Aula 3.

6.5.3. Fluxo em regime variável.

⟹ no fluxo variável irá ocorrer uma aumento ou diminuição da elevação da capa freática de acordo com a liberação ou adição de água ao solo.

A variação de armazenamento se expressa quantitativamente como:

$$\boxed{\Delta S = \mu \cdot \Delta h.}$$

ΔS = variação da quantidade armazenada por unidade de área superficial no tempo considerado.

μ = porosidade efetiva.

Δh = variação do nível de água no tempo considerado ($L = m$). = unidimensional.

Porosidade efetiva = a fração do solo que libera ou recebe água por unidade de variação da altura da capa freática.

O princípio da continuidade então requer uma modificação da equação:

$$-K \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] dx \cdot dy = 0$$

para

$$-K \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \cdot \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] dx\, dy = -\mu \cdot \frac{\partial h}{\partial t}\, dx\, dy$$

②

ou $$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = \frac{2\mu}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

A equação precedente também pode ser escrita como

$$K\left[h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + h\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] = \mu\frac{\partial h}{\partial t}$$

Se h é grande em comparação com sua variação, pode-se considerar h como uma constante de valor médio igual a D e desprezar os termos de segunda ordem $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$ e $\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$, obtendo-se a seguinte equação:

D D

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\mu}{KD}\frac{\partial h}{\partial t}}$$

Esta equação é idêntica a equação bidimensional para a condução de calor.

6.5.4. Recarga:

Até aqui a suposição é de que não há aporte, ou seja a superfície livre não recebe água de chuva ou de irrigação.

Se existirem aportes, por exemplo por uma precipitação constante de valor R, o princípio da continuidade requer para o fluxo em caso de regime permanente

$$-K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]dx\,dy = R\cdot dx\,dy$$

ou

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = -\frac{2R}{K}$$

onde R é o valor de recarga (LT^{-1}).

Para o fluxo em regime variável:

$$-K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]dx\,dy - R\,dx\,dy = -\mu\frac{\partial h}{\partial t}\,dx\,dy$$

Similarmente à depreciação do termo de 2º grau e aproximação a D temos:

$$\boxed{KD\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = \mu\frac{\partial h}{\partial t} - R}$$

6.5.5. Fluxo de uma capa freática livre entre duas pontos de água.

As formulas aqui derivadas são para regime em fluxo constante.

A figura da página 11 na aula 2, mostra o fluxo de água freática através de uma faixa de terra limitada por dois cursos d'água, cujos níveis estão a uma altura Y_1 e Y_2 sobre a capa impermeável. A capa freática na zona de fluxo é uma superfície livre. Ao se tomar um sistema de coordenadas retangulares, o plano xz representa o plano de fluxo. Se supõe-se que a superfície livre não tem recarga por precipitação ou irrigação.

A eq. de Forchheimer para fluxo unidimensional se reduz a:

$$\boxed{\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0}$$

que integrando dá:

$$\boxed{h^2 = Ax + B}$$

onde A e B são constantes de integração

Com as seguintes condições particulares:

para $x = 0 \longrightarrow h = y_1$

$x = L \longrightarrow h = y_2$.

$$\begin{cases} y_1^2 = B \\ y_2^2 = A \cdot L + B \end{cases}$$

$y_2^2 = A \cdot L + y_1^2$

$A = \frac{y_2^2 - y_1^2}{L}$

$A = \frac{y_2^2 - y_1^2}{L}$ e $B = y_1^2$

Substituindo em $h = Ax + B$, temos

$$\boxed{h^2 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{L} x + y_1^2}$$

que demonstra que a capa freática tem uma forma parabólica.

