9

Aplicações das equações diferenciais de primeira ordem

9.1 – PROBLEMAS DE VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

A lei de variação de temperatura de Newton afirma que *a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.* Seja T a temperatura do corpo e T_m a temperatura do meio ambiente. Então, a taxa de variação da temperatura do corpo é dT/dt, e a lei de Newton relativa à variação de temperatura pode ser formulada como $dT/dt = -k(T - T_m)$, ou como

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m \tag{9.1}$$

onde k é uma constante positiva de proporcionalidade (v. Problemas 9.1 a 9.3). Escolhendo-se para k um valor positivo, torna-se necessário o sinal negativo na lei de Newton a fim de tornar dT/dt negativa em um processo de resfriamento. Note-se que, em tal processo, T é maior do que T_m; assim, $T - T_m$ é positiva.

9.2 – PROBLEMAS DE CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

Seja $N(t)$ a quantidade de substância (ou população) sujeita a um processo de crescimento ou de decrescimento. Se admitirmos que dN/dt, taxa de variação da quantidade de substância, é proporcional à quantidade de substância presente, então $dN/dt = kN$, ou

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \tag{9.2}$$

onde k é a constante de proporcionalidade (v. Problemas 9.4 a 9.6).

Estamos admitindo que $N(t)$ seja uma função diferenciável — logo contínua do tempo. Em problemas de população, onde $N(t)$ é, na realidade, discreta, tal hipótese não é correta. Não obstante, ainda assim (9.2) dá uma boa aproximação das leis físicas que regem tais sistemas (v. Problema 9.6).

9.3 – QUEDA DOS CORPOS COM RESISTÊNCIA DO AR

Consideremos um corpo de massa m em queda vertical influenciada apenas pela gravidade g e pela resistência do ar proporcional à velocidade do corpo. Admitamos que tanto a gravidade como a massa permaneçam constantes e, por conveniência, escolhamos o sentido "para baixo" como sentido positivo.

Segunda Lei de Newton do Movimento: A força resultante que atua sobre um corpo é igual à taxa de variação da quantidade de movimento (momentum) do corpo; ou, para uma massa constante.

$$F = m \frac{dv}{dt} \tag{9.3}$$

onde F é a força resultante que atua sobre o corpo e v é a velocidade do corpo, ambas consideradas no instante t.

No problema em foco, há duas forças atuando sobre o corpo: (1) a força devida à gravidade, dada pelo peso do corpo w, e que é igual a mg; e (2) a força devida à resistência do ar, dada por $-kv$, onde $k \geqslant 0$ é uma constante de proporcionalidade. O sinal negativo se torna necessário porque esta força se opõe à velocidade; isto é, atua no sentido "para cima", ou seja, no sentido negativo (v. fig. 9-1). A força resultante é, pois, $F = mg - kv$. Levando este resultado em (9.3) obtemos $mg - kv = m \dfrac{dv}{dt}$, ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \tag{9.4}$$

como equação do movimento do corpo.

Se a resistência do ar é desprezível, ou não-existente, então $k = 0$ e (9.4) se simplifica para

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{9.5}$$

(V. Problema 9.7). Quando $k > 0$, a velocidade limite v_l é definida por

$$v_l = \frac{mg}{k}. \tag{9.6}$$

Atenção: As equações (9.4) e (9.6) são válidas somente se as condições dadas forem satisfeitas. Tais equações não são válidas, por exemplo, se a resistência do ar não é proporcional à velocidade, e sim ao quadrado da velocidade, ou se se considera como positivo o sentido "para cima" (v. Problemas 9.9 e 9.10).

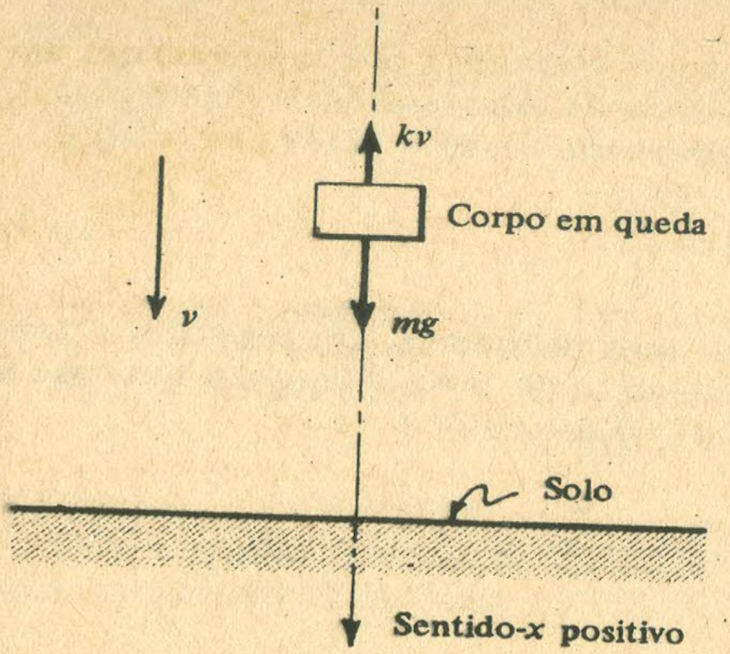

Fig. 9-1

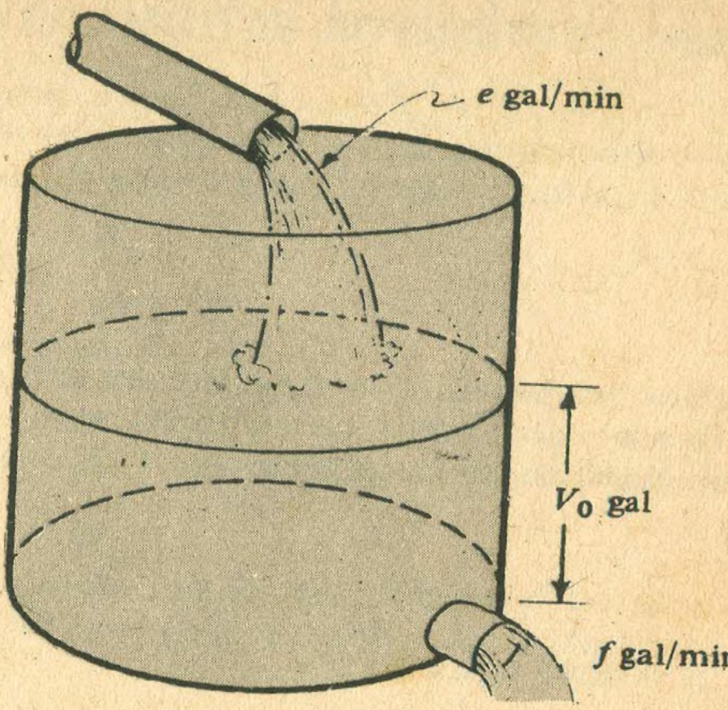

Fig. 9-2

9.4 — PROBLEMAS DE DILUIÇÃO

Consideremos um tanque com uma quantidade inicial de V_0 galões de salmoura que contém a libras de sal. Despeja-se no tanque uma outra solução de salmoura com b libras de sal por galão, à razão de e gal/min, enquanto, simultaneamente, a solução resultante, bem misturada, se escoa do tanque à razão de f gal/min (fig. 9-2). O problema consiste em determinar a quantidade de sal presente no tanque no instante t.

