



**UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA**



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD
Departman za računarstvo i automatiku
Odsek za računarsku tehniku i računarske komunikacije

ISPITNI RAD

Kandidat: Lazar Nagulov
Broj indeksa: SV61/2022

Predmet: Objektno orijentisano programiranje 2
Tema rada: Sudoku

Mentor rada: dr Miodrag Đukić

Novi Sad, januar, 2024.

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Sudoku	1
1.2	Zadatak	1
2	Analiza problema	3
3	Koncept rešenja	4
3.1	Algoritmi za rešavanje zagonetke	4
3.1.1	Obrnuta pretraga	4
3.1.2	Optimizacija obrnute pretrage	4
3.2	Algoritmi za generisanje zagonetke	5
3.2.1	Koraci u generisanju zagonetke	5
3.2.2	Generisanje pseudoslučajnih brojeva	6
3.3	Algoritmi za proveru validnosti zagonetke	6
4	Opis rešenja	7
4.1	Modul glavnog programa (Main)	7
4.1.1	Funkcija main	7
4.1.2	Funkcija za pomoć prilikom pokretanja (Usage)	7
4.2	Modul Sudoku (Sudoku)	7
4.2.1	Članovi	7
4.2.2	Enumeracije	7
4.2.3	Konstruktor	7
4.2.4	Funkcija članica za pokretanje (Run)	7
4.2.5	Funkcija članica za unos rešenja (SolvingOptions)	8
4.2.6	Funkcija članica za rešavanje zagonetke (Solve)	8
4.2.7	Funkcija članica za proveru rešenja (CheckSolution)	8
4.2.8	Funkcija članica za generisanje zagonetke (Generate)	8
4.3	Modul Tabela (Board)	8
4.3.1	Konstante	8
4.3.2	Članovi	8
4.3.3	Alijas BitArray	8
4.3.4	Funkcija članica za proveru poteza (IsPossibleMove)	9
4.3.5	Funkcija članica za proveru validnosti tabele (IsValid)	9
4.3.6	Funkcija članica za pronalaženje grešaka (CountErrors)	9
4.3.7	Funkcija članica za dobavljanje elementa tabele (At)	9
4.3.8	Statična funkcija članica za dobavljanja blocka (GetBlock)	9
4.3.9	Funkcija članica za generisanje elemenata na glavnoj dijagonali (GenerateDiagonal)	10
4.3.10	Funkcija članica za generisanje ostalih elemenata (GenerateOther)	10
4.3.11	Funkcija članica za popunjavanje blokova (FillBlock)	10
4.3.12	Funkcija članica za brisanje elemenata iz tabele (RemoveNumber)	10
4.3.13	Funkcija članica koja implementira algoritam obrnute pretrage (Backtrack)	10
4.3.14	Funkcija članica za pronalaženje prvog praznog polja (FindEmpty)	11

4.3.15	Funkcija članica za brisanje tabele (Clear)	11
4.3.16	Operatori upisa i ispisa	11
4.3.17	Operator dobavljanja	11
5	Testiranje	12
5.1	Testni skupovi	12
5.2	Testiranje validnosti korisnikove zagonetke (IsValid)	12
5.2.1	Validna zagonetka	12
5.2.2	Nevalidna kolona	12
5.2.3	Nevalidan red	12
5.2.4	Nevalidan blok	12
5.3	Testiranje provere postavke brojeva (IsPossibleMove)	12
5.4	Testiranje validnosti korisnikovog rešenja (CountErrors)	12
5.4.1	Izmena nepraznog početnog polja	12
5.4.2	Sve izmene	13
5.5	Testiranje generisanja tabele (Generate)	13
5.6	Testiranje rešavanja zagonetke (Solve)	13
6	Uočeni problemi i ograničenja	14
7	Zaključak	15

Spisak slika

1	Primer sudoku zagonetke	1
2	Primer rešenja sudoku zagonetke	1
3	Primer konverzije polja u binaran broj	4
4	Primer generisanje zagonetke	5

Spisak tabela

1	Optimizacija obrnute pretrage	5
2	Težina zagonetke u odnosu na broj popunjenih polja	6

1 Uvod

1.1 Sudoku

Sudoku je logička zagonetka najčešće u obliku 9×9 tabele (matrice). U prazna polja tabele se upisuju cifre, tako da se svaki broj mora pojaviti tačno jednom u svakom redu, svakoj koloni i svakoj 3×3 podmatrici (bloku).

