Hamilton Luiz Guidorizzi: Um curso de Cálculo Vol 1. - Exercícios.

SageMath Comands.

Capítulo 3. Limite e continuidade.

Exercícios 3.1.

1. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a ideia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

a) $f(x)=2$. file => 3-1-1-a. contínua para $x \in \mathbb{R}$.
p1 = plot(2, (2, -5, 5)) em todo p real.

b) $f(x) = x+1$ 3-1-1-b. contínua para $x \in \mathbb{R}$.
p1 = plot(x+1, (x, -5, 5)) em todo p real.

c) $f(x) = x^2$ 3-1-1-c contínua para $x \in \mathbb{R}$.
p1 = plot(x^2, (x, -5, 5)) em todo p real.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ 3-1-1-d. contínua para $x \in \mathbb{R}$ e $p \neq 1$.
p1 = plot(x^2, (x, -5, 1))
p2 = plot(2, (2, 1, 5))
p1 + p2.

e) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ e $x \leq -1$; $\Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow x < 1$ e $x > -1$
3-1-1-e descontínua em $p = \pm 1$.
p1 = plot(1/(x^2), (x, -5, -1))
p2 = plot(1/(x^2), (x, 1, 5))
p3 = plot(2, (2, -1, 1))
p1 + p2 + p3.

f) $f(x) = x^2+2$. 3-1-1-f. contínua para $x \in \mathbb{R}$.
p1 = plot(x^2+2, (x, -5, 5)) em todo p real.

2. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule.

a) $\lim_{x \to 1} (x+2) = 3$ limit(x+2, x=1).

b) $\lim_{x \to 1} (2x+1) = 3$ limit(2*x+1, x=1).

c) $\lim_{x \to 0} (3x+1) = 1$ limit(3*x+1, x=0).

d) $\lim_{x \to 2} (x^2+1) = 5$ limit(x^2+1, x=2).

e) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$ limit(sqrt(x), x=1).

f) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x}{x+3} = 6/5$ limit((x^2+x)/(x+3), x=2)

g) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2}$ limit((x^(1/3)), x=2)

h) $\lim_{x \to 0} (\sqrt{x}+x) = 0$ limit(sqrt(x)+x, x=0)

3. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x-1}$ utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to 1/2} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 2$

p1= plot((4*x^2-1)/(2*x-1), (x,-1,1))
limit((4*x^2-1)/(2*x-1), x=1/2)

4. Utilizando a ideia intuitiva de limite calcule.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ limit((x^2-4)/(x-2), x=2)

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x} = 1$ limit((x^2+x)/(x), x=0).

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)} \cdot \sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1/2.$

limit((sqrt(x)-1)/(x-1), x=1).

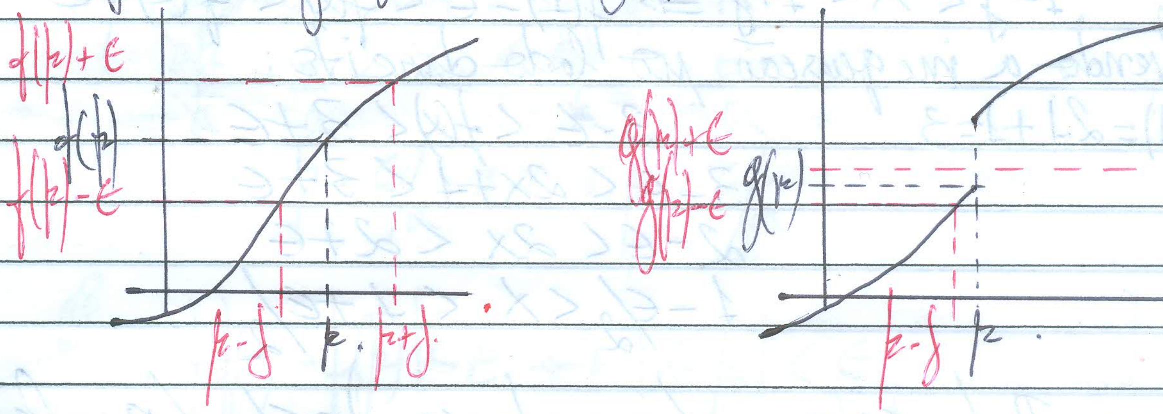
d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = 0$ limit((x^2-4*x+4)/(x-2), x=2)

e) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$ limit((x^2-1)/(x+1), x=-1)

f) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ limit(sin(x), x=0).

