5

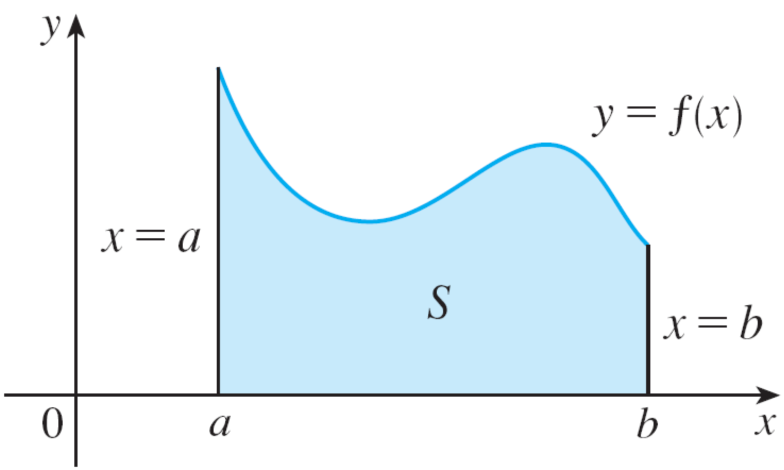
Integrais

5.1 Áreas e Distâncias

O Problema da Área

O Problema da Área

Nós começamos tentando resolver o *problema da área*: Encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a a b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

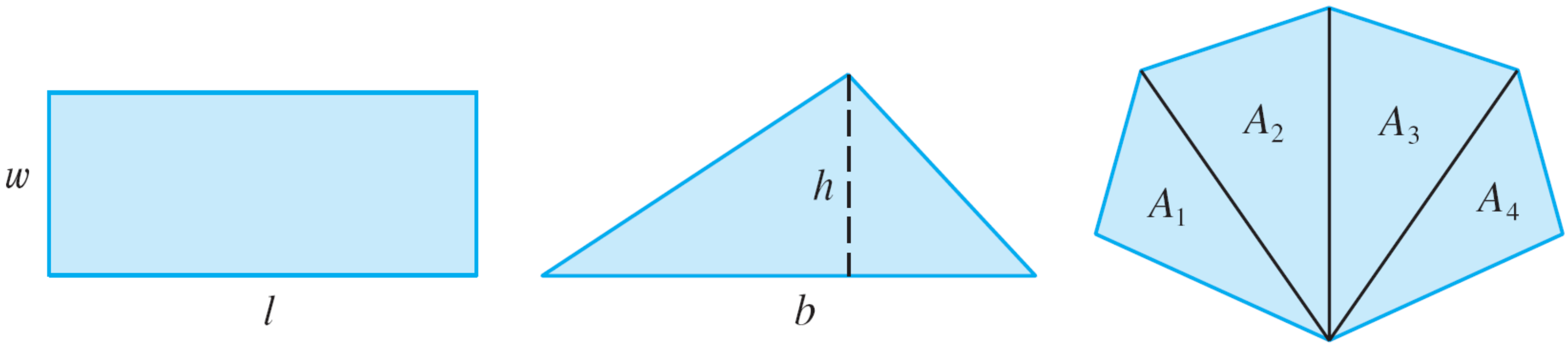


$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Figura 1

O Problema da Área

Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.



$A = lw$ $\quad$ $A = \frac{1}{2}bh$ $\quad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Figura 2

O Problema da Área

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar, aproximamos a região S utilizando retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos.

