Correcção por Exemplo Numérico:

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $p=2$?

$I = \left] \frac{p}{1+\epsilon p}, \frac{p}{1-\epsilon p} \right[, \; p \in I, \; x \in I. \quad p \in]a, b[$

$\delta_1 = b - p \longrightarrow \delta = \frac{p}{1-\epsilon p} - p = \frac{2}{1-\epsilon 2} - 2$

$\delta_2 = p - a \longrightarrow \delta = -\frac{p}{1+\epsilon p} + p = 2 - \frac{2}{1+\epsilon 2}$

$\delta_1 = \frac{2 - 2 \cdot (1-2\epsilon)}{1-2\epsilon} = \frac{\cancel{2} - \cancel{2} + 4\epsilon}{1-2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1-2\epsilon}$

$\delta_2 = 2 - \frac{2}{1+2\epsilon} = \frac{2 \cdot (1+2\epsilon) - 2}{1+2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$

$\delta_{min} = \{ b-p, p-a \} = \left\{ \frac{4\epsilon}{1-2\epsilon}, \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon} \right\}$

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = 1/2.$

ϵ	δ_{min}	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$	Obs.
0,1	{0.5 $\underline{0.3333}$}	1.6667	2.3333	0.6000	0.4286	
0,01	{* $\underline{0.0392}$}	1.961	2.039	0.5099	0.4904	* = 0,0408
0.001	{*, $\underline{0.00392}$}	1.996	2.004	0.5010	0.4990	* = 0.004008
0,0001	{*, $\underline{0.0003999}$}	2.000	2.000	0.5001	0.4999	* = 0.0004001

SageMath Cloud: e = var('e') x = var('x')

```
f1(e)=(4*e)/(1-2*e)
f1(e)
f2(e)=(4*e)/(1+2*e)
f2(e)
```
} funções para δ_{min}.

```
f1(0.1).n(digits=4)
f2(0.1).n(digits=4)
```
} Cálculo do δ_{min} para um e determinado.

```
2-f2(0.1).n(digits=4)
2+f2(0.1).n(digits=4)
```
$\longrightarrow$ Cálculo de $p-\delta_{min}$.
$\longrightarrow$ " de $p+\delta_{min}$.

```
f(x)=1/x
```
$\longrightarrow$ função problema

```
f(2-f2(0.1).n(digits=4))
f(2+f2(0.1).n(digits=4))
```
$\longrightarrow$ Cálculo de $f(p)-\epsilon$
$\longrightarrow$ " de $f(p)+\epsilon$.

A função $f(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$ é contínua no ponto $x = -2$. (18)

$\lim_{x \to -2} \frac{2-|x|}{2+x} = \lim_{x \to -2} 2-|x| / \lim_{x \to -2} 2+x = ?$

Pela propriedade do quociente: $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} f(x) / \lim_{x \to p} g(x)$

desde que $g(x) \neq 0$

$g(x) = 2 + x \quad g(x) \neq 0 \Rightarrow 0 = 2 + x \Rightarrow x = -2$

$\therefore$ A propriedade não é satisfeita por definição.
$\therefore$ A função não é definida no ponto.

Teorema: Sejam f uma função p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos no domínio da função Df.

Então:
$\lim_{x \to p} = L \Leftrightarrow$ { f admite limites laterais à direita e à esquerda em p e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = L$$

Prove!

Estudando a função em um ponto $p > 0$ p. ex. $p = 1$.

$f(x) = \frac{2-|x|}{2+x}$ em $p = 1$. $\quad \lim_{x \to 1} \frac{2-|x|}{2+x} = \frac{2-|1|}{2+1} = 1/3$

1) A função racional deve ser estudada primeiramente para a condição modular, ou seja

$$|x| = \begin{cases} x & \longrightarrow x > 0 \\ -x & \longrightarrow x < 0 \end{cases}$$

2) A função por ser racional segue a propriedade:

$\lim_{x \to 1} \frac{2-|x|}{2+x} = \lim_{x \to 1} 2-|x| / \lim_{x \to 1} 2+x \quad \begin{cases} f(x) = 2-|x| \\ g(x) = 2+x \end{cases}$

3) $f(x)$ é a função modular e $f(1) = 2-|1| = 1$.

