Aula 2 Aplicações da Lei de Darcy

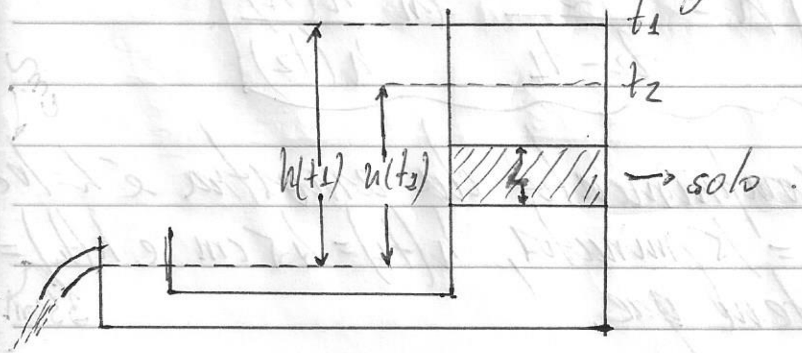
6.4.1. Permeâmetro de carga decrescente

A carga que causa o fluxo de água verticalmente descendente através da amostra decresce com o tempo. Segundo Darcy:

$$\boxed{Q(t) = K \cdot \frac{h(t_1) - h(t_2)}{L} \cdot A}$$

onde $Q(t)$ = é a quantidade de fluxo através da amostra em função do tempo t

$h(t_1)$ e $h(t_2)$ = são as cargas hidráulicas em função do tempo, ambas medidas em relação ao nível constante de saída da água.



L = comprimento da amostra.

A quantidade de fluxo $Q(t)$ é igual à velocidade de descida da carga dh/dt no tubo de medição, multiplicada pela área da seção transversal.

Quando a área da seção transversal da amostra e do tubo de medição são iguais, se obtém a seguinte expressão:

$$\boxed{-\frac{dh}{dt} = K \cdot \frac{h(t)}{L}} \rightarrow \text{(Comparativamente } V = -K \cdot i$$

$$-\frac{dh}{dt} = V \qquad i = \frac{h(t)}{L} \qquad i = \frac{\Delta h}{L}$$

O sinal negativo ~~de~~ $(-dh/dt)$ indica que a carga decresce à medida que decorre o tempo de teste.

Integrando entre os limites t_1 e t_2, onde h varia de $h(t_1)$ e $h(t_2)$ vamos obter.

$$\int_{h(t_1)}^{h(t_2)} -\frac{dh}{h} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{K}{L}\, dt$$

$$-\ln h(t_2) + \ln h(t_1) = \frac{K}{L}(t_2 - t_1)$$

explicitando K:

$$\boxed{K = \frac{L}{t_2 - t_1} \ln \frac{h(t_1)}{h(t_2)}}$$

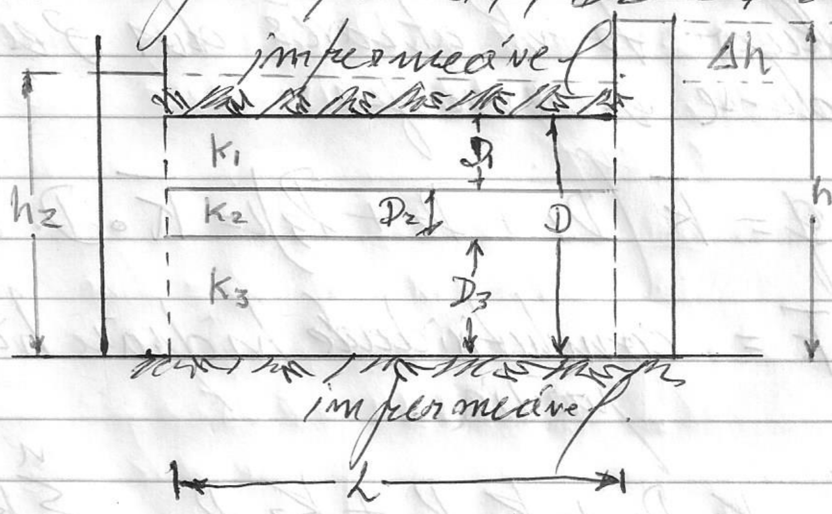
Exemplo: Se o comprimento da amostra é $L = 10$ cm, $t_2 - t_1 = 15$ minutos, $h(t_1) = 4.5$ cm e $h(t_2) = 3.5$ cm se obtém que.

$$K = \frac{10}{15} \cdot \ln \frac{4.5}{3.5} = 0.17 \frac{cm}{min} = 24.5 \frac{m}{dia}.$$

6.4.2. Fluxo através de solos estratificados

Os solos raras vezes são homogêneos e são formados por horizontes com condutividades hidráulicas diferentes.