Exemplo 1

Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

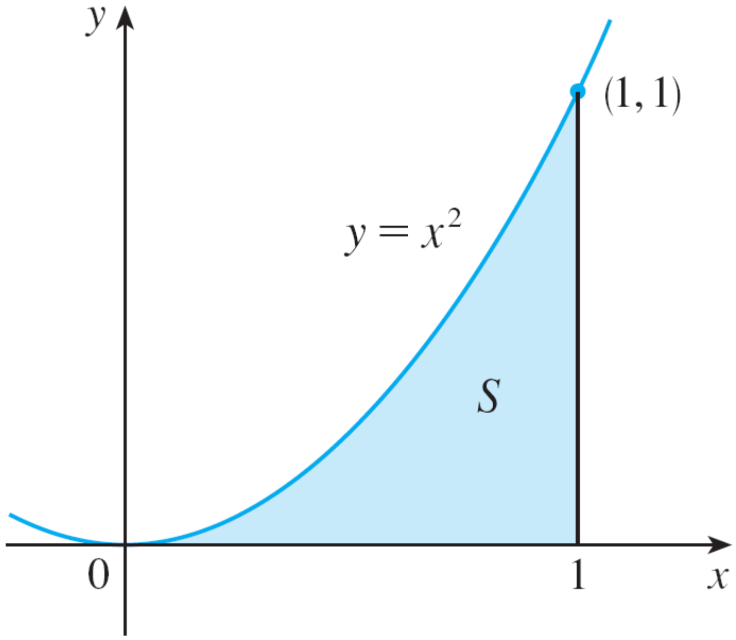


Figura 3

Exemplo 1 – *Solução*

Observamos primeiro que a área de *S* deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois *S* está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que *S* seja dividida em quatro faixas

S_1, S_2, S_3, e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

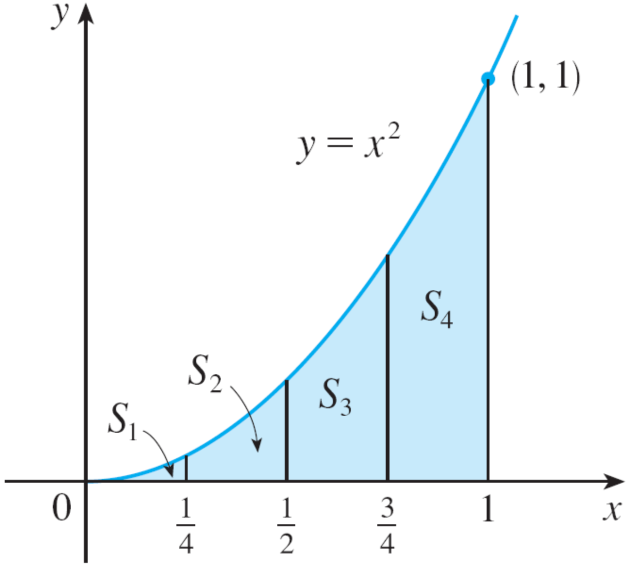


Figura 4(a)

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)].Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, e $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e a altura e $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$, e 1^2.

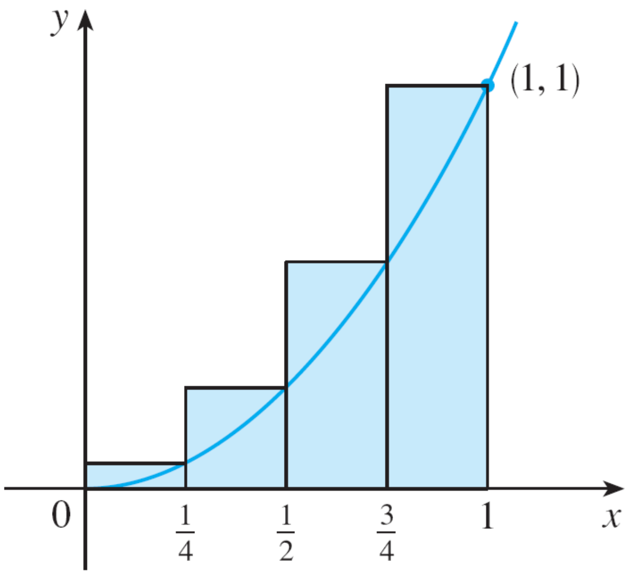


Figura 4(b)

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximados, teremos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875.$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de *f* nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.)

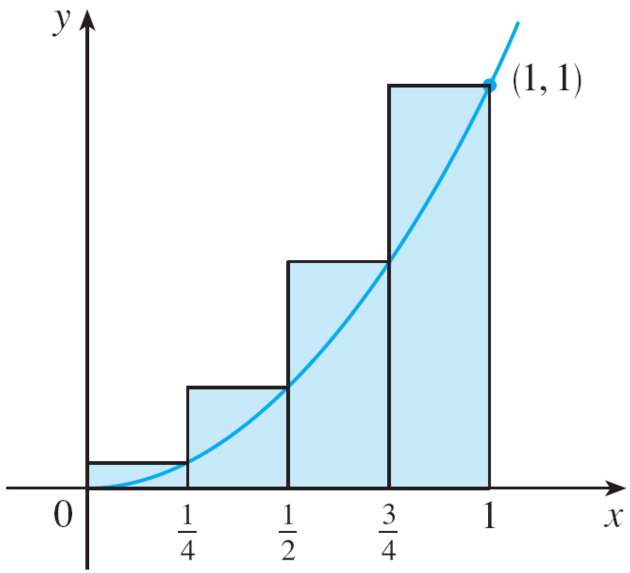


Figura 4(b)

