Primitivas.

Uma função F é denominada uma primitiva de f num intervalo I se

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$ para todo x em I.

Teorema do Valor Médio. (TVM)

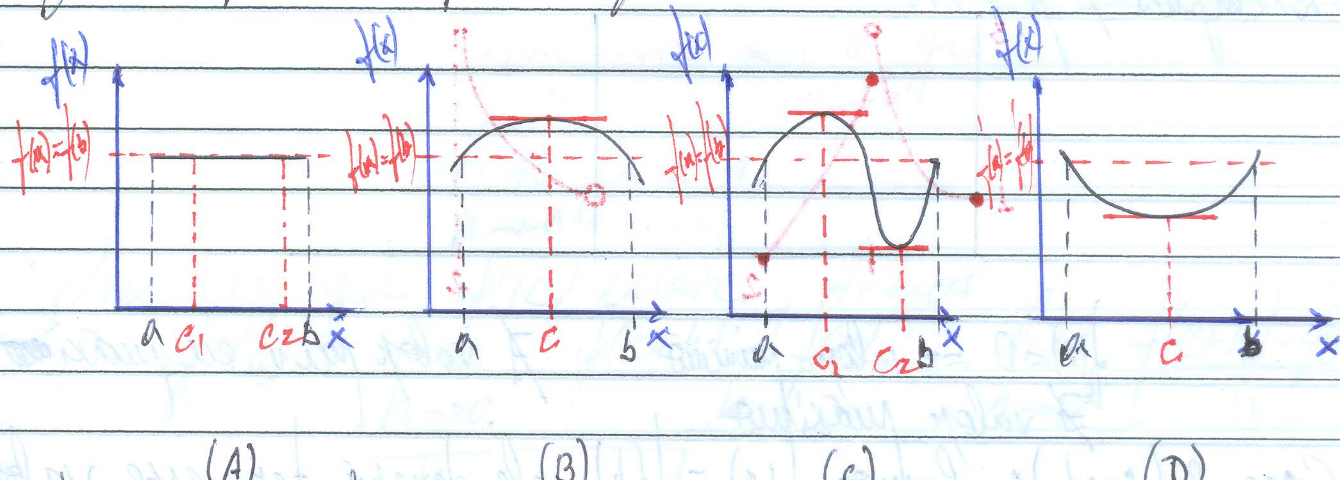
Para a determinação do teorema, digo explanação do teorema TVM, precisamos antes estabelecer um outro, o Teorema de Rolle:

Teorema de Rolle: Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado [a, b];
2. f é derivável no intervalo aberto]a, b[;
3. $f(a) = f(b)$.

Então, existe um nº c em]a, b[tal que $f'(c) = 0$

Algumas funções típicas que satisfazem as 3 hipóteses:



Definição de teorema: é uma consequência lógica de axiomas.

axioma: uma verdade incondicional e lógica.

CASO 1: $f(x) = K$, uma constante.

Então, $f'(x) = 0 \Rightarrow$ o nº c pode ser tomado como qualquer número em $]a, b[$

Exemplo é (A).

CASO 2: $f(x) > f(a)$ para algum x em $]a, b[$

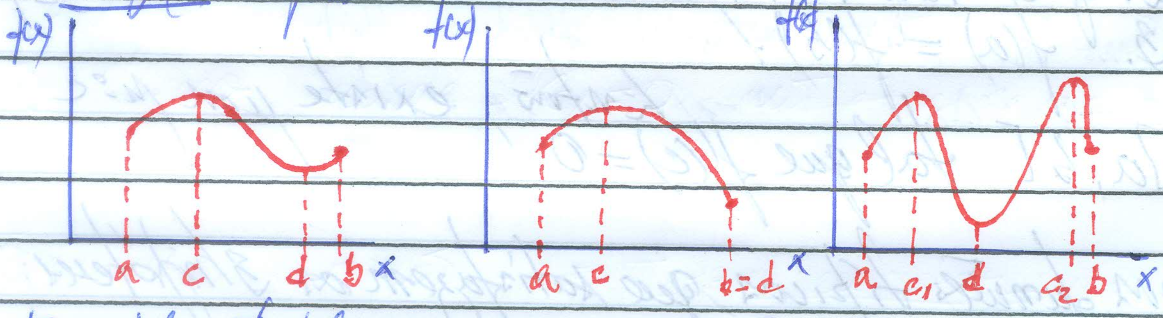
Exemplos: (B) e (C).

