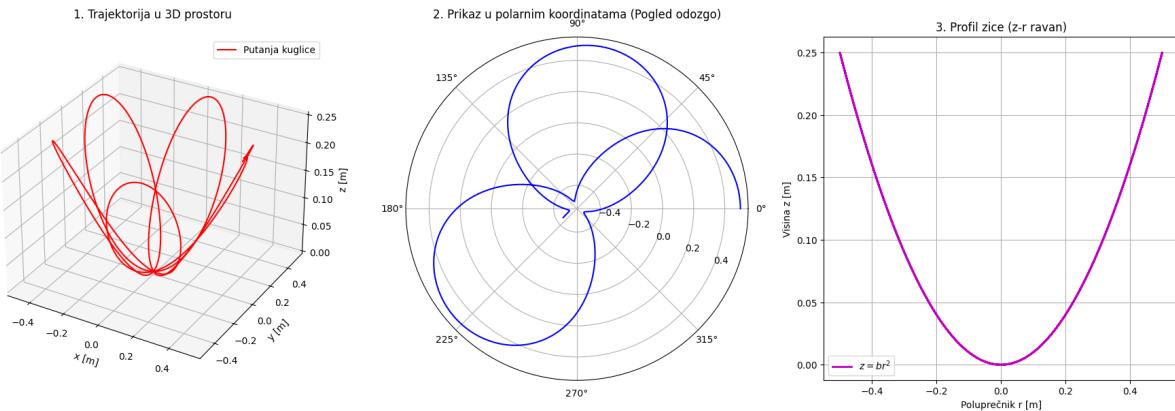
$$N = \sqrt{(F_r^{\text{con}})^2 + (F_z^{\text{con}})^2} \quad (22)$$

Važno je napomenuti da F_θ^{con} predstavlja **moment sile** (jedinica Nm) oko z -ose, dok su F_r^{con} i F_z^{con} sile (jedinica N).

3. Numerički rezultati i analiza

Za simulaciju su korišćeni sljedeći parametri: $m = 1 \text{ kg}$, $b = 1 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 2 \text{ rad/s}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ i parametar stabilizacije $\xi = 10$.