Considere a Fig. a seguir, onde a água flui na direção horizontal através de três camadas que apresentam condutividades hidráulicas diferentes K_1, K_2 e K_3, com diferentes espessuras D_1, D_2 e D_3.



Se supormos que há fluxo através dos limites de cada um dos horizontes, o gradiente hidráulico i:

$$i = \frac{(h_1 - h_2)}{L} = \frac{\Delta h}{L}$$

incide no fluxo através de cada horizonte.

A quantidade de fluxo em cada estrato q_1, q_2 e q_3 pode ser expressa por:

$$q_1 = K_1 . D_1 . i$$
$$q_2 = K_2 . D_2 . i$$
$$q_3 = K_3 . D_3 . i$$

e o fluxo total será dado por:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = K_1 . D_1 . i + K_2 . D_2 . i + K_3 . D_3 . i$$

$$\boxed{q = \sum_{n=1}^{3} (K_n . D_n)\, i}$$

Para o fluxo total através dos 3 estratos pode-se escrever que:

$$q = \bar{K}\,(D_1 + D_2 + D_3)\, i = \bar{K} . D . i$$

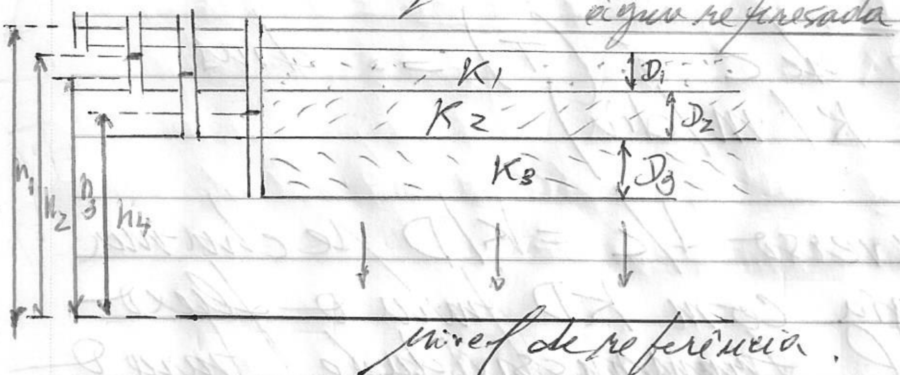
onde $\bar{K}$ = condutividade hidráulica média.

$$\bar{K} = \frac{K_1 . D_1 + K_2 . D_2 + K_3 . D_3}{D_1 + D_2 + D_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_n D_n}{\sum_{i=1}^{n} D_n}$$

$$\boxed{\bar{K} = \frac{\sum KD}{D}}$$

$\sum KD$ = transmissividade de um solo estratificado por que a água se move horizontalmente.

A Fig. a seguir mostra um caso em que a água flui verticalmente no sentido descendente através de um perfil de solo constituído por horizontes de diferentes espessuras e diferentes condutividades hidráulicas.



O fluxo por unidade de superfície de secção transversal, ou seja a velocidade de fluxo

$$\boxed{V = K \cdot i}$$

será a mesma para cada horizonte (steady) supondo que o solo está saturado e não ocorram fugas laterais de água. Logo:

$$V = K_1 \frac{h_1 - h_2}{D_1} \iff V \cdot \frac{D_1}{K_1} = h_1 - h_2$$

$$V = K_2 \cdot \frac{h_2 - h_3}{D_2} \iff V \cdot \frac{D_2}{K_2} = h_2 - h_3$$

$$V = K_3 \frac{h_3 - h_4}{D_3} \iff V \cdot \frac{D_3}{K_3} = h_3 - h_4$$

Como $(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_4) = h_1 - h_4 = \Delta h$

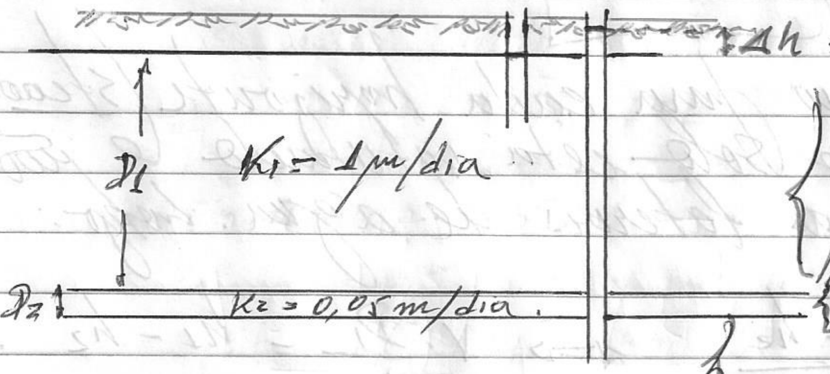
Substituindo: $V = \dfrac{\Delta h}{\dfrac{D_1}{K_1} + \dfrac{D_2}{K_2} + \dfrac{D_3}{K_3}} = \dfrac{\Delta h}{C_1 + C_2 + C_3}$

