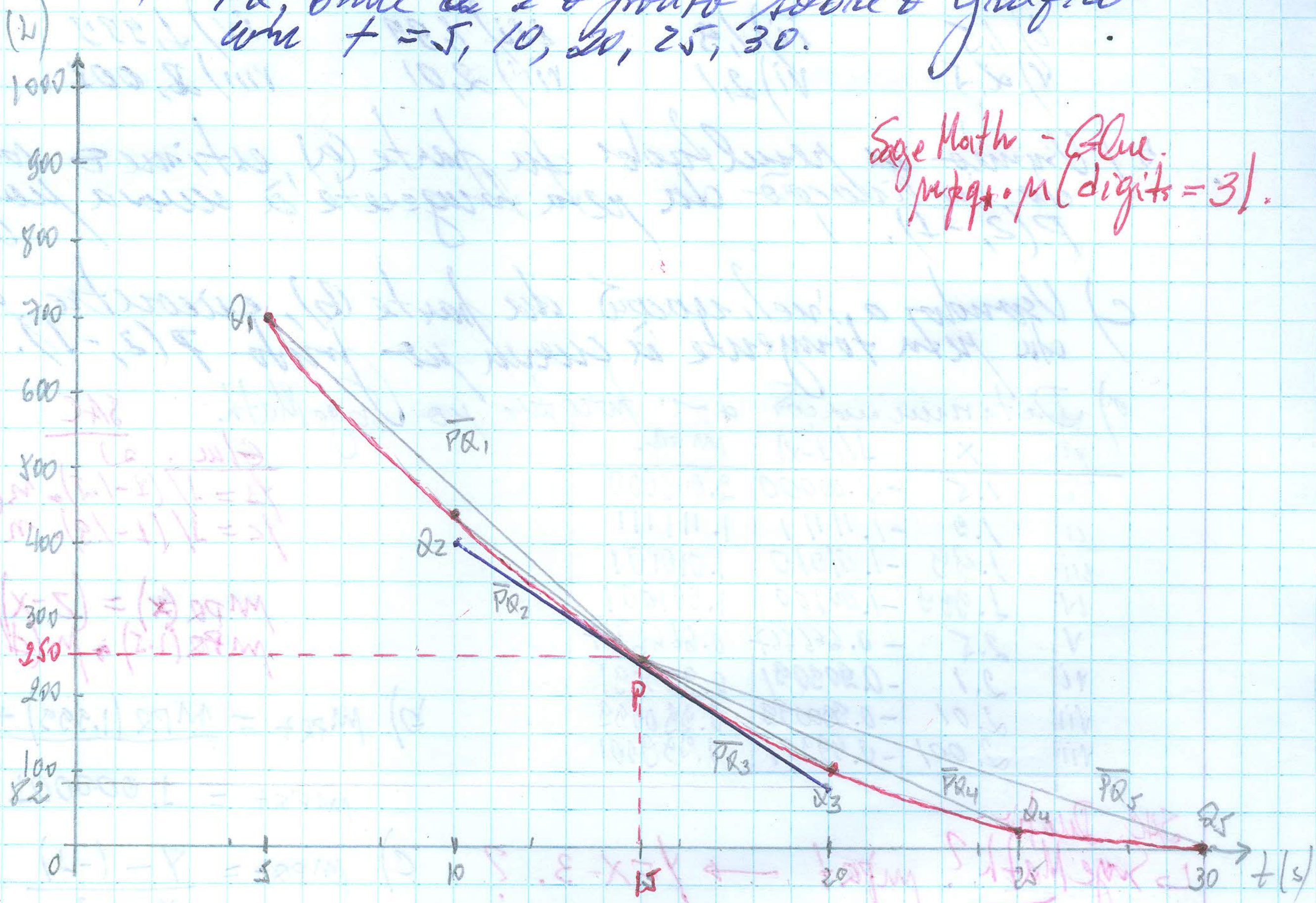
Stewart. Exercícios 2.1. (Ímpares).

1. Tanque de 1000 l drenado em 30 minutos. (Tabela 1)

t(min)	5	10	15	20	25	30
V (l)	694	444	250	111	28	0

a) $P(15, 250)$ encontrar as inclinações das retas secantes $\overline{PQ}$, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25, 30$.



SageMath - Blue
mpq*.n(digits=3).

Cálculo das inclinações das secantes

$$m_{\overline{PQ_1}} = -\frac{|694-250|}{|15-5|} = -\frac{222}{5} = -44.4$$

$$m_{\overline{PQ_2}} = -\frac{|444-250|}{|15-10|} = -\frac{194}{5} = -38.8$$

$$m_{\overline{PQ_3}} = -\frac{|250-111|}{|20-15|} = -\frac{139}{5} = -27.8$$

$$m_{\overline{PQ_4}} = -\frac{|250-28|}{|25-15|} = -\frac{111}{5} = -22.2$$

$$m_{\overline{PQ_5}} = -\frac{|250-0|}{|30-15|} = -\frac{50}{3} = -16.7$$

b) Estimar a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas secantes.

Secantes	média
$PQ_1 - PQ_2 = m_1$	$-208/5$
$PQ_1 - PQ_3 = m_2$	$-361/10$
$PQ_1 - PQ_4 = m_3$	$-333/10$
$PQ_1 - PQ_5 = m_4$	$-458/15$
$PQ_2 - PQ_3 = m_5$	$-333/10$
$PQ_2 - PQ_4 = m_6$	$-61/2$
$PQ_2 - PQ_5 = m_7$	$-416/15$
$PQ_3 - PQ_4 = m_8$	-25
$PQ_3 - PQ_5 = m_9$	$-667/30$
$PQ_4 - PQ_5 = m_{10}$	$-583/30$

média retas mais próximas

$$m = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_9 + m_{10}}{10}$$

$$m = -2248/75$$

(média todas as secantes.)

c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P.

$$m_t^{PQ} = -\frac{|400-82|}{|20-10|} = -\frac{159}{5} \cdot \frac{2}{2} = -\frac{318}{10}$$

2

2) O ponto $P(2,-1)$ está sobre a curva $y = \frac{1}{1-x}$.

a) Se Q é o ponto $\left(x, \frac{1}{1-x}\right)$, use um SAC para determinar a inclinação da reta secante $\overline{PQ}$, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

i) 1,5 ii) 1,9 iii) 1,99 iv) 1,999
v) 2,5 vi) 2,1 vii) 2,01 viii) 2,001.

b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto P(2, -1).

c) Usando a inclinação da parte (b), encontre uma eq. da reta tangente à curva no ponto P(2, -1).

a) Determinação dos pontos no SageMath.