Para a descarga por unidade de altura através de uma seção transversal vertical, deduz-se que a equação de Darcy

$$q = -kh \frac{dh}{dx}$$

5

$$q\,dx = -k\,h\,dh$$

$$\int_0^L q\,dx = \int_{y_1}^{y_2} -k h\,dh$$

$$q \cdot \int_0^L dx = -k \int_{y_1}^{y_2} h\,dh$$

$$q \cdot x \Big|_0^L = -k \frac{h^2}{2} \Big|_{y_1}^{y_2}$$

$$q \cdot (L-0) = -k \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{2}$$

$$q = k \frac{y_1^2 - y_2^2}{2L} \qquad \boxed{q = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2L} k}$$

Exemplo: Suponha $L = 25$ m, $y_1 = 6$ m, $y_2 = 5$ m e $k = 0,2$ m/dia. A descarga por unidade de altura da massa de água é

$$q = 0,2 \cdot \frac{36 - 25}{2 \times 25} = 0,044 \ \frac{m^3/\text{dia}}{m \text{ de longitude}}$$

Se a massa de água tem uma longitude de 400 m, a descarga total então é:

$$Q = 400 \times 0,044 = 17,6 \ m^3/\text{dia}.$$

A carga a uma distância $x = 15$ m.

$$h^2 = \frac{25 - 36}{25} \cdot 15 + 36 = 29,4 \ m^2$$

$$h = 5,4 \ m.$$

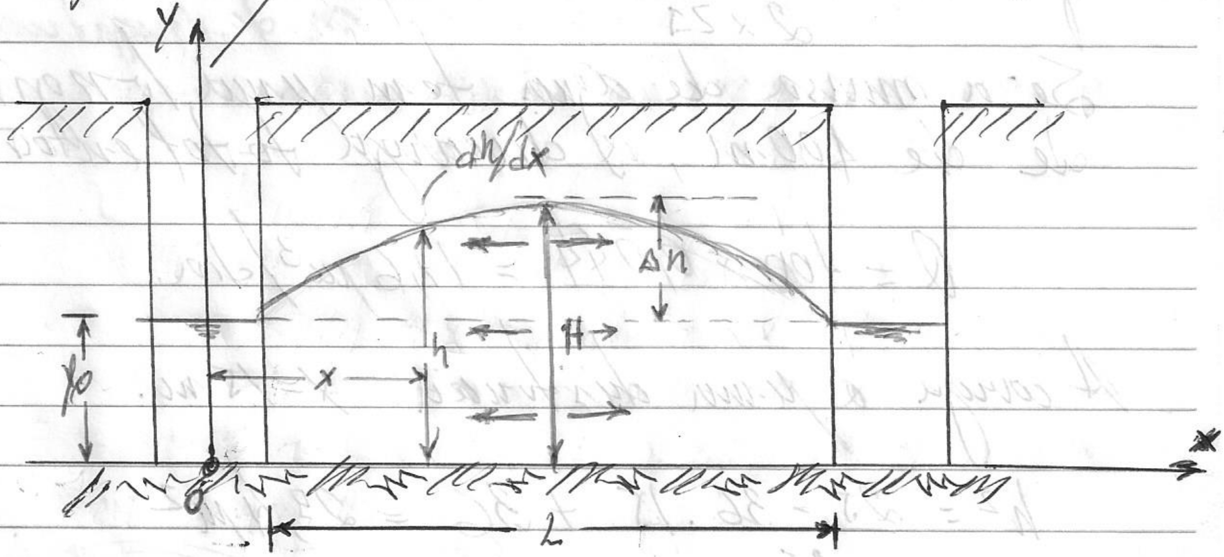
Obs. p. 198

∴ Quanto maior o espaçamento entre os drenos menor a carga hidráulica final.

6.5.6. Fluxo em regime permanente em valas paralelas com uma recarga uniforme sobre a superfície do solo.

Um outro exemplo das suposições de Dupuit é o seguinte.

Suponha um solo homogêneo e isotrópico limitado abaixo por uma camada impermeável e drenado por um conjunto de valas paralelas que penetram a camada de solo até a base impermeável. A superfície do solo recebe uma recarga uniforme de precipitação R. Os níveis de água nas valas estão a uma altura Y_0 e a carga de água freática é h. As valas estão separadas a uma distância L.