Seja Q a quantidade de sal (em libras) presente no tanque em um instante qualquer. A taxa de variação de Q, dQ/dt, é igual à taxa à qual o sal entra no tanque, menos a taxa à qual o sal se escoa do tanque. Ora, o sal entra no tanque à taxa de be lb/min. Para determinar a taxa de saída do sal, devemos primeiro calcular o volume de salmoura presente no tanque no instante t, que é o volume inicial V_0 mais o volume adicionado et, menos o volume escoado, ft. Assim, o volume de salmoura no instante t é

$$V_0 + et - ft \tag{9.7}$$

A concentração de sal no tanque, em um instante qualquer, é dada por $Q/(V_0 + et - ft)$, donde se infere que o sal sai do tanque à taxa de

$$f[Q/(V_0 + et - ft)] \text{ lb/min.}$$

Assim,

$$dQ/dt = be - f[Q/(V_0 + et - ft) \text{ ou}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + (e - f)t} Q = be \tag{9.8}$$

(V. Problemas 9.11-9.13).

9.5 – CIRCUITOS ELÉTRICOS

A equação básica que rege a quantidade de corrente I (em ampères) em um circuito simples do tipo RL (fig. 9-3) consistindo de uma resistência R (em ohms), um indutor L (em henries) e uma força eletromotriz (fem) E (dada em volts) é

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \tag{9.9}$$

Para um circuito do tipo RC consistindo de uma resistência, um capacitor C (em farads), uma força eletromotriz, e sem indutância (fig. 9-4), a equação que rege a quantidade de carga elétrica q (em coulombs) no capacitor é

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R} \tag{9.10}$$

A relação entre q e I é

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{9.11}$$

(V. Problemas 9.14-9.17). Para circuitos mais complexos, v cap. 17.)

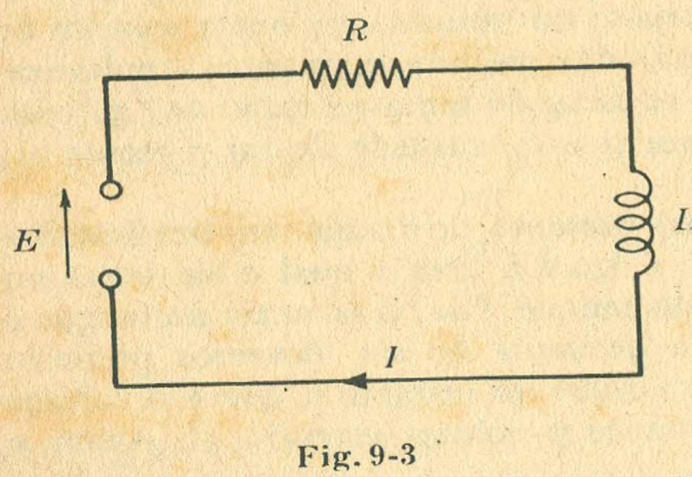

Fig. 9-3

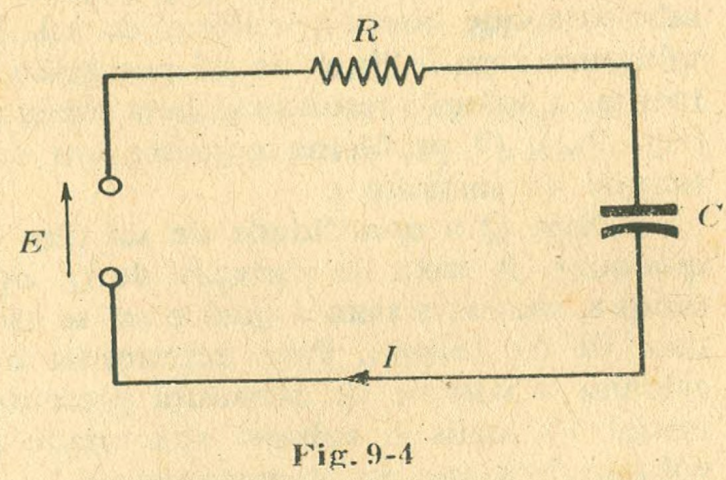

Fig. 9-4

9.6 – TRAJETÓRIAS ORTOGONAIS

Consideremos uma família de curvas a um parâmetro no plano xy definida por

$$F(x, y, c) = 0 \tag{9.12}$$

onde c é o parâmetro. O problema consiste em achar outra família de curvas, chamadas *trajetórias ortogonais* da família (9.12), e dada analiticamente por

$$G(x, y, k) = 0 \tag{9.13}$$

tais que cada curva da família (9.13) intercepta ortogonalmente cada curva da família original (9.12).

Primeiro derivamos implicitamente (9.12) em relação a x; em seguida, eliminamos c entre esta equação derivada e a equação (9.12). Obtemos uma equação entre x, y e y', que resolvemos em relação a y', chegando a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{9.14}$$

As trajetórias ortogonais de (9.12) são as soluções de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \tag{9.15}$$

(V. Problemas 9.18-9.20).

Para muitas famílias de curvas não é possível explicitar y' para obter uma equação diferencial da forma (9.14). Tais casos não serão considerados neste livro.

Problemas Resolvidos

9.1 Coloca-se uma barra de metal, à temperatura de 100°F em um quarto com temperatura constante de 0°F. Se, após 20 minutos a temperatura da barra é de 50°F, determine (*a*) o tempo necessário para a barra chegar à temperatura de 25°F e (*b*) a temperatura da barra após 10 minutos.

Aplicando (9.1) com $T_m = 0$. O meio aqui é o quarto mantido à temperatura constante de 0°F. Temos assim $\frac{dT}{dt} + kT = 0$, uma equação linear cuja solução é (v. cap. 8)

$$T = ce^{-kt} \tag{1}$$

Como $T = 100$ quando $t = 0$ (a temperatura inicial da barra é 100°F), segue-se de (1) que $100 = ce^{-k(0)}$ ou $100 = c$. Levando este valor em (1), obtemos

$$T = 100e^{-kt} \tag{2}$$

Para $t = 20$, sabemos que $T = 50$; logo, de (2),

$$50 = 100e^{-20k} \quad \text{donde} \quad k = \frac{-1}{20} \ln \frac{50}{100} = \frac{-1}{20}(-0{,}693) = 0{,}035$$

Levando este valor em (2), obtemos a temperatura da barra no tempo arbitrário t:

$$T = 100e^{-0{,}035t} \tag{3}$$

(*a*) Desejamos determinar t quanto $T = 25$. Fazendo $T = 25$ em (3) temos

$$25 = 100e^{-0{,}035t} \quad \text{ou} \quad -0.035t = \ln \frac{1}{4}$$

Resolvendo, obtemos $t = 39{,}6$ min.

(*b*) Desejamos T quanto $t = 10$. Fazendo $t = 10$ em (3) e resolvendo em relação a T, obtemos

$$T = 100e^{(-0{,}035)(10)} = 100(0{,}705) = 70{,}5°\text{F}$$

Devemos notar que, como a Lei de Newton é válida apenas para pequenas diferenças de temperatura, os cálculos acima representam apenas uma primeira aproximação da situação física.