pt	x	1/(1-x)	m pq.
i	1.5	-2.00000	2.000000
ii	1.9	-1.11111	1.111111
iii	1.99	-1.01010	1.010101
iv	1.999	-1.00100	1.001001
v	2.5	-0.666667	0.666667
vi	2.1	-0.909091	0.909091
vii	2.01	-0.990099	0.990099
viii	2.001	-0.99901	0.999001

SAC
Ex.
y1 = 1/(1-1.5).n(digits=6).
y2 = 1/(1-1.9).n(digits=6).

mpq(x) = (2-x)/((x-2)*(1-x))
mpq(1.5).n(digits=7)

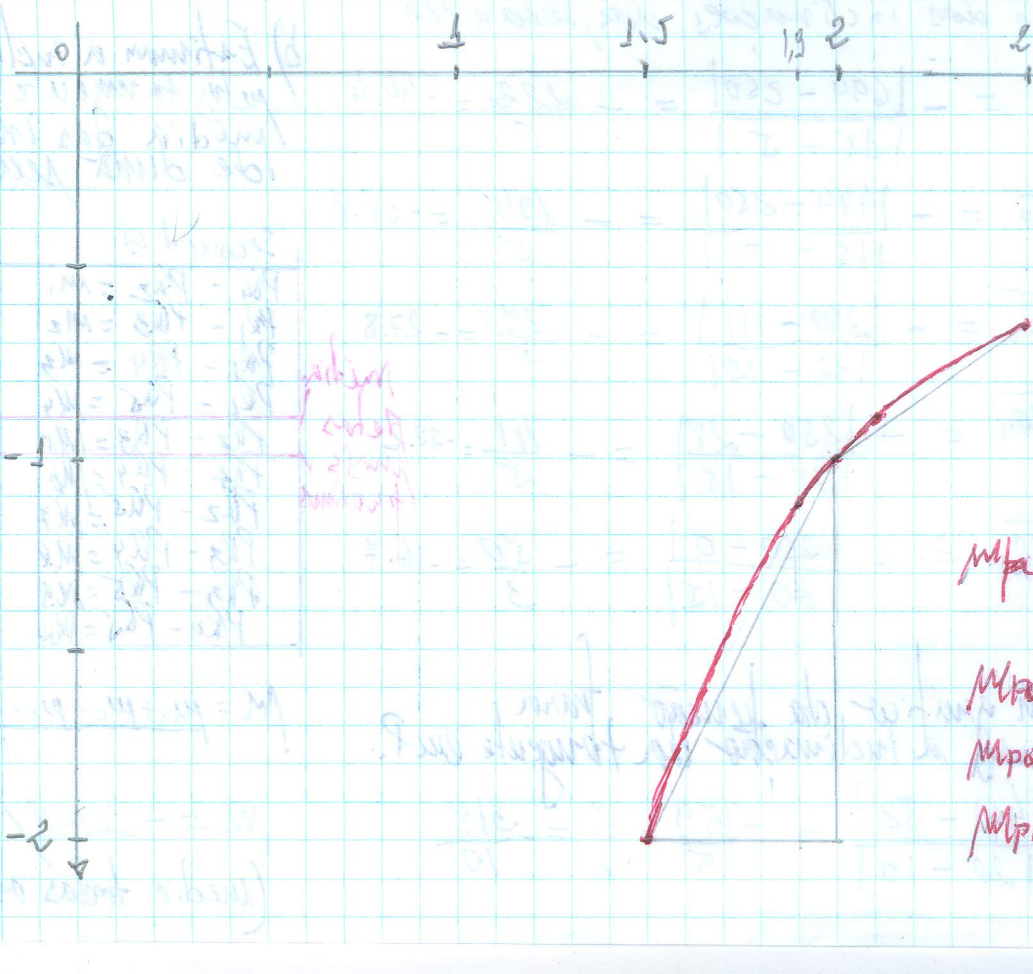
b) $m_{PQt} = \frac{m_{PQ}(1.999) + m_{PQ}(2.001)}{2}$

$m_{PQt} = 1,000001 \cong 1.$

SAC. Desafio.
↳ SageMath? mpqt ⟶ y = x - 3. ?

c) $m_{PQt} = \frac{y-(-1)}{x-2} \Rightarrow x - 2 = y + 1$

$\boxed{y = x - 3}$



SAC. Desafio.

$m_{pq} = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right) - (-1)}{(x-2)}$

$m_{pq} = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right) + 1}{x-2}$

$m_{pq} = \frac{(1+1-x)/(1-x)}{(x-2)}$

$m_{pq} = \frac{(2-x)}{(x-2).(1-x)}$

1) Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4.9t^2$.

a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5$ s e dura:

(i) 0,5 segundo (ii) 0,1 segundo
(iii) 0,05 segundo (iv) 0,01 segundo.

b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1,5$ segundo.

7) A tabela mostra a posição de um ciclista após acelerar à partir do repouso:

t segundo	0	1	2	3	4	5
s metros	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:

(i) [1, 3] (ii) [2, 3] iii [3, 5] (iv) [3, 4]

b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando t = 3 segundo.

Limite e Continuidade

1) Definição Precisa de Limite

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de f(x) quando x tende a a é L, e escrevemos.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

se para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

2) Definição de Limite à Esquerda.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

se para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } a-\delta < x < a \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

3) Definição de Limite à Direita

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

se para todo número $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } a < x < a+\delta \longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

4) Propriedade da Soma

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$.

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

Demonstração da Propriedade da Soma.

Seja $\epsilon > 0$ dado. Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) + g(x) - (L+M)| < \epsilon$$

Propriedades dos Limites. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$.

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M.$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. $\lim_{x\to a} [c . f(x)] = c . L.$

4. $\lim_{x\to a} [f(x) . g(x)] = L M.$

5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0.$

Demonstração da Propriedade 5.

Primeiro mostraremos que $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta \longrightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \epsilon$

Observe que $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|M g(x)|}$

Stewart p. A36: Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Porém, também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x está próximo de a.
Como o $\lim_{x\to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta_1$, temos.

$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$

e portanto $|M| = |M - g(x) + g(x)| \leq |M - g(x)| + g(x) < \frac{|M|}{2} + g(x)$

Isso mostra que

se $0 < |x - a| < \delta_1 \longrightarrow |g(x)| > \frac{|M|}{2}$

Então para esses valores de x,

$\frac{1}{|M . g(x)|} = \frac{1}{|M| . |g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$

Usando a desigualdade triangular.

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| = |(f(x)-L)+(g(x)-M)|$$

Desigualdade triangular $|a+b| \leq |a|+|b|$

logo $$|(f(x)-L)+(g(x)-M)| \leq |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

Podemos tornar $|f(x)+g(x)-(L+M)|$ menor que ϵ tornando cada um dos termos $|f(x)-L|$ e $|g(x)-M|$ menor que $\epsilon/2$

Uma vez que $\epsilon/2 > 0$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0<|x-a|<\delta_1 \longrightarrow |f(x)-L| < \epsilon/2$$

Analogamente, uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0<|x-a|<\delta_2 \longrightarrow |g(x)-M| < \epsilon/2$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, o menor dos números δ_1 e δ_2.

