INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN A LA

- ***MECÁNICA (SEGUNDA LEY DE NEWTON)***
- ***MEZCLAS Y REACIONES QUÍMICAS***
- ***CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO***
- ***CIRCUITOS ELÉCTRICOS SIMPLES***

Prof. Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc.

2016

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

1 APLICACIONES A LA MECÁNICA

El estudio del movimiento de los objetos en nuestro universo es una rama de la mecánica llamada *"dinámica"*. Las leyes del movimiento de Newton forman la base fundamental para dicho estudio, por lo que se enuncian a continuación.

1.1 Leyes del Movimiento de Newton

1. *Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en reposo, mientras que un cuerpo en movimiento tiende a persistir en movimiento en una línea recta con velocidad constante a menos que fuerzas externas actúen sobre él.*
2. *La tasa de cambio en momentum de un cuerpo en el tiempo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y tiene la misma dirección que la fuerza.*
3. *A cada acción existe una reacción igual y opuesta.*

Segunda Ley de Newton

- En relación con esta ley, el *momentum* de un cuerpo (o un objeto) se define como su masa m multiplicada por su velocidad v; o sea: mv
- Por lo tanto, la *tasa de cambio en momentum en el tiempo* es: $\frac{d}{dt}[mv]$
- Si F es la *fuerza neta* que actúa sobre el cuerpo y si k es la constante de proporcionalidad [1], entonces la *Segunda Ley de Newton* se simboliza como:

$$\frac{d}{dt}[mv] = kF \qquad (1)$$

- Para una masa constante m, y considerando $k = 1$, de (1) se obtiene que:

$$F = m\,\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

- Como la aceleración, denotada por a, puede expresarse como la primera derivada de la velocidad; o sea, $a = \frac{dv}{dt}$, entonces de (2) se sigue que:

$$F = m\,a \qquad (3)$$

[1] El valor de k depende de las unidades que se usen. Los dos sistemas de medida que se utilizan con más frecuencia son, el de *Centímetro-Gramo-Segundo* (*CGS*) y el de *Pie-Libra-Segundo* (*PLS*). Independientemente del sistema, el valor más simple para k es $k = 1$. (Ver ANEXO, en la página 3)

Otra manera de expresar la Ley de Newton

Si un cuerpo actúa **sólo** por su propio peso, denotado por *W*, entonces la aceleración correspondiente es aquella debida a la gravedad *g* (con *g* constante).

- En este caso, la fuerza debida a la gravedad está dada por el peso *W* (libras peso), por lo que la *Segunda Ley de Newton* se expresa como:

$$W = m\ g \tag{4}$$

- Dividiendo la ecuación (3) por la ecuación (4) se tiene:

$$\frac{F}{W} = \frac{m\ a}{m\ g} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{W}{g}\ a \quad \Rightarrow \quad F = \frac{W}{g}\ \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

1.2 *Problemas de movimiento de un objeto*

Se estudiarán algunos problemas de mecánica que involucran los conceptos anteriores, particularmente aquellos relacionados con el movimiento de un objeto que se desplaza en un **campo gravitacional,** conocidos como *"de caída libre"*.

En estos se considera, entre otros, un cuerpo (objeto) de masa *m* que: se lanza verticalmente hacia arriba; cae verticalmente hacia abajo; o bien, se lanza hacia abajo desde un punto determinado.

En cada caso, existe **una fuerza debida a la gravedad** que actúa **hacia abajo** sobre el cuerpo, dada por $W = m\ g$, y **una fuerza de resistencia atmosférica** (resistencia del aire) que actúa **hacia arriba** la cual, en la mayoría de los casos, se define como proporcional a la velocidad instantánea del cuerpo y se denota por $R = \alpha v$, donde $\alpha \geq 0$ es la constante de proporcionalidad.

En cualquier problema de física que involucre cantidades vectoriales tales como fuerza, desplazamiento (distancia, posición), velocidad y aceleración, es necesario conocer su dirección. **Por conveniencia**, se considerará *"la dirección del movimiento del cuerpo"* como *"la dirección positiva"*. Así, si el cuerpo "va hacia abajo" (dirección positiva), entonces la fuerza gravitacional es también "positiva" (pues ésta siempre actúa hacia abajo). Por el contrario, si el cuerpo "va hacia arriba" (dirección positiva), la fuerza gravitacional es "negativa" pues el sentido de su dirección (hacia abajo) se contrapone a la del movimiento.