O problema é encontrar uma expressão para a altura da capa freática à meia distância entre as valas, H.
Suponha que o gradiente hidráulico em um ponto é igual ao pendente da capa de água nesse ponto (suposição de Dupuit-Forchheimer). Pode-se ver na figura que a suposição do fluxo horizontal na direção das valas é incorreta, uma vez que as linhas de corrente deveriam ser curvas.
Onde ocorre uma variação relativamente baixa do lençol freático, as suposições de Dupuit-Forchheimer são quase válidas e os erros de cálculo serão pequenos.
A solução do problema pode ser determinada tomando um sistema de coordenadas retangulares, cuja origem está na base impermeável no centro de uma das valas, ponto O na figura. Em H temos um plano de divisão sendo que a água flui para a direita e para a esquerda em direção às respectivas valas a partir desse ponto.

Considere o fluxo através de um plano (h) vertical a uma distância x da vala esquerda. Toda a água que entra no solo à direita desse plano (segmento) deve passar através dele, em direção à vala. Se R é a recarga por unidade de superfície de solo e por unidade de tempo, então o fluxo por unidade de tempo através do segmento h, será:

$$\boxed{q_x = R.\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

Evidentemente pode-se aplicar a Lei de Darcy ao fluxo através do plano, de acordo com as equações e suposições estabelecidas até aqui, obtendo-se uma segunda expressão para q_x.

$$\boxed{q_x = k.h.\frac{dh}{dx}}$$

onde dh/dx = gradiente hidráulico.

h = plano da superfície de seção transversal do fluxo.

Como o fluxo deve ser igual nos dois casos, as equações podem ser igualadas, assim:

$$k.h.\frac{dh}{dx} = R.\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

Multiplicando ambos os membros por dx

$$kh\,dh = R\left(\frac{L}{2} - x\right)dx$$

$$kh\,dh = \left(\frac{RL}{2}\right)dx - Rx\,dx$$

Essa é uma EDO que pode ser integrada nos limites:

$$x = 0 \longrightarrow h = h_0$$

$$x = \tfrac{1}{2}L \longrightarrow h = H.$$

$$K \int_{h=y_0}^{h=H} h \cdot dh = R \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}L} \left(\frac{1}{2}L - x\right) dx$$

$$K \cdot \frac{h^2}{2}\Bigg|_{y_0}^{H} = R \cdot \left[\frac{1}{2}L \cdot x \Bigg|_0^{1/2 L} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{1/2 L}\right]$$

$$\frac{1}{2} K \left(H^2 - y_0^2\right) = R \cdot \left[\frac{1}{2}L \cdot \left(\frac{1}{2}L - 0\right) - \frac{(1/2 L)^2}{2} + \frac{0^2}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2} K \left(H^2 - y_0^2\right) = R \cdot \left[\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8}\right]$$

$$\frac{1}{2} K \left(H^2 - y_0^2\right) = R \cdot \frac{L^2}{8}$$

$$\boxed{L^2 = \frac{4K \cdot \left(H^2 - y_0^2\right)}{R}}$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$L^2 = \frac{4K \cdot (H + y_0) \cdot (H - y_0)}{R}$$

A diferença de carga $H - y_0 = \Delta h$, ou

$$H = y_0 + \Delta h$$

Substituindo na equação anterior tem-se:

$$L^2 = \frac{4K \left(y_0 + \Delta h + y_0\right) \cdot \left(\cancel{y_0} + \Delta h - \cancel{y_0}\right)}{R}$$

$$L^2 = \frac{4K \cdot (2y_0 + \Delta h)(\Delta h)}{R} = \frac{8K y_0 \Delta h + 4K \Delta h^2}{R}$$