3.1. Trajektorija kuglice

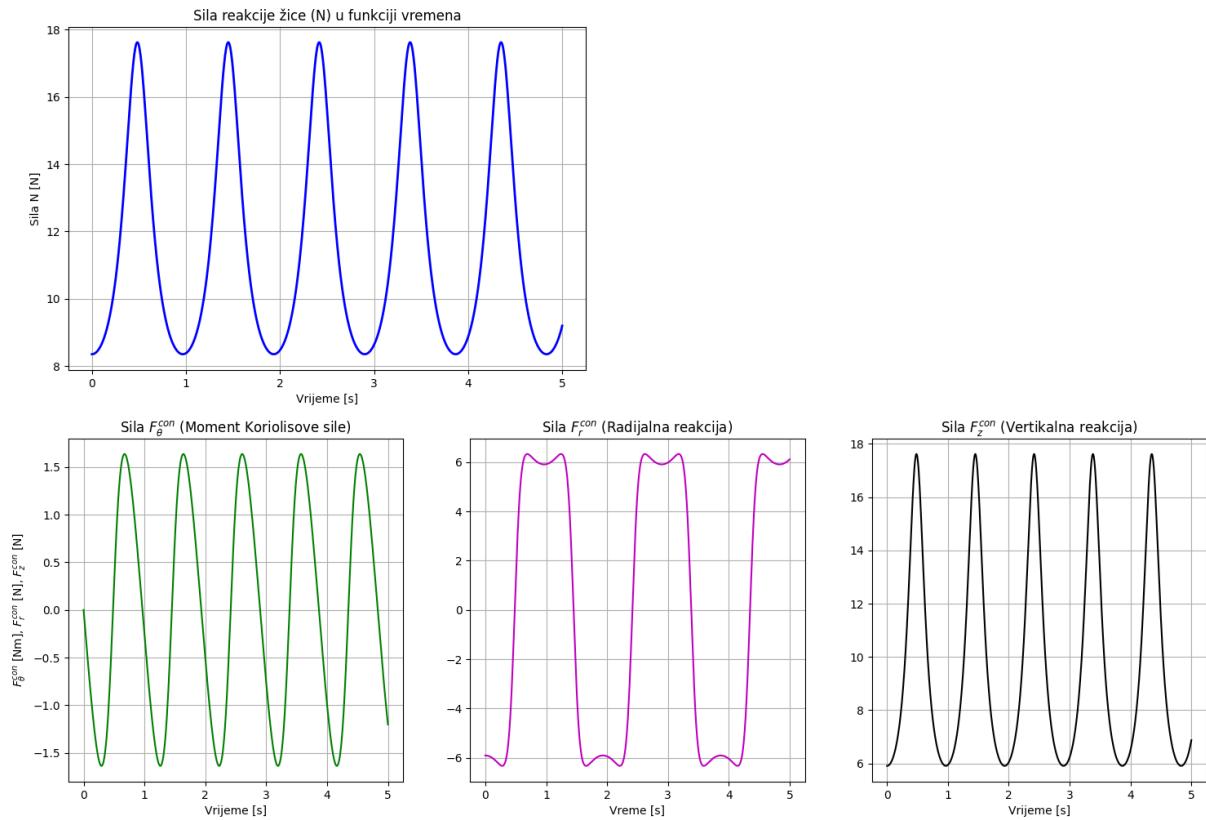


Slika 1: Prikaz kretanja kuglice u cilindričnom sistemu: (lijevo) 3D trajektorija, (sredina) Polarni prikaz, (desno) Profil parabole (žice).

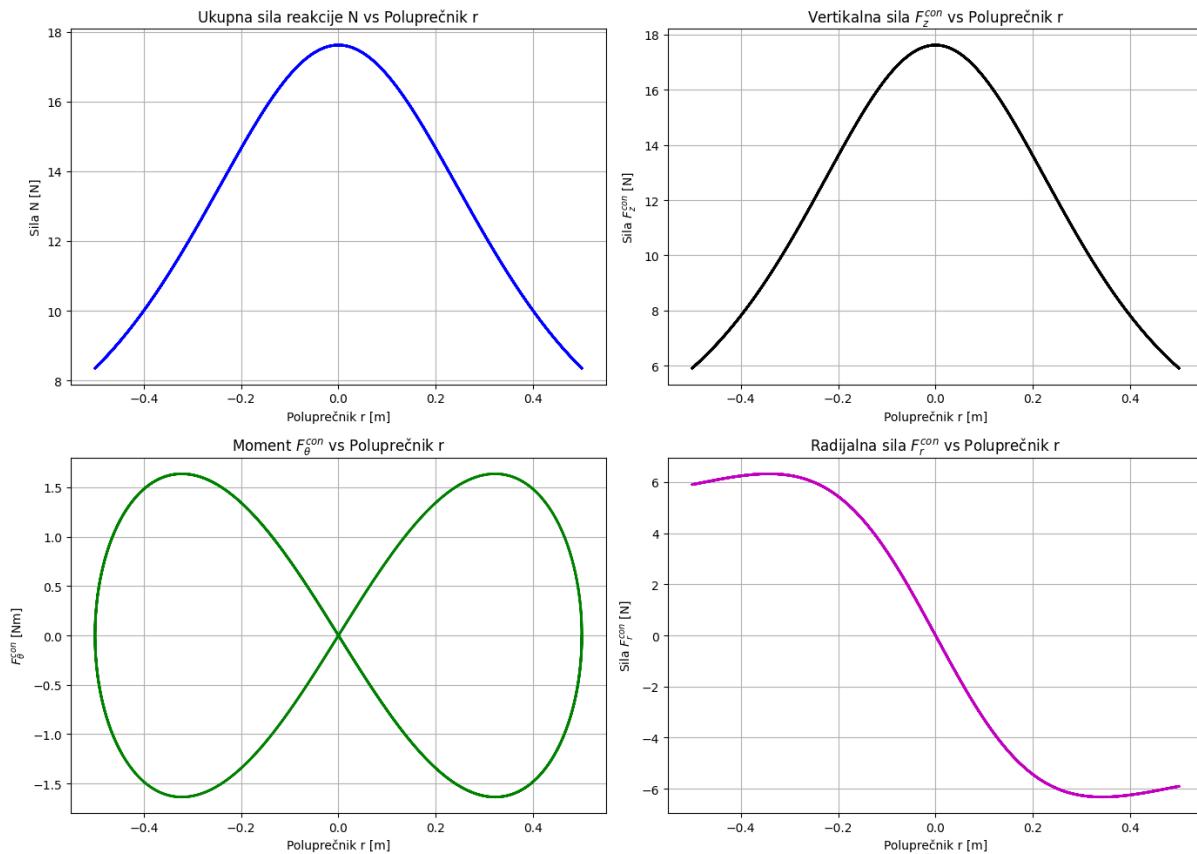
Kao što se vidi na slici 1, kuglica vrši složeno kretanje koje se sastoji od rotacije oko z -ose i oscilovanja duž parabole. Polarni prikaz jasno demonstrira periodičnu promenu radiusa, dok profil parabole potvrđuje da se kretanje odvija striktno po žici.

