Exercícios sobre Primitivas

1) $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x)=x^2$?

2) Para toda constante K, $F(x)=2x+K$ é primitiva, em $\mathbb{R}$, de $f(x)=2$?

3) Calcule as primitivas de $f(x)=x^2\,dx$
e $f(x)=dx$.

4) Qual a primitiva de $f(x)=x^{\alpha}dx$, onde $\alpha\neq -1$, é um real fixo.

5) Determine as primitivas de $f(x)=x^3dx$
$g(x)=\frac{1}{x^2}dx$

6) Determine a primitiva de $h(x)=\sqrt[3]{x^2}\,dx$.

7) Qual a primitiva de $f(x)=x^5+\frac{1}{x^3}+4$.

Obs.: Primitivas de x^{α} $\begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+K & \text{se } \alpha\neq -1 \\ \ln x+K & \text{se } \alpha=-1 \\ & (x>0). \end{cases}$

Primitiva $e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}\cdot e^{\alpha x}+K$.

8) Determine as primitivas de $f(x)=e^{x}$
$g(x)=e^{2x}$

9) Notação de Leibnitz $\frac{dy}{dx}=x^2$ $dy=x^2dx \Rightarrow \boxed{y=\frac{x^3}{3}}$ Primitiva.

Exemplo 8. Guidorizzi. p. 79.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } x \geq 1 \\ 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$ é contínua em $x=1$? Justifique.

Intui

---

15) Uma partícula desloca sobre o eixo Ox e sabe-se que no instante t, $t \geq 0$, a velocidade é $v(t) = 2t+1$. Sabe-se ainda, que no instante $t=0$ a partícula encontra-se na posição $x=1$. Determine a posição $x = x(t)$ da partícula no instante t.

$$\frac{dx}{dt} = 2t+1$$

$$1\,dx = 2t+1\,dt$$

$$x = t^2+t+C$$

se $C = 1$ quando $t=0 \Longrightarrow x = 1$

$\therefore$ $\boxed{x(t) = t^2+t+1.}$

---

14) Determine se a função $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x+1, \quad y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 0$$

$\frac{dy}{dx}$ = primitiva de $x+1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + x + K_1$

$y'(0) = 0 \Longrightarrow K_1 = 0$ logo $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + x$

$dy = \frac{x^2}{2} + x\,dx \Longrightarrow y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + K_2$

$K_2 = 1 \Longleftarrow y(0) = 1.$

Exercícios Riemann.

1) Use a regra do ponto médio c/ $n=5$ para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

2) Calcular a soma de Riemann para $f(x)=x-1$, $-6\leq x\leq 4$, com 5 intervalos, tomando os pontos amostrais c/ as extremidades à direita. Explique com a ajuda de um diagrama o que representa a soma de Riemann.

3) Se $f(x)=x^2-4$, $0\leq x\leq 3$, calcule a soma de Riemann com $n=6$, tomando como pontos amostrais os pontos médios de cada subintervalo. Ilustre.

4) Use a Regra do Ponto Médio com o valor dado n para aproximar a integral. Arredonde a resposta para quatro casas decimais.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx,\ n=4.$$

$$\int_1^5 x^2\cdot e^{-x}\,dx,\ n=5.$$

5) Use um SAC para fazer uma tabela dos valores das somas de Riemann à direita R_n para a integral.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \quad c/ \begin{cases} n=5 \\ n=10 \\ n=50 \end{cases} \text{ e } n=100.$$

6) Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1+x_i} \cdot \Delta x \;,\quad [0,1].$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln(1+x^2) \cdot \Delta x \;,\quad [2,6]$$

7) Use a forma da definição de integral dada no Teorema do Limite para calcular as seguintes integrais.

Teorema. Se f for integrável em $[a,b]$ então:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x.$$

onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i \cdot \Delta x$.

a) $\int_{-1}^{5} (1+3x)\,dx.$

b) $\int_{-2}^{0} (x^2+x)\,dx$

c) $\int_{0}^{1} (x^3-3x^2)\,dx$

d) $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ (demonstre)

e) $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$ (demonstre)