Pelo Teorema dos Valores Extremos (TVE) a função f tem um valor máximo em algum lugar de $[a, b]$

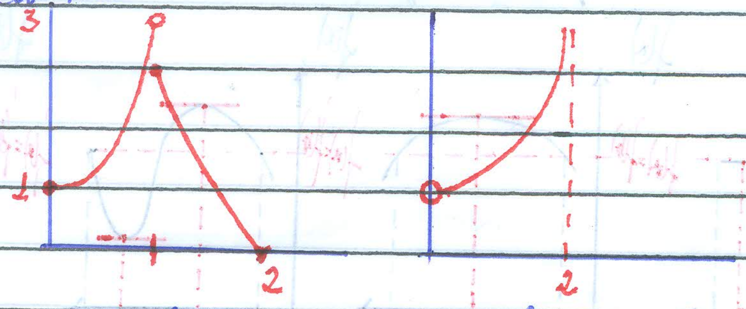
Pelo Teorema de Fermat $\Rightarrow f'(c) = 0$ se $\exists$ c = máximo.

TVE: Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

Exemplos: $\exists$ pelo TVE



Exemplos $\nexists$ pelo TVE



$f(2) = 0 \Rightarrow$ valor mínimo
$\nexists$ valor máximo

$\nexists$ valor min ou máximo.

Caso 2 (cont.): Como $f(a) = f(b)$, ele deverá ter esse valor máximo em um número c do intervalo aberto $]a, b[$. Então f tem um máximo local em c e pela hipótese 2 f é derivável em c.

Teorema de Fermat: Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração: Suponha que f tenha um máximo local em c. Então se c é um máximo local $f(c) \geq f(x)$ se x for suficientemente próximo de c. Isso implica que, se h for suficientemente próximo de 0, com h positivo ou negativo, então

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

$$\cdot \frac{1}{h} \longrightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} h > 0 \text{ e } h \text{ suficien-} \\ \text{temente pequeno} \end{array} \right.$$

Tomando o limite à direita dessa desigualdade:

$$\boxed{\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0}$$

A partir do teorema:

Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g existem quando x tende a a, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

$$\lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

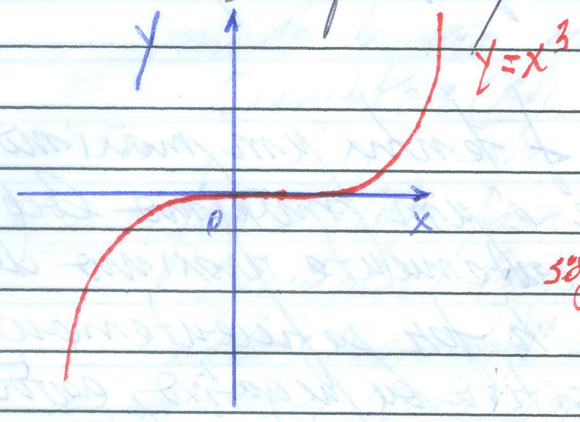
Uma vez que $f'(c)$ existe, temos:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\therefore \boxed{f'(c) \leq 0}$$

Se $h < 0$ o sentido da desigualdade é invertido $f'(c) \geq 0$.

Exemplo: Se $f(x)=x^3$, determine $f'(x)$ e $f'(0)$ e estabeleça se f tem máximo ou mínimo em $0=x$.



$f'(x)=3x^2$

$f'(0)=0$

sage:
```
x = var("x")
h = var("h")
f(x) = x^3
Deltay = f(x+h) - f(x)
Deltay
Deltay/h
(Deltay/h).expand()
limit((f(x+h)-f(x))/h, h=0)
diff(f(x), x)
diff(f(0), x)
```

Observe que $x^3>0$ para $x>0$ mas $x^3<0$ para $x<0$

$\therefore$ $f'(0)=0$ significa que a curva tem uma tangente horizontal em $(0,0)$

$\therefore$ Ao invés de ter máximo ou mínimo em $(0,0)$, a curva cruza a tangente horizontal nesse ponto.

$\therefore$ Mesmo quando $f'(c)=0$, não é necessário existir um mínimo ou máximo em c.

Exercício: A função $f(x)=|x|$ tem seu valor mínimo local e absoluto em 0? Analise.

Definição: Um número crítico de uma função é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exemplo: Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5} \cdot (4-x)$

$f'(x) = x^{3/5} \cdot (-1) + (4-x) \cdot \left(3/5 \cdot x^{-2/5}\right)$

$f'(x) = -x^{3/5} + \dfrac{3 \cdot (4-x)}{5x^{2/5}}$

$f'(x) = \dfrac{12-8x}{5x^{2/5}}$

$f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$

$x = 3/2$

$f'(x) \nexists$ se $x = 0$

$\therefore$ $x = 3/2$ e $x = 0$ são números críticos.

$\dfrac{d}{dx}(uv) = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$

Sage: `x = var("x")`

`u = function('u', x)`

`u ↵`

`v = function('v', x)`

`v ↵`

`diff(u*v, x)`

Método do Intervalo Fechado:

Para encontrar os valores máximos e mínimos absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em $]a, b[$
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor valor é o mínimo absoluto.