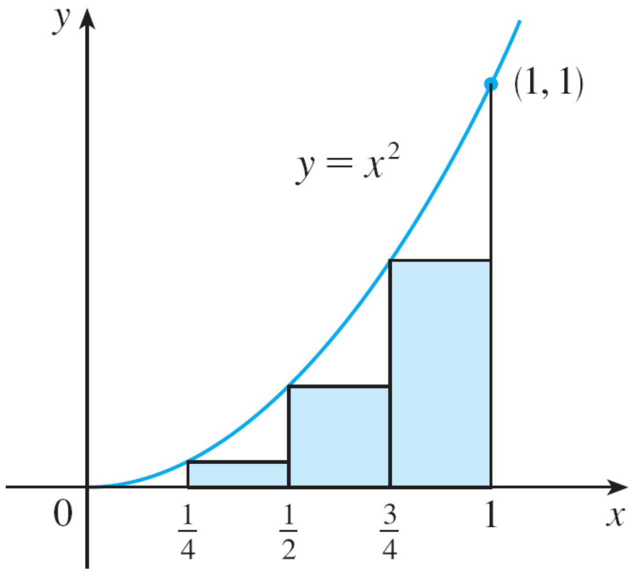


Figura 5

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A:

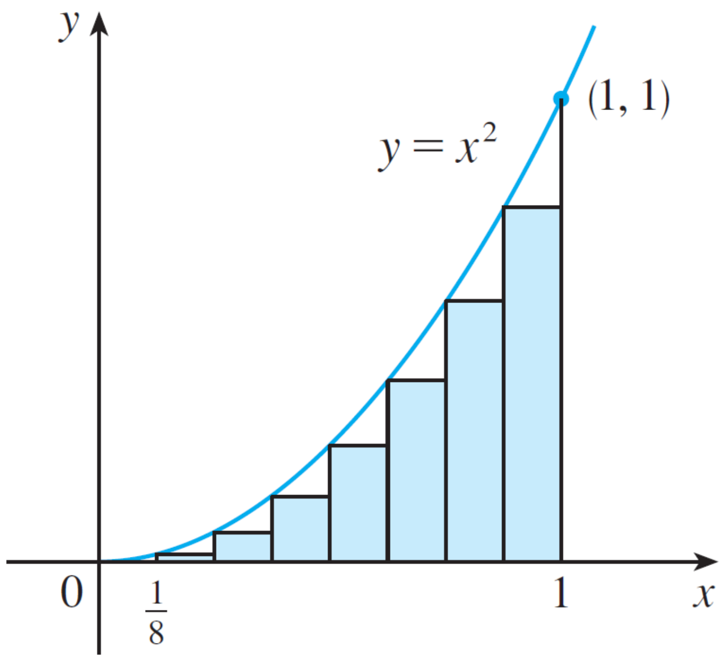
$$0{,}21875 < A < 0{,}46875.$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas.

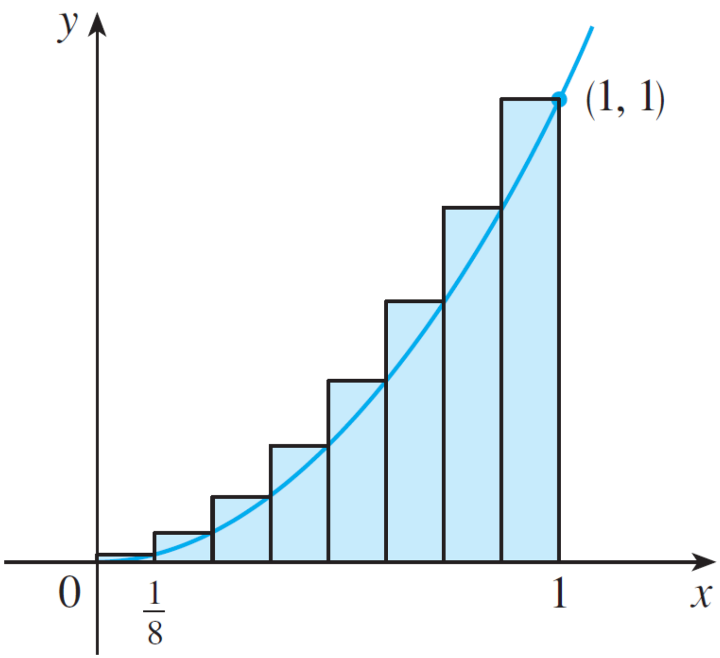
Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região *S* em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas



(b) Usando as extremidades direitas

Aproximando *S* por 8 retângulos

Figura 6

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas.

Exemplo 1 – *Solução*

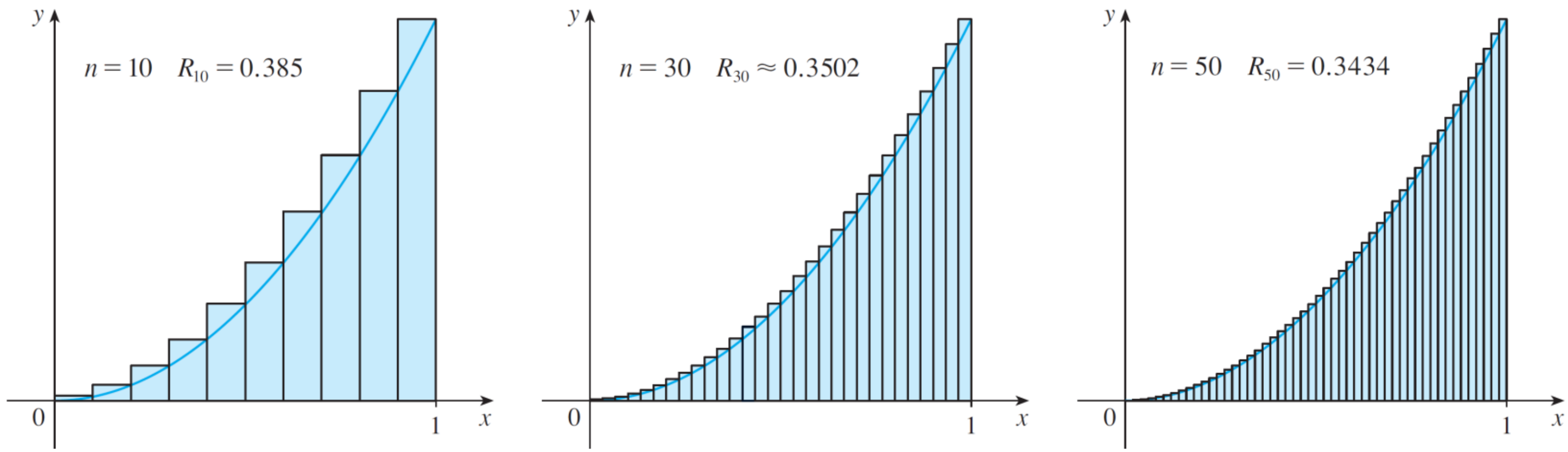
continuação

A tabela à direita mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1.000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