onde C_1, C_2 e C_3 são as resistências hidráulicas dos três horizontes, através dos quais o fluxo ocorre verticalmente.

A dimensão de C é (T) => dias
$D(m)$ $K(m/dia)$

O valor inverso $1/C = K/D$ se chama por analogia com KD para o fluxo horizontal, transmissividade para o fluxo vertical.

<u>Exemplo</u>: $D_1 = 9m$ e $D_2 = 1m$



Horizonte argiloso onde o lençol freático permanece estável por drenagem ou evaporação.

D_2 = Leito argiloso

Horizonte arenoso c/ carga hidráulica superior ao leito argiloso.

A diferença de carga hidráulica produz um fluxo vertical ascendente desde o horizonte arenoso através das capas argilosas.

$$V = \frac{0,05}{9/1 + 1/0,05} = \frac{0,05}{9+20} = 0,0017\ m/dia$$

6.5. Equações básicas do fluxo de água na zona saturada.

Até aqui foram discutidos os fluxos na forma linear para o estabelecimento da Lei de Darcy.

Do ponto de vista físico os sistemas fluidos ocorrem necessariamente em 3 dimensões. O tratamento inicial dessa análise pode ser reduzido a um fluxo bidimensional admitindo que o fluxo na zona saturada é laminar e desta forma ocorre em planos paralelos.

Por exemplo, quando se drena ou terras seja com drenos abertos ou com drenos enterrados o padrão do fluxo é o mesmo em cada plano vertical em relação aos drenos.

Outro caso de fluxo bidimensional é um poço que penetra totalmente um aquífero quando se bombea a água do poço. ~~Ele~~ O movimento do fluido também independe da coordenada vertical z.

Conceito: <u>Fluxo Radial</u> = um fluxo bidimensional simétrico em relação a um eixo de simetria.

8

6.5.1. Equação de Laplace para o fluxo em regime permanente.

A equação da continuidade para o fluxo independente do tempo é:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Segundo a lei de Darcy e supondo um solo homogêneo e isotrópico

$K_x = K_y = K_z = K$. onde K é constante

Logo: $v_x = -K\frac{\partial h}{\partial x}$ $v_y = -K\frac{\partial h}{\partial y}$ $v_z = -K\frac{\partial h}{\partial z}$

onde v_x, v_y e v_z são as componentes de velocidade num sistema de coordenadas retangulares.

Substituindo Darcy → Continuidade.

$$\frac{\partial(-K\partial h/\partial x)}{\partial x} + \frac{\partial(-K\partial h/\partial y)}{\partial y} + \frac{\partial(-K\partial h/\partial z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

$\nabla^2 h = 0$ (Equação de Laplace)

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Para um fluxo bidimensional.

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0}$$

Complicações:

⇒ equações válidas para diferentes tipos de fluxo saturado.

⇒ somente pode-ser resolvido se se conhecer o que ocorre nos limites da zona de fluxo.

⇒ para resolução de um problema de fluxo em particular deverá se definir as chamadas condições limites.

⇒ a superfície freática tem uma forma desconhecida ⇒ complicações.

⇒ para a solução de um problema de fluxo as condições limites deverão ser especificadas em função do tempo e deverá ser dado o estado do fluxo no tempo t=0 em cada ponto da região de ocorrência do fluxo.

6.5.2. Suposições de Dupuit-Forchheimer.

Dupuit = ítalo-francês.
Forchheimer = austríaco.

Como foi observado nos aprovados prévios, em alguns estudos de movimento da água freática, incluindo o fluxo de drenagem, consideramos a ~~(lençol freático)~~ capa freática como uma superfície livre de água.

Superfície livre ~~de~~ água = uma superfície de contato e em equilíbrio com a atmosfera, ou seja, uma linha de corrente ao longo da qual a pressão é a atmosférica.

"Ciência e Técnica":

Os problemas de fluxo em superfícies livres são difíceis de resolver por causa das condições de contorno, que não são lineares.