			8		1			
						4	3	
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

Slika 1: Primer sudoku zagonetke

Zagonetka ne mora da ima jedno rešenje, ali je standard da ga ima. Primer rešenje zagonetke sa slike 1:

2	3	4	8	9	1	5	6	7
1	6	9	7	2	5	4	3	8
5	7	8	3	4	6	9	1	2
3	1	6	5	7	4	8	2	9
4	9	7	6	8	2	1	5	3
8	2	5	1	3	9	7	4	6
6	4	2	9	1	8	3	7	5
9	5	3	4	6	7	2	8	1
7	8	1	2	5	3	6	9	4

Slika 2: Primer rešenja sudoku zagonetke

1.2 Zadatak

Realizovati konzolnu aplikaciju koja omogućava rešavanje i generisanje sudoku zagonetki. Korisnik unosi dateteke kroz argumente komandne linije. Primer

pokretanja programa:

```
./sudoku input.txt output.txt
```

Argumenti:

1. *input.txt* - Datoteka iz koje se čita zagonetka.
2. *output.txt* - Datoteka u koju se upisuje zagonetka.

Svaka datoteka sadrži **jednu** zagonetku, svaki red predstavlja jedan red u tabeli, i svako polje je odvojeno razmakom. Ukoliko datoteke nisu navedene, korisniku se ispisuje način korišćenja programa.

Nakon uspešnog pokretanja programa, prikazuje se početni meni koji nudi opcije:

- **Generate new Sudoku puzzle** - Generisanja nove zagonetke.
- **Load Sudoku puzzle from file** - Učitavanja zagonetke.
- **Exit** - Izlaska iz igre.

Generisana zagonetka se upisuje u *output.txt* datoteku. Nakon generisanja ili učitavanja zagonetke, korisnik može da:

- **Import solution** - Učita rešenje.
- **Solve** - Dopusti programu da reši zagonetku.
- **Exit** - Izlazi iz igre.

Na konzolnoj aplikaciji, posle rešenja koje je generisao program ili učitao iz datoteke, prikazuju se statistički podaci igre, uključujući broj dobro postavljenih polja, broj grešaka i brojač odigranih igara i spisak svih pronađenih grešaka. Nakon završetka igre, korisnik ima opciju da odabere ponovno igranje, što pokreće novu iteraciju igre.

2 Analiza problema

Glavni problem zadatka je mogućnost rešavanja zagonetke, jer nam je algoritam za rešavanje zagonetke neophodan za generisanje iste. Najčešći način koji se koristi u rešavanju zagonetke je isprobavajući svaka moguća rešenja. Sam algoritam je rekurzivan, što može da dovede do prelivanja steka (eng. Stack overflow), što znači da moramo da umanjimo broj mogućih rekurzivnih poziva.

Pozitivna strana ovoga algoritma koji pokušava sve mogućnosti je sigurno pronalaženje rešenja za svaku zagonetku (ukoliko ono postoji) i što u osnovi ne koristi dodatne strukture podataka izuzev same tabele. Nažalost, za uvođenje optimizacije neophodno je zauzeti veći deo memorije za pomoćne strukture, poput haš tabele ukoliko želimo da ubacimo heruistiku - praćenje pojavljivanje brojeva, ili niz bitova ukoliko želimo da brzo proverimo da li je moguće postaviti broj u određeno polje. Primetimo da prethodne ideje za optimizaciju zahtevaju prolazak kroz čitavu tabelu pre samog algoritma za rešavanje, što može biti skupo za jednostavne zagonetke.

Za potrebe projekta, uvedena je optimizacija koja ubrzava proveru da li je moguće postaviti broj u dato polje. Ideje za dalju optimizaciju su ovođene prethodno navedene heruistike ili korišćene nekih od probalističkih algoritama, poput Knutovog algoritma (eng. Knuth's Algorithm).

Takođe moramo razmotriti mogućnosti generisanje pseudoslučajnih brojeva za generisanje tabele. Primećujemo da korišćenjem obične random funkcije često generiše iste, ili veoma slične tabele.

