/ /

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom

Substituição Trigonométrica.

A integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ onde $a > 0$ permite calcular a área de um círculo ou de uma elipse.

Se mudarmos a variável x para θ pela substituição $x = a.\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$ a identidade

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$

permitirá que a raiz possa ser eliminada:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2.\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2.\cos^2\theta} = a.|\cos\theta|$$

Obs.:

Se a substituição fosse $\mu = a^2 - x^2 \Rightarrow$ a nova variável μ é uma função da variável anterior x.

Se a substituição for $x = a.\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$ a variável anterior x é função da variável nova θ.

Passo 1: Em geral podemos fazer uma substituição $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário.

Passo 2: Para simplificação dos cálculos, presume-se que g tenha uma função inversa $\Rightarrow g$ é injetora.

Passo 3: Se substituirmos μ por x e x por t na Regra da Substituição teremos:

Regra da Substituição: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(\mu)\, d\mu$.

$$\boxed{\int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int f(x) \cdot dx}$$ = Substituição inversa.

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

Seja $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

$dx = 3\cos\theta\, d\theta$ e

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9.\text{sen}^2\theta} = \sqrt{9.\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta.$

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

$\theta \geq 0 \Leftrightarrow \cos(-\pi/2) = 0{,}9996 \Leftrightarrow \cos(\pi/2) = 0{,}9996$ (positivo)

Regra da Substituição inversa:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3.\cos\theta}{9.\text{sen}^2\theta}\,.\,3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \text{cotg}^2\theta\, d\theta$$

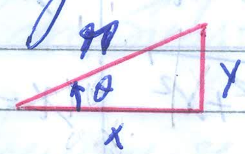
$$= \int (\text{cossec}^2\theta - 1)\,d\theta = \int \text{cossec}^2\theta\, d\theta - \int d\theta$$

$$\int \text{cossec}^2\theta\, d\theta = -\text{cotg}(\theta) + C \qquad \boxed{\frac{d\,\text{cot}\,\theta}{d\theta} = -\text{cosec}^2\theta}$$

$$= -\text{cotg}\,\theta - \theta + C$$

Para retornarmos à variável original x:

$x = 3.\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$



$\text{cotg}\,\theta = \dfrac{x}{Y} = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

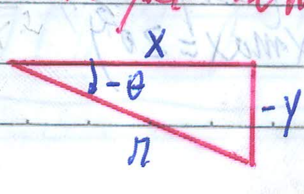
$x = r.\cos\theta$

$\text{cotg}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{x/3} = \dfrac{3\cos\theta}{x}$

$Y = r.\text{sen}\,\theta$

Como $3\cos\theta = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow \text{cotg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Observe que: para termos $-\text{cotg}\,\theta$ a simetria deverá ser considerada.



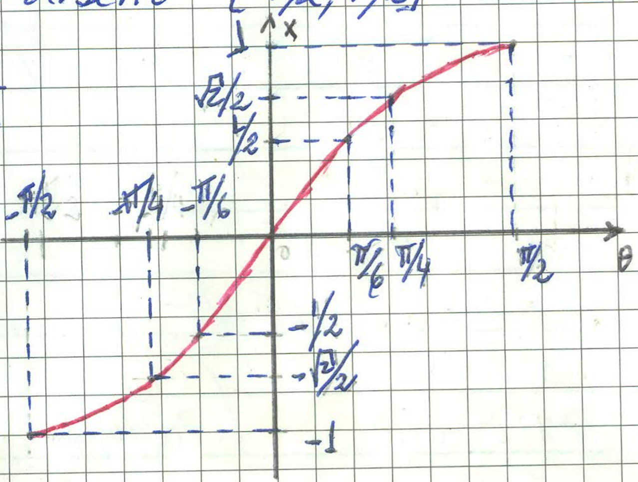
$x = r.\cos(-\theta)$

$Y = r.\text{sen}(-\theta)$

Passo 4: Podemos fazer a substituição inversa $x = a \cdot \text{sen}\,\theta$ desde que essa defina uma função injetora se restringir θ ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$x = a.\text{sen}\,\theta \quad [-\pi/2, \pi/2]$

θ	x
$\pi/2$	-1
$\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$-\pi/6$	$-1/2$
0	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	1



Função Injetora.

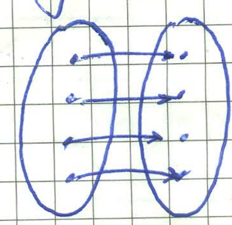


Tabela de substituições trigonométricas eficazes para as expressões radicais dadas em razão de identidades trigonométricas.