3.2. Analiza sila reakcije

Analiza dinamike sila reakcije sprovedena je posmatranjem njihove zavisnosti od vremena (Slika 2) i od radijalnog položaja r (Slika 3).



Slika 2: Zavisnost generalisanih sila ograničenja i ukupne reakcije u funkciji vremena.



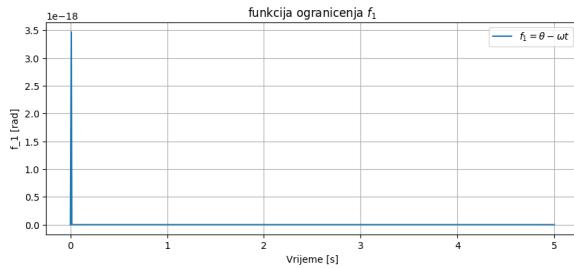
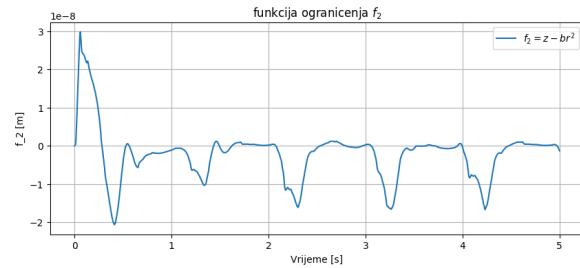
Slika 3: Zavisnost sila ograničenja od radijalnog položaja r .

Objedinjenom analizom oba grafika uočavaju se sledeće:

- Sve generalisane sile su periodične funkcije vremena.
- N : Pikovi ukupne sile reakcije N u vremenskom domenu (Slika 2) odgovaraju prolasku kuglice kroz tjemne parabole ($r \approx 0$). Na grafiku zavisnosti od r (Slika 3), ovo se manifestuje kao globalni maksimum u koordinatnom početku. Fizički, ovo je očekivano jer u dnu parabole kuglica poseduje maksimalnu kinetičku energiju.
- F_{θ} : Na grafiku zavisnosti od r , moment F_{θ} formira histerezis. To znači da za istu vrednost poluprečnika r , moment sile ima dvije različite vrijednosti (pozitivnu i negativnu). Ovo objašnjava oscilacije oko nule u vremenskom domenu: kada se kuglica udaljava od centra ($\dot{r} > 0$), moment inercije raste i žica mora da ubrzava rotaciju (pozitivan moment), dok se pri povratku ka centru ($\dot{r} < 0$) dešava suprotno.
- F_r i F_z : Ove dvije sile zajedno drže kuglicu na paraboli. Vertikalna sila F_z je uvek pozitivna jer mora da nosi težinu kuglice i gura je uzbrdo, dok radijalna sila F_r deluje ka unutrašnjosti krivine kako bi poništala centrifugalnu силу и спречила да kuglica izleti sa žice.

3.3. Zavisnost jednačina ograničenja u funkciji vremena

Prikazana je zavisnost funkcija ograničenja od vremena.

(a) Greška ograničenja f_1 (b) Greška ograničenja f_2

Slika 4: Numerička provjera ograničenja primjenom CSM metode.

Slika 4 potvrđuje kvalitet numeričkog rešenja:

- Greška prvog ograničenja ($f_1 = \theta - \omega t$) je reda veličine 10^{-18} rad.
- Greška drugog ograničenja ($f_2 = z - br^2$) je reda veličine 10^{-8} m.

Ove greške su zanemarljivo male za mehanički sistem ovih dimenzija

4. Zaključak

Izведен je matematički model kretanja kuglice po rotirajućoj paraboli primjenom Lagranžovih jednačina. Sistem je uspješno riješen numerički. Dobijeni rezultati (trajektorija i sile) su fizički konzistentni, a analiza zavisnosti jednačine ograničenja potvrđuje ispravnost primjenjenog numeričkog postupka.