9.2 Um corpo à temperatura inicial de 50°F é colocado ao ar livre, onde a temperatura ambiente é de 100°F. Se após 5 minutos a temperatura do corpo é de 60°F, determine (*a*) o tempo necessário para a temperatura do corpo atingir 75°F e (*b*) a temperatura do corpo após 20 minutos.

Aplicando (9.1) com $T_m = 100$ (o meio ambiente é o ar livre) temos $\frac{dT}{dt} + kT = 100k$. Esta equação diferencial é linear, e sua solução é (v. cap. 8).

$$T = ce^{-kt} + 100 \tag{1}$$

Como $T = 50$ quando $t = 0$, decorre de (1) que $50 = ce^{-k(0)} + 100$, ou $c = -50$. Levando este valor em (1), obtemos

$$T = -50e^{-kt} + 100. \tag{2}$$

Em $t = 5$, sabemos que $T = 60$; logo, de (2), $60 = -50e^{-5k} + 100$. Resolvendo em relação a k, obtemos

$$-40 = -50e^{-5k} \quad \text{ou} \quad k = \frac{-1}{5}\ln\frac{40}{50} = \frac{-1}{5}(-0{,}223) = 0{,}045$$

Levando este valor em (2), obtemos a temperatura do corpo no instante t:

$$T = -50e^{-0{,}045t} + 100 \tag{3}$$

(*a*) Desejamos t, quando $T = 75$. Fazendo $T = 75$ em (3), temos

$$75 = -50e^{-0{,}045t} + 100 \quad \text{ou} \quad e^{-0{,}045t} = \frac{1}{2}$$

Resolvendo em relação a t:

$$-0{,}045t = \ln\frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad t = 15{,}4 \text{ min}$$

(*b*) Desejamos T quando $t = 20$. Fazendo $t = 20$ em (3) e resolvendo em relação a T, encontramos

$$T = -50e^{(-0{,}045)(20)} + 100 = -50(0{,}41) + 100 = 79{,}5°\text{F}$$

9.3 Coloca-se um corpo com temperatura desconhecida em um quarto mantido à temperatura constante de 30°F. Se, após 10 minutos, a temperatura do corpo é 0°F e após 20 minutos é 15°F, determine a temperatura inicial desconhecida.

De (9.1), $\frac{dT}{dt} + kT = 30k$. Resolvendo, obtemos

$$T = ce^{-kt} + 30 \tag{1}$$

Quando $t = 10$, sabemos que $T = 0$. Logo, de (1),

$$0 = ce^{-10k} + 30 \quad \text{ou} \quad ce^{-10k} = -30 \tag{2}$$

Quando $t = 20$, sabemos que $T = 15$. Logo, de (1) novamente,

$$15 = ce^{-20k} + 30 \quad \text{ou} \quad ce^{-20k} = -15 \tag{3}$$

Resolvendo (2) e (3) em relação a k e a c, encontramos

$$k = \frac{1}{10} \ln 2 = 0{,}069 \quad \text{e} \quad c = -30e^{10k} = -30(2) = -60$$

Levando esses valores em (1), temos que a temperatura do corpo no instante t é

$$T = -60e^{-0{,}069t} + 30 \tag{4}$$

Como desejamos T no tempo inicial $t = 0$, segue-se de (4) que

$$T = -60e^{(-0{,}069)(0)} + 30 = -60 + 30 = -30°\text{F}$$

9.4 Sabe-se que certa substância radioativa diminui a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se, inicialmente, a quantidade de material é 50 miligramas, e se se observa que, após duas horas, perderam-se 10% da massa original, determine (*a*) a expressão para a massa de substância restante em um tempo arbitrário t, (*b*) a massa restante após 4 horas, e (*c*) o tempo necessário para que a massa inicial fique reduzida à metade.

(*a*) Seja N a quantidade de substância presente no instante t. Então, de (9.2), $\frac{dN}{dt} - kN = 0$. Esta equação diferencial é linear; sua solução é

$$N = ce^{kt} \tag{1}$$

Quando $t = 0$, sabemos que $N = 50$. Portanto, de (1), $50 = ce^{k(0)}$, ou $c = 50$. Assim,

$$N = 50e^{kt} \tag{2}$$

Quando $t = 2$, já se perderam 10%, ou seja, 5 mg da massa inicial de 50 mg. Logo, quando $t = 2$, $N = 50 - 5 = 45$. Levando esses valores em (2) e resolvendo em relação a k, temos

$$45 = 50e^{2k} \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{2} \ln \frac{45}{50} = -0{,}053$$

Levando este valor em (2), obtemos a quantidade de substância presente no tempo arbitrário t:

$$N = 50e^{-0{,}053t} \tag{3}$$

onde t é medido em horas.

(*b*) Desejamos N quando $t = 4$. Fazendo $t = 4$ em (3) e resolvendo em relação a N, encontramos

$$N = 50e^{(-0,053)(4)} = 50(0,809) = 40,5 \text{ mg}$$

(*c*) Desejamos t quando $N = 50/2 = 25$. Fazendo $N = 25$ em (3) e resolvendo em relação a t, vem

$$25 = 50e^{-0,053t} \quad \text{ou} \quad -0,053t = \ln \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad t = 13 \text{ horas}$$

O tempo necessário para reduzir uma substância sujeita a decréscimo à metade da quantidade original é chamada *meia-vida* (*half-life*) da substância, que, no caso presente, é de 13 horas.

9.5 Sabe-se que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Após 1 hora, observam-se 1000 núcleos de bactérias na cultura, e após 4 horas, 3000 núcleos. Determine (*a*) uma expressão para o número de núcleos presentes na cultura no tempo arbitrário t e (*b*) o número de núcleos inicialmente existentes na cultura.

(*a*) de (9.2), $\dfrac{dN}{dt} - kN = 0$. A solução desta equação diferencial é

$$N = ce^{kt} \tag{1}$$

Quando $t = 1$, $N = 1000$; logo,

$$1000 = ce^{k} \tag{2}$$

Quando $t = 4$, $N = 3000$; logo,

$$3000 = ce^{4k} \tag{3}$$

Resolvendo (2) e (3) em relação a k e c, obtemos

$$k = \frac{1}{3} \ln 3 = 0,366 \quad \text{e} \quad c = 1000e^{-0,366} = 694$$

Levando esses valores de k e c em (1), encontramos

$$N = 694e^{0,366t} \tag{4}$$

como expressão da quantidade de núcleos presentes no tempo arbitrário t.

(*b*) Queremos N quando $t = 0$. Fazendo $t = 0$ em (4), obtemos $N = 694e^{(0,366)(0)} = 694$.

9.6 Sabe-se que a população de determinado Estado cresce a uma taxa proporcional ao número de habitantes existentes. Se após dois anos a população é o dobro da inicial, e após três anos é de 20.000 habitantes, determine a população inicial.

