



PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA - DCET I

LICENCIATURA EM FÍSICA
FI0023 - CÁLCULO II APLICADO À FÍSICA

Integral Calculus of Functions of Several Variables - Definitions

I. INDEFINITE INTEGRALS

1. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = \frac{1}{x}$ de $x=1$ até $x=2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
1. (b) Estime a parte (a) utilizando as extremidades esquerdas.
2. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremidades direitas. Então, aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.
2. (b) Estime a parte (a) usando extremidades esquerdas.
2. (c) Repita a parte (a) usando pontos médios.
2. (d) Determine qual a melhor estimativa das questões (a), (b) ou (c), anteriores.
3. Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 2 + \sin(x) \dots para \dots 0 \leq x \leq \pi$, com $n = 2$, 4 e 8. Ilustre com gráficos.
4. A velocidade de um corredor aumenta regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade em intervalos de meio segundo é dada na Tabela 1 (abaixo). Encontre as estimativas superior e inferior para a distância que ele percorre durante esses três segundos.

Tabela 1. Tempos e velocidades registradas para o corredor.

$t(s)$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$v\left(\frac{m}{s}\right)$	0	1,9	3,3	4,5	5,5	5,9	6,2

5. Óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostradas na Tabela 2 (abaixo). Encontre estimativas superior e inferior para a quantidade total de óleo que vazou.

Tabela 2. Tempos e vazões registradas de vazamento de óleo.

$t(h)$	0	2	4	6	8	10
$r(t)\left(\frac{L}{h}\right)$	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

6. Seja a seguinte definição:

Definição. A área A da região S que está sob um gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$$

6. (a) Achar a partir da definição uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite para as seguintes expressões. Não calcular o limite.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \dots para \dots 1 \leq x \leq 3$$

$$f(x) = \sin(x) \dots para \dots 0 \leq x \leq \pi$$

II. DEFINITE INTEGRALS

7. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x - 1, \dots para \dots -6 \leq x \leq 4$, com cinco sub intervalos, tomando os pontos amostrais como as extremidades à direita. Explique, com a ajuda de um diagrama

o que representa a Soma de Riemann.

8. Se $f(x) = x^2 - 4, \dots para \dots 0 \leq x \leq 3$, calcule a soma de Riemann com $n=6$, tomando como pontos amostrais os pontos médios. Responda o que representa a soma de Riemann ilustrando em um gráfico.

9. Use a Regra do Ponto Médio com o valor de n para aproximar as seguintes integrais. Arredonde cada resposta para quatro casas decimais.

$$\int_0^{\pi} \cos^4(x) dx, \dots n = 4$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin^2(x) dx, \dots n = 4$$

10. Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{x_i}}{1+x_i} \cdot \Delta x, \dots [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \ln(1+x_i^2) \cdot \Delta x, \dots [2, 6]$$

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

J. Stewart. **Cálculo**: volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

G.B. Thomas, R. L. Finney, M. D. Weir, F. R. Giordano. **Cálculo**, Volumes 1 e 2. Editora Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2002.

W. E. Boyce, R. C. Di Prima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Editora LTC, Rio de Janeiro, 1996.

M. Munen, D. Foulis. **Cálculo**, Volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1982.

H. L. Guidorizzi. **Um Curso de Cálculo**, Volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2001.

D. M. Flemming, M. B. Gonçalves. **Cálculo A**: Funções, limites, derivação e integração. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2007.

N. Piskunov. **Cálculo Diferencial e Integral**, Volumes 1 e 2. Editora livraria Lopes da Silva, Porto, 1986.

Colegiado de Licenciatura em Física
Rua Silveira Martins nº 2555 - Cabula
Salvador - BA - 41150-000
Fone / Fax: (71) 3117 2312
E-mail: Invandrade@uneb.br

[Home](#)