Derivadas e Taxa de Variação:

A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Exemplo: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1,1)$.

$f(x) = x^2$

$$m = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x+a)\cdot\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}}$$

$$m = \lim_{x \to a} x + a = a + a = 2a.$$

$a = 1.$

$$m = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2\cdot 1 = 2.$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow 2 = \frac{y - 1}{x - 1} \qquad P(1,1).$$

$$y - 1 = 2\cdot(x-1)$$

$$y = 2x - 2 + 1$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$ Eq. da Reta tangente.

Gráfico: p1 = plot(x^2, (x, -1, 3))
p2 = plot(2*x-1, (x, -1, 3))
p1 + p2.

Outra expressão para a inclinação da reta tangente

Se $h = x - a \Rightarrow x = a + h$

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quando $x \to a \Rightarrow h \to 0$

Logo pela definição

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemplo: Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto $(3,1)$.

$f(x) = 3/x$ $\quad m = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(a+h)] - [3/a]}{h}$

$$m = \lim_{h \to 0} \left(\frac{3}{a+h} - \frac{3}{a}\right) \cdot \frac{1}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{3a - 3(a+h)}{a^2 + ah} \cdot \frac{1}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3a} - \cancel{3a} - 3h}{a^2 + ah} \cdot \frac{1}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}}{a^2 + ah} \cdot \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{a^2 + a.h} \qquad x \to a \Rightarrow a = 3 \quad P(3,1).$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{9 + 3h} = \frac{-3}{9 + 3.0} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

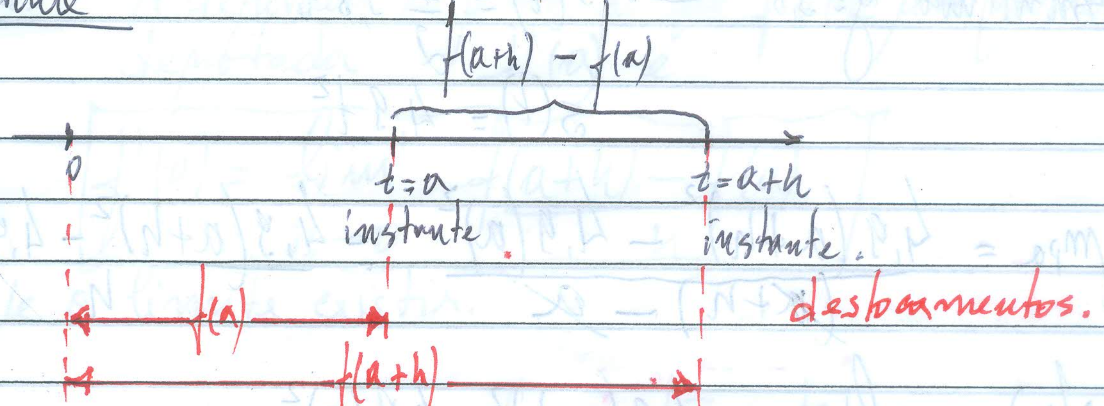
$$\boxed{m = -1/3}$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{y - 1}{x - 3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

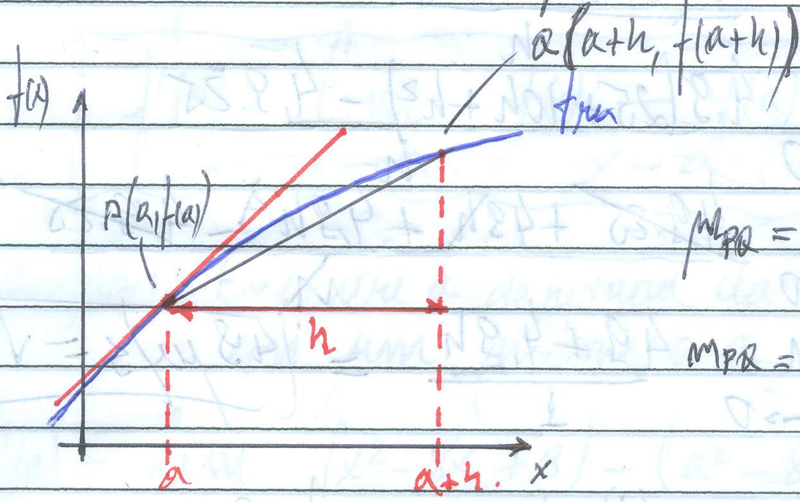
Gráfico:

```
p3 = plot (3/x , (x, 1, 4))
p4 = plot (-(1/3)*x + 2 , (x, 2, 4))
p3 + p4
```

Velocidade



velocidade média = $\dfrac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

m_{PQ} = velocidade média.