3 Koncept rešenja

3.1 Algoritmi za rešavanje zagonetke

3.1.1 Obrnuta pretraga

Najčešće korišćen algoritam za rešavanje sudoku zagonetke je obrnuta pretraga (eng. Backtracking). Ovo je algoritam grube sile (eng. Brute force) koji isprobava sve moguće kombinacije. Dakle, potrebno je da se prođe kroz svako polje u tabeli. Ukoliko je polje prazno, upisujemo cifru koja u trenutnoj tabeli ispunjava sva pravila. Nakon upisivanje cifre, rekurzivno pozivamo funkciju - pokušavamo da pronađe rešenje sa novom tabelom. Ukoliko rešenje nije pronađeno, vraćamo se nazad i upisujemo drugu cifru.

Vremenska složenost ovog algoritma je $\mathcal{O}(n^m)$, gde je n dimenzija tabele, a m broj polja koja trebaju da se popune. (U našem slučaju je složenost $\mathcal{O}(9^n)$). Minimalan broj polja koja moraju biti popunjena je 17, dakle, u najgorem slučaju se proverava 9^{64} mogućnosti!

3.1.2 Optimizacija obrnute pretrage

Način na koji možemo optimizovati algoritam obrnute pretrage je da ubrzamo proveru da li se broj može postaviti na zadatoj poziciji. To ćemo postići tako što ćemo pamtit koji broj se našao u redu, koloni i bloku. Za to ćemo koristiti `std::bitset` iz zaglavlja `bitset` gde, ako se za $i \in [0, 8]$ na i -toj poziciji nalazi 1, znači da se cifra $i + 1$ nalazi u redu, koloni ili bloku.

Pre samog ulaska u rekurzivnu funkciju obrnute pretrage, moramo proći kroz tabelu i zapisati svaki broj koji se nalazi u tabeli u nizove bitova. Potrebna su 3 niza bitova - za red, kolonu i blok. Za proveru da li je cifru moguće upisati

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Polje (4,4)

RowSet: 010001101

ColSet: 111100011

BlockSet: 010100110

Slika 3: Primer konverzije polja u binaran broj

koristimo bitnu operaciju ili (eng. bitwise or):

`std::bitset<> contain = rows[row] | cols[col] | blocks[block];`
 Novi niz bitova `contain` ima 0 na i -toj poziciji ako je moguće postaviti cifru $i+1$ na poziciju `(row, col)`. Na slici 3 vidimo da se u redu nalaze brojevi 1,3,4,8 (010001101), koloni 7,9,6,2,1,8 (111100011) i u bloku 6,3,2,8 (010100110). Iz ovoga zaključujemo da je u polje (4,4) moguće upisati broj 5 (111101111).

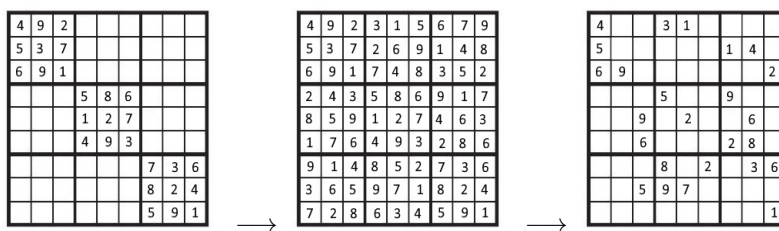
Vremenska složenost je i dalje $\mathcal{O}(n^m)$, gde je n dimenzija tabele, a m broj polja koja trebaju da se popune, stim da je su sve provere da li se broj može upisati u polje svedene na $\mathcal{O}(m)$ za razliku od prethodnog algoritma koji ima složenost $\mathcal{O}(nm)$.

U Tabeli 1. vidimo da se prosečno vreme rešavanja duplo brže. Sam test je sproveden na 1000 tabela koja sadrže 25 popunjenih polja.

	Maksimum	Medijana	Srednja vrednost
Gruba sila	6.20147s	0.001222s	0.04691s
Optimizacija	2.14567s	0.00072s	0.02301s

Tabela 1: Optimizacija obrnute pretrage

3.2 Algoritmi za generisanje zagonetke



Slika 4: Primer generisanje zagonetke

3.2.1 Koraci u generisanju zagonetke

Generisanje zagonetke se može opisati u dva koraka:

1. Popuniti čitavu tabelu slučajnim vrednostima $[1, \text{BOARD_SIZE}]$.
2. Nasumično obrisati brojeve iz tabele.

Primetimo da se blokovi na glavnoj dijagonali mogu zasebno popuniti jer ne utiču jedan na drugog. Dakle, prvi korak u generisanju se svodi na popunjavanje glavne dijagonale i rešavanja tako generisane zagonetke. Zatim brišemo brojeve iz tabele. Koliko brojava trebamo obrisati zavisi od težine zagonetke koju želimo generisati (Tabela 2).

