

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2 - |x|}{2 + x}$$

No ponto  $p = 1$

```
sage: p=1
sage: f(x)=2-abs(x)
sage: g(x)=2+x
sage: epsilon(x)=1/(10^x)
sage: delta(x)=epsilon(x)
sage: p_minus_delta(x)=p-delta(x)
sage: p_plus_delta(x)=p+delta(x)
sage: h_minus(x)=(f(p_minus_delta)/g(p_minus_delta))
sage: h_plus(x)=(f(p_plus_delta)/g(p_plus_delta))
Sage: table(rows=[[x for x in [1..4]],
[n(epsilon(x), digits=4) for x in [1..4]],
[n(delta(x), digits=4) for x in [1..4]],
[n(p_minus_delta(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(p_plus_delta(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(h_minus(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(h_plus(x), digits=5) for x in [1..4]]],
header_column=['iter','epsilon','delta','p_minus_delta',
'p_plus_delta','epsilon-delta','epsilon+delta'],
frame=True)
```

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$$

No ponto  $p = 1$

iter	1	2	3	4
epsilon	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
delta	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
p_minus_delta	0.90000	0.99000	0.99900	0.99990
p_plus_delta	1.1000	1.0100	1.0010	1.0001
epsilon-delta	0.37931	0.33779	0.33378	0.33338
epsilon+delta	0.29032	0.32890	0.33289	0.33329

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2 - |x|}{2 + x}$$

No ponto  $p = -1$

```
sage: p=-1
sage: f(x)=2-abs(x)
sage: g(x)=2+x
sage: epsilon(x)=1/(10^x)
sage: delta(x)=epsilon(x)
sage: p_minus_delta(x)=p-delta(x)
sage: p_plus_delta(x)=p+delta(x)
sage: h_minus(x)=(f(p_minus_delta)/g(p_minus_delta))
sage: h_plus(x)=(f(p_plus_delta)/g(p_plus_delta))
Sage: table(rows=[[x for x in [1..4]],
[n(epsilon(x), digits=4) for x in [1..4]],
[n(delta(x), digits=4) for x in [1..4]],
[n(p_minus_delta(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(p_plus_delta(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(h_minus(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(h_plus(x), digits=5) for x in [1..4]]],
header_column=['iter','epsilon','delta','p_minus_delta',
'p_plus_delta','epsilon-delta','epsilon+delta'],
frame=True)
```

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$$

No ponto p = -1

iter	1	2	3	4
epsilon	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
delta	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
p_minus_delta	-1.1000	-1.0100	-1.0010	-1.0001
p_plus_delta	-0.90000	-0.99000	-0.99900	-0.99990
epsilon-delta	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
epsilon+delta	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2 - |x|}{2 + x}$$

No ponto  $p = -1.9999$

```
sage: p=-1.9999
sage: f(x)=2-abs(x)
sage: g(x)=2+x
sage: epsilon(x)=1/(10^x)
sage: delta(x)=epsilon(x)
sage: p_minus_delta(x)=p-delta(x)
sage: p_plus_delta(x)=p+delta(x)
sage: h_minus(x)=(f(p_minus_delta)/g(p_minus_delta))
sage: h_plus(x)=(f(p_plus_delta)/g(p_plus_delta))
Sage: table(rows=[[x      for x      in [1..4]],
[n(epsilon(x),      digits=4) for x      in [1..4]],
[n(delta(x),        digits=4) for x      in [1..4]],
[n(p_minus_delta(x), digits=5) for x      in [1..4]],
[n(p_plus_delta(x),  digits=5) for x      in [1..4]],
[n(h_minus(x),       digits=5) for x      in [1..4]],
[n(h_plus(x),        digits=5) for x      in [1..4]]],
header_column=['iter','epsilon','delta','p_minus_delta',
'p_plus_delta','epsilon-delta','epsilon+delta'],
frame=True)
```

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$$

No ponto p = -1.9999

iter	1	2	3	4
epsilon	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
delta	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
p_minus_delta	-2.0999000	-2.0099000	-2.0009000	-2.0000000
p_plus_delta	-1.8999000	-1.9899000	-1.9989000	-1.9998000
epsilon-delta	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.00000000
epsilon+delta	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2 - |x|}{2 + x}$$

No ponto  $p = -2$

```
sage: p=-2
sage: f(x)=2-abs(x)
sage: g(x)=2+x
sage: epsilon(x)=1/(10^x)
sage: delta(x)=epsilon(x)
sage: p_minus_delta(x)=p-delta(x)
sage: p_plus_delta(x)=p+delta(x)
sage: h_minus(x)=(f(p_minus_delta)/g(p_minus_delta))
sage: h_plus(x)=(f(p_plus_delta)/g(p_plus_delta))
Sage: table(rows=[[x for x in [1..4]],
[n(epsilon(x), digits=4) for x in [1..4]],
[n(delta(x), digits=4) for x in [1..4]],
[n(p_minus_delta(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(p_plus_delta(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(h_minus(x), digits=5) for x in [1..4]],
[n(h_plus(x), digits=5) for x in [1..4]]],
header_column=['iter','epsilon','delta','p_minus_delta',
'p_plus_delta','epsilon-delta','epsilon+delta'],
frame=True)
```

# AULA 8

## Solution of limits by epsilon – delta definition.

Aproximações sucessivas para uma função num ponto p dado (tabelas de epsilon e delta) => continuidade no ponto.

$$h(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$$

No ponto  $p = -2$

iter	1	2	3	4
epsilon	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
delta	0.1000	0.01000	0.001000	0.0001000
p_minus_delta	-2.1000000	-2.0100000	-2.0010000	-2.0001000
p_plus_delta	-1.9000000	-1.9900000	-1.9990000	-1.9999000
epsilon-delta	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
epsilon+delta	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000



# References:

Granville, William; Joyner, David. **Differential Calculus and Sage**. Disponível em: [https://wdjoyner.files.wordpress.com/2015/04/granville\\_calc1-sage\\_2009-08-15.pdf](https://wdjoyner.files.wordpress.com/2015/04/granville_calc1-sage_2009-08-15.pdf). Acesso em: 04 de ago. 2018.

SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.1), The Sage Developers, 2017, Disponível em: <http://www.sagemath.org>. Acesso em: 04 de ago. 2018.

Guidorizzi, H. L. . **Um Curso de Cálculo**, Volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2001.

Stewart, James. **Cálculo**, Volume 1 e 2. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Thomas, G.B.; Finney, R. L.; Weir, M. D.; Giordano, F. R. **Cálculo**, Volumes 1 e 2. Editora Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2002.

Piskunov. N. **Cálculo Diferencial e Integral**, Volumes 1 e 2. Editora livraria Lopes da Silva, Porto, 1986.