O Problema da Área

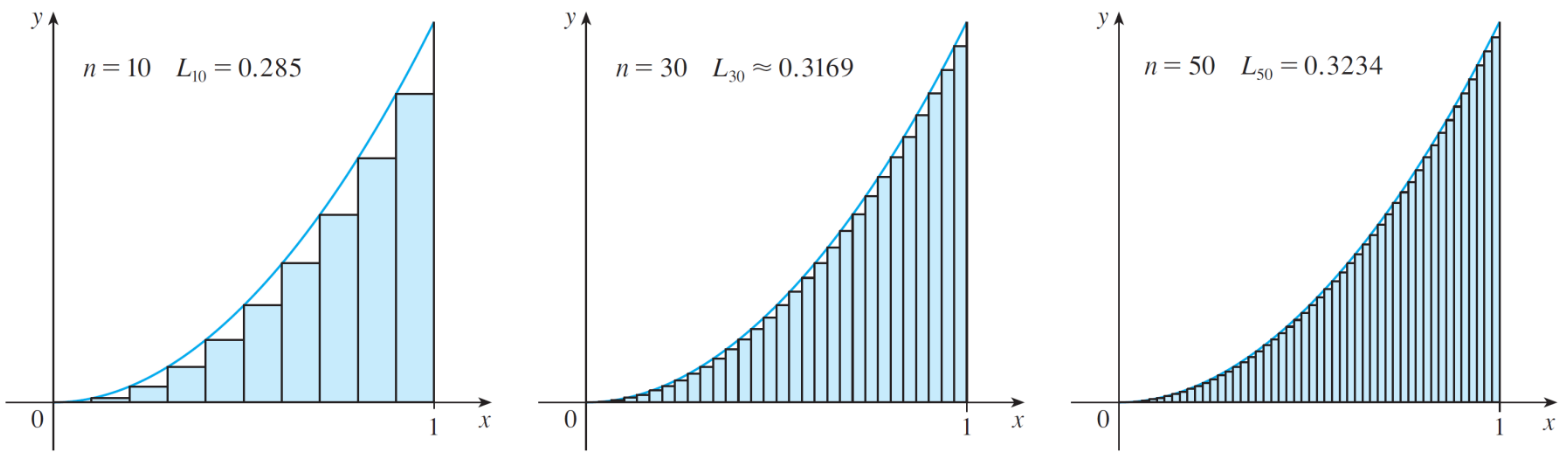
Das Figuras 8 e 9, parece que conforme n aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores à área de S.



As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 8

O Problema da Área



As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 9

Portanto, *definimos* a área A como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes. Isto é,

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

O Problema da Área

Começamos por subdividir *S* em *n* faixas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual largura, como na Figura 10.

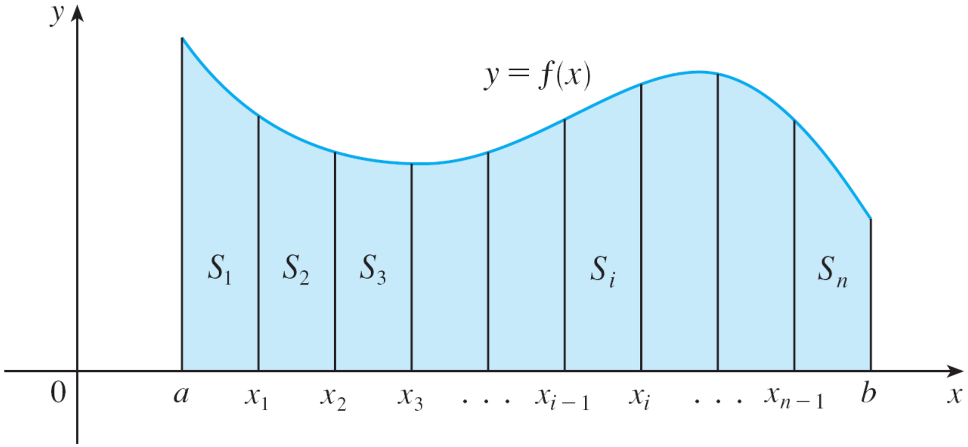


Figura 10

A largura do intervalo [*a*, *b*] é *b* – *a*, assim, a largura de cada uma das *n* faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

O Problema da Área

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$

$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$

$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$

$$\vdots$$

O Problema da Área

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11).

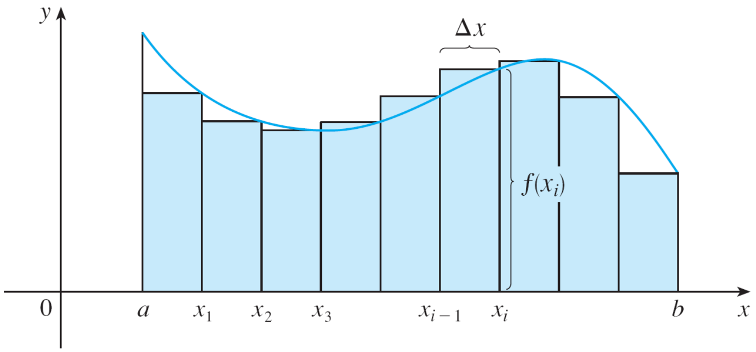


Figura 11

Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \quad . . . \quad + f(x_n)\,\Delta x$$

O Problema da Área

A Figura 12 mostra a aproximação para n = 2, 4, 8 e 12. Observe que essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$.