Težina	Broj popunjenih polja
Lako	32 - 38
Srednje	26 - 31
Teško	22 - 25
Veoma teško	17 - 21

Tabela 2: Težina zagonetke u odnosu na broj popunjenih polja

3.2.2 Generisanje pseudoslučajnih brojeva

Za generisanje pseudoslučajnih brojeva koristimo Mersen Twiser algoritam (eng. Mersenne Twister algorithm). Implementacija samog algoritma se nalazi u zaglavlju `random (std::mt19937)`. Algoritam ima ogroman period ($2^{19937} - 1$), što znači da se niz brojeva neće ponavljati. Seme (eng. seed) se nasumično određujemo koristeći `std::random_device`, a za samo generisanje brojeva u određenom intervalu koristimo `std::uniform_int_distribution`.

Ovo nam omogućava generisanje nasumičnih brojeva visokog kvaliteta.

3.3 Algoritmi za proveru validnosti zagonetke

4 Opis rešenja

4.1 Modul glavnog programa (Main)

4.1.1 Funkcija main

```
int main(int argc, char** argv);
```

Glavna funkcija programa. Kreira objekat tipa Sudoku i prosleđuje mu imena datoteka prosleđenih preko argumenata komandne linije.

4.1.2 Funkcija za pomoć prilikom pokretanja (Usage)

```
void Usage();
```

Ispisuje način pokretanja programa u slučaju da potrebni parametri nisu navedeni.

4.2 Modul Sudoku (Sudoku)

Glavni modul koji povezuje sve funkcionalnosti iz modula tabele u jednu celinu.

4.2.1 Članovi

<code>std::string inputFile</code>	Naziv ulazne datoteke
<code>std::string outputFile</code>	Naziv izlazna datoteke
<code>int currentRound;</code>	Trenutna runda
<code>int correctCount;</code>	Broj tačnih cifara
<code>int wrongCount;</code>	Broj pogrešnih cifara
<code>Board board;</code>	Sudoku tabela

4.2.2 Enumeracije

```
enum Difficulty;
```

Određuje težinu Sudoku zagonetke na osnovu broja izbrisanih polja.
Vrednost: EASY, MEDIUM, HARD, VERY_HARD

4.2.3 Konstruktor

```
Sudoku(std::string& inputFile, std::string& outputFile)
```

Glavni parametrizovani konstruktor.

Parametri:

- (`std::string&`) `inputFile` - ime datoteke iz koje će se čitati zagonetka ili njeno rešenje.
- (`std::string&`) `outputFile` - ime datoteke u koju će se upisivati rešenje ili novo generisana zagonetka.

4.2.4 Funkcija članica za pokretanje (Run)

```
void Run();
```

Pokreće aplikaciju i kreira početni meni za korisnika. Nudi korisniku mogućnost da generiše ili učita zagonetku iz datoteke. Nakon generisanja ili učitavanja zagonetke, korisnik može da izabere način rešavanja.

4.2.5 Funkcija članica za unos rešenja (SolvingOptions)

```
void SolvingOptions();
```

Nudi korisniku mogućnost da učitá rešenje ili da dopusti programu da sam reši zagonetku. Poziva se iz `Run()` funkcije nakon generisanja ili učitavanja zagonetke.

4.2.6 Funkcija članica za rešavanje zagonetke (Solve)

```
void Solve();
```

Rešava zagonetku koristeći algoritam obrnute pretrage. Rešenje upisuje u *output.txt* datoteku prosledenu preko argumentana komandne linije.

4.2.7 Funkcija članica za proveru rešenja (CheckSolution)

```
void CheckSolution();
```

Učitava zagonetku iz *input.txt* datoteke prosledene preko argumentana komandne linije i proverava koliko ima grešaka. Ispisuje sve greške koje pronade, njihov broj i broj tačno upisanih brojeva.

4.2.8 Funkcija članica za generisanje zagonetke (Generate)

```
void Generate(Difficulty difficulty);
```

Generiše Sudoku zagonetku sa zadatom težinom. Upisuje generisanu tabelu u *output.txt* datoteku prosledenu preko argumentana komandne linije.