(*a*) Seja N a população no instante t, e N_0 a população inicial. Então, por (9.2), $\dfrac{dN}{dt} - kN = 0$, equação diferencial cuja solução é

$$N = ce^{kt} \tag{1}$$

Quando $t = 0$, $N = N_0$; logo, de (1), decorre que $N_0 = ce^{k(0)}$, ou $c = N_0$. Assim,

$$N = N_0 e^{kt} \tag{2}$$

Quando $t = 2$, $N = 2N_0$. Levando esses valores em (2), temos

$$2N_0 = N_0 e^{2k} \qquad \text{donde} \qquad k = \frac{1}{2} \ln 2 = 0{,}347$$

Levando este valor em (2) vem

$$N = N_0 e^{0{,}347t} \tag{3}$$

Quando $t = 3$, $N = 20.000$. Levando esses valores em (3), obtemos

$$20.000 = N_0 e^{(0{,}347)(3)} = N_0 (2{,}832) \qquad \text{ou} \qquad N_0 = 7062$$

9.7 Deixa-se cair um corpo de massa de 5 "slugs" de uma altura de 100 pés, com velocidade inicial zero. Supondo que não haja resistência do ar, determine (*a*) a expressão da velocidade do corpo no instante t (*b*) a expressão da posição do corpo no instante t, e (*c*) o tempo necessário para o corpo atingir o solo.

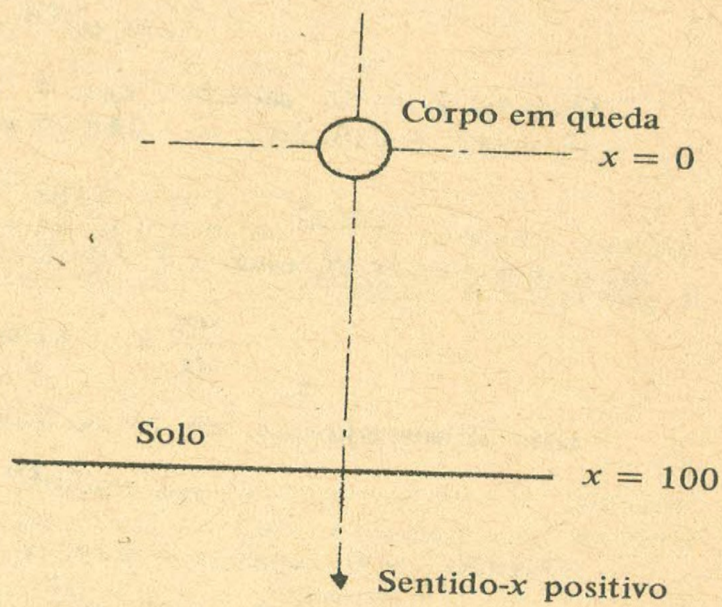

Fig. 9-5

(*a*) Escolhamos o sistema coordenado como na fig. 9-5. Então, como não há resistência do ar, $\dfrac{dv}{dt} = g$. Esta equação diferencial é linear ou, sob forma diferencial, separável; sua solução é $v = gt + c$. Quando $t = 0$, $v = 0$, pois a velocidade inicial é zero; logo, $0 = g(0) + c$, ou $c = 0$. Assim, $v = gt$ ou, supondo $g = 32$ pés/s²,

$$v = 32t \tag{1}$$

(*b*) Lembrando que a velocidade é a taxa de variação do deslocamento, designado aqui por x, temos $v = dx/dt$, e (1) fica $\dfrac{dx}{dt} = 32t$. Esta equação diferencial é também linear e separável, e sua solução é

$$x = 16t^2 + c_1 \tag{2}$$

Mas quando $t = 0$, $x = 0$ (v. fig. 9-5). Assim, $0 = (16)(0)^2 + c_1$, ou $c_1 = 0$. Levando este valor em (2), temos

$$x = 16t^2 \tag{3}$$

(*c*) Desejamos t quando $x = 100$. De (3),

$$t = \sqrt{(100)/(16)} = 2{,}5 \text{ seg.}$$

9.8 Deixa-se cair um corpo com 64 lb de peso de uma altura de 100 pés, com velocidade inicial de 10 pés/s. Supondo a resistência do ar proporcional à velocidade do corpo, e sabendo-se que a velocidade limite é de 128 pés/s, determine (*a*) uma expressão para a velocidade do corpo no instante t e (*b*) uma expressão para a posição do corpo no instante t.

(*a*) Sistema de coordenadas como na fig. 9-5. Aqui é $w = 64$ lb. Como $w = mg$, segue-se que $mg = 64$, ou $m = 2$ slugs. Dado que $v_l = 128$ pés/s, decorre de (9.6) que $128 = 64/k$, ou $k = \frac{1}{2}$. Levando esses valores em (9.4), obtemos a equação diferencial linear

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4}v = 32$$

cuja solução é

$$v = ce^{-t/4} + 128 \tag{1}$$

Quando $t = 0$, sabemos que $v = 10$. Levando esses valores em (1), vem $10 = ce^0 + 128$, ou $c = -118$. A velocidade no instante t é dada por

$$v = -118e^{-t/4} + 128 \tag{2}$$

(*b*) Como $v = dx/dt$, onde x é o deslocamento, (2) pode-se escrever como

$$\frac{dx}{dt} = -118e^{-t/4} + 128$$

Esta última equação, sob forma diferencial, é separável; sua solução é

$$x = 472e^{-t/4} + 128t + c_1 \tag{3}$$

Quando $t = 0$, temos $x = 0$ (v. fig. 9-5). Assim, (3) dá

$$0 = 472e^0 + (128)(0) + c_1 \quad \text{ou} \quad c_1 = -472$$

O deslocamento no instante t é então dado por

$$x = 472e^{-t/4} + 128t - 472$$

9.9 Lança-se um corpo de massa m verticalmente para cima, com velocidade inicial v_0. Se a resistência do ar é proporcional à velocidade, determine (*a*) a equação do movimento no sistema de coordenadas da fig. 9-6, (*b*) uma expressão para a velocidade do corpo no instante t, e (*c*) o instante em que o corpo atinge a altura máxima.

(*a*) No sistema de coordenadas escolhido, (9.4) não pode ser a equação do movimento. Para estabelecer a equação adequada, notemos que duas forças atuam sobre o corpo: (1) a força da gravidade, dada por mg e (2) a força devida à resistência do ar, dada por kv, que se opõe à velocidade do corpo. Como ambas essas forças atuam "para baixo", ou no sentido negativo, a força resultante que atua sobre o corpo é $-mg - kv$. Aplicando (9.3), obtemos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \tag{1}$$

como equação do movimento.