Exemplo: Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, em $-1/2 \le x \le 4$.

(1) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$x = 0$ e $x = 2$

(2) $f(-1/2) = (-1/2)^3 - 3 \cdot (-1/2)^2 + 1 = 1/8$

$f(4) = 4^3 - 3 \cdot (4)^2 + 1 = 17$

Faça o gráfico e analise.

Exemplo em Física:

O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 de abril de 1990 pelo ônibus espacial Discovery. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão do lançamento em $t=0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t=126s$, é dado por.

$$v(t) = 0{,}0003968\,t^3 - 0{,}02752\,t^2 + 7{,}196\,t - 0{,}9397$$

$v(t)$ em m/s.

Estime os valores máximos e mínimos absolutos da aceleração do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

Solução: $a(t) = v'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(0{,}0003968\,t^3 - \ldots - 0{,}9397\right)$

$$a(t) = 0{,}0011904\,t^2 - 0{,}05504\,t + 7{,}196$$

$$a'(t) = 0{,}0023808\,t - 0{,}05504$$

$$a'(t) = 0 \implies t_1 = \frac{0{,}05504}{0{,}0023808} \cong 23{,}12$$

$$a(0) = 7{,}196\ m/s^2 \quad a(t_1) = 6{,}56\ m/s^2 \quad a(126) = 19{,}16\ m/s^2$$

mínima. máxima.

Sage: Grafique e analise.

Exercícios Stewart p. 249.

" " p. 250 – O Cálculo do Arco Íris.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |1 + 5x + x^3|$ com precisão de uma casa decimal.

65–68

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com precisão de duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Após o consumo de uma bebida alcoólica, a concentração de álcool na corrente sanguínea (concentração de álcool no sangue, ou CAS) aumenta rapidamente a medida que o álcool é absorvido, seguida por uma diminuição gradual conforme o álcool é metabolizado. A função

$$C(t) = 1{,}35te^{-2{,}802t}$$

modela a CAS média, medida em mg/mL, de um grupo de oito indivíduos do sexo masculino t horas depois do consumo rápido de 15 mL de etanol (correspondentes a uma dose de bebida alcoólica). Qual a CAS média máxima durante as primeiras 3 horas? Quando ela ocorre?

Fonte: Adaptado de P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State, *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–24.

70. Após um comprimido de antibiótico ser ingerido, a concentração de antibiótico na corrente sanguínea é modelada pela função

$$C(t) = 8(e^{-0{,}4t} - e^{-0{,}6t})$$

onde o tempo t é medido em horas e C é medido em μg/mL. Qual é a concentração máxima de antibiótico durante as primeiras 12 horas?

71. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

72. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e onde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg}\theta = \mu$.

73. Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre 1993 e 2003 é dado pela função

$$S(t) = -0{,}00003237t^5 + 0{,}0009037t^4 - 0{,}008956t^3 + 0{,}03629t^2 - 0{,}04458t + 0{,}4074$$

onde t é medido em anos desde agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.

74. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo objetivo era instalar um novo motor de arranque no satélite de comunicação Intelsat. A tabela dá os dados de velocidade para o ônibus espacial entre a partida e a ejeção dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de combustível a 89%	20	136,2
Regulador de combustível a 67%	32	226,2
Regulador de combustível a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação do foguete auxiliar	125	1 265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

(b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

75. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde passa o ar expelido. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de 2/3 de seu raio normal durante a tosse. De acordo com um modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

onde k é uma constante e r_0, o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2}r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

(a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

(c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

76. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas g não tem um valor extremo local em 5.

77. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem um local máximo nem um local mínimo.

78. Se f tem um valor mínimo local em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

79. Demonstre o Teorema de Fermat para o caso em que f tem um mínimo local em c.

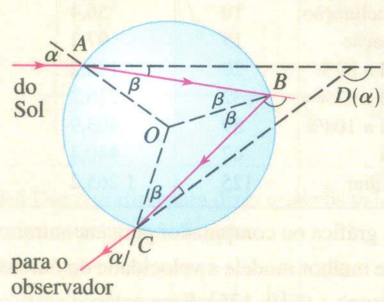
80. Uma função cúbica é um polinômio de grau 3, isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a \neq 0$.

(a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e faça esboços para ilustrar as três possibilidades.

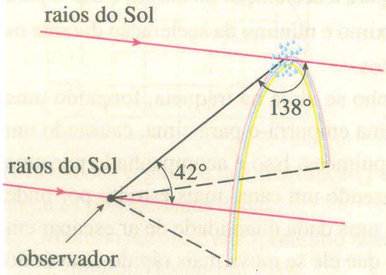
(b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?