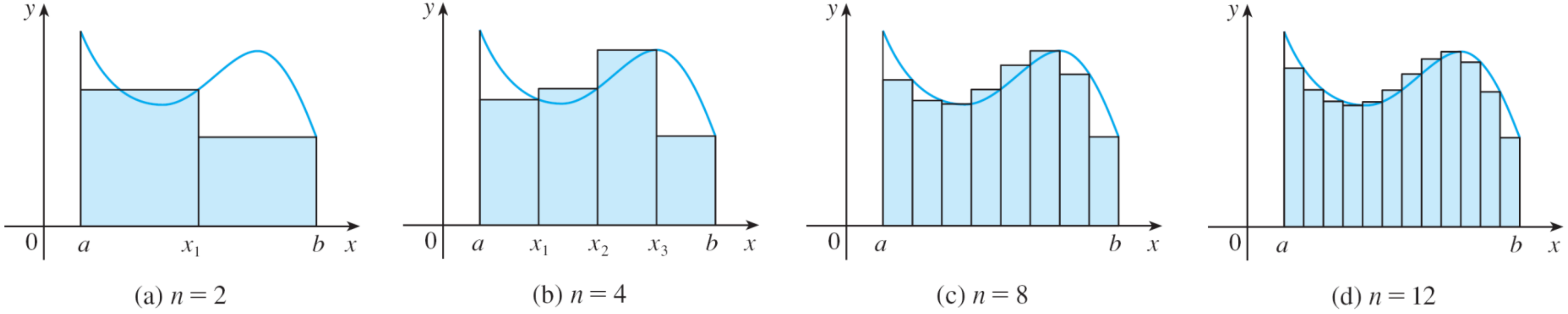


Figura 12

O Problema da Área

Portanto, vamos definir a área *A* da região *S* da seguinte forma.

$\boxed{2}$ **Definição** A área *A* da região *S* que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x].$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que *f* seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos aproximantes:

$\boxed{3}$
$$A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x].$$

O Problema da Área

De fato, em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do *i*-ésimo retângulo como o valor de *f* em *qualquer* número x_i* no *i*-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1*, x_2*, \dots, x_n*$ de **pontos amostrais**.

A Figura 13 mostra os retângulos aproximamantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área *S* é