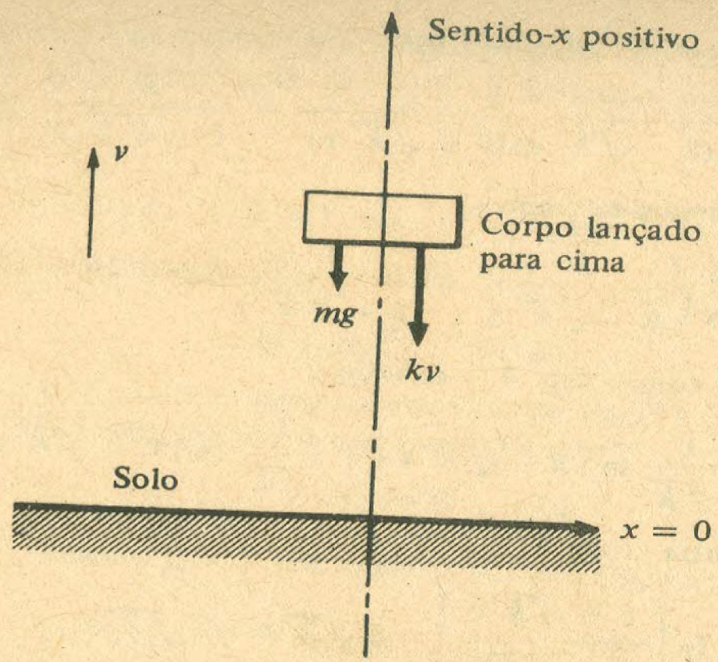

Fig. 9-6

(*b*) A equação (1) é linear, e sua solução é $v = ce^{-(k/m)t} - mg/k$. Quando $t = 0$, $v = v_0$; logo, $v_0 = ce^{-(k/m)0} - (mg/k)$, ou $c = v_0 + (mg/k)$. A velocidade do corpo no instante t é dada por

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-(k/m)t} - \frac{mg}{k} \tag{2}$$

(*c*) O corpo atinge a altura máxima em sua trajetória quando $v = 0$. Devemos, pois, determinar t quando $v = 0$. Fazendo $v = 0$ em (2) e resolvendo em relação a t, vem

$$0 = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-(k/m)t} - \frac{mg}{k}, \qquad e^{-(k/m)t} = \frac{1}{1 + \dfrac{v_0 k}{mg}},$$

$$-(k/m)t = \ln\left(\frac{1}{1 + \dfrac{v_0 k}{mg}}\right), \qquad t = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right)$$

9.10 Um corpo de 2 "slugs" de massa é solto no espaço sem velocidade inicial, e encontra uma resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade de queda. Determine a expressão da velocidade no instante t.

A força devida à resistência do ar é $-kv^2$, de forma que a segunda lei de Newton fica

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \text{ou} \quad 2\frac{dv}{dt} = 64 - kv^2$$

Escrevendo esta equação sob forma diferencial, temos

$$\frac{2}{64 - kv^2}\,dv - dt = 0 \tag{1}$$

que é separável. Pelo método das frações parciais,

$$\frac{2}{64 - kv^2} = \frac{2}{(8 - \sqrt{k}\ v)(8 + \sqrt{k}\ v)} = \frac{\frac{1}{8}}{8 - \sqrt{k}\ v} + \frac{\frac{1}{8}}{8 + \sqrt{k}\ v}$$

logo, (1) pode escrever-se como

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8 - \sqrt{k}\ v} + \frac{1}{8 + \sqrt{k}\ v}\right) dv - dt = 0$$

De acordo com o cap. 4, a solução é

$$\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{\sqrt{k}} \ln|8 - \sqrt{k}\ v| + \frac{1}{\sqrt{k}} \ln|8 + \sqrt{k}\ v|\right] - t = c$$

que pode ser escrita como

$$\ln\left|\frac{8 + \sqrt{k}\ v}{8 - \sqrt{k}\ v}\right| = 8\sqrt{k}\ t + 8\sqrt{k}\ c$$

ou

$$\frac{8 + \sqrt{k}\ v}{8 - \sqrt{k}\ v} = c_1 e^{8\sqrt{k}\ t} \qquad (c_1 = \pm e^{8\sqrt{k}\ c})$$

Quando $t = 0$, sabemos que $v = 0$. Isto acarreta $c_1 = 1$, e a velocidade é dada por

$$\frac{8 + \sqrt{k}\ v}{8 - \sqrt{k}\ v} = e^{8\sqrt{k}\ t} \quad \text{ou} \quad v = \frac{8}{\sqrt{k}} \operatorname{tg h} 4\sqrt{k}.t$$

Note-se que, para a determinação numérica da constante k, necessitamos de informações adicionais.

9.11 Um tanque contém inicialmente 100 galões de salmoura com 20 lbs de sal. No instante $t = 0$, começa-se a deitar no tanque água pura à razão de 5 gal/min, enquanto a mistura resultante se escoa do tanque à mesma taxa. Determine a quantidade de sal no tanque no instante t

Aqui, $V_0 = 100$, $a = 20$, $b = 0$, e $e = f = 5$. A equação (9.8) se escreve

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{20} Q = 0.$$

A solução desta equação é

$$Q = ce^{-t/20} \tag{1}$$

Quando $t = 0$, sabemos que $Q = a = 20$. Levando esses valores em (1), encontramos $c = 20$, de modo que (1) pode ser escrita como $Q = 20e^{-t/20}$.

Note-se que quando $t \to \infty$, $Q \to 0$ como era de se esperar, pois só se adiciona água pura no tanque.

9.12 Um tanque contém inicialmente 100 galões de salmoura com 1 lb de sal. No instante $t = 0$, adiciona-se outra solução de salmoura com 1 lb de sal por galão, à razão de 3 gal/min, enquanto a mistura resultante se escoa do tanque à mesma taxa. Determine (*a*) a quantidade de sal presente no tanque no instante t e (*b*) o instante em que a mistura restante no tanque conterá 2 lbs de sal.

(*a*) Aqui, $V_0 = 100$, $a = 1$, $b = 1$, e $e = f = 3$; logo, (9.8) fica $\frac{dQ}{dt} + 0{,}03Q = 3$. A solução desta equação diferencial linear é

$$Q = ce^{-0{,}03t} + 100 \tag{1}$$

Quando $t = 0$, $Q = a = 1$. Levando esses valores em (1), encontramos $1 = ce^0 + 100$, ou $c = -99$. Então, podemos escrever (1) como

$$Q = -99e^{-0{,}03t} + 100 \tag{2}$$

(*b*) Desejamos t quando $Q = 2$. Fazendo $Q = 2$ em (2), obtemos

$$2 = -99e^{-0{,}03t} + 100 \quad \text{ou} \quad e^{-0{,}03t} = \frac{98}{99}$$

donde

$$t = -\frac{1}{0{,}03} \ln \frac{98}{99} = 0{,}338 \text{ min}$$

9.13 Um tanque de 50 galões de capacidade contém inicialmente 10 galões de água fresca. Quando $t = 0$, adiciona-se ao tanque uma solução de salmoura com 1 lb de sal por galão, à razão de 4 gal/min., enquanto que a mistura se escoa à razão de 2 gal/min. Determine (*a*) o tempo necessário para que ocorra o transbordamento e (*b*) a quantidade de sal presente no tanque por ocasião do transbordamento.