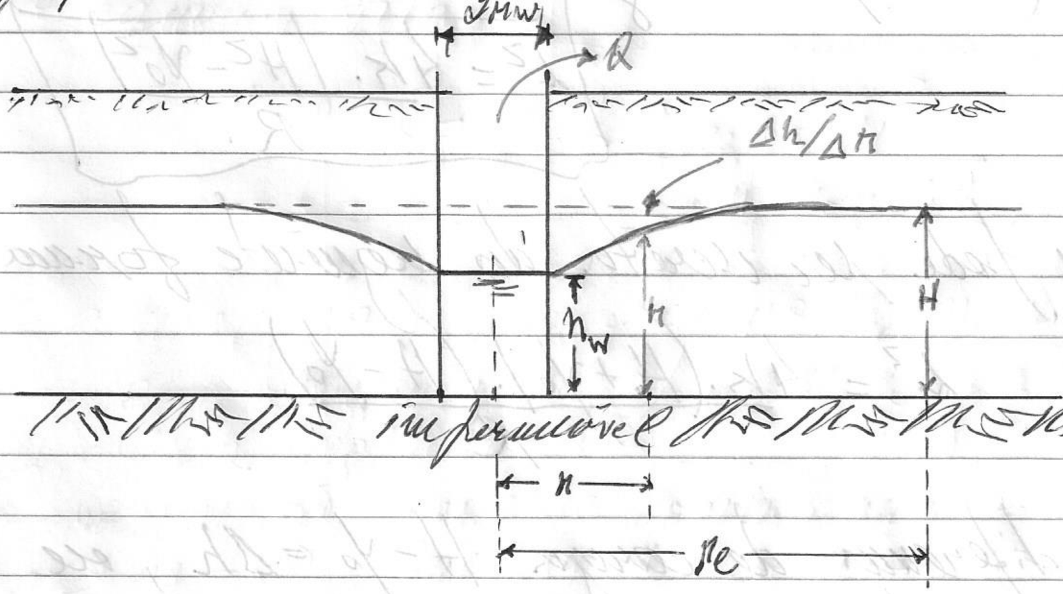
$$\boxed{L^2 = \frac{8K y_0 \Delta h}{R} + \frac{4K \Delta h^2}{R}}$$

Fórmula frequente para resolução de problema de drenagem.

6.5.2. Fluxo em regime permanente em poços

Suponha um aquífero homogêneo e isotrópico, limitado por uma capa impermeável horizontal, no qual penetra completamente um poço.

Enquanto está sendo bombeado o poço recebe água de toda a espessura do aquífero ~~confinado~~ saturado e a altura do filtro do poço é igual a espessura do aquífero saturado.



A capa freática inicial é horizontal, porém toma a forma curva quando feito o bombeamento ⟹ a água flui horizontalmente em todas as direções até o poço = fluxo radial.

Se pode entender o fluxo como um conjunto de cilindros que chegam ao centro do poço, a uma distância r.

Aplicando a Lei de Darcy e supondo o

gradiente hidráulico no cilindro, igual a relação dh/dr, a partir da suposição de Dupuit-Forchheimer.

Substituindo na equação de Darcy, este gradiente e a superfície da seção de fluxo $A = 2\pi r h$, obtém-se a equação.

$$Q = 2\pi r h K \frac{dh}{dr}$$

onde:

Q = descarga do poço para o fluxo radial em regime constante $(L^3 \cdot T^{-1})$

K = condutividade hidráulica $(L T^{-1})$

<u>Integrando obtém-se:</u>

$$\frac{Q}{\pi \cdot K}\int \frac{1}{r}\,dr = 2\int h\,dh$$

$$\boxed{h^2 = \frac{Q}{\pi \cdot K}\ln r + C}$$

Integrando entre os limites $h = h_w$ em $r = r_w$ e $h = H$ em $r = r_e$ obtém-se.

$$2\int_{h=h_w}^{h=H} h\,dh = \frac{Q}{\pi \cdot K}\int_{r=r_w}^{r=r_e} \frac{1}{r}\,dr.$$

$$h^2\Big|_{h_w}^{H} = \frac{Q}{\pi \cdot K}(\ln r_e - \ln r_w).$$

$$H^2 - h_w^2 = \frac{Q}{\pi \cdot K}\ln\frac{r_e}{r_w}$$

reordenando

$$\boxed{Q = \frac{\pi . K . (H^2 - h_w^2)}{\ln(r_e/r_w)}}$$ Fórmula de Dupuit

Pode-se obter uma solução específica para esta equação substituindo um par de valores h e r observado a dois poços de observação a diferentes distâncias do poço de bombeamento.

$$r = r_1 \longrightarrow h = h_1$$
$$r = r_2 \longrightarrow h = h_2$$

A equação fica:

$$\boxed{Q = \pi . k \frac{h_2^2 - h_1^2}{\ln(r_2 - r_1)}}$$

Se o nível do lençol freático diminui pouco (pequena variação) em relação à espessura do aquífero D então, por aproximação pode se considerar que $h_2 + h_1 = 2D$, que substituindo na equação pode reduzi-la a:

$$\boxed{Q = 2\pi K.D \frac{h_2 - h_1}{\ln(r_2/r_1)}}.$$

Para objetivos práticos e em distâncias pouco certas do poço, a equação pode ser utilizada sem cometer erros apreciáveis.