Observe que

$$\text{se } 0<|x-a|<\delta \longrightarrow 0<|x-a|<\delta_1$$

$$\text{e } \longrightarrow 0<|x-a|<\delta_2$$

e assim. $$|f(x)-L| < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad |g(x)-M| < \epsilon/2$$

Portanto, a partir da desigualdade triangular.

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| \leq |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

<u>Resumindo</u>: se $0<|x-a|<\delta \longrightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)| < \epsilon$

<u>Pela definição</u>: $$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = L+M.$$

Continuação da Prova Propriedade 5.

Além disso, há $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |g(x) - M| < \frac{M^2}{2} \cdot \epsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $0 < |x-a| < \delta$, temos.

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|M g(x)|} < \frac{2}{M^2} \cdot \frac{M^2}{2} \epsilon = \epsilon$$

Segue que $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$.

Finalmente, usando a propriedade 4, obtemos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

Teoremas: Provas: Stewart p. A37 – A39.

(I) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

então $L \leq M$.

(II) Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

(III) Se f for uma função contínua injetora de função em um intervalo (a, b), então sua função inversa f^{-1} é também contínua.

(IV) Se f for contínua em b e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b).$$

Exercícios Resolvidos:

1. Prove pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

a) $f(x) = 4x$ em $p = 2$

$\lim_{x \to 2} 4x = 8$

$f(2) = 4 \cdot 2 = 8$

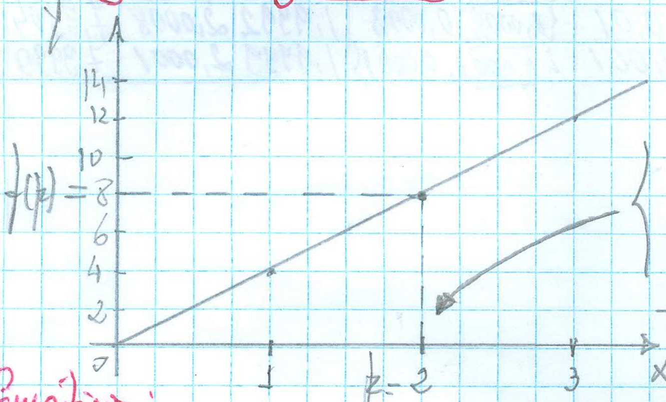
$\therefore \boxed{\delta > 0 \text{ ou } \delta \leq \epsilon/4}$

$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$ (contínua)

$|4x - f(2)| < \epsilon$

$|4x - 8| < \epsilon$

$|x - 2| < \delta \Leftrightarrow |x - 2| < \epsilon/4$



$\epsilon = 0{,}1 \Rightarrow \delta = 0{,}1/4 = 0{,}025$

ϵ	δ	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$
0,1	0,025	1,975	2,025	7,9	8,1
0,01	0,0025	1,9975	2,0025	7,99	8,01
0,001	0,00025	1,99975	2,00025	7,999	8,001
0,0001	$2{,}5 \times 10^{-5}$	1,99998	2,00003	7,9999	8,0001

Gráfico:

b) $f(x) = -3x$ em $p = 1$

$\lim_{x \to 1} -3x = -3$

$f(1) = -3$

$\therefore \boxed{\delta > 0 \text{ ou } \delta \leq \epsilon/3}$

$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$

ou

$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$

$(-1)\times \quad -3 - \epsilon < -3x < -3 + \epsilon$

$(3)\div \quad 3 + \epsilon > 3x > 3 - \epsilon$

$1 + \epsilon/3 > x > 1 - \epsilon/3$

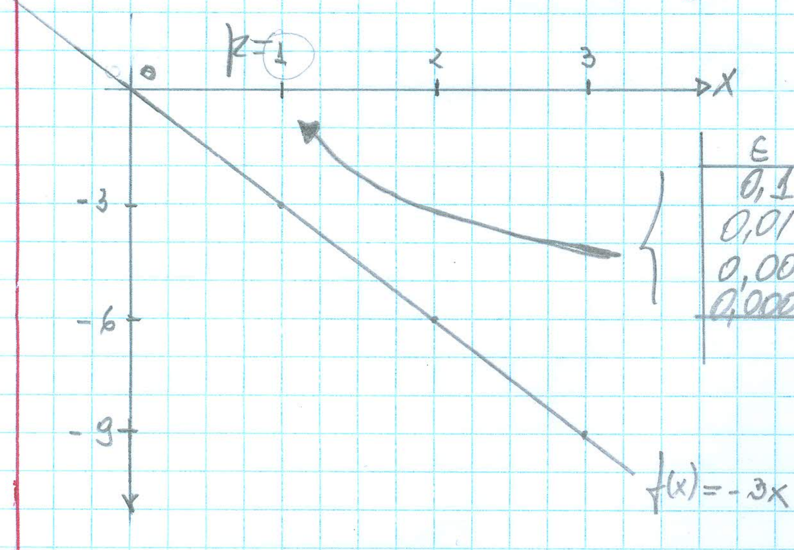
ou

$1 - \epsilon/3 < x < 1 + \epsilon/3$

$|x - 1| < \epsilon/3$

$1 - \delta < x < 1 + \delta$

$|x - 1| < \delta$



ϵ	δ	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$
0,1	0,033	0,9667	1,0333	-3,1	-2,9
0,01	0,0033	0,9967	1,0033	-3,01	-2,99
0,001	0,0003	0,9997	1,0003	-3,001	-2,999
0,0001	3×10^{-5}	0,9999	1,0000	-3,001	-2,9999

c) $f(x) = x^3$ em $p = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$ $\quad f(2) = 8 \quad$ $f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$

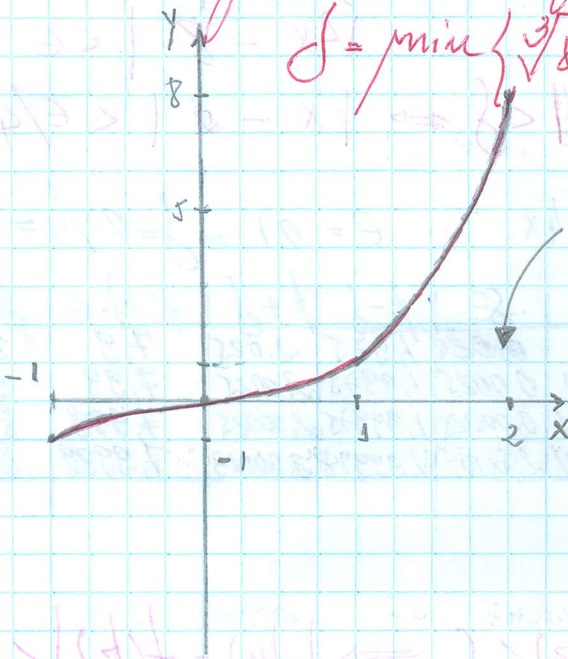
$8 - \epsilon < x^3 < 8 + \epsilon$

$\sqrt[3]{8-\epsilon} < x < \sqrt[3]{8+\epsilon}$

tomando o intervalo: $I = \left]\sqrt[3]{8-\epsilon}, \sqrt[3]{8+\epsilon}\right[$, $2 \in I$