Guidorizzi. Tópico 3.2. Definição de Função Contínua. Vol 2.
Capítulo 3. Limite e continuidade.

Sejam f e g funções de gráficos.



<u>Definição</u>: Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$

Nesse caso a função é dita contínua e é definida

f contínua em $p \Rightarrow$ { Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo x em D_f.

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

No caso 2. Qualquer que seja o $\delta > 0$ que se tome, quando x percorre o intervalo $(p-\delta, p+\delta)$, $g(x)$ não (~~pertence~~) permanece entre

$$g(p) - \epsilon \text{ e } g(p) + \epsilon$$

$\Rightarrow g(x)$ é descontínua.

Exemplo 1. Prove que $f(x) = 2x+1$ é contínua em $p=1$.

Solução:

$$p-\delta < x < p+\delta \Rightarrow f(p)-\epsilon < f(x) < f(p)+\epsilon$$

$$1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow f(1)-\epsilon < f(x) < f(1)+\epsilon$$

Resolvendo a inequação no lado direito:

$f(1) = 2\cdot 1+1 = 3$

$$3-\epsilon < f(x) < 3+\epsilon$$
$$3-\epsilon < 2x+1 < 3+\epsilon$$
$$2-\epsilon < 2x < 2+\epsilon$$
$$\therefore 1-\epsilon/2 < x < 1+\epsilon/2$$

(*) Logo: Dado $\epsilon>0$ e tomando-se $\delta=\epsilon/2$ (qualquer $\delta>0$ com $\delta<\epsilon/2$ também satisfaz), resulta

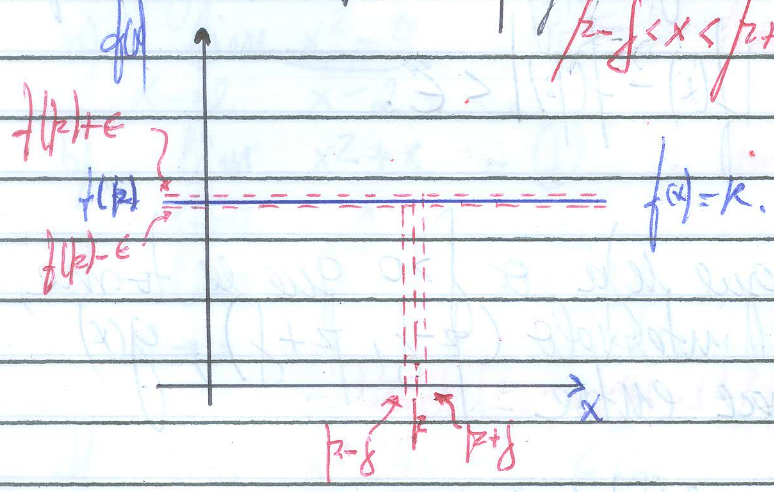
$$1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow f(1)-\epsilon < f(x) < f(1)+\epsilon$$

ou

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(1)| < \epsilon$$

$\therefore$ f é contínua em $p=1$.

Exemplo 2. A função constante $f(x)=k$ é contínua em todo p real.



$$p-\delta < x < p+\delta \rightarrow f(p)-\epsilon < f(x) < f(p)+\epsilon$$

$$k-\epsilon < f(x) < k+\epsilon$$
$$k-\epsilon < k < k+\epsilon$$

$$k-\epsilon < k$$
$$-\epsilon < k-k$$

$$k < k+\epsilon$$
$$k-k < \epsilon$$

$$|x-p| < \delta \leftarrow \therefore |k-k| < \epsilon$$

$\therefore$ $f(x)=k$ é contínua.