6.5.4. Métodos de Campo:
⇒ valores mais precisos do que no laboratório.
✓ o volume de solo amostrado é maior.
✓ a amostra não sofre alteração de sua estrutura.
✓ a água de determinação é do próprio subsolo.
✓ o valor da condutividade hidráulica determinado na direção predominante do escoamento. ⇒ movimento predominantemente horizontal.

Métodos Pontuais { Método do furo de trado.
" do piezômetro.
" do "poço seco"

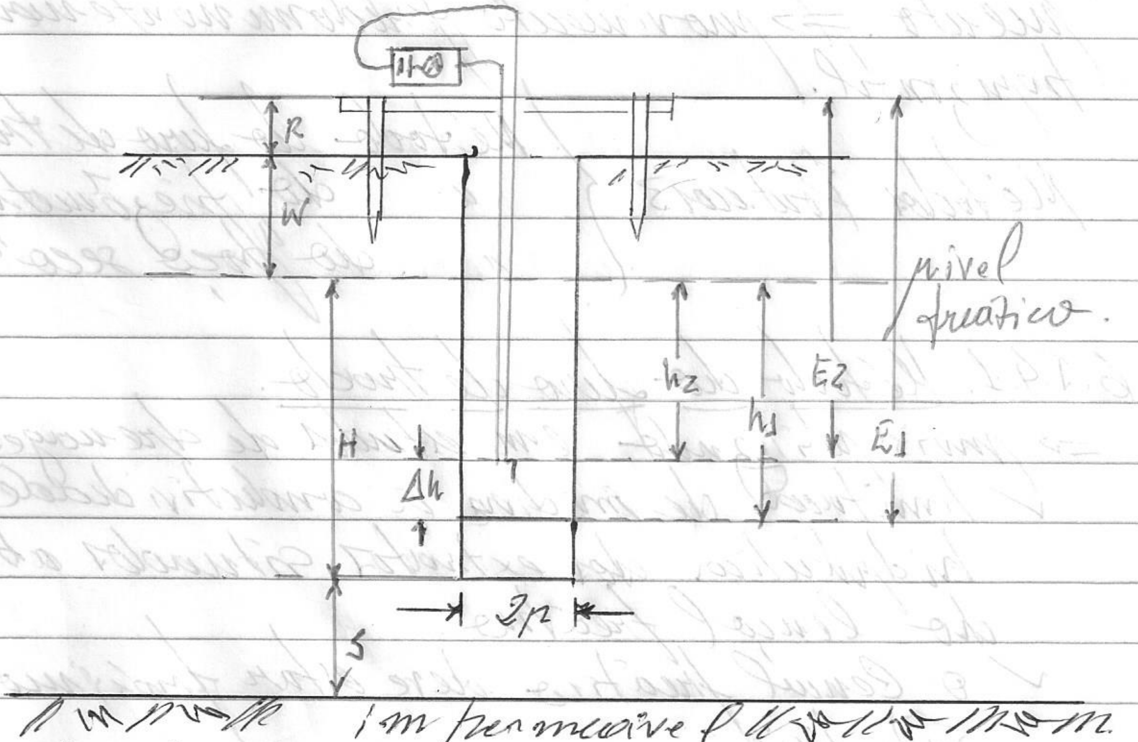
6.5.4.1. Método do furo de trado.
⇒ mais utilizado em estudos de drenagem.
✓ limitação de medir a condutividade hidráulica dos extratos situados abaixo do lençol freático.
✓ o lençol freático deve estar próximo à superfície.

Método: 1) com trado abre-se o poço no solo até uma certa profundidade abaixo do L. Freático
2) deixa em repouso até o nível da água do poço entrar em equilíbrio com o nível freático.
3) extrai-se a água do poço até próximo do seu fundo.
4) determina-se a velocidade de ascensão e o seu nível dinâmico.