Logo $x \in I \Rightarrow f(2) - \epsilon < f(x) < f(2) + \epsilon$

$\delta = \min\left\{\sqrt[3]{8+\epsilon} - 2,\ 2 - \sqrt[3]{8-\epsilon}\right\}$



ϵ	δ min	$p - \delta$	$p + \delta$	$f(p) - \epsilon$	$f(p) + \epsilon$
0,1	{0,0083, 0,0084}	1,9917	2,0083	7,9	8,1
0,01	{0,0008, 0,0008}	1,9992	2,0008	7,9904	8,0096
0,001	{0,0001, 0,0001}	1,9999	2,0001	7,9990	8,0012

d) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 1$.

Exemplo 1. Prove que $f(x) = 2x+1$ é contínua em $p=2$.

Precisamos provar que, para cada $\epsilon > 0$ dado, temos um $\delta > 0$ (δ dependendo apenas de ϵ), tal que

$$2-\delta < x < 2+\delta \Rightarrow f(2)-\epsilon < f(x) < f(2)+\epsilon$$

i) O $\epsilon > 0$ é dado, queremos achar $\delta > 0$

ii) Devemos determinar $\delta > 0$ de modo que $f(x)$ permaneça entre $f(2)-\epsilon$ e $f(2)+\epsilon$ para x entre $2-\delta$ e $2+\delta$.

Resolvendo a inequação $f(2)-\epsilon < f(x) < f(2)+\epsilon$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

$$5-\epsilon < 2x+1 < 5+\epsilon$$
$$(5-1)-\epsilon < 2x < (5-1)+\epsilon$$
$$4-\epsilon < 2x < 4+\epsilon$$
$$2-\frac{\epsilon}{2} < x < 2+\frac{\epsilon}{2}$$

Então, dado $\epsilon > 0$ e tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ (qualquer $\delta > 0$ com $\delta < \frac{\epsilon}{2}$) resulta em.

$$2-\delta < x < 2+\delta \Rightarrow f(2)-\epsilon < f(x) < f(2)+\epsilon$$

Em notação modular:

Precisamos provar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \epsilon$$

temos que:

$$|f(x) - f(2)| < \epsilon \Leftrightarrow |2x+1-5| < \epsilon$$
$$|2x-4| < \epsilon$$
$$|x-2| < \epsilon/2 .$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon/2$

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \epsilon$$

logo, f é contínua em $p=2$.

Exemplo 2. A função afim $f(x) = ax + b$ (a e b constantes) é contínua.

Solução: Se $a = 0$, $f(x) = b$ é uma função constante.

Uma função constante é contínua?

Solução: $|f(x) - f(p)| = |b - b| = 0$ para todo x e todo p; assim dado $\epsilon > 0$ e tomando-se um δ qualquer

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| = |b - b| < \epsilon$$

Logo, f é contínua em p, $\forall$ que seja o p. Como f é contínua em todo p de seu domínio, resulta que $f(x) = b$ é contínua.

Suponhamos, então $a \neq 0$. Temos:

$$|f(x) - f(p)| = |ax + \cancel{b} - ap - \cancel{b}| = |a| \cdot |x - p|$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$ dado

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \Leftrightarrow |x - p| < \frac{\epsilon}{|a|}$$

Tomando-se, então, $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

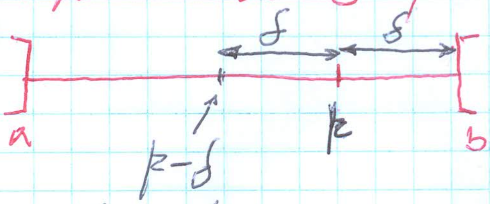
Logo f é contínua em p. Como p foi tomado de modo arbitrário, resulta que f é contínua em todo p real, isto é, f é contínua.

<u>Observação sobre o mínimo:</u>

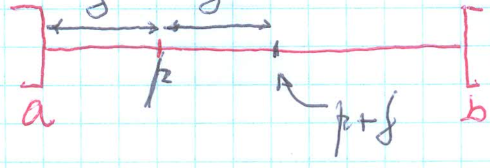
Se $p \in \,]a, b[$, a e b reais $\longrightarrow \exists\, \delta > 0 \mid \,]p - \delta, p + \delta[\, \subset \,]a, b[$

Basta tomarmos $\delta = \min\{b - p, p - a\}$

Exemplo:



$b = p + \delta$ $\quad \therefore \delta = b - p$



$p - \delta = a$ $\quad \therefore \delta = p - a.$

Para todo caso

$$\boxed{\delta = \min\{b - p, p - a\}}$$

Limites Infinitos:

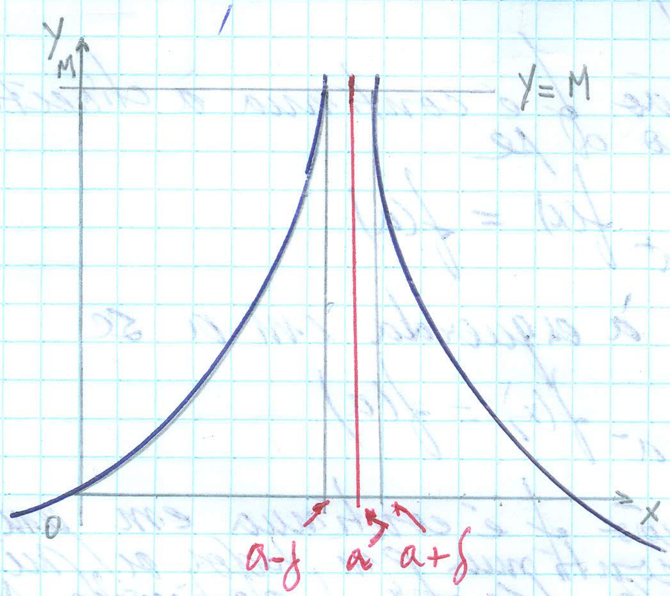
Definição: Seja uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que, para todo número positivo M, há um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow f(x) > M.$$

Ilustração Geométrica.