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a.\text{sen}\,\theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a.\text{tg}\,\theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \text{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a.\sec\theta$ ou $0 \leq \theta < \pi/2$, $\pi \leq \theta < 3\pi/2$	$\sec^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta$

Exercício:
Utilizar um SAC para fazer os gráficos das injetoras.

```
v = [(tan(x),x) for x in srange(-2*float(pi), 2*float(pi)/2, 0,01)]
show(line(v), xmin=-20, xmax=20)
```

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

$$\cot g(-\theta) = \frac{x}{y} = \frac{\cancel{3}.\cos(-\theta)}{\cancel{3}.\operatorname{sen}(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} \quad \begin{cases} \cos(-\theta) = +\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$\cot g(-\theta) = \frac{\cos\theta}{-x/3} = -\frac{3.\cos\theta}{x} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \quad \text{logo } \theta < 0.$$

e como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{3}$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \theta = -\operatorname{sen}^{-1} x/3$$

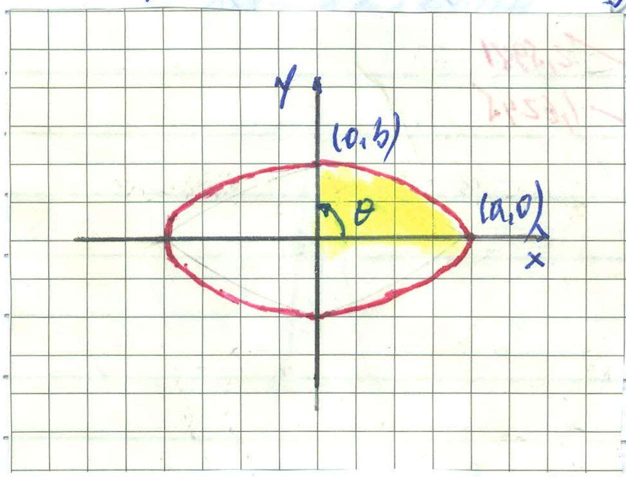
Logo: $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1} x/3 + C}$

derive.

Exemplo 2: Encontre a área delimitada pela elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Explicitando y: $\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$



$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Para a elipse existe simetria em relação aos dois eixos => a área total é 4 vezes a área do primeiro quadrante para um ângulo θ anti-horário.

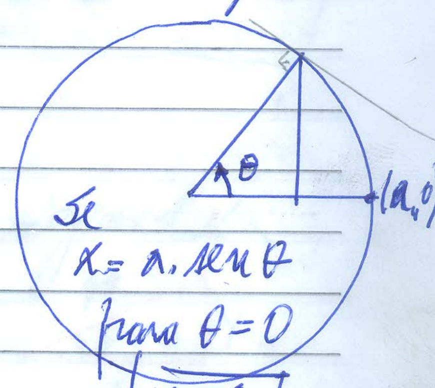
$\theta > 0 \Rightarrow y \geq 0$

Logo:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad c/\ 0 \leq x \leq a$$

Assim:

$$\frac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$



Se $x = a.\text{sen}\,\theta$ para $\theta = 0$ $\boxed{x=a}$

$x = a.\text{sen}\,\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = a.\cos\theta \Leftrightarrow dx = a.\cos\theta.d\theta$

para $\text{sen}\,\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$

E

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2.\text{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2.\cos^2\theta} = a.|\cos\theta| = a.\cos\theta$$

já que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$A = 4.\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a.\cos\theta.\,a.\cos\theta\,d\theta$$

$$A = \frac{4.b.a^2}{a}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}.(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

$$A = 2ab \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = 2ab \cdot \left[\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta\right]$$

$$A = 2ab \cdot \left[\theta \Big|_0^{\pi/2} + \dots\right.$$

$$\int \cos 2\theta \, d\theta \qquad u = 2\theta \qquad \frac{du}{d\theta} = 2 \Rightarrow d\theta = \frac{du}{2}$$

$$\int \cos u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u \, du = \frac{1}{2} \operatorname{sen} u = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$A = 2ab \cdot \left[\theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$A = 2ab \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \cdot 0}_{=0}\right)\right]$$

$$A = \cancel{2}ab \left[\frac{\pi}{\cancel{2}} + \cancel{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi}\right] = \pi \cdot a \cdot b.$$

Encontre a área definida pela elipse pelo ângulo horário.