- Con base en lo descrito, se concluye que la fuerza neta *F* está compuesta por la *fuerza gravitacional* (fuerza de impulso) *menos* la *fuerza atmosférica* (resistencia del aire); o sea:

$$F = W - R \quad \Leftrightarrow \quad F = mg - \alpha v \tag{6}$$

- De acuerdo con (2) y (6), se obtiene que la ecuación diferencial que describe el movimiento de un cuerpo de masa m es:

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - \alpha\,v \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}\,v = g \tag{7}$$

- Por otra parte, cuando –en vez de su masa– se conoce el peso W del cuerpo ($W = m\,g$), entonces de (5) y (6) se tiene que la ecuación (7) se expresa como:

$$\frac{W}{g}\,\frac{dv}{dt} = W - \alpha\,v \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha\,g}{W}\,v = g \tag{8}$$

- Además, cuando $\alpha = 0$; o sea, si la resistencia del aire se desprecia (o no existe), entonces la ecuación del movimiento se reduce a: $$\frac{dv}{dt} = g \tag{9}$$

  Dado que la primera derivada de la velocidad corresponde a la segunda derivada de la **función de posición, denotada por $x(t)$**, entonces otra forma de expresar la ecuación (9) es: $$\frac{d^2x}{dt^2} = g \tag{10}$$

- Finalmente, obsérvese que las ecuaciones diferenciales (7), (8) y (9) son todas de primer orden y lineales en la variable *v*, por lo que para su respectiva solución, se emplea el método ya estudiado para este tipo de situaciones. Por otro lado, la ecuación (10) es de segundo orden y lineal en la variable *x*, la cual es inmediatamente integrable.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que tipifican el desplazamiento de un objeto. La solución de un problema de este tipo requiere de una adecuada formulación matemática; a saber, se debe establecer la ecuación diferencial que describa el fenómeno planteado así como las condiciones mínimas necesarias para determinar las constantes arbitrarias de la solución general de dicha ecuación.

<u>ANEXO</u>: Sistema de Unidades

Sistema $\longrightarrow$	Centímetro - Gramo - Segundo *CGS*	Pie - Libra - Segundo *PLS*	Metro - Kilogramo - Segundo *MKS*
Fuerza	dina (din)	libra (lb)	newton (N)
Distancia	centímetro (cm)	pie (ft)	metro (m)
Masa	gramo (g o gr)	geolibra (slug)	kilogramo (kg)
Tiempo	segundo (s o seg)	segundo (seg)	segundo (seg)
Aceleración	cm/s^2	$pies/s^2$	m/s^2
Gravedad	$g \approx 980\ cm/s^2$	$g \approx 32\ pies/s^2$	$g \approx 9.8\ m/s^2$

$$F = m\,a = m\,\frac{dv}{dt} \quad \text{o} \quad F = \frac{W}{g}\,a = \frac{W}{g}\,\frac{dv}{dt}$$

<u>Nota</u>:
1 N = 10^5 din = 0.2247 lb
1 slug = lb peso$/g = W/g$

Ejemplo 1

Un cuerpo de *W* libras de peso se deja caer desde una cima de 1325 pies de alto, partiendo del reposo y bajo la influencia de la gravedad. Si se desprecia la resistencia del aire: (a) Encuentre la velocidad y la posición del cuerpo en cualquier instante t . (b) ¿En cuánto tiempo y con qué velocidad llega el cuerpo a la Tierra?

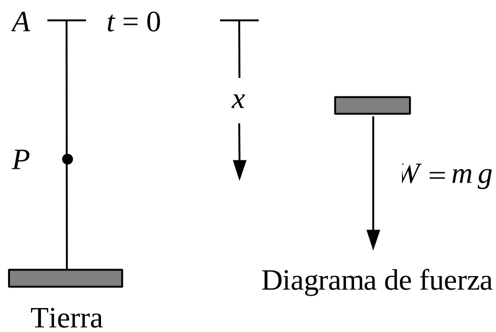


Diagrama: Sea x la distancia recorrida por el cuerpo en el instante t, a partir del punto A.

A: Punto de partida $(t = 0)$

P: Posición del cuerpo en t

Tierra: Punto de llegada $(x = 1325)$

Dirección positiva: Hacia abajo

- ***Ecuación Diferencial:*** Como se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo que cae es la de su propio peso, debida a la gravedad; por lo tanto, la *segunda Ley de Newton* nos conduce a:

$$F = W \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g \ ,$$

con las condiciones: $x'(0) = 0$ y $x(0) = 0$ y en donde $g = 32$ pies/seg^2.

- ***Solución parte (a):*** Integrando la ecuación $\frac{d^2x}{dt^2} = g$, se obtiene que:

$$\frac{dx}{dt} = g\,t + C_1 \ ; \text{ o bien, } \ x'(t) = v(t) = g\,t + C_1 \ .$$

Como $x'(0) = v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(t) = v(t) = g\,t$

De la ecuación anterior, por integración, se tiene que: $x(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + C_2$

Como $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2$

Finalmente, dado que $g = 32$, la velocidad y la posición del cuerpo, en función del tiempo, están dadas por: $v(t) = 32t$ y $x(t) = 16t^2$, respectivamente.

- ***Solución parte (b):*** Para encontrar el tiempo que tarda el cuerpo en llegar a la Tierra, debemos resolver la ecuación $x(t) = 1325$; o sea,

$$x(t) = 1325 \quad \Leftrightarrow \quad 16t^2 = 1325 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 82.81 \quad \Leftrightarrow \quad t = 9.1$$

Así, la velocidad que se busca está determinada por: $v(9.1) = 32(9.1) = 291.2$

Se concluye, por tanto, que el cuerpo llega a Tierra en 9.1 segundos, con una velocidad aproximada de 291 pies/seg.