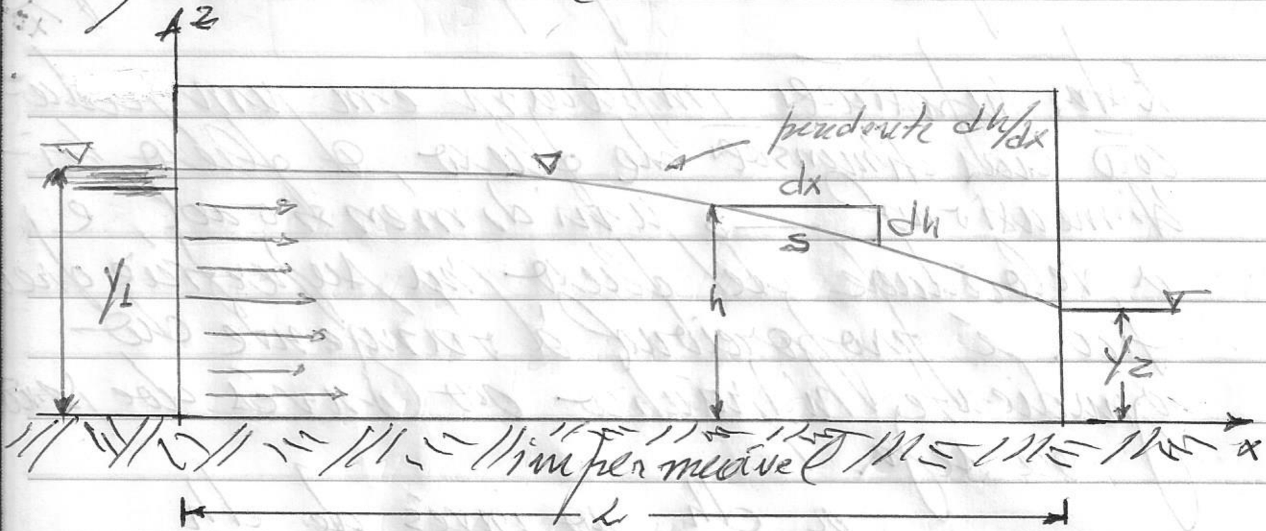
Uma análise de tais problemas baseados unicamente nas ~~(condições)~~ equações de Darcy e Laplace conduzem a soluções complexas.

Porém, não é sempre aceitável uma solução matematicamente exata, quando se considera a natureza aproximada

- das equações diferenciais em si
- das condições de limite.
- das suposições de homogeneidade.
- das condições de recarga a partir de precipitação e/ou irrigação.

⟹ métodos aproximados de solução.

Por analogia ao fluxo em canais abertos segue-se que é o tipo de fluxo a superfície livre unidimensional.



A forma é de um tubo de fluxo, cujas dimensões transversais são muito menores que as dimensões longitudinais

⇒ A seção transversal do tubo somente pode variar gradualmente com a distância ao longo do fluxo principal. ⇒ despreza-se componentes transversais do fluxo.

⇒ As linhas de corrente são quase paralelas entre si e as superfícies equipotenciais são planos perpendiculares ao fluxo principal, sendo portanto quase paralelos.

Suposições de Dupuit (1863):

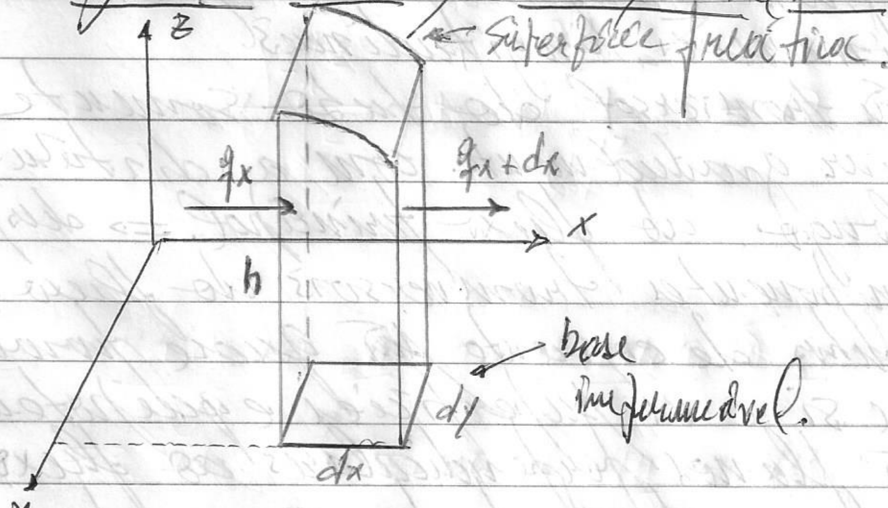
⇒ para pequenas inclinações da superfície livre de um sistema de fluxo, pode-se se tomar as linhas de corrente como horizontais em qualquer seção vertical.