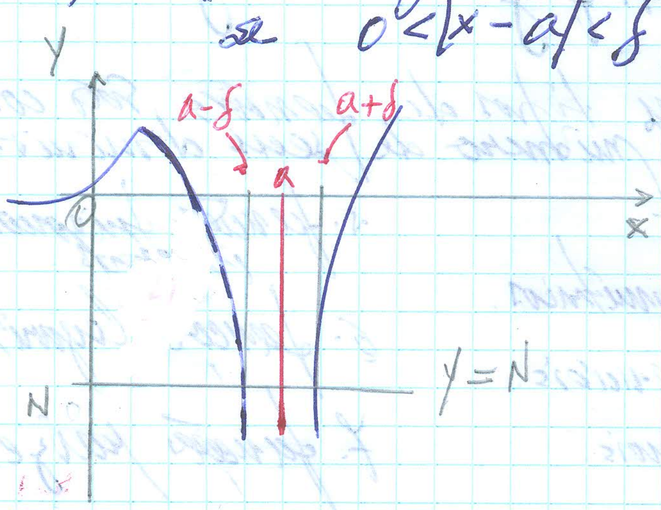
Dada qualquer reta horizontal $y = M$, podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se restringirmos x a ficar no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, mas $x \neq a$, então a curva $y = f(x)$ ficará acima da reta $y = M$.

Definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que para todo número negativo N há um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow f(x) < N$$



Continuidade

Definição: Uma função f é contínua em um número a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Implicitamente a definição requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definição: Uma função f é contínua à direita em um número a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é contínua à esquerda em a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Definição: Uma função f é contínua em um intervalo se for contínua em todos os números do intervalo. (Se for f definida somente de um lado da extremidade do intervalo entendemos continuidade na extremidade como continuidade à direita ou à esquerda.)

Teorema: Se f e g forem contínuas em a e c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f+g$
2. $f-g$
3. $c.f$
4. $f.g$
5. $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$.

Teorema: Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios.

1. polinômios.
2. funções trigonométricas.
3. " exponenciais.
4. " racionais.
5. funções trigonométricas inversas.
6. funções logarítmicas.
7. funções raízes.

Exemplo de Descontinuidade:

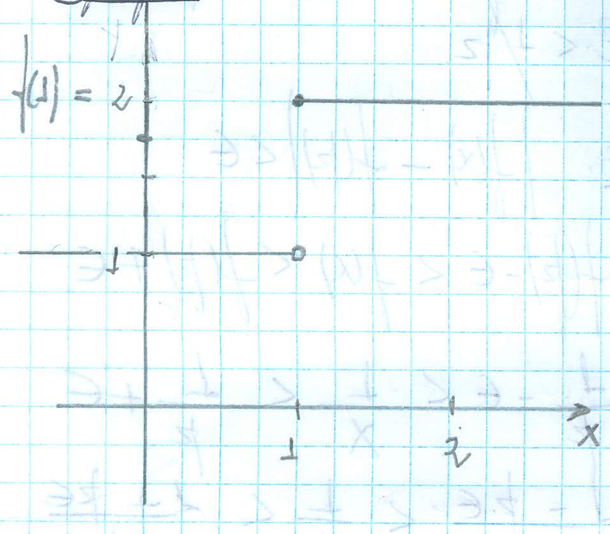
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$ é contínua em $p = 1$? Justifique.

Intuitivamente, f não é contínua no ponto pois o gráfico apresenta um salto.

Para provar que f não é contínua em $p=1$, precisamos achar um $\epsilon > 0$ para o qual não existe $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação:

$$\text{"}\forall x \in D_f,\ 1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon\text{"}$$

Gráfico:



Como $f(x) = 1$ para $x < 1$ e $f(1) = 2$

tomando-se $\epsilon = 1/4$ (ou $0 < \epsilon < 1$), para todo $\delta > 0$

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

e 1 não está entre

$$f(1) - \epsilon < f(x) < f(1) + \epsilon$$

$$2 - \frac{1}{4} < 1 < 2 + \frac{1}{4}$$

$$7/4 < 1 < 9/4 \quad \text{(F)}$$

$\therefore$ Logo não existe $\delta > 0$ que torna verdadeira a afirmação

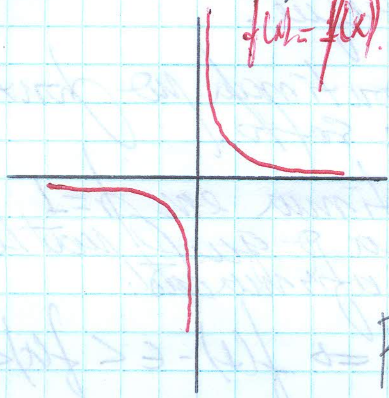
$$\text{"}\forall x \in D_f,\ 1 - \delta < x < 1 + \delta \rightarrow f(1) - \frac{1}{4} < f(x) < f(1) + \frac{1}{4}\text{"}$$

Portanto, a função não é contínua em $p = 1$.

Falta realizar a aproximação a partir de valores de ϵ estimados. Fica como exercício.

Outro Exemplo de Descontinuidade:

Prove que $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.



Para todo $\epsilon > 0$, $x \neq 0$ e $p \neq 0$

$$\frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon$$

$$\frac{1 - \epsilon p}{p} < \frac{1}{x} < \frac{1 + \epsilon p}{p}$$

Para $p > 0$ e $1 - \epsilon p > 0$ podemos concluir que

$$1 - \epsilon p > 0 \Rightarrow -\epsilon p > -1 \Rightarrow \epsilon p < 1$$

$$\epsilon < 1/p$$

Propriedade:

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{d}{c} < \frac{b}{a}}$$

Logo: $|f(x) - f(p)| < \epsilon$

$$\Longleftrightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon$$

$$f(p) = \frac{1}{p} \Longrightarrow \frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon$$

$$\frac{1 - p\epsilon}{p} < \frac{1}{x} < \frac{1 + p\epsilon}{p}$$

Logo: $\frac{p}{1+\epsilon p} < \frac{x}{1} < \frac{p}{1-\epsilon p} \Longleftrightarrow \frac{p}{1+\epsilon p} < x < \frac{p}{1-\epsilon p}$.

Então: Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < 1/p$, $(p > 0)$, e tomando

$$I = \left] \frac{p}{1+\epsilon p}, \frac{p}{1-\epsilon p} \right[, \quad p \in I, \; x \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ é contínua em } p > 0.$$

Exemplo Numérico: $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $p = 2$?

$\lim_{x \to 2} 1/x = 1/2$.