✓ para solos mais estáveis (argilosos) uma profundidade ~~entre~~ entre 50 a 70 cm abaixo do L-Freático é recomendável. (arenosos) 30 a 50 cm

✓ importante não haver desbarrancamento das paredes.

Extração da água => bomba "boiler".



Cálculo da Condutividade Hidráulica. $K_0 = C \cdot \Delta h / \Delta t$

em C é o fator de geometria do poço e é em função de h(cm), H(cm), r(cm) e S(cm) Δt(s)

com $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ K (m/dia).

(ver exemplo p. 36)

a) para S=0 => $C = \dfrac{3.600\, r^2}{(H + 10r) \cdot (2 - \frac{h}{H}) \cdot h}$

b) para S > 0,5H => $C = \dfrac{4000}{(\frac{H}{r} + 20) \cdot (2 - h/H)} \times \dfrac{r}{h}$

c) para S < 0,5H => média dos anteriores.

Exemplo:

Calcular o valor da condutividade hidráulica, sendo dados:

r = 5 cm (trado de diâmetro = 4");

R = 31 cm;

W = 34 cm;

$H + W + R$ = 140 cm;

E_2 = 110 cm,

Δh = 10 cm;

Δt = 25,10 s; e

$S > 0,5\ H$ (camada impermeável profunda).

Solução:

$$H = 140 - (31 + 34) = 75 \text{ cm}$$

$$E_1 = E_2 + \Delta h = 110 + 10 = 120 \text{ cm}$$

$$h_1 = E_1 - (R + W) = 120 - 65 = 55 \text{ cm}$$

$$h_2 = E_2 - (R + W) = 110 - 65 = 45 \text{ cm}$$

$$h = (h_1 + h_2)/2 = (55 + 45)/2 = 50 \text{ cm}$$

C=?   Ks=?

6.5.4.2. Método do Piezômetro:

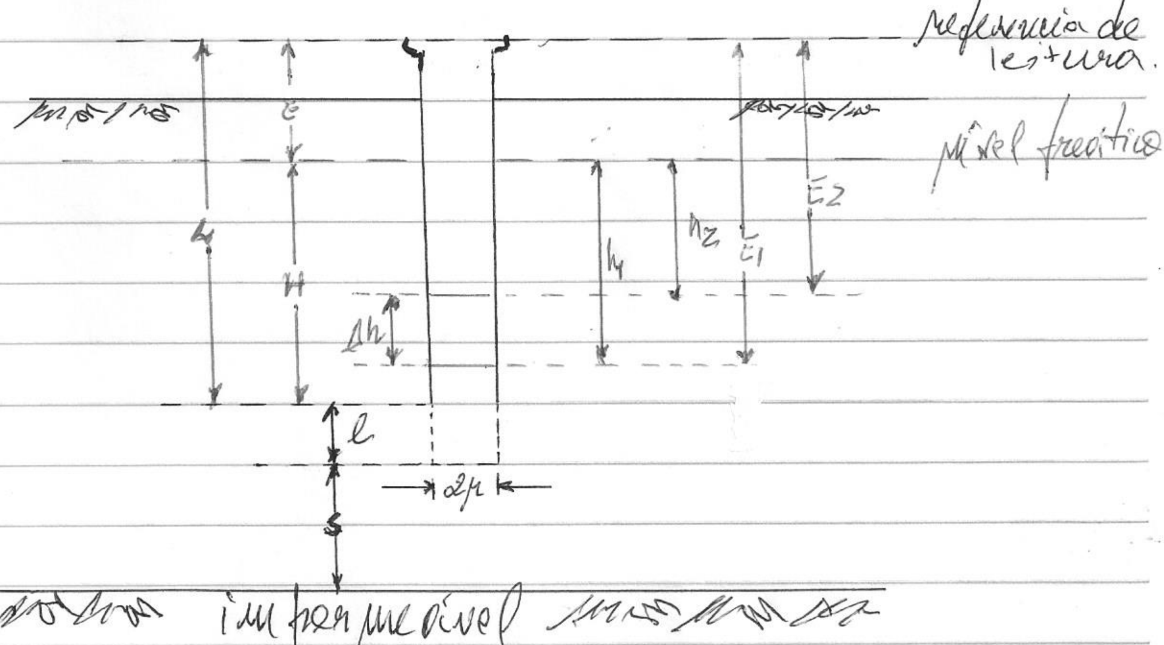
⇒ indicado para a determinação da condutividade hidráulica de cada estrato do perfil do solo.