⇒ A velocidade de fluxo é proporcional ao pendente da capa de água livre, porém é independente da profundidade do fluxo.

Estas suposições implicam em uma redução das dimensões de fluxo, o fluxo bidimensional → unidimensional, e a velocidade de fluxo na superfície freática é proporcional à tangente do gradiente hidráulico ao invés do seno, ou seja

$$\frac{dh}{dx} \text{ ao invés de } \frac{dh}{ds}$$

Suposição de Forchheimer (1885).



Tomando a superfície da capa impermeável como horizontal, ou seja, coincidindo com o plano de coordenadas x, y, as componentes ~~da~~ horizontal da velocidade de fluxo são:

$$v_x = -k\,\frac{\partial h}{\partial x} \qquad v_y = -k\,\frac{\partial h}{\partial y}$$

Se q_x é o fluxo na direcção x por unidade de largura y, então o fluxo que entra através da face esquerda da coluna, é o produto da superfície $h \cdot dy$ pela velocidade V_x:

$$q_x = h \cdot dy \cdot V_x$$

$$q_x = h \cdot dy \cdot \left(-k \frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{q_x = -k \left(h \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) dy}$$

A medida que o fluxo vá da face esquerda para a face direita a coluna varia em uma proporção $\frac{\partial q_x}{\partial x}$. Quando deixa a face direita da coluna, q_x terá variado de $q_{(x+dx)}$

isto é para $q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$

A diferença entre a saida (outflow) e a entrada (inflow), direita e esquerda, respectivamente por unidade de fluxo na direcção x, é:

$$q_{(x+dx)} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -k \frac{\partial}{\partial x}\left(h \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \cdot dy$$

Similarmente a variação do fluxo na direcção y:

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} dy = -k \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot \frac{\partial h}{\partial y}\right) dx \cdot dy$$

Assumindo um fluxo contínuo (steady flow) a eq. da continuidade (Laplace) requer q a soma das variações seja nula, ou seja:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = 0$$

$$\left[-K \frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx\, dy\right] + \left[-K \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial h}{\partial y}\right) dx\, dy\right] = 0$$

$$-K \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] dx\, dy = 0$$

$\therefore$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0}$$

ou

$$\boxed{\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = 0}$$ Eq. Forchheimer

Vantagens da aproximação de Dupuit

=> as dificuldades matemáticas que se apresentam na resolução de muitos problemas de fluxo são reduzidas consideravelmente

=> Os limites impermeáveis e de água são tridimensionais, são substituídos por limites verticais fictícios, que somente podem se curvar no plano horizontal.

⇒ Não há limite com aportes acima e abaixo, ou seja, não há adições acima (por precipitação, irrigação, recarga, etc...), ou abaixo (por fluxo de entrada de água subterrânea artesiana).
⇒ Há somente uma variável dependente, h, elevação da superfície livre de água.
⇒ As condições de limite da superfície livre, que são não lineares desaparecem, de forma que o problema transforma-se em linear.
⇒ Pode aplicar o princípio da superposição, que permite determinar a forma da capa, e a velocidade em cada ponto do sistema de fluxo.

TABELA 2.1. Viscosidade e densidade da água em função da temperatura

Temperatura (t) °C	Viscosidade (η) Centipoise	Densidade (ρ) g/cm^3
5	1,519	1,000
10	1,307	0,999
15	1,1339	0,999
20	1,002	0,998
25	0,890	0,997
30	0,797	0,996
35	0,719	0,994
40	0,653	0,992

TABELA 2.2. Classes de condutividade hidráulica e permeabilidade para solos saturados

Classes	Cond.hid. 20°C K_0 (cm/h)	Permeabilidade 20°C κ (cm^2)
Muita lenta	< 0,125	< 3×10^{-10} (pouco permeável
Lenta	0,125 - 0,5	3×10^{-10} - 15×10^{-10}
Mod. lenta	0,5 - 2,0	15×10^{-10} - 60×10^{-10}
Moderada	2,0 - 6,25	60×10^{-10} - 170×10^{-10}
Mod. rápida	6,25 - 12,5	170×10^{-10} - 350×10^{-10}
Rápida	12,5 - 25,0	350×10^{-10} - 700×10^{-10}
Muito rápida	> 25,0	> 700×10^{-10} (muito permeável

2.3.3. *Métodos para Determinação da Condutividade Hidráulica em Solos Saturados*