(13)

i) Aplicando a definição de continuidade no ponto $p = 1$

se $|p - x| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$

para $x > 0 \Rightarrow |x|$ positivo. a função $f(x)$ pode ser estudada

$|\cancel{2} - |x| - \cancel{1}| < \epsilon$

$|1 - x| < \epsilon \Rightarrow \delta > 0$ e $\delta < \epsilon$

e $|p - x| < \delta \longrightarrow |g(x) - g(p)| < \epsilon$

$g(1) = 2 + 1 = 3$

$|2 + x - 3| < \epsilon$

$|x - 1| < \epsilon$

ou seja: $g(p) - \epsilon < g(x) < g(p) + \epsilon$

$3 - \epsilon < 2 + x < 3 + \epsilon$

$1 - \epsilon < x < 1 + \epsilon$

so $\delta > 0$ e $\delta < \epsilon$

Solução Numérica:

	ϵ	δ	$p-\delta$	$p+\delta$	$f(p)-\epsilon$	$f(p)+\epsilon$	Obs.
$f(x)$	0,1	0,1	0,9	1,1	1,1	0,9	
$g(x)$	0,1	0,1	0,9	1,1	2,9	3,1	
$f(x)/g(x)$	0,1	0,1	0,9	1,1	0,3793	0,2903	
$f(x)$	0,01	0,01	0,99	1,01	1,01	0,99	
$g(x)$	0,01	0,01	0,99	1,01	2,99	3,01	
$f(x)/g(x)$	0,01	0,01	0,99	1,01	0,3378	0,3289	
$f(x)$	0,001	0,001	0,999	1,001	1,001	0,999	* $p-\delta = 0,999$ e $\delta = 0,001$
$g(x)$	0,001	0,001	0,999	1,001	2,999	3,001	
$f(x)/g(x)$	0,001	0,001	0,999	1,001	0,3338	0,3329	
$f(x)$	0,0001	0,0001	0,9999	1,0001	1,0001	0,9999	1/3
$g(x)$	0,0001	0,0001	0,9999	1,0001	2,9999	3,0001	
$f(x)/g(x)$	0,0001	0,0001	0,9999	1,0001	0,3334	0,3333	

Estudo da função racional para $|x| = -x \longrightarrow x < 0$

Exemplo: aproximando a função em $p = -1$.

Então: $f(-1) = 2 - |-1| = 1$

E $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2 - |x|}{2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} 2 - |x| \Big/ \lim\limits_{x \to 1} 2 + x$ c/ $\begin{cases} f(x) = 2 - |x| \\ g(x) = 2 + x \end{cases}$

Aplicando a Definição de continuidade em $p = -1$.

Se $|p - x| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

Logo $\quad |2 - |-x| - 1| < \varepsilon$

$|2 - x - 1| < \varepsilon$

$|1 - x| < \varepsilon \quad , \delta > 0$ e $\delta < \varepsilon$

e $\quad |p - x| < \delta \longrightarrow |g(x) - g(p)| < \varepsilon$

$g(-1) = 2 + (-1) = 1 \longrightarrow |2 + x - 1| < \varepsilon$

$|1 + x| < \varepsilon$

ou $\quad g(p) - \varepsilon < g(x) < g(p) + \varepsilon$

$1 - \varepsilon < 2 + x < 1 + \varepsilon$

$1 - 2 - \varepsilon < x < 1 - 2 + \varepsilon$

$|-1 - x| < \delta \Leftarrow \quad -1 - \varepsilon < x < -1 + \varepsilon$

$\therefore \delta > 0$ e $\delta < \varepsilon$.

Solução Numérica: $p = -1$.

	ε	δ	$p+\delta$	$p-\delta$	$f(p)+\varepsilon$	$f(p)-\varepsilon$	obs.
$f(x)$	0,1	0,1	−0,9	−1,1			
$g(x)$	0,1	0,1	−0,90	−1,1			
$f(x)/g(x)$	0,1	0,1	−0,9	−1,1			
$f(x)$	0,01	0,01	−0,99	−1,01			
$g(x)$	0,01	0,01	−0,99	−1,01			
$f(x)/g(x)$	0,01	0,01	−0,99	−1,01			
$f(x)$	0,001	0,001	−0,999	−1,001			
$g(x)$	0,001	0,001	−0,999	−1,001			
$f(x)/g(x)$	0,001	0,001	−0,999	−1,001			
$f(x)$	0,0001	0,0001	−0,9999	−1,0001			
$g(x)$	0,0001	0,0001	−0,9999	−1,0001			
$f(x)/g(x)$	0,0001	0,0001	−0,9999	−1,0001			

Completar a tabela no SageMath para $p = -1.9999$

e

$p = -2$. Concluir.