Se $h \to 0 \Rightarrow$ velocidade instantânea

$$V(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$V(a)$ = velocidade no instante $t = a$.

Exemplo: Uma bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.
a) Qual a velocidade da bola após 5s?
b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Equação de Galileu: $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ $\quad V(t) = g \cdot t$

$V(s) \Rightarrow V^2 = 2gs \Rightarrow V(s) = \sqrt{2gs}$

Assumindo $g = 9{,}8 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$

$s(t) = 4{,}9 t^2$

a) $m_{pa} = \frac{4{,}9.(a+h)^2 - 4{,}9(a)^2}{\cancel{(a+h) - a}} = \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9(a)^2}{h}$

$V(a) = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9(a)^2}{h}$

$V(5) = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9.(5+h)^2 - 4{,}9(5)^2}{h}$

$V(5) = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(25 + 10h + h^2) - 4{,}9.25}{h}$

$V(5) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4{,}9.25} + 49\cancel{h} + 4{,}9h^{\cancel{2}} - \cancel{4{,}9.25}}{\cancel{h}}$

$V(5) = \lim_{h \to 0} \frac{49 + 4{,}9h}{1} = \boxed{49\ m/s = V(5)}$

b) $s(t) = 4{,}9t^2 \qquad s(t) = 450m \qquad t = ?$

$450 = 4{,}9.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \Rightarrow t = 9{,}5831\,s$

$V(9{,}5831) = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9.(9{,}5831 + h)^2 - 4{,}9.(9{,}5831)^2}{h}$

$V(9{,}5831) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4{,}9.(9{,}5831)^2} + 4{,}9.2.9{,}5831\cancel{h} + 4{,}9.h^{\cancel{2}} - \cancel{4{,}9(9{,}5831)^2}}{\cancel{h}}$

$V(9{,}5831) = \lim_{h \to 0} 4{,}9.2.9{,}5831 + 4{,}9h$

$\boxed{V(9{,}5831) = 93{,}91\ m/s}$

No sage: mpa(a,h) = limit((((4.9*(a+h)^2) - (4.9*a^2))/h), h=0)

mpa(5,h) = 49,0

mpa(9,5831, h) = 93,9143000000001

mpa(9,5831, h).n(digits=4) = 93.91

mpa(9,5831, h).n(digits=6) = 93.9144.

Derivadas: A derivada de uma função f em um número a denotada $f'(a)$ é

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

se o limite existir.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ se e somente se $x \to a$ logo a derivada fica:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Exemplo: Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(x^2 - 8x + 9) - (a^2 - 8a + 9)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 8x + \cancel{9} - a^2 + 8a - \cancel{9}}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(x^2 - a^2) - (8x - 8a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)} \cdot (x+a) - 8 \cdot \cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} x + a - 8 = a + a - 8 = 2a - 8$$

$$\boxed{f'(a) = 2a - 8}$$

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a

Forma da reta em relação ao ponto inclinação: $\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$

No sage: $f'(a) = f\_(a)$

del x

var('x')

x

f_(a) = limit(x+a-8, x=a)

f_(a) ⇒ 2a − 8

f(a) = a^2 - 8*a + 9

y(a) = (f_(a)*(x-a)) + f(a)

Exemplo: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto $(3, -6)$.

$\boxed{a = 3}$

$f'(a) = 2 \cdot a - 8 = 2 \cdot 3 - 8 = -2$

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow -2 = \frac{y - (-6)}{x - 3}$

$y = -2x$

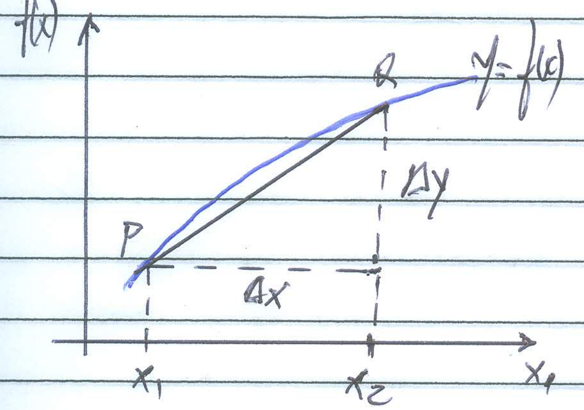
No sage: f_(3) ⇒ −2

f(3) ⇒ −6

y(3) ⇒ −2x

Taxa de Variação: Seja $y = f(x)$.