(*a*) Aqui $a = 0$, $b = 1$, $e = 4$, $f = 2$ e $V_0 = 10$. O volume de salmoura no tanque no instante t é dado por (9.7) como $V_0 + et - ft = 10 + 2t$. Desejamos t quando $10 + 2t = 50$; logo, $t = 20$ min.,

(*b*) Para este problema, (9.8) é

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{10 + 2t} Q = 4$$

É uma equação linear cuja solução (v. cap. 8 com $p(t) = 2/(10 + 2t)$ e $q(t) = 4$) pode ser escrita

$$Q = \frac{40t + 4t^2 + c}{10 + 2t} \tag{1}$$

Quando $t = 0$, $Q = a = 0$. Levando esses valores em (1), encontramos $c = 0$. Deseja-se Q no momento do transbordamento, isto é, quando $t = 20$ (cf. parte (a)). Então,

$$Q = \frac{40(20) + 4(20)^2}{10 + 2(20)} = 48 \text{ lb}$$

9.14 Um circuito RL tem fem de 5 volts, resistência de 50 ohms e indutância de 1 henry. A corrente inicial é zero. Determine a corrente no circuito no instante t.

Aqui $E = 5$, $R = 50$, e $L = 1$; logo (9.9) fica $\frac{dI}{dt} + 50I = 5$. Esta equação é linear; sua solução é

$$I = ce^{-50t} + \frac{1}{10}$$

Quando $t = I = 0$; assim, $0 = ce^{-50(0)} + \frac{1}{10}$, ou $c = -\frac{1}{10}$. A corrente no instante t é, então,

$$I = -\frac{1}{10}e^{-50t} + \frac{1}{10}.$$

A quantidade $-\frac{1}{10}e^{-50t}$ em (1) é chamada *corrente transitória*, pois tende a zero (se desvanece) quando $t \to \infty$. A quantidade $\frac{1}{10}$ em (1) é chamada *corrente estacionária*. Quando $t \to \infty$, a corrente I tende para a corrente estacionária.

9.15 Um circuito RL tem fem (em volts) dada por 3 sen $2t$, resistência de 10 ohms, indutância de 0,5 henry e corrente inicial de 6 ampères. Determine a corrente no circuito no instante t.

Aqui, $E = 3$ sen $2t$, $R = 10$, e $L = 0{,}5$; logo (9.9) fica $\frac{dI}{dt} + 20I = 6$ sen $2t$. Esta equação é linear, e sua solução (v. cap. 8) é $\int d(Ie^{20t}) = \int 6e^{20t} \text{ sen } 2t\, dt$. Efetuando a integração (a segunda integral exige integração por partes duas vezes), obtemos

$$I = ce^{-20t} + \frac{30}{101} \text{ sen } 2t - \frac{3}{101} \cos 2t$$

Quando $t = 0$, $I = 6$; logo,

$$6 = ce^{-20(0)} + \frac{30}{101} \text{ sen } 2(0) - \frac{3}{101} \cos 2(0) \quad \text{ou} \quad 6 = c - \frac{3}{101}$$

donde $c = \frac{609}{101}$. A corrente no instante t é

$$I = \frac{609}{101}e^{-20t} + \frac{30}{101} \text{ sen } 2t - \frac{3}{101} \cos 2t$$

Tal como no Problema 9.14, a corrente é a soma de uma corrente transitória, $\frac{609}{101}e^{-20t}$, e de uma corrente estacionária $\frac{30}{101}$ sen $2t - \frac{3}{101} \cos 2t$.

9.16 Escreva a equação da corrente estacionária do Problema 9.15 na forma A sen $(2t - \phi)$. O ângulo ϕ é chamado *ângulo de fase*.

Como $A \text{ sen } (2t - \phi) = A(\text{sen } 2t \cos \phi - \cos 2t \text{ sen } \phi)$, devemos ter

$$I_s = \frac{30}{101} \text{ sen } 2t - \frac{3}{101} \cos 2t = A \cos \phi \text{ sen } 2t - A \text{ sen } \phi \cos 2t$$

Assim, $A\cos\phi = \dfrac{30}{101}$ e $A\,\text{sen}\,\phi = \dfrac{3}{101}$. Segue-se agora que

$$\left(\frac{30}{101}\right)^2 + \left(\frac{3}{101}\right)^2 = A^2\cos^2\phi + A^2\,\text{sen}^2\phi = A^2(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi) = A^2$$

e

$$\text{tg}\,\phi = \frac{A\,\text{sen}\,\phi}{A\cos\phi} = \left(\frac{3}{101}\right)\Big/\left(\frac{30}{101}\right) = \frac{1}{10}$$

Portanto, I_S tem a forma desejada se

$$A = \sqrt{\frac{909}{(101)^2}} = \frac{3}{\sqrt{101}} \quad \text{e} \quad \phi = \text{arc tg}\,\frac{1}{10}$$

9.17 Um circuito RC tem fem (em volts) dada por $400\cos 2t$, resistência de 100 ohms, e capacitância de 10^{-2} farad. Inicialmente, não existe carga no capacitor. Determine a corrente no circuito no instante t.

Primeiro determinamos a carga q e em seguida aplicamos (9.11) para obter a corrente. Aqui, $E = 400\cos 2t$, $R = 100$, e $C = 10^{-2}$; logo, (9.10) se escreve $\dfrac{dq}{dt} + q = 4\cos 2t$. Esta equação é linear e sua solução é

$$q = ce^{-t} + \frac{8}{5}\,\text{sen}\,2t + \frac{4}{5}\cos 2t$$

Quando $t = 0$, $q = 0$; logo, $0 = ce^{-(0)} + \dfrac{8}{5}\,\text{sen}\,2(0) + \dfrac{4}{5}\cos 2(0)$ ou $c = -\dfrac{4}{5}$

Assim,

$$q = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{8}{5}\,\text{sen}\,2t + \frac{4}{5}\cos 2t$$

e aplicando (9.11), obtemos

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{4}{5}e^{-t} + \frac{16}{5}\cos 2t - \frac{8}{5}\,\text{sen}\,2t$$

9.18 Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 + y^2 = c^2$.

A família, que é dada por (9.12) com $F(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2$, consiste de círculos centrados na origem e de raios c. Derivando implicitamente a equação dada em relação a x, obtemos

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aqui, $f(x, y) = -x/y$, de modo que (9.15) fica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Esta equação é linear (e, sob forma diferencial, separável); sua solução é

$$y = kx \tag{1}$$

que representa as trajetórias ortogonais.

A fig. 9-7 ilustra alguns elementos da família de círculos em linhas cheias, e, em linhas tracejadas, alguns elementos da família (1) que consiste de retas pela origem. Observe que cada reta intercepta cada círculo ortogonalmente.