$f(2) = 1/2$

$$\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} + \epsilon \Rightarrow \frac{2}{1+2\epsilon} < x < \frac{2}{1-2\epsilon}$$

ϵ	δ_{min}	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p+\epsilon)$
0,1	{1,6667, 2,5000}	0,3333	3,6667	3,0003	0,2727
0,01	{1,9608, 2,0408}	0,0392	3,9608	25,5102	0,2525
Como $\epsilon < 1/2 \Rightarrow \epsilon < 0,5$					
0,25	{1,3333, 4,0000}	0,6667	3,3333	1,5000	0,3000
0,20	{1,4286, 3,3333}	0,5714	3,4286	1,7500	0,2917
0,15	{1,5385, 2,8571}	0,4617	3,5385	2,1667	0,2826

Teorema do Valor Médio: (TVM)

Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1) f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$

2) f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$

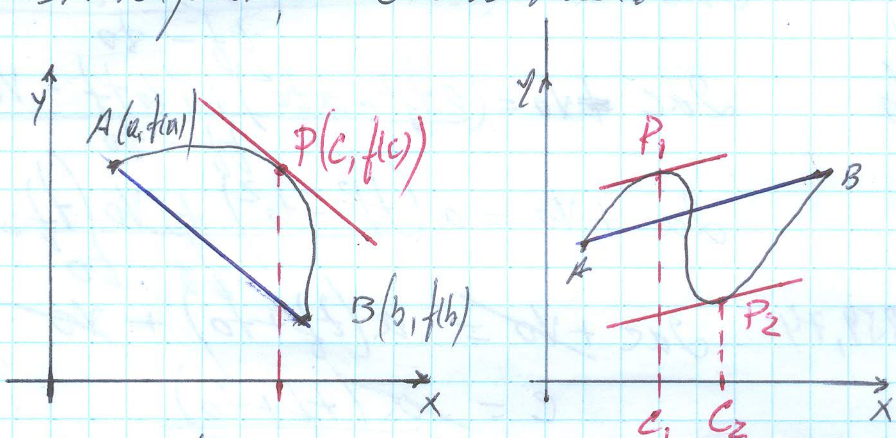
Então, existe um númer c em (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (I)$$

ou de maneira equivalente.

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) \qquad (II)$$

Interpretação Geométrica:



$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração: Stewart p. 252-253

Aplicações: 1) $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Uma vez que f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{contínua em } [0, 2] \\ \text{derivável em }]0, 2[\end{cases}$

Pelo TVM, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \qquad \begin{cases} f(2) = 6 \\ f(0) = 0 \\ f'(x) = 3x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{o} 6 - 0 = (3 \cdot c^2 - 1) \cdot (2 - 0)$$

$$6 = 2 \cdot (3c^2 - 1)$$

$$6c^2 = 8$$

$$c^2 = 8/6$$

$$c = \pm 2/\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ como c deve estar entre 0 e 2 $\Rightarrow$ $\boxed{c = +2/\sqrt{3}}$

Gráfico?

2) Se um objeto move-se em linha reta com uma equação posição $s = f(t)$ então a velocidade média entre $t=a$ e $t=b$ é

$$V_m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ e a velocidade instantânea em um ponto $t=c$ é $f'(c)$.

Assim pelo TVM (na forma da Equação 1) existe um instante $t=c$ entre a e b onde a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média.

Seja a função $s = s_0 + v_0 t + at^2$ uma função $s = f(t)$.

Determine a equação que estabelece o ponto c para o qual a v_m = v instantânea

$b = t_f$

$a = t_0$

$s'(t) = 2at + v_0$

$s'(c) = 2ac + v_0$

$s'(c) = V_m$.

$2 \cdot 90 \cdot c + 50 = 3.859,74$

$s'(t) = V_m$

$$2ac + v_0 = \frac{(at_f^2 + v_0 t_f + \cancel{s_0}) - (at_0^2 + v_0 t_0 + \cancel{s_0})}{t_f - t_0}$$

$$2ac + v_0 = \frac{(at_f^2 - at_0^2) + (v_0 t_f - v_0 t_0)}{t_f - t_0}$$

$$2ac + v_0 = \frac{a(t_f^2 - t_0^2) + v_0(t_f - t_0)}{t_f - t_0}$$

$$2ac + \cancel{v_0} = a(t_f + t_0) + \cancel{v_0}$$

$$c = \frac{\cancel{a}(t_f + t_0)}{2\cancel{a}}$$

$$\boxed{c = \frac{t_f + t_0}{2}}$$

Exercício:

3) Às 14hs da tarde o velocímetro de um carro mostra 50 Km/h. Às 14:10h, ele mostra 65 Km/h, prove que em algum momento durante a corrida entre 14h e 14:10hs a aceleração era exatamente de 90 Km/h².

4) Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida, eles tinham a mesma velocidade.

[Dica, Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde g e h são as duas posições dos corredores.

O teorema do Valor Médio pode estabelecer alguns fatos básicos do cálculo diferencial.

Teorema. Se $f'(x)=0$ para todo x em um intervalo (a,b), então f é constante em (a,b).

Prova: Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em (a,b) e $x_1 < x_2$

Como f é derivável em $(a,b) \Rightarrow \begin{cases} \text{derivável em } (x_1,x_2) \\ \text{contínua em } [x_1,x_2] \end{cases}$

Aplicando o TVM no intervalo.

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2-x_1).$$

Uma vez que $f'(x)=0$ para todo x, $\Rightarrow f'(c)=0$.

Logo $f(x_2)-f(x_1)=0$ ou $f(x_2)=f(x_1) \Rightarrow$ função constante.

Corolário: Se $f'(x)=g'(x)$ para todo x em um intervalo (a,b), então $f-g$ é constante em (a,b); isto é $f(x)=g(x)+c$, onde c é uma constante

Prova: Seja $F(x)=f(x)-g(x)$, então.

$$F'(x) = f'(x)-g'(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ em } (a,b)$$

Assim pelo teorema, F é constante.

ou seja $f(x)-g(x) = \text{constante}$.

* Cuidado ao aplicar o teorema.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

O Domínio de f é $D=\{x \mid x\neq 0\}$ e $f'(x)=0$ para todo x em D.

Ocorre que nesse caso f não é uma função constante.

Isso não contradiz o teorema, uma vez que o domínio não é um intervalo.

Observar que f é constante no intervalo $(0,\infty)$ e também no intervalo $(-\infty,0)$ e indeterminada no ponto $x=0$.

Primitivas.

Definição. Uma função F é denominada uma primitiva de f num intervalo I se

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

Por exemplo: $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$f(x) = F'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2$$

Entretanto: $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também é resposta para o problema.

uma vez que $G'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} + 0 = x^2 = f(x)$.

Na verdade, qualquer função na forma

$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ é resposta para o problema

dado que $\boxed{f(x) = H'(x) = x^2}$ C = constante.