⇒ em solos muito estratificados (estratos de pequena espessura) ⇒ determinação impraticável.

⇒ tubo de parede fina do tipo usado para irrigação, com bolsa e engates para facilitar a retirada do solo, após cravado e de um trado que trabalhe, aproximadamente, ajustado ao diâmetro interno do tubo.

⇒ os demais equipamentos são os mesmos descritos para o método do furo de trado.

Método: ✓ cravadura do tubo piezométrico e construção da cavidade;
✓ medição da velocidade de ascenção do nível da água.
✓ cálculo da condutividade hidráulica.



Cálculo da Condutividade Hidráulica.

$$\boxed{K_0 = \frac{2.714\, r^2}{L \cdot \Delta t} \ln \frac{h_1}{h_2}}$$

k (cm/dia),
r, h, H,
S, L, Ei (c
Δt (s).

Exemplo p. 39.

→ tubo da [illegible] de 87mm aço-zincado
→ trado de 3"

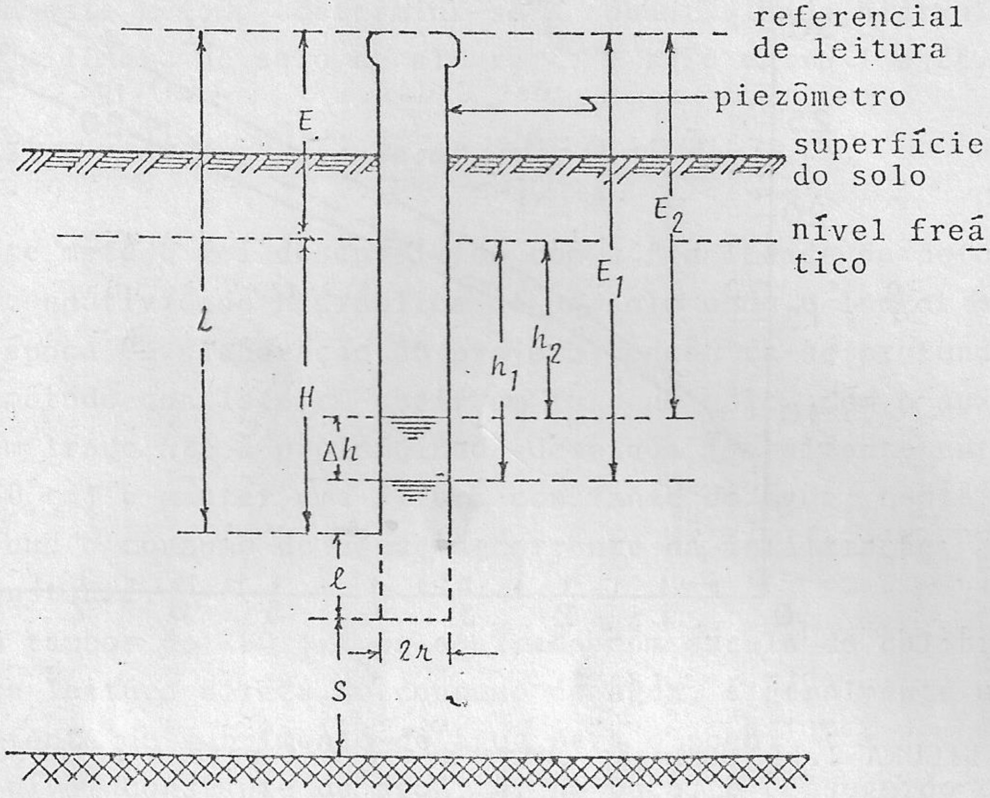


FIGURA 2.10. Ilustração das medições necessárias ao método do piezômetro.

