AULA 6
Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

- Uma equação diferencial é uma equação que envolve as derivadas de uma ou mais funções.

- Uma equação diferencial emerge naturalmente a parir de um princípio físico geral.

- Em muitos casos, as funções apreendidas no estudo do cálculo diferencial e integral vão compor o método de determinação de soluções de problemas físicos.

Alguns conceitos importantes:

- Variáveis dependentes e independentes => A variável objeto da diferencial é dita variável independente da equação diferencial. As variável desconhecida que é objeto de diferenciação em relação à variável independente é dita dependente. Outras variáveis que possam ocorrer na ED são chamada de parâmetros.

- Equação diferencial ordinária (EDO) => se a função incognita depende de apenas uma variável independente.
- Equação diferencial parcial (EDP) => se a função incognita depende de mais de uma variável independente.

AULA 6
Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Alguns conceitos importantes:

- Ordem de uma ED => é a ordem da mais alta derivada que nela pode ser identificada.
- Grau de uma ED => é a potência a que se acha elevada a derivada de mais alta ordem.
- Linearidade => uma EDO de ordem n na função incognita y e na variável independente x é linear se tem a forma:

$$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+b_1(x)\frac{dy}{dx}+b_o(x)\,y=g(x)$$

- Solução => de uma ED na função incognita y e na variável independente x, no intervalo I, é uma função y(x) que verifica identicamente a equação para todo x em I.
  Exemplo:
  $y(x) = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x)$ com C_1 e C_2 constantes arbitrárias, é solução de
  $y'' + 4y = 0$

AULA 6

Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo:

$y(x) = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x)$ com C_1 e C_2 constantes arbitrárias, é solução de

$y'' + 4y = 0$

```
sage: var('c1,c2,x')
(c1, c2, x)
sage: y=c1*sin(2*x)+c2*cos(2x)
  File "<ipython-input-2-32fb096e5eeb>", line 1
    y=c1*sin(Integer(2)*x)+c2*cos(2x)
                                   ^
SyntaxError: invalid syntax

sage: y=c1*sin(2*x)+c2*cos(2*x)
sage: y
c2*cos(2*x) + c1*sin(2*x)
sage: tutorial()
sage: diff(y,x)
2*c1*cos(2*x) - 2*c2*sin(2*x)
sage: y' = diff(y,x)
  File "<ipython-input-7-e8b6a51d6f37>", line 1
    y' = diff(y,x)
                 ^
SyntaxError: EOL while scanning string literal

sage: yl = diff(y,x)
sage: yl
2*c1*cos(2*x) - 2*c2*sin(2*x)
sage: yll = diff(yl,x)
sage: yll
-4*c2*cos(2*x) - 4*c1*sin(2*x)
sage: yll+4*y
0
```

AULA 6

Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo Físicos:

DE	indep vars	dep vars	order	linear?
$mx'' + kx' = mg$ falling body	t	x	2	yes
$mv' + kv = mg$ falling body	t	v	1	yes
$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ heat equation	t, x	u	2	yes
$mx'' + bx' + kx = f(t)$ spring equation	t	x	2	yes
$P' = k(1 - \frac{P}{K})P$ logistic population equation	t	P	1	no
$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$ wave equation	t, x	u	2	yes
$T' = k(T - T_{room})$ Newton's Law of Cooling	t	T	1	yes
$x' = -Ay,\ y' = -Bx,$ Lanchester's equations	t	$x,\ y$	1	yes

AULA 6

Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo: Solução por tentaivas.

Seja a equação diferencial x' + x = 1, encontre por tentativas a função x(t) que é solução para a ED.

- Guess $x(t) = \sin(t)$. Compute $(\sin(t))' + \sin(t) = \cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(t) = e^t$. Compute $(e^t)' + e^t = 2e^t$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(t) = t^2$. Compute $(t^2)' + t^2 = 2t + t^2$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(-t) = e^{-t}$. Compute $(e^{-t})' + e^{-t} = 0$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(t) = 1$. Compute $(1)' + 1 = 0 + 1 = 1$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *true*.