Pelo TVM se duas funções tem a mesma derivada entre elas devem diferir por uma constante num intervalo.

ou seja $F'(x) = f(x) = G'(x)$

$\therefore G(x) - F(x) = C$, onde C é constante.

ou $G(x) = F(x) + C$

Teorema: Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

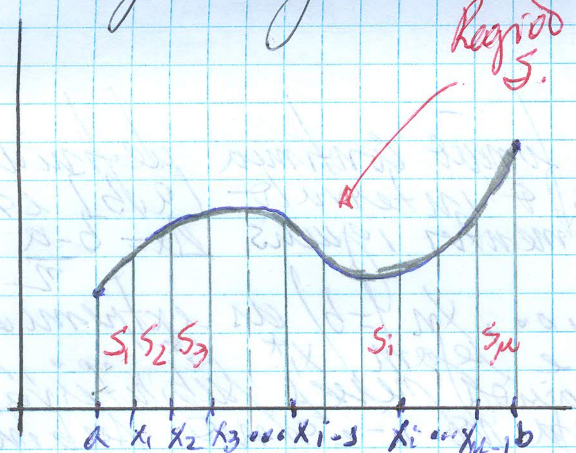
onde C é uma constante.

Tabela de Primitiva:

$c \cdot f(x)$	$c\,F(x)$	b^x	$\frac{b^x}{\ln b}$	$\sec(x)\,tg(x)$	$\sec(x)$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$				
$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$tg^{-1} x$
e^x	e^x	$\sec^2 x$	$tg\, x$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
				$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$

Integral de Riemann

Seja a seguinte curva:



A largura do intervalo $[a,b]$ é $b-a$, logo se chamarmos Δx de largura de cada faixa, teremos:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Dessa forma o intervalo $[a,b]$ pode ser dividido em n intervalos menores (subintervalos)

Assim,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \quad \text{onde} \begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \end{cases}$$

As extremidades direitas dos subintervalos são:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x \\ x_2 &= a + 2.\Delta x \\ x_3 &= a + 3.\Delta x \\ &\vdots \\ x_n &= a + n.\Delta x. \end{aligned}$$

Definição: A área da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes.

À direita

$$A \cong \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \ldots + f(x_n).\Delta x \right]$$

1) Como f é contínua o limite da definição existe

2) Um valor próximo encontraremos se utilizarmos as extremidades esquerdas, logo:

$$A \cong \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_0).\Delta x + f(x_1).\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x \right]$$

Podemos ainda utilizar o conceito de pontos amostrais, como pontos tomados aleatoriamente ao longo da distribuição, nesse caso:

$$A \cong \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1^*).\Delta x + f(x_2^*).\Delta x + \ldots + f(x_n^*).\Delta x \right]$$

Obs.: A é o único número (ponto médio ou ponto amostral) que é menor que todas as somas superiores (à direita) e maior que todas as somas inferiores (à esquerda).

Em notação de Somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \ldots + f(x_n).\Delta x$$

$$\begin{cases} A \cong \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x \\ A \cong \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1}).\Delta x \end{cases}$$

Ou ainda: $A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i^*).\Delta x.$

A integral Definida:

Definição: Se f é uma função contínua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Sejam $x_0 (=a), x_1, x_2, \ldots, x_n (=b)$ as extremidades desses subintervalos e sejam $x_1^*, x_i^*, \ldots x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Então a integral definida de f de a a b é:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x}$$

* desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a,b]$

Significado exato do limite que define a integral.

Para todo número $\epsilon > 0$ existe um inteiro N, tal que

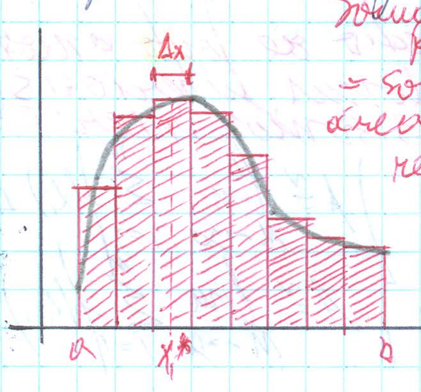
$$\left| \int_a^b f(x).dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).dx \right| < \epsilon$$

para todo inteiro $n > N$ e toda escolha de x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$

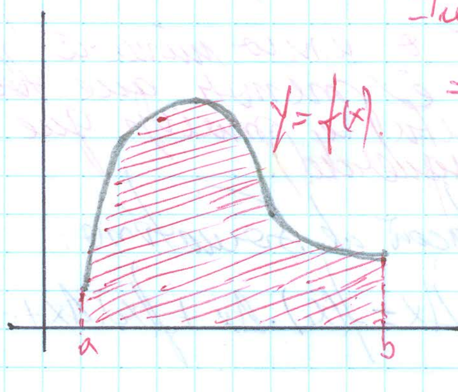
ou ainda

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).dx - \epsilon < \int_a^b f(x).dx < \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).dx + \epsilon$$

Assim, a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.



Soma de Riemann = soma da área de retângulos



Integral Definida = área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

Elementos de uma integral indefinida:

$\int_a^b f(x) \cdot dx$ $\quad \int \Rightarrow$ sinal de integração.

$f(x) \Rightarrow$ integrando.

a e $b \Rightarrow$ limites de integração $\begin{cases} a = \text{inf.} \\ b = \text{sup.} \end{cases}$

dx = não tem significado sozinho $\Rightarrow$ designa a variável de integração.

- Integração = procedimento para calcular a integral.

teorema. Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x.$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i \cdot \Delta x$.

Alguns somatórios importantes e propriedades.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot c = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{para } c = \text{constante.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Exemplo: Compare os valores obtidos para a Soma de Riemann à direita, à esquerda, pelo ponto médio amostral e a definição de integral para a função.

$f(x) = x^3 - 6x$ no intervalo $[a, b] = [0, 3]$.

c/ $n = 6$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 1/2 \qquad x_0 = a = 0 \qquad x_n = b = 3$$

I. Integral de Rieman à Esquerda

$$A_{Ln} = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x \dots\right]$$

$$A_{Ln} = \lim_{n\to 6}\left[f(x_0)\cdot\Delta x + \dots + f(x_5)\cdot\Delta x\right]$$

	$f(x)$
$x_0 = a = 0$	$f(0) = 0$
$x_1 = a+\Delta x = 1/2$	$f(1/2) = -23/8$
$x_2 = a+2\Delta x = 1$	$f(1) = -5$
$x_3 = a+3\Delta x = 3/2$	$f(3/2) = -45/8$
$x_4 = a+4\Delta x = 2$	$f(2) = -4$
$x_5 = a+5\Delta x = 5/2$	$f(5/2) = 5/8$

$$A_{Ln} = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{23}{8} - 5 - \frac{45}{8} - 4 + \frac{5}{8}\right) = -\frac{135}{16}$$

II. Integral de Riemann à Direita

$$A_{Rn} = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x \dots\right]$$

$$A_{Rn} = \lim_{n\to 6}\left[f(x_1)\cdot\Delta x + \dots + f(x_6)\cdot\Delta x\right]$$

