

# Aproksimacija najdužeg razapinjućeg stabla sa okolinama

Lazar Stanojević  
mi231013@alas.matf.bg.ac.rs

Geometrijski algoritmi  
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

28. novembar 2023.

# Sadržaj

- 1 Opšte o autorima i radu
  - Autori
  - Opis problema
- 2 Osnovni pojmovi
- 3 Jednostavan algoritam
- 4 Napredniji algoritam
  - Opis
  - Složenost
  - Analiza faktora aproksimacije
- 5 Doprinos, primene i srodni problemi
  - Doprinos
  - Primene i srodni problemi
- 6 Zaključak
- 7 Literatura

# Autori

- Journal of Computational Geometry, Vol 14. No. 1 (2023)
- Tema: Approximating longest spanning tree with neighborhoods
- **Ahmad Biniiaz**
  - <https://cglab.ca/~biniaz/> - lična stranica
  - [ahmad.biniiaz@gmail.com](mailto:ahmad.biniiaz@gmail.com)
  - PhD in Computer Science from Carleton University, Ottawa, Canada, 2013-2017.
  - Interesovanja: algoritmi i strukture podataka, diskretna i računarska geometrija, diskretna matematika

# Opis problema

- Problem maksimizacije u Euklidskoj ravni
- Dat je skup okolina/susedstva (unija prostih poligona), ne nužno disjunktних
- Potrebno izabrati po tačku iz svake okoline, tako da najduže razapinjuće stablo nad tim tačkama ima maksimalnu dužinu

# Osnovni pojmovi

- *Zvezda* sa centrom u čvoru  $p$ , je stablo u kom je svaka grana susedna sa čvorom  $p$
- *Dupla zvezda* sa centrom u čvorovima  $p$  i  $q$ , je stablo koje sadrži granu  $pq$  i svaka druga grana je susedna ili sa  $p$  ili sa  $q$
- *Najmanji zatvarajući disk* skupa tačaka  $P$ , je najmanji disk koji sadrži sve tačke iz  $P$
- *Dijametralni par* skupa  $P$  su tačke  $p$  i  $q$  takve da dostižu najveće euklidsko rastojanje
- *Bihromatski dijametralni par* skupa  $P$  čine tačke  $p$  i  $q$ , različite boje, takve da je rastojanje između njih maksimalno, uz pretpostavku da su tačke u skupu  $P$  obojene
- *Centar mase* skupa  $P$  (centroid), je tačka  $m$  u ravni, takva da za svaku proizvolju tačku  $u$  važi:

$$\sum_{p \in P} \vec{up} = |P| \cdot \vec{um}$$

# Jednostavan algoritam

- Chen i Dumitrescu
- Uzmimo bihromatski par  $(a, b)$  od tačaka iz  $n$  datih okolina
- Formiramo zvezdu  $S_a$ , povezujući  $a$  sa  $b$ , i  $a$  sa proizvoljnom tačkom iz svake ostale okoline
- Formiramo analogno  $S_b$
- Dužina svake grane optimalnog rešenja  $T$  je najviše  $|ab|$ , odatle je  $len(T) \leq (n - 1) \cdot |ab|$
- Iz nejednakosti trougla imamo:  $S_a + S_b \geq n \cdot |ab| \geq len(T)$
- Sledi da je duža od dve zvezde 0.5-aproksimativno rešenje problema

# Opis

- 0.548-aproksimativno rešenje problema
- Izračunavamo razapinjuću duplu zvezdu  $D$ , i najviše tri razapnjuće zvezde,  $S_1, S_2$  i  $S_3$
- Nađemo  $(a, b)$  bihromatski dijametralni par, i za svaku od preostalih okolina, nađemo tačku  $p$  koja je najdalja od  $a$ , i tačku  $q$  koja je najdalja od  $b$
- Ako je  $|ap| \geq |bq|$  u  $D$  dodajemo  $p$ , inače dodajemo  $q$
- Zbog nejednakosti trouglova, svaka grana u  $D$  je dužine bar  $|ab|/2$
- Neka je  $C$  najmanji zatvarajući disk za  $X$  (skup svih okolina)
- Ako  $C$  sadrži tačno dve tačke iz  $X$ , onda zvezde centriramo u njima
- U suprotnom, biramo tri tačke tako da trougao koji formiraju sadrži centar diska  $C$ , i njih postavljamo za centre razapinjućih zvezdi

# Složenost

- Najmanji zavarajući disk možemo da izračunamo u  $O(N)$  vremenskoj složenosti, gde je  $N$  broj tačaka koje opisuju svih  $n$  okolina
- Bihromatski dijametralni par možemo naći za  $O(N \cdot \log N \cdot \log n)$
- Ostatak algoritma uzima linearno vreme,  $O(N)$



# Analiza

- Glavna ideja: pokazati da ako je radijus diska  $C$  bar  $\delta = \frac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0.548$ , onda je neka od zvezda  $S_i$  željeno stablo, u suprotnom je to dupla zvezda  $D$
- Lema 1: Ako je  $r \geq \delta$  i granica diska  $C$  sadrži tačno dve tačke, onda je  $\max(\text{len}(S_1), \text{len}(S_2)) \geq \delta \cdot \text{len}(T)$ , gde je  $T$  optimalno rešenje
- Lema 2: Ako granica diska  $C$  sadrži tri ili više tački, onda za svaku tačku  $m$  u ravni, postoji tačka  $c_j \in c_1, c_1, c_3$  takva da je  $|c_j m| \geq r$
- Lema 3: Ako je  $r \geq \delta$  i granica diska  $C$  sadrži tri ili više tačaka, onda je  $\max(\text{len}(S_1), \text{len}(S_2), \text{len}(S_3)) \geq \delta \cdot \text{len}(T)$
- Lema 4: Ako je  $r \leq \delta$  onda je  $\text{len}(D) \geq \delta \cdot \text{len}(T)$

# Doprinos

- Glavni doprinos rada je sledeća teorema:
  - 0.548-aproksimacija može da bude izračunata u linearnom vremenu nakon nalaženja bihromatskog dijametra
- Poboljšan je faktor aproksimacije, sa do tada najboljeg 0.517 na 0.548
- Dokazano je da algoritam koji uvek uključuje bihromatski dijametar u rešenje ne može da ima faktor aproksimacije veći od 0.5

# Primene i srodni problemi

- Primene:
  - Analiza najgoreg slučaja u raznim heuristikama, u kombinatornoj optimizaciji
  - Aproksimacija maksimalnih triangulacija
  - Algoritmi klasterovanja
- Srodni problemi:
  - Problem euklidskog Steinerovog stabla
  - Problem trgovačkog putnika sa okolinama
  - Konveksni omotač nepreciznih tačaka

# Zaključak

- Otvoren je problem daljeg poboljšanja algoritama aproksimacije
- Za to je potrebna detaljnija analiza
- Razmatrane su zvezde i dupla zvezda razdvojeno, možda bi posmatranje zajedno dovelo do poboljšanja

# Literatura

- Approximating longest spanning tree with neighborhoods, Ahmad Biniaz, Journal of Computational Geometry, Vol. 14 No. 1, Pages 1-13, 4.4.2023.