We finally found a solution by considering the constant function $x(t) = 1$. Here a way of doing this kind of computation with the aid of the computer algebra system Sage :

```
sage: t = var('t')
sage: de = lambda x: diff(x,t) + x - 1
sage: de(sin(t))
cos(t) + sin(t) - 1
sage: de(exp(t))
2*e^t - 1
sage: de(t^2)
t^2 + 2*t - 1
sage: de(exp(-t))
-1
sage: de(1)
0
```

AULA 6

Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo: Solução por tentaivas.

Seja a equação diferencial x' + x = 1, encontre por tentativas a função x(t) que é solução para a ED.

- Guess $x(t) = \sin(t)$. Compute $(\sin(t))' + \sin(t) = \cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(t) = e^t$. Compute $(e^t)' + e^t = 2e^t$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(t) = t^2$. Compute $(t^2)' + t^2 = 2t + t^2$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(-t) = e^{-t}$. Compute $(e^{-t})' + e^{-t} = 0$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *false*.
- Guess $x(t) = \exp(t) = 1$. Compute $(1)' + 1 = 0 + 1 = 1$. $x'(t) + x(t) = 1$ is *true*.

We finally found a solution by considering the constant function $x(t) = 1$. Here a way of doing this kind of computation with the aid of the computer algebra system Sage :

```
sage: t = var('t')
sage: de = lambda x: diff(x,t) + x - 1
sage: de(sin(t))
cos(t) + sin(t) - 1
sage: de(exp(t))
2*e^t - 1
sage: de(t^2)
t^2 + 2*t - 1
sage: de(exp(-t))
-1
sage: de(1)
0
```

AULA 6
Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo: Problema de valor inicial e de contorno.

Um *problema de valor inicial* consiste em uma equação diferencial, juntamente com condições subsidiárias relativas à função incognita e suas derivadas – tudo dado para um mesmo valor da variável independente.

Se condições subsidiárias são *condições iniciais* e as condições se referem a mais de um valor da variável independente, é um *problema de valores de contorno*, e as condições dizem-se *condições de contorno*.

Uma solução de um problema de valor inicial, ou de valores de contorno, é uma função y(x) que satisfaz a equação diferencial dada e as condições subsidiárias.

Exemplo de problema de *valor inicial*:
A equação diferencial $y'' + 2y' = e^x$; $y(\pi) = 1$, $y`(\pi) = 2$ é um problema de valor inicial pois as duas condições subsidiárias são dadas no ponto $x = \pi$.

Exemplo de problema de *valores de contorno*:
A equação diferencial $y'' + 2y' = e^x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ é um problema de valores no contorno pois as condições subsidiárias são dadas nos pontos $x = 0$ e $x=1$.

AULA 6
Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo: Problema de valor inicial e de contorno.

Seja a ED

$$x' + x = 1, \text{ com } x(0) = 1$$

um problema de valor inicial. Uma vz que a função x(t) = 1 é solução para a ED determinar se a função dada verifica a condição de valor inicial proposta.

```
sage: help(desolve)

sage: x = var('x')
sage: x
x
sage: y = function('y')(x)
sage: y
y(x)
sage: de=desolve(diff(y,x) + y - 1, y)
sage: de
(_C + e^x)*e^(-x)
sage: de(0)
1
```

Conclusion: The command desolve is a DE solver in Sage

AULA 6
Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exemplo: Problema de valor inicial e de contorno.