Exemplo 3. A função afim $f(x) = ax + b$ (a e b constantes) é contínua

$$f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$

$$(ap + b) - \epsilon < ax + b < ap + b + \epsilon$$

$$ap + \cancel{b} - \cancel{b} - \epsilon < ax < ap + \cancel{b} - \cancel{b} + \epsilon$$

$$\frac{\cancel{a}p}{\cancel{a}} - \frac{\epsilon}{a} < x < \frac{\cancel{a}p}{\cancel{a}} + \frac{\epsilon}{a}$$

$$p - \epsilon/a < x < p + \epsilon/a$$

$\therefore$

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \longleftrightarrow |x - p| < \frac{\epsilon}{|a|}$$

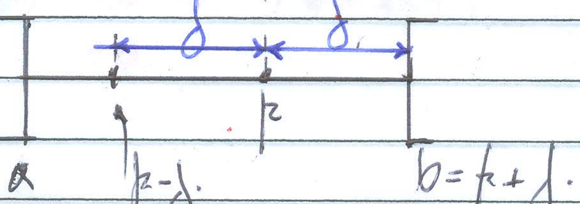
Tomando-se $\delta = \frac{\epsilon}{|a|} \longrightarrow |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$

<u>Nova Definição de mínimo:</u>

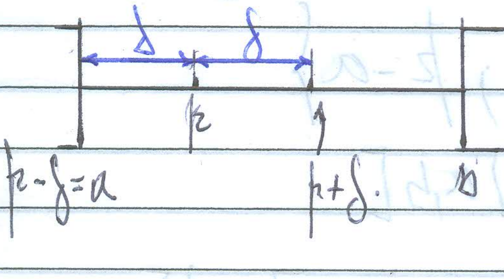
Se $p \in (a, b)$ ou $p \in]a, b[$ $\Rightarrow$ intervalo (a, b) a e b reais, então existe $\delta > 0$, tal que

$$]p - \delta, p + \delta[\subset]a, b[$$

$\therefore \delta = \min\{b - p, p - a\}$.



$\delta = b - p$.



$\delta = p - a$.

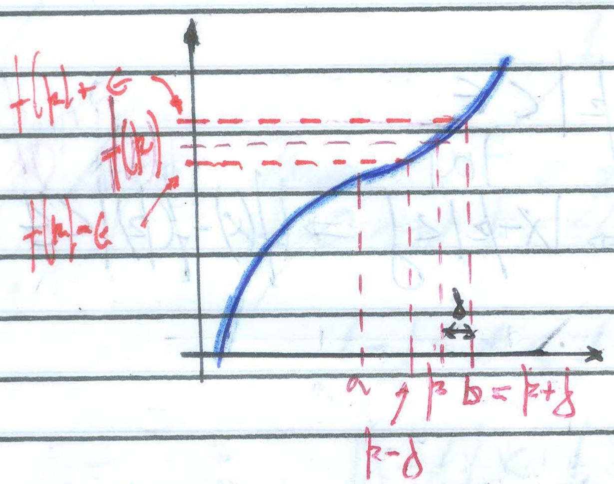
Exemplo 4. Prove que, se para todo $\epsilon > 0$ dado existir um intervalo aberto $I =]a, b[$, com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$

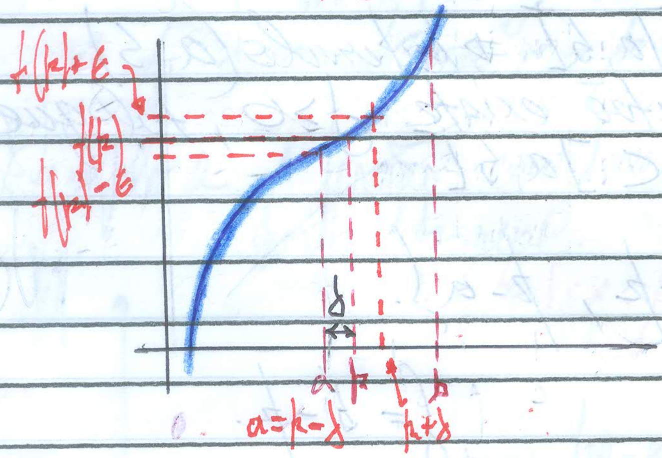
$$x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$$

então f é contínua em p.