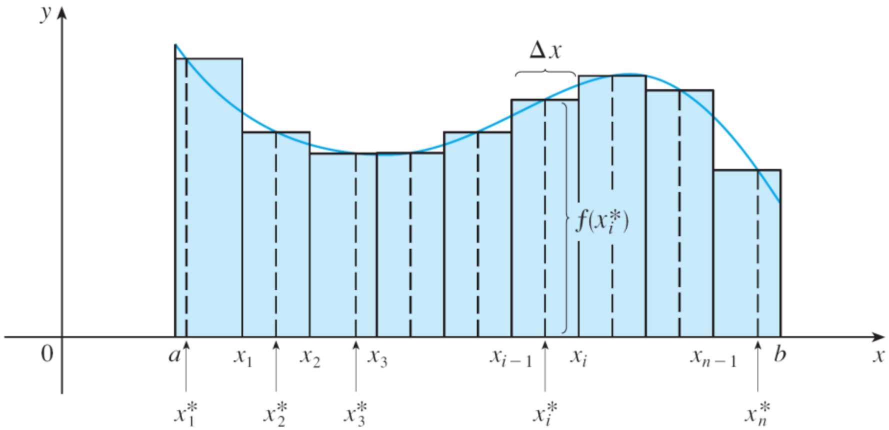


Figura 13

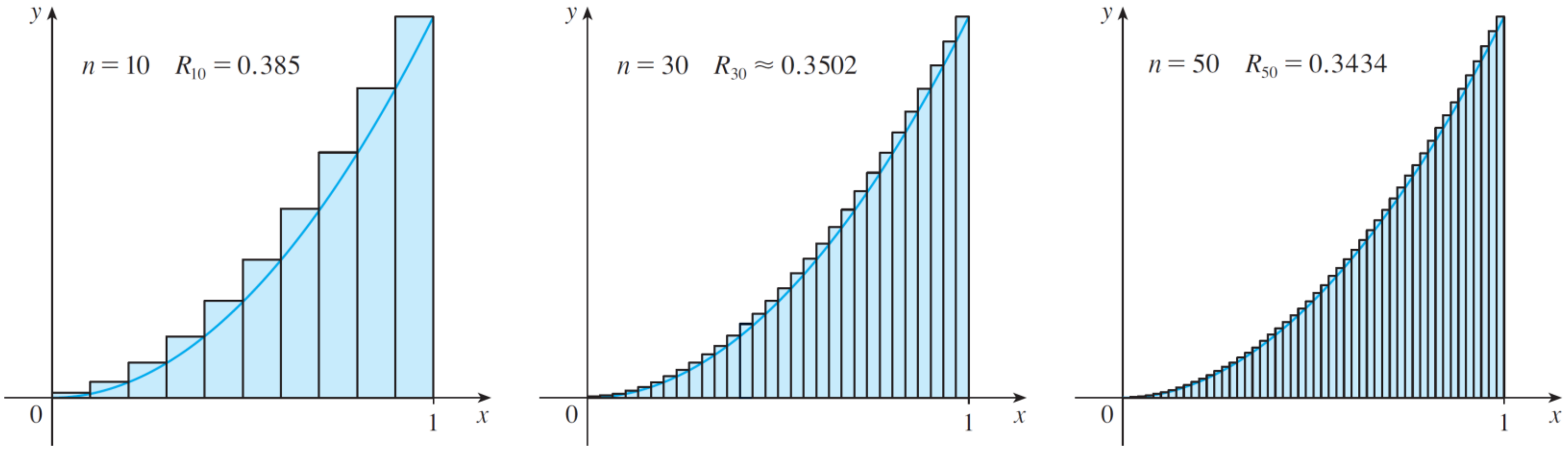
4 $$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

O Problema da Área

OBSERVAÇÃO Pode ser mostrado que uma definição equivalente de área é a seguinte: *A é o único número que é menor que todas as somas superiores e maior que todas as somas inferiores*. Vimos no Exemplos 1 e 2 , por exemplo, que a área $\left(A = \frac{1}{3}\right)$ está presa entre todas as somas esquerdas aproximadas de L_n e todas as somas direitas aproximadas R_n. A função, nesses exemplos, $f(x) = x^2$, é crescente em [0, 1] e, portanto, suas somas inferiores decorrem das extremidades esquerdas e as somas superiores das extremidades direitas.

O Problema da Área

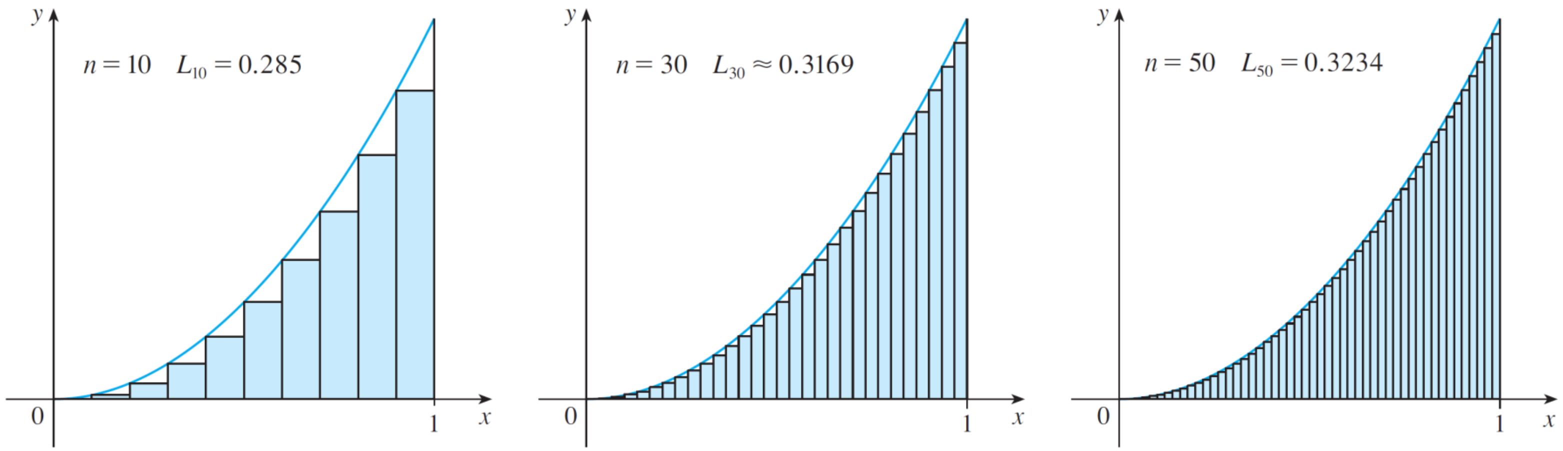
Veja Figuras 8 e 9.