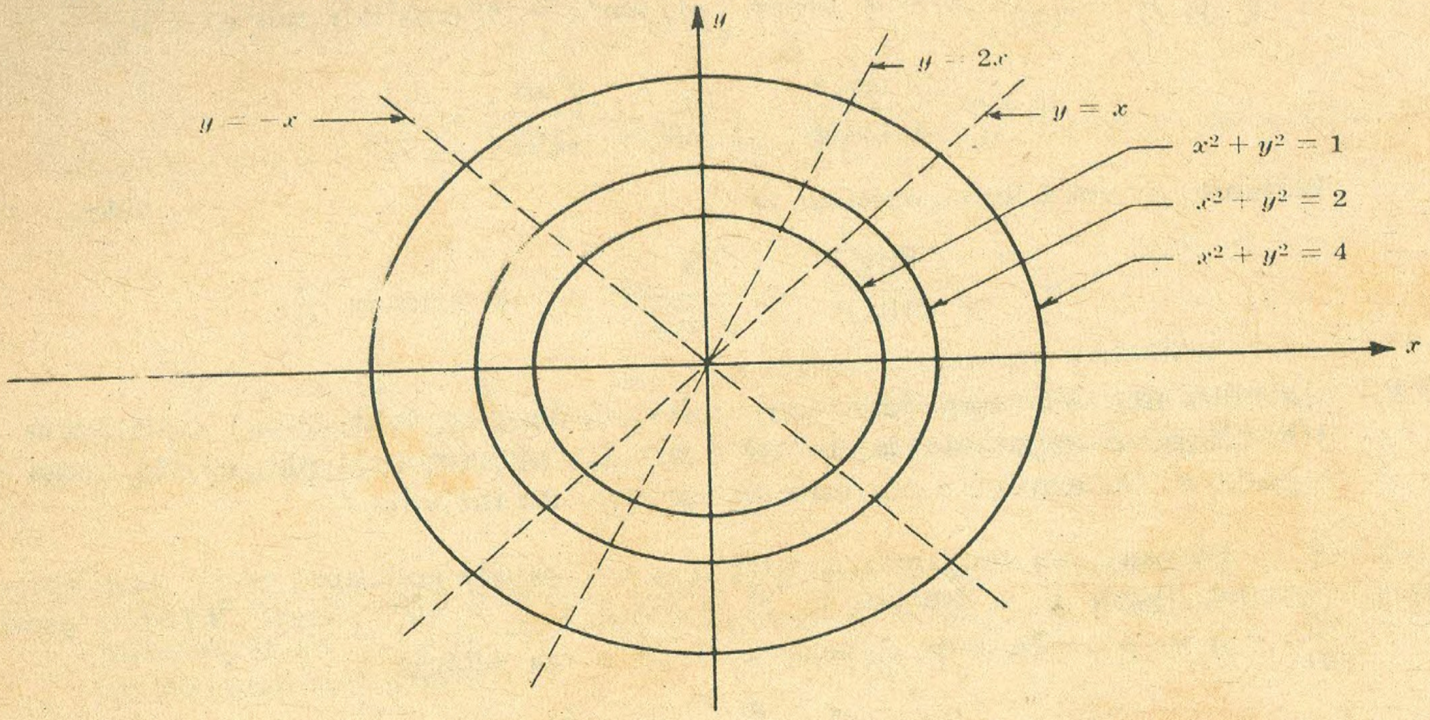

Fig. 9-7

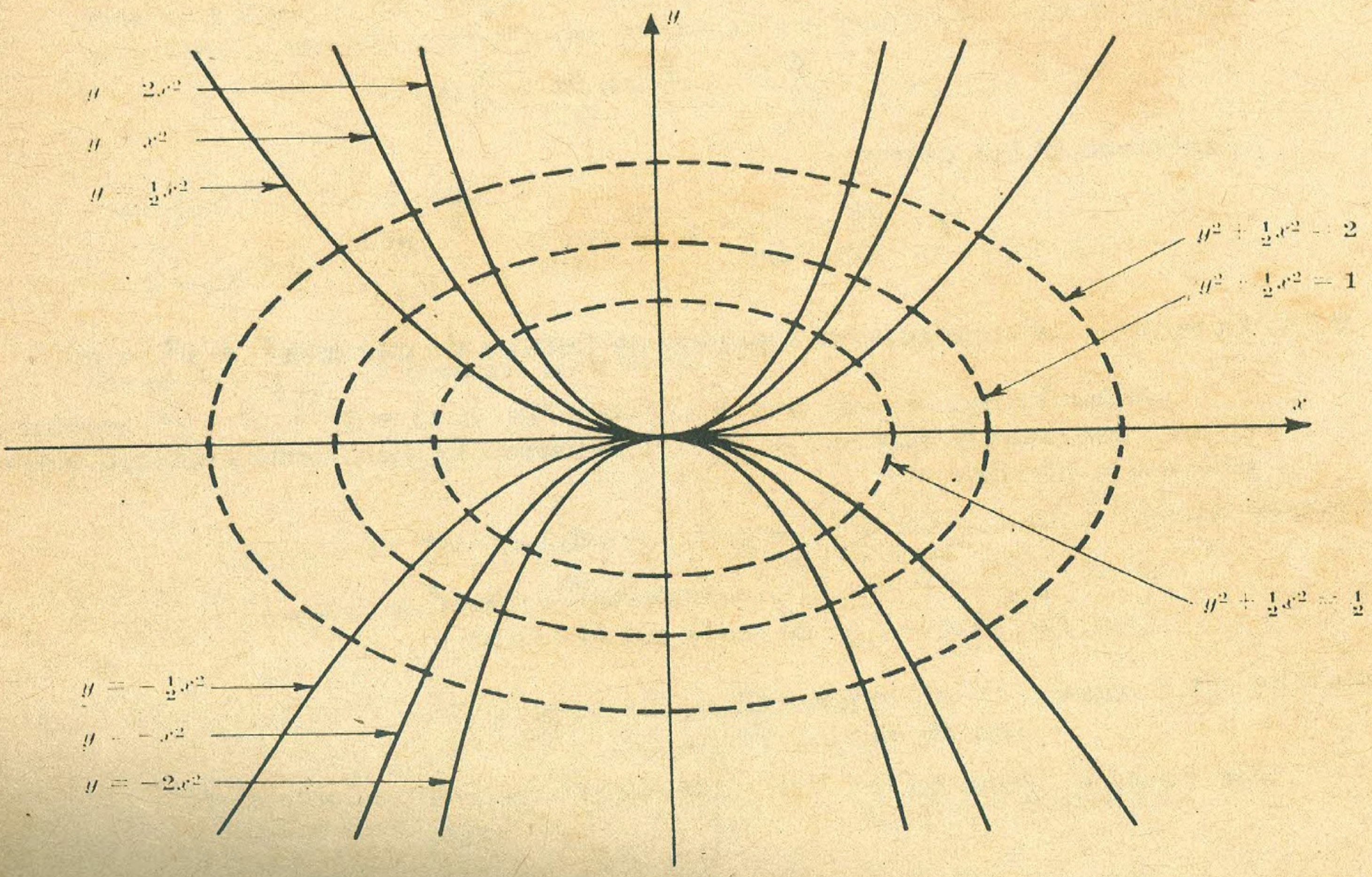

Fig. 9-8

9.19 Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $y = cx^2$.

A família, que é dada por (9.12) com $F(x, y, c) = y - cx^2$, consiste de parábolas simétricas em relação ao eixo y com vértices na origem. Derivando a equação dada implicitamente em relação a x, obtemos $\dfrac{dy}{dx} = 2cx$. Para eliminar c, notamos, da equação dada, que $c = y/x^2$; logo, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$. Aqui $f(x, y) = 2y/x$, de forma que (9.15) se escreve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y} \quad \text{ou} \quad x\,dx + 2y\,dy = 0$$

A solução desta equação separável é $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k$.

As trajetórias ortogonais são elipses. A fig. 9-8 ilustra alguns membros desta família de trajetórias, bem como alguns elementos da família de parábolas. Note que cada elipse intercepta cada parábola ortogonalmente.