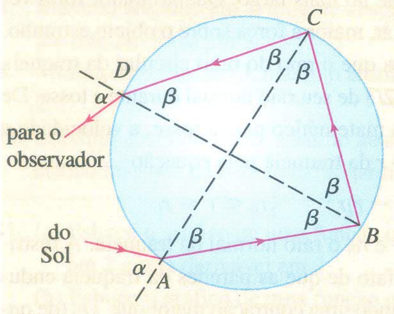
PROJETO APLICADO

O CÁLCULO DO ARCO-ÍRIS

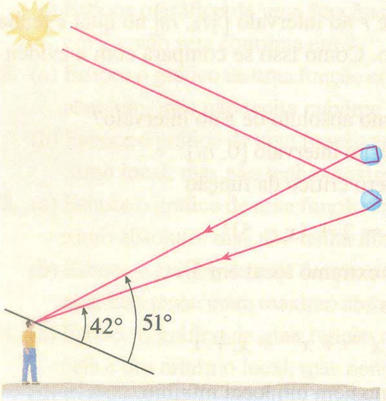


Formação do arco-íris principal





Formação do arco-íris secundário



O arco-íris é o fenômeno que resulta da dispersão da luz do Sol em gotas de chuva suspensas na atmosfera. Ele tem fascinado a humanidade desde os tempos antigos e tem inspirado tentativas de explicação científica desde a época de Aristóteles. Neste projeto, usaremos as ideias de Descartes e de Newton para explicar a forma, a localização e as cores do arco-íris.

1. A figura mostra um raio de luz entrando numa gota d'água esférica por A. Parte da luz é refletida, mas a reta AB mostra a trajetória da parte que entra na gota. Observe que a luz é refratada em direção à reta normal AO e, de fato, a Lei de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, em que α é o ângulo de incidência, β é o ângulo de refração e $k \approx \frac{4}{3}$, o índice de refração para a água. Em B, uma parte da luz passa através da gota e é refratada para o ar, mas a reta BC mostra a parte que é refletida. (O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.) Quando o raio alcança C, parte dele é refletido, mas, por ora, estamos mais interessados na parte que deixa a gota d'água em C. (Note que ele é refratado para longe da reta normal.) O *ângulo de desvio* $D(\alpha)$ é a quantidade de rotação no sentido horário sofrida pelo raio que passa por esse processo de três etapas. Logo,

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Mostre que o valor mínimo do desvio é $D(\alpha) \approx 138°$ e ocorre quando $\alpha \approx 59{,}4°$.

O significado do desvio mínimo é que, quando $\alpha \approx 59{,}4°$, temos $D'(\alpha) \approx 0$; logo, $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Isso significa que muitos raios com $\alpha \approx 59{,}4°$ são desviados aproximadamente pela mesma quantidade. É essa *concentração* de raios vindos das proximidades da direção de desvio mínimo que cria a luminosidade do arco-íris primário. A figura mostra que o ângulo de elevação a partir do observador até o ponto mais alto sobre o arco-íris é $180° - 138° = 42°$. (Esse ângulo é chamado *ângulo do arco-íris*.)

2. O Problema 1 explica a localização do arco-íris principal, mas como explicar as cores? A luz do Sol é formada por um espectro de comprimentos de onda, partindo do vermelho e passando pelo laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. Como Newton havia descoberto em seus experimentos com prismas em 1666, o índice de refração é diferente para cada cor. (Este efeito é denominado *dispersão*.) Para a luz vermelha, o índice de refração é $k \approx 1{,}3318$, enquanto para a luz violeta, é $k \approx 1{,}3435$. Repetindo os cálculos do Problema 1 para esses valores de k, mostre que o ângulo do arco-íris é cerca de 42,3° para o arco vermelho e 40,6° para o arco violeta. Assim, o arco-íris consiste realmente em sete arcos individuais correspondentes às sete cores.

3. Talvez você já tenha visto um arco-íris secundário mais fraco acima do primeiro. Isso resulta da parte do raio que entra em uma gota de chuva e é refratada em A, refletida duas vezes (em B e C), e refratada quando deixa a gota em D (veja a figura à esquerda). Dessa vez, o ângulo de desvio $D(\alpha)$ é o ângulo total da rotação no sentido anti-horário que o raio sofre nesse processo de quatro etapas. Mostre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

e $D(\alpha)$ tem um valor mínimo quando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Usando $k = \frac{4}{3}$, mostre que o desvio mínimo é cerca de 129°, e assim o ângulo do arco-íris para o arco-íris secundário é cerca de 51°, conforme se vê na figura à esquerda.

4. Mostre que as cores no arco-íris secundário aparecem na ordem inversa daquela do primário.

Pichugin Dmitry/Shutterstock