Por fim, definir o que é uma indeterminação matemática?

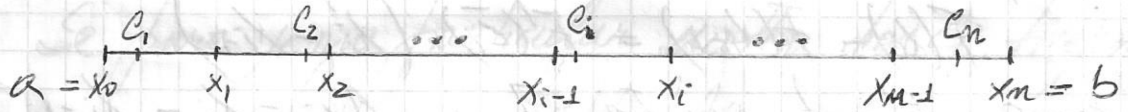
O Teorema Fundamental do Cálculo:

Soma de Riemann

Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e

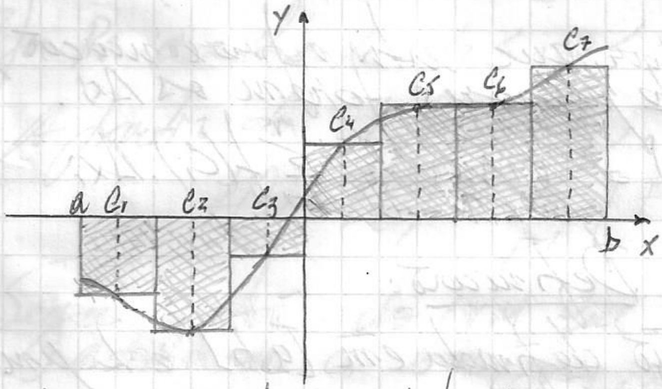
$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$

Para cada índice i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente.



O número: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i = f(c_1).\Delta x_1 + f(c_2).\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$ denomina-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Geometricamente, a soma de Riemann é a diferença entre a soma das áreas dos retângulos Ri que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x.



$\sum_{i=1}^{7} f(c_i).\Delta x_i$ = soma das áreas acima e abaixo do eixo dos x.

Seja F uma função definida em $[a,b]$ e seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ uma partição em $[a,b]$.

O acréscimo $F(b) - F(a)$ que a F sofre quando se passa de $x = a$ para $x = b$ é igual à soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ para i variando de 1 a 4:

$$F(b) - F(a) = F(x_4) - F(x_0) = [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)]$$

ou

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{4} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

De um modo geral, se $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$$\boxed{F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]} \quad (I)$$

EXEMPLO. Sejam F e f definidas em $[a,b]$ e tais que $F' = f$ em $[a,b]$; assim F é uma primitiva de f em $[a,b]$. Seja a partição P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ de $[a,b]$. Prove que escolhendo convenientemente $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tem-se

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i) \cdot \Delta x_i$$

Solução: De Riemann $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$

Pelo TVM, existe $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{c}_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

e como $F' = f$ em $[a,b]$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Concluímos:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i) \cdot \Delta x_i$$

Admitindo $\Delta x_i \to$ valor pequeno $\Rightarrow f(c_i) \cong f(\bar{c}_i)$ em $[x_{i-1}, x_i]$

logo:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

É razoável esperar que esta aproximação será ~~tanto~~ melhor quanto menores forem os Δx_i.

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Integral de Riemann: Definição:

Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e L um número real.

Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$ tende a L, quando $\max \Delta x_i \to 0$

logo:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só depende de ϵ mas não da particular escolha dos c_i, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a,b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$.

Assim:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i}$$

1º Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for integrável em $[a,b]$, o valor do limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

será sempre o mesmo independentemente da escolha dos c_i, e igual a

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Se para uma particular escolha dos c_i, tivermos

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = L.$$

então $\int_a^b f(x)\, dx = L$. por definição.

Suponhamos que f seja integrável em $[a,b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a,b]$

isto é $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$

Seja P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição $\forall$ em $[a,b]$

A partir da definição (I), temos:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right]$$

Segue então, do TVM que, para uma conveniente escolha de $\bar{c}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$, teremos:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F'(\bar{c}_i) \cdot \Delta x_i$$

ou

$$\boxed{F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i) \cdot \Delta x_i} \quad \text{(II)}$$

Se para cada partição P de $[a,b]$ os $\bar{c}_i$ forem escolhidos como em (II), teremos:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i) \cdot \Delta x_i = F(b) - F(a).$$

e portanto

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)} \quad \text{(III)}$$