As extremidades da direita produzem somas maiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 8

O Problema da Área

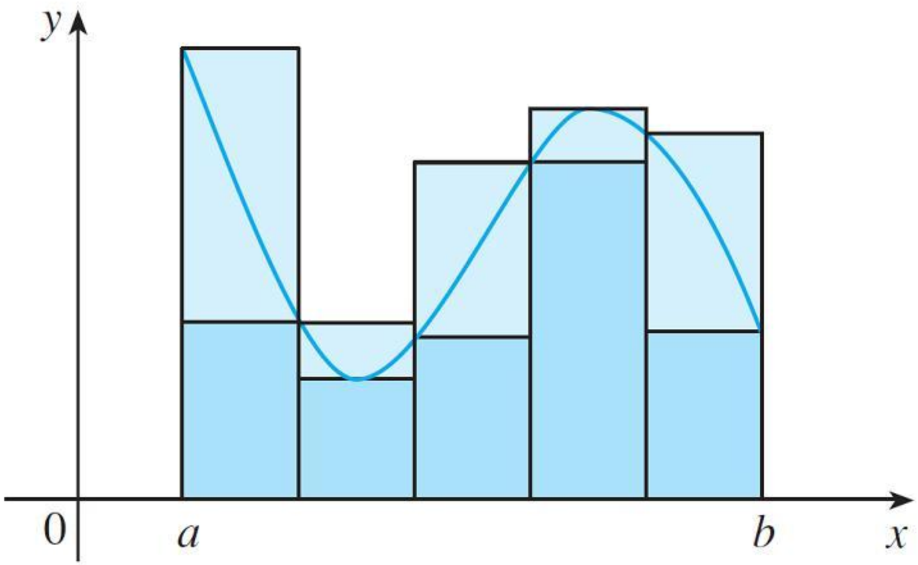


As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 9

O Problema da Área

Em geral formamos as somas **inferiores** (e **superiores**) escolhendo os pontos amostrais x_i^*, de modo que $f(x_i^*)$ é o mínimo (e máximo) valor de *f* no subintervalo *i*-ésimo. (Veja Figura 14.)



Somas inferiores (retângulos pequenos) e somas superiores (retângulos grandes)

Figura 14

O Problema da Área

Frequentemente usamos a **notação de somatória** (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser escritas da seguinte forma:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

O Problema da Área

Também podemos reescrever a Fórmula 1 da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

O Problema da Distância

O Problema da Distância

Vamos considerar um *problema da distância:* encontre a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes. Se a velocidade permanece constante, então o problema da distância é fácil de resover por meio da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil determinar a distância percorrida.

Exemplo 4

Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo (1 km/h = 1.000/3.600 m/s):

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Exemplo 4

continuação

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7{,}5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37{,}5 \text{ m}.$$

Exemplo 4

continuação

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando t = 5 s. Assim, a nossa estimativa para a distância percorrida a partir de *t* = 5 s a *t* = 10 s é

$$9{,}4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m}.$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7{,}5 \times 5) + (9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) = 342 \text{ m}.$$

Exemplo 4

continuação

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no *fim* de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então, nossa estimativa se torna

$$(9{,}5 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) + (12{,}5 \times 5) = 367 \text{ m.}$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

O Problema da Distância

Em geral, suponha que o objeto se move com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leq t \leq b$ e $f(t) \geq 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes t_0 $(= a)$, t_1, t_2,. . ., t_n $(= b)$ de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\ \Delta t$.

O Problema da Distância

Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\,\Delta t$ a distância total percorrida durante o intervalo de tempo [*a*, *b*] é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

O Problema da Distância

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa nossa estimativa, então parece plausível que a distância *exata d* percorrida *é* o *limite* de tais expressões:

$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$