Para todo $\epsilon > 0$ dado existe $I =]a, b[$ com $p \in I$, tal que

$$x \in]a, b[\Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$





Tomando-se $\delta = \min\{b - p, p - a\}$

$\therefore$ $]p - \delta, p + \delta[\subset]a, b[$

$\hookrightarrow \therefore$ $x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow x \in]a, b[$

Da definição:

$$x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$

$\therefore f$ contínua.

Exercícios Numéricos Resolvidos:

1. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado!

a) $f(x) = 4x$ em $p = 2$.

$\lim_{x \to 2} 4x = 8$ intuitivo formal.

$f(2) = 4 \cdot 2 = 8$.

Pela definição: $|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$ contínua.

$|4x - f(2)| < \epsilon$

$|4x - 8| < \epsilon$

$|x - 2| < \epsilon/4$

$|x - 2| < \delta \longleftarrow \therefore \boxed{\delta > 0 \text{ ou } \delta \leq \epsilon/4}$

tabela c/ aproximações numéricas:

ϵ	δ	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$	$f(p-\delta)$	$f(p+\delta)$
0,10000	0,02500	1,97500	2,02500	7,90000	8,10000	7,90000	8,10000
0,01000	0,00250	1,99750	2,00250	7,99000	8,01000	7,99000	8,01000
0,00100	0,00025	1,99975	2,00025	7,99900	8,00100	7,99900	8,00100
0,00010	0,00003	1,99998	2,00003	7,99990	8,00010	7,99990	8,00010

solução — verificação

$\delta = \epsilon/4$

Gráfico: p1a = plot(4*x, (x, 0, 3))

b) $f(x) = -3x$ em $p = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1} -3x = -3$

$f(1) = -3$

$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$

ou

$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$

$(-1) \cdot \quad -3 - \epsilon < -3x < -3 + \epsilon$

$3 + \epsilon > 3x > 3 - \epsilon$

$1 + \epsilon/3 > x > 1 - \epsilon/3$

ou

$1 - \epsilon/3 < x < 1 + \epsilon/3$

ou

$|x - 1| < \epsilon/3$

$|x - 1| < \delta \longleftarrow$ Fazendo $\boxed{\delta = \epsilon/3}$

é contínua. $\therefore \boxed{\delta > 0 \text{ ou } \delta \leq \epsilon/3}$

Tabela c/ aproximações numéricas:

ϵ	δ	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$	$f(p-\delta)$	$f(p+\delta)$
0,10000	0,03333	0,96667	1,03333	-3,10000	-2,90000	-2,90000	-3,10000
0,01000	0,00333	0,99667	1,00333	-3,01000	-2,99000	-2,99000	-3,01000
0,00100	0,00033	0,99967	1,00033	-3,00100	-2,99900	-2,99900	-3,00100
0,00010	0,00003	0,99997	1,00003	-3,00010	-2,99990	-2,99990	-3,00010
0,00001	0,00000	1,00000	1,00000	-3,00001	-2,99999	-2,99999	-3,00001

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{soluções}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{verificações}}$

Obs.: Função decrescente. Ver a diferença entre a soluções e a verificações no gráfico.

Gráfico: p2b = plot(-3*x, (x, 0, 3))
p2b.

c) $f(x) = x^3$ em $p = 2$.

$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

$f(2) = 8$

$f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$

$8 - \epsilon < x^3 < 8 + \epsilon$

$\sqrt[3]{8 - \epsilon} < x < \sqrt[3]{8 + \epsilon}$

tomando o intervalo $I =]\sqrt[3]{8-\epsilon}, \sqrt[3]{8+\epsilon}[$

$2 \in I$.

Logo, $x \in I \Rightarrow f(2) - \epsilon < f(x) < f(2) + \epsilon$

$\delta = \min\{\sqrt[3]{8+\epsilon} - 2, 2 - \sqrt[3]{8-\epsilon}\}$

Tabela c/ aproximações numéricas:

ϵ	δ min	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$	$f(p-\delta)$	$f(p+\delta)$
0,10000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
0,01000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
0,00100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		
0,00010	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		

Gráficos:

d) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 1$.