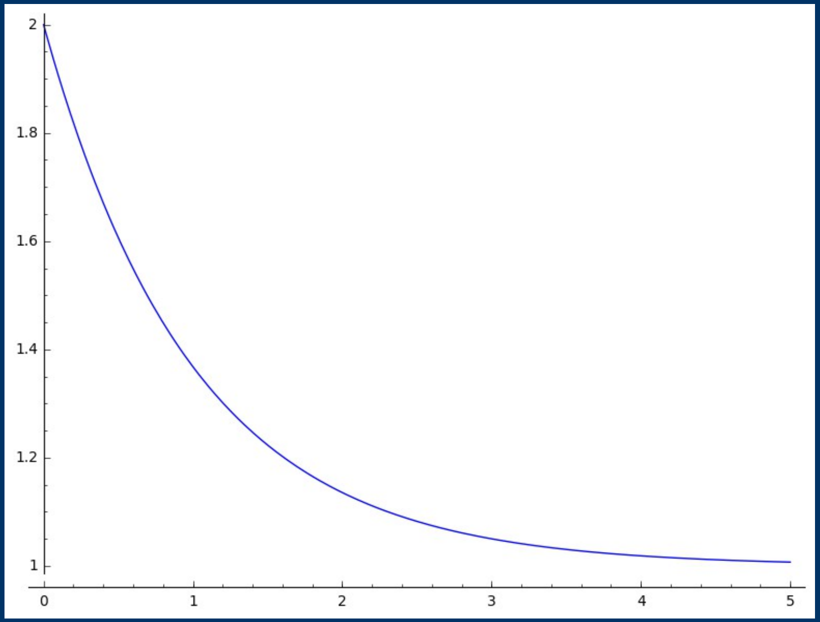
Seja a ED

$$x' + x = 1, \text{ com } x(0) = 2$$

um problema de valor inicial. Determine a para a ED a partir da condição de valor inicial dada e grafique a sua resposta.

```
sage: t = var('t')
sage: x = function('x')(t)
sage: x
x(t)
sage: de = lambda y: diff(y,t) + y - 1
sage: de
<function <lambda> at 0x6fe6eaf9b90>
sage: x0 = 2 # this is forthe IC x(0) = 2
sage: x0
2
sage: soln = desolve(de(x),[x,t],[0,x0])
sage: soln
(e^t + 1)*e^(-t)
sage: solnx = lambda s: RR(soln.subs(t=s))
sage: solnx
<function <lambda> at 0x6fe6e87faa0>
sage: P = plot(solnx,0,5)
sage: soln; show(P)
(e^t + 1)*e^(-t)
Launched png viewer for Graphics object
consisting of 1 graphics primitive
```

$$x(t) = (e^t + 1)e^{-t} = 1 + e^{-t}$$



AULA 6

Solução de equações diferenciais (ED) de primeira ordem.

Exercises:

1. Verify that $x = t^3 + 5$ is a solution to the differential equation $x' = 3t^2$.

2. Subsitute $x = e^{rt}$ into the differential equation $x'' + x' - 6x = 0$ and determine all values of the parameter r which give a solution.

3. (a) Verify the, for any constant c, the function $x(t) = 1 + ce^{-t}$ solves $x' + x = 1$. Find the c for which this function solves the IVP $x' + x = 1$, $x(0) = 3$.

   (b) Solve

$$x' + x = 1, \quad x(0) = 3,$$

   using Sage .

References:

Granville, William; Joyner, David. **Differential Calculus and Sage**. Dispon[ivel em: https://wdjoyner.files.wordpress.com/2015/04/granville_calc1-sage_2009-08-15.pdf. Acesso em: 04 de ago. 2018.

SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.1), The Sage Developers, 2017, Dispon[ivel em: http://www.sagemath.org. Acesso em: 04 de ago. 2018.

Guidorizzi, H. L. . **Um Curso de Cálculo**, Volume 1. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2001.

Stewart, James. **Cálculo**, Volume 1 e 2. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Thomas, G.B.; Finney, R. L.; Weir, M. D.; Giordano, F. R. **Cálculo**, Volumes 1 e 2. Editora Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2002.

Piskunov. N. Cálculo Diferencial e Integral, Volumes 1 e 2. Editora livraria Lopes da Silva, Porto, 1986.