	$f(x)$
$x_1 = a+\Delta x = 0+1/2 = 1/2$	$f(1/2) = -23/8$
$x_2 = a+2\cdot\Delta x = 0+2\cdot 1/2 = 1$	$f(1) = -5$
$x_3 = a+3\cdot\Delta x = 0+3\cdot 1/2 = 3/2$	$f(3/2) = -45/8$
$x_4 = a+4\cdot\Delta x = 0+4\cdot 1/2 = 2$	$f(2) = -4$
$x_5 = a+5\cdot\Delta x = 0+5\cdot 1/2 = 5/2$	$f(5/2) = 5/8$
$x_6 = a+6\Delta x = 0+6\cdot 1/2 = 3$	$f(3) = 9$

$$A_{Rn} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{23}{8} - 5 - \frac{45}{8} - 4 + \frac{5}{8} + 9\right) = -63/16$$

III. Integral de Rieman por Pontos Amostrais

$$A_{PA} = \lim_{n\to\infty} P_A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\cdot\Delta x + f(x_2^*) \dots\right]$$

$$A_{PA} = \lim_{n\to 6}\left[f(x_1^*)\cdot\Delta x + \dots + f(x_6^*)\cdot\Delta x\right]$$

$x_0 = 0$	$x_1^* = 1/4$	$f(x_1^*) = -95/64$
$x_1 = 1/2$	$x_2^* = 3/4$	$f(x_2^*) = -261/64$
$x_2 = 1$	$x_3^* = 5/4$	$f(x_3^*) = -355/64$
$x_3 = 3/2$	$x_4^* = 7/4$	$f(x_4^*) = -329/64$
$x_4 = 2$	$x_5^* = 9/4$	$f(x_5^*) = -135/64$
$x_5 = 5/2$	$x_6^* = 11/4$	$f(x_6^*) = 275/64$
$x_6 = 3$		

Obs.: $x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$

$$A_{PA} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{95}{64} - \frac{261}{64} - \frac{355}{64} - \frac{329}{64} - \frac{135}{64} + \frac{275}{64}\right)$$

$$A_{PA} = -225/32$$

IV. Conclusão

$$A_{Ln} < A_{PA} < A_{Rn}$$

$$-135/16 < -225/32 < -63/16$$

$$-8{,}4375 < -7{,}0313 < -3{,}9375$$

V. Gráfico:

Plotar os gráficos das respectivas de funções.

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f(x_i)\cdot\Delta x.$$

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = 0 + i\cdot\frac{3}{n} = \frac{3i}{n}.$$

VI. Cálculo da integral pelo limite

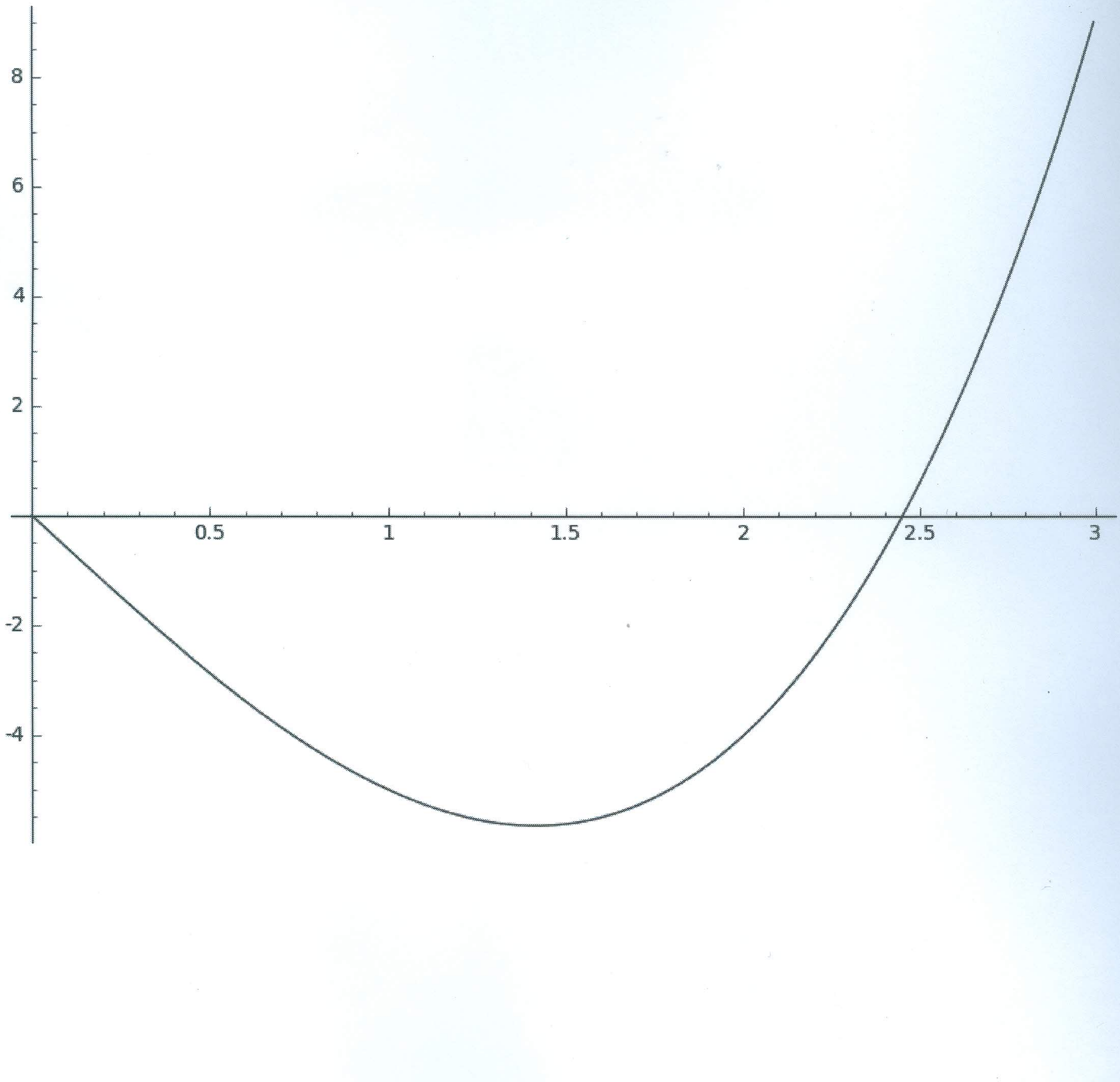
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(3i/n)\cdot(3/n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\cdot\left(\frac{3i}{n}\right)\right]\cdot\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{27\cdot i^3}{n^3} - \sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{81}{4} - 27 = -27/4 = \boxed{-6{,}75}$$

comparar.


8
6
4
2
-2
-4
0.5
1
1.5
2
2.5
3