9.20 Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 + y^2 = cx$.

Aqui, $F(x, y, c) = x^2 + y^2 - cx$ em (9.12). Derivando implicitamente a equação dada em relação a x, obtemos $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = c$. Eliminando c entre esta equação e $x^2 + y^2 - cx = 0$, encontramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Esta equação é homogênea e sua solução (v. Problema 5.4) dá as trajetórias ortogonais: $x^2 + y^2 = ky$.

Problemas Suplementares

9.21 Coloca-se um corpo à temperatura de 0°F em um quarto mantido à temperatura constante de 100°F. Se após 10 minutos a temperatura do corpo é 25°F, determine (*a*) o tempo necessário para a temperatura do corpo atingir 50°F e (*b*) a temperatura do corpo após 20 minutos.

9.22 Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de 0°F. Se após 20 minutos a temperatura do corpo é 40°F e após 40 minutos é 20°F, determine a temperatura inicial do corpo.

9.23 Um corpo à temperatura de 50°F é colocado em um forno cuja temperatura é mantida a 150°F. Se após 10 minutos a temperatura do corpo é 75°F, determine o tempo necessário para o corpo atingir a temperatura de 100°F.

9.24 Certa substância radioativa decresce a uma taxa proporcional à quantidade de substância presente. Se, para uma quantidade inicial de substância de 100 miligramas, se observa um decréscimo de 5% após dois anos, determine (*a*) uma expressão para a quantidade restante no tempo t e (*b*) o tempo necessário para uma redução de 10% da quantidade inicial.

9.25 Certa substância radioativa decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se se observa que, após uma hora, houve uma redução de 10% da quantidade inicial da substância, determine a "meia-vida" (half life) da substância. (Sugestão. designe por N_0 a quantidade inicial de substância. Não é preciso conhecer N_0 explicitamente).

9.26 Sabe-se que a população de determinada cidade cresce a uma taxa proporcional ao número de habitantes existente. Se, após 10 anos, a população triplica, e após 20 anos é de 150.000 habitantes, determine a população inicial.

9.27 Deixa-se cair um corpo de 10 "slugs" de massa de uma altura de 1000 pés sem velocidade inicial. A resistência do ar é proporcional à velocidade do corpo. Se a velocidade limite é de 320 pés/s, determine (*a*) uma expressão para a velocidade do corpo no instante t, e (*c*) o tempo necessário para o corpo atingir a velocidade de 160 pés/s.

9.28 Lança-se um corpo de massa m verticalmente para cima com velocidade inicial v_0. Supondo nula a resistência do ar, determine (*a*) a equação do movimento no sistema de coordenadas da fig. 9-6, (*b*) uma expressão para a velocidade do corpo no instante t, (*c*) o instante t_m em que o corpo atinge a altura máxima, (*d*) uma expressão para a posição do corpo no instante t, e (*e*) a altura máxima atingida pelo corpo.

9.29 Um corpo de 1 "slug" de massa é solto no espaço com velocidade inicial de 1 pé/s, e encontra uma resistência do ar dada exatamente por $-8v^2$. Determine a velocidade no instante t.

9.30 Um tanque contém inicialmente 10 galões de água pura. No instante $t = 0$, começa-se a adicionar ao tanque uma solução de salmoura com $\frac{1}{2}$ lb de sal por galão, à razão de 2 gal/min, enquanto a mistura resultante se escoa do tanque à mesma taxa. Determine (*a*) a quantidade e (*b*) a concentração de sal no tanque no instante t.

9.31 Um tanque contém inicialmente 80 galões de solução de salmoura com $\frac{1}{8}$ lb de sal por galão. No instante $t = 0$, começa-se a adicionar ao tanque outra solução de salmoura com 1 lb de sal por galão, a taxa de 4 gal/min, enquanto a mistura resultante se escoa do tanque à taxa de 8 gal/min. Determine a quantidade de sal no tanque quando este contém exatamente 40 galões de solução.

9.32 Um circuito RC tem fem de 5 volts, resistência de 10 ohms, capacitância de 10^{-2} farad e inicialmente uma carga de 5 coulombs no capacitor. Determine (*a*) a corrente transitória e (*b*) a corrente estacionária.

9.33 Um circuito RL sem fonte de fem tem uma corrente inicial dada por I_0. Determine a corrente no instante t.

9.34 Um circuito RL tem fem dada (em volts) por 4 sen t, resistência de 100 ohms, indutância de 4 henries, e corrente inicial zero. Determine a corrente no instante t.

9.35 Sabe-se que a corrente estacionária de um circuito é $\frac{5}{17}$ sen $t - \frac{3}{17}$ cos t. Dê a expressão dessa corrente na forma A sen $(t - \phi)$.

9.36 Escreva a corrente estacionária do Problema 9.17 na forma $A \cos(2t + \phi)$. (Sugestão. use a identidade $\cos(x + y) \equiv \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$).

9.37 Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 - y^2 = c^2$.

9.38 Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $y = ce^x$.

9.39 Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 - y^2 = cx$.

Respostas dos Problemas Suplementares

9.21 $T = -100e^{-0,029t} + 100$; (*a*) 23,9 min, (*b*) 44°F

9.22 $T = 80e^{-0,035t}$; $T_0 = 80°F$

9.23 $T = -100e^{-0,029t} + 150$; $t_{100} = 23,9$

9.24 (*a*) $N = 100e^{-0,026t}$; (*b*) 4,05 yr

9.25 $N = N_0 e^{-0,105t}$; $t_{1/2} = 6,6$ hr

9.26 $N = 16.620e^{0,11t}$; $N_0 = 16.620$.

9.27 (*a*) $v = -320e^{-0,1t} + 320$ (*b*) $x = 3200e^{-0,1t} + 320t - 3200$ (*c*) 6,9 seg

9.28 (*a*) $\dfrac{dv}{dt} = -g$ (*c*) $t_m = \dfrac{v_0}{g}$ (*e*) $x_m = \dfrac{v_0^2}{2g}$

(*b*) $v = -gt + v_0$ (*d*) $x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

9.29 $\dfrac{2+v}{2-v} = 3e^{32t}$ ou $v = 2(3e^{32t} - 1)/(3e^{32t} + 1)$

9.30 (*a*) $Q = -5e^{-0,2t} + 5$ (*b*) $\dfrac{Q}{V} = \dfrac{1}{2}(-e^{-0,2t} + 1)$

9.31 $Q = -\dfrac{7}{40}(20 - t)^2 + 4(20 - t)$; quando $t = 10$, $Q = 22,5$ lb

(Note que $a = 80(1/8) = 10$ lb.)

9.32 (*a*) $-\dfrac{99}{2}e^{-10t}$ (*b*) 0 amp

9.33 $I = I_0 e^{-(R/L)t}$

9.34 $I = \dfrac{1}{626}(e^{-25t} + 25 \operatorname{sen} t - \cos t)$

9.35 $A = \dfrac{2}{\sqrt{34}}$ $\phi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{3}{5}$

9.36 $A = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ $\phi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{2}$

9.37 $xy = k$

9.38 $y^2 = -2x + k$

9.39 $x^2 y + \frac{1}{3}y^3 = k$