Definição: Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (incremento de x) será:



$P(x_1, f(x_1))$

$Q(x_2, f(x_2))$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\Rightarrow$ taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ $\Rightarrow$ reta secante PQ na figura.

Conceito de taxa instantânea de variação.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1).$$

23. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

24. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

25. Esboce o gráfico de uma função g que é contínua em seu domínio $(-5, 5)$ e para a qual $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$, $g'(-2) = 0$, $\lim_{x\to-5^+} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to5^-} g(x) = 3$.

26. Esboce o gráfico de uma função f para a qual o domínio é $(-2, 2)$, $f'(0) = -2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, f é contínua em todos os números de seu domínio exceto ±1 e f é ímpar.

27. Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, encontre $f'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - x^3$ no ponto $(1, 2)$.

28. Se $g(x) = x^4 - 2$, encontre $g'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 2$ no ponto $(1, -1)$.

29. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto $(2, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

30. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos $(2, 8)$ e $(3, 9)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

31–36 Encontre $f'(a)$.

31. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

32. $f(t) = 2t^3 + t$

33. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

34. $f(x) = x^{-2}$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

37–42 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga o que são f e a em cada caso.

37. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{e^{-2+h} - e^{-2}}{h}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to1/4} \frac{\frac{1}{x} - 4}{x - \frac{1}{4}}$

41. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

42. $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi/6} \frac{\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}}{\theta - \pi/6}$

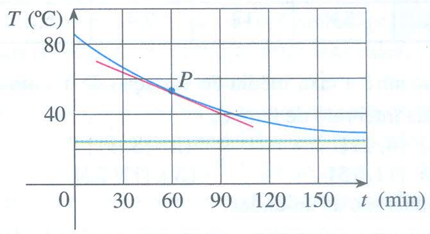
43–44 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 4$.

43. $f(t) = 80t - 6t^2$

44. $f(t) = 10 + \dfrac{45}{t+1}$

45. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

46. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa, em uma sala na qual a temperatura é 24 °C. O gráfico mostra como a temperatura do peru diminui e finalmente chega à temperatura ambiente. Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



47. Pesquisadores mediram a concentração média de álcool no sangue $C(t)$ de oito homens começando uma hora depois do consumo de 30 mL de etanol (correspondentes a duas doses de bebidas alcoólicas).

t (horas)	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$C(t)$ (mg/mL)	0,33	0,24	0,18	0,12	0,07

(a) Encontre a taxa média de variação de C com relação a t em cada intervalo de tempo:

(i) $[1{,}0, 2{,}0]$ (ii) $[1{,}5, 2{,}0]$

(iii) $[2{,}0, 2{,}5]$ (iv) $[2{,}0, 3{,}0]$

Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Faça uma estimativa da taxa instantânea de variação em $t = 2$ e interprete seu resultado. Quais são as unidades?

Fonte: Adaptado de P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State, *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics 5* (1977): 207–24.

48. O número N de franquias de uma cadeia popular de cafeterias é dado na tabela. (São dados os números de franquias em 1º de outubro.)

Ano	2004	2006	2008	2010	2012
N	8.569	12.440	16.680	16.858	18.066

(a) Encontre a taxa média de crescimento

(i) de 2006 a 2008 (ii) de 2008 a 2010

Em cada caso, inclua as unidades. O que você pode concluir?

(b) Faça uma estimativa da taxa instantânea de crescimento em 2010 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são as unidades?

(c) Faça uma estimativa da taxa instantânea de crescimento em 2010 medindo a inclinação de uma tangente.

49. A tabela mostra o número de passageiros P que chegaram à Irlanda por avião, em milhões.

Ano	2001	2003	2005	2007	2009
P	8,49	9,65	11,78	14,54	12,84

(a) Determine a taxa média de crescimento de P

(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005

(iii) de 2005 a 2007

Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2005, tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?