Parametri:

- (`Sudoku::Difficulty`) `difficulty` - enumeracija koja označava težinu zagonetke.

4.3 Modul Tabela (Board)

Modul koji sadrži pomoćne funkcije potrebne za menjanje trenutne tabele ili provere njene validnosti.

4.3.1 Konstante

```
int BOARD_SIZE = 9;      Veličina tabele.  
int BLOCK_SIZE = 3;      Veličina bloka.  
int EMPTY = 0;           Oznaka za prazno polje.  
char EMPTY_CHAR = '_';   Oznaka za prazno polje prilikom ispisa.
```

4.3.2 Članovi

```
int board[BOARD_SIZE * BOARD_SIZE];   Niz koji predstavlja tabelu.
```

4.3.3 Alijas BitArray

```
using BitArray =  
std::array<std::bitset<Board::BOARD_SIZE>, Board::BOARD_SIZE>;  
Niz od Board::BOARD_SIZE setova bitova dužine Board::BOARD_SIZE.
```

4.3.4 Funkcija članica za proveru poteza (IsPossibleMove)

```
bool IsPossibleMove(int row, int col, int number) const;
```

Proverava da li postavka datog broja na datu poziciju je validan potez.

Parametri:

- (int) row - red u tabeli
- (int) col - kolona u tabeli
- (int) number - broj koji se pokušava staviti

Povratna vrednost:

- (bool) - true ako je moguće postaviti broj, false ako nije.

4.3.5 Funkcija članica za proveru validnosti tabele (IsValid)

```
bool IsValid() const;
```

Proverava da li trenutna tabela ispunjava sva pravila sudoka. Povratna vrednost:

- (bool) True ako je trenutna tabela validna.

4.3.6 Funkcija članica za pronalaženje grešaka (CountErrors)

```
int CountErrors(const Board& original) const;
```

Prebrojava i ispisuje sve greške u tabeli.

Parametri:

- (const Board&) original - Originalna tabela pre rešavanja.

Povratna vrednost:

- (int) Broj grešaka u tabeli.

4.3.7 Funkcija članica za dobavljanje elementa tabele (At)

```
int& At(int row, int col);
```

```
const int& At(int row, int col) const;
```

Dobavlja element na poziciji '(row, col)'. Proverava granice. Baca `std::out_of_range` u slučaju da su uneti brojevi nevalidni.

4.3.8 Statična funkcija članica za dobavljanja blocka (GetBlock)

```
static inline int GetBlock(int row, int col);
```

Vraća blok u kome se nalazi polje '(row, col)'.

Parametri:

- (int) row - Red u tabeli.
- (int) col - Kolona u tabeli.

Povratna vrednost:

- (int) Broj bloka u kome se nalazi polje (row, col)

4.3.9 Funkcija članica za generisanje elemenata na glavnoj dijagonali (GenerateDiagonal)

```
void GenerateDiagonal();
```

Generiše nasumično elemente na glavnoj dijagonali.

4.3.10 Funkcija članica za generisanje ostalih elemenata (GenerateOther)

```
bool GenerateOther(int row, int col);
```

Rekurzivno generiše nasumično elemente koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali.

Parametri:

- (int) row - Početan red (uglavnom 0).
- (int) col - Početna kolona (uglavnom 0).

Povratna vrednost:

- (bool) Zaustavlja rekurzivno generisanje tabele.

4.3.11 Funkcija članica za popunjavanje blokova (FillBlock)

```
void FillBlock(int row, int col);
```

Rekurzivno generiše nasumično elemente u bloku.

Parametri:

- (int) row - početni red (gornje levo polje u bloku).
- (int) col - početna kolona (gornje levo polje u bloku).

4.3.12 Funkcija članica za brisanje elemenata iz tabele (RemoveNumber)

```
void RemoveNumber(int count);
```

Nasumično briše *count* elementa iz tabele.

Parametri:

- (int) count - broj elemenata koliko se briše iz tabele.

4.3.13 Funkcija članica koja implementira algoritam obrnute pretrage (Backtrack)

```
bool Backtrack(BitArray& rSet, BitArray& cSet, BitArray& bSet);
```

Funkcija implementira algoritam obrnute pretrage. Rekurzivno popunjava tabelu. Poziva se iz funkcije `Solve()` nakon generisanja pomoćnih nizova bitova.