Tomando-se as grandezas de comprimento em centímetros e as de tempo em segundos, o valor de K_o, calculado pela equação 2.18, resulta em m/dia.

O valor de C, que é um fator de geometria, é obtido com o auxílio da Figura 2.11, o valor de ℓ, r e H.

Exemplo:

Calcular a condutividade hidráulica, sendo dados:

r = 4,3 cm (raio do tubo e da cavidade);

ℓ = 10,0 cm (comprimento ou tamanho da cavidade);

L = 140,0 cm (comprimento do tubo);

E = 60,0 cm (distância entre a borda do tubo e o nível freático);

Δh = 10 cm;

E_2 = 120 cm; e

$\Delta t = t_1 - t_2$ = 28,13 S.

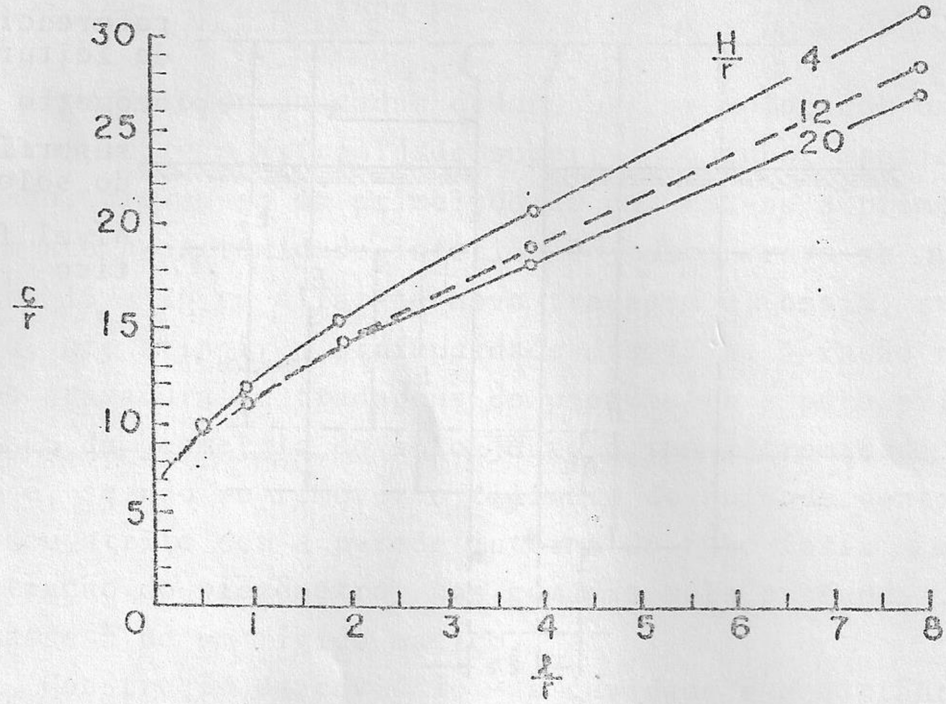


FIGURA 2.11. Relação entre c/r e ℓ/r para a obtenção de C.

Solução:

$$E_1 = E_2 + \Delta h$$

$$h_1 = E_1 - E = 130 - 60 = 70 \text{ cm}$$

$$h_2 = E_2 - E = 120 - 60 = 60 \text{ cm}$$

$$\ell/r = 10/4,3 = 2,3$$

$$H = I - E = 140 - 60 = 80 \text{ cm}$$

$$H/r = 80/4,3 = 18,6$$

Obtenção do fator geométrico C - marca-se sobre o eixo ℓ/r, da Figura 2.11, o valor 2,3. A partir deste ponto, traça-se uma perpendicular até tocar a curva $H/r = 20$ (valor mais próximo de 18,6). A partir desta intercessão, traça-se uma horizontal até tocar o eixo $C/r = 15$. Portanto, $C = 15 \times r = 15 \times 4,3 = 64,5$.

$$K_o = \frac{2.714 \times 4,3^3}{64,5 \times 28,13} \ell n \frac{70}{60} = 4,26 \text{ m/dia}$$