Parametri:

- (BitArray) rSet - Pomoćni niz koji prati pojavljivanje brojeva u redovima.
- (BitArray) cSet - Pomoćni niz koji prati pojavljivanje brojeva u kolonama.
- (BitArray) bSet - Pomoćni niz koji prati pojavljivanje brojeva u blokovima.

Povratna vrednost:

- (bool) Zaustavlja rekurziju kada pronađe rešenje.

4.3.14 Funkcija članica za pronalaženje prvog praznog polja (FindEmpty)

```
bool FindEmpty(int& row, int& col);
```

Pronalazi prvo prazno polje od pozicije '(row, col)'. Prazno polje se nalazi u *row* i *col* promenljivi nakon završetka funkcije.

Parametri:

- (int&) row - referenca na početan red koji se pretražuje.
- (int&) col - referenca na početnu kolonu koja se pretražuje.

Povratna vrednost:

- True ako postoji prazan element.

4.3.15 Funkcija članica za brisanje tabele (Clear)

```
void Clear();
```

Postavlja sve elemente u tabeli na 0.

4.3.16 Operatori upisa i ispisa

```
std::istream& operator>>(std::istream& in, Board& b);
```

Operator za čitanje tabele iz datoteke.

```
std::ostream& operator<<(std::ostream& out, const Board& b);
```

Operator za ispisivanje tabele na standardni izlaz - konzolu.

```
std::ofstream& operator<<(std::ofstream& out, const Board& b);
```

Operator za upisivanje tabele u datoteku.

4.3.17 Operator dobavljanja

```
int& operator()(int row, int col);
```

```
const int& operator()(int row, int col) const;
```

Operator za dobavljanje elementa na poziciji '(row, col)'.

5 Testiranje

Implementacija se testira pomoću modula **Test**. Napravljeni su posebni testni skupovi (skupovi testnih slučajeva) za svaki modul, a svaki testni skup sadrži testove (testne slučajeve, test cases) raznih segmenata tog modula - funkcija i struktura, kao i testiranje njihovih međusobnih odnosa.

Testovi se pokreću komandom `./sudoku -test`.

5.1 Testni skupovi

Skup testova za verifikaciju tabele.

- *invalid_row.txt*
- *invalid_column.txt*
- *invalid_block.txt*

Skup testova za proveru korisnikovog rešenja:

- *original_changed.txt* i *error_changed.txt*
- *original_all.txt* i *error_all.txt*

5.2 Testiranje validnosti korisnikove zagonetke (IsValid)

5.2.1 Validna zagonetka

Test učitava validnu zagonetku.

5.2.2 Nevalidna kolona

Test učitava zagonetku sa tačno jednim duplikatom u koloni.

5.2.3 Nevalidan red

Test učitava zagonetku sa tačno jednim duplikatom u redu.

5.2.4 Nevalidan blok

Test učitava zagonetku sa tačno jedinim duplikatom u bloku.

5.3 Testiranje provere postavke brojeva (IsPossibleMove)

5.4 Testiranje validnosti korisnikovog rešenja (CountErrors)

5.4.1 Izmena nepraznog početnog polja

Test učitava početnu tabelu i rešenu tabelu sa izmenjenim nepraznim poljima.

5.4.2 Sve izmene

Test učitava početnu tabelu i rešenu tabelu koja sadrži duplikat u redu, duplikat u koloni, duplikat u bloku i izmenjeno neprazno polje.

5.5 Testiranje generisanja tabele (Generate)

5.6 Testiranje rešavanja zagonetke (Solve)

6 Uočeni problemi i ograničenja

7 Zaključak

Napravljen je i verifikovan jedan koncept za realizaciju datog problema. Optimizovano je traženje i generisanje rešenja i date su ideje za dodatne optimizacije.

Rezultati merenja iz Tabele 1 pokazuju znatno ubrzanje, naročito za tabele koje imaju više praznih polja. Ovo je manje primetno za tabele koje imaju manji broj praznih polja, jer je veća verovatnoća da uobičajna pretraga brzo pronađe duplikate.

Odatle zaključujemo da najviše dobijamo na vremenu kada tabela ima više praznih mesta. Dodatne optimizacije mogu pomoći u tome, ali ni jedna od njih ne garantuje ubrzanje za svaku moguću tabelu, ali zahtevaju dodatno korišćenje memorije.