Ejemplo 2

Una bola se lanza hacia arriba con una velocidad de 160 pies/seg. (a) ¿Cuál es su velocidad después de 3, 5, y 7 segundos? (b) ¿Cuándo regresará la bola a su punto de partida? (c) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la bola antes de regresar a la posición de partida?

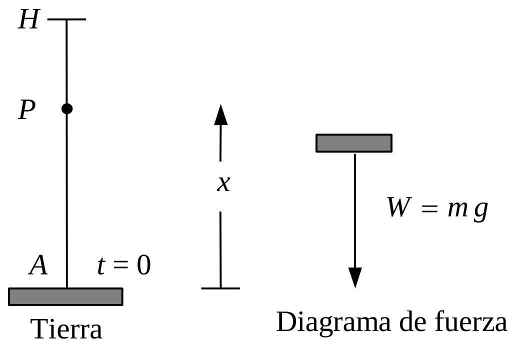


Diagrama: Sea x la distancia recorrida por la bola en el instante t, a partir del punto A.

A: Punto de partida $(t = 0)$

P: Posición de la bola en t

H: Altura máxima de la bola

Dirección positiva: Hacia arriba

- ***Ecuación Diferencial:*** Asumiendo despreciable la resistencia del aire, y dado que la fuerza debida a la gravedad actúa en dirección opuesta (hacia abajo) a la que lleva la bola (hacia arriba), entonces, la *segunda Ley de Newton* nos conduce a:

  $F = -W \quad \Rightarrow \quad m\,v'(t) = -m\,g \quad \Rightarrow \quad v'(t) = -g \quad \Rightarrow$

  $x''(t) = -g$, con $v(0) = x'(0) = 160$ y $x(0) = 0$ (1)

- ***Solución parte (a):*** Integrando la ecuación $x''(t) = -g$, se obtiene que:

  $x'(t) = -g\,t + C_1$, o bien, $v(t) = -g\,t + C_1$, donde $g = 32$ pies/seg^2

  Como $v(0) = 160 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 160 \quad \Rightarrow \quad v(t) = -32\,t + 160$ (2)

  Luego: $v(3) = 64$ pies/seg , $v(5) = 0$ pies/seg y $v(7) = -64$ pies/seg

- ***Solución parte (b):*** Para averiguar cuándo regresa la bola a su posición de partida, basta con resolver la ecuación $x(t) = 0$. De (2), por integración, se tiene que: $x(t) = -16\,t^2 + 160\,t + C_2$. Como $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow$

  $x(t) = -16\,t^2 + 160\,t$. Luego, $x(t) = 0 \iff -16t\,(t - 10) = 0 \iff t = 0$

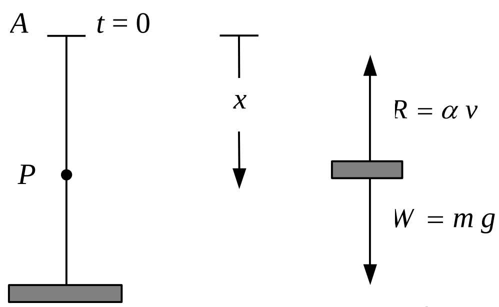
  o $t = 10$. Luego, la bola tarda 10 seg para regresar a su punto de partida.

- ***Solución parte (c):*** Para obtener la altura máxima, se debe resolver la ecuación: $x'(t) = 0 \iff v(t) = 0 \iff -32\,t + 160 = 0 \iff t = 5$ seg.

  Luego, dicha altura es $x(5) = 400$ pies. (Nota: Usando la teoría de derivación, se puede verificar que $x(t)$ alcanza su máximo cuando $t = 5$)

Ejemplo 3

El peso combinado de un paracaidista y su paracaídas es *W*. El paracaidista cae, desde el reposo, verticalmente hacia abajo. Asumiendo que el paracaídas ya está abierto cuando el salto ocurre y que sobre él actúa una fuerza debida a la resistencia del aire, la cual es proporcional a la velocidad en cualquier instante durante la caída, encuentre la velocidad y posición del paracaidista en función del tiempo. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar el paracaidista?



Tierra

Diagrama de fuerzas

Diagrama: Sea x la distancia recorrida por el paracaidista en el instante t, a partir del punto A.

A: Punto de partida $(t = 0)$

P: Posición del paracaidista en t

Dirección positiva: Hacia abajo

- ***Ecuación Diferencial:*** En este caso, actúan dos fuerzas: una debida a la gravedad, dada por el peso combinado *W* (actuando hacia abajo); la otra, la de la resistencia del aire *R* (actuando en dirección opuesta, hacia arriba). Por lo tanto, la fuerza neta en la dirección positiva (hacia abajo), está dada por: $F = W - R$, donde $R = \alpha\, v$. Luego, por la *segunda Ley de Newton* se tiene:

$$\frac{W}{g}\,\frac{dv}{dt} = W - \alpha\, v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}\, v = g \;\;, \text{ con } \; v(0) = 0 \;\text{ y }\; x(0) = 0 \qquad (1)$$

- ***Solución:*** La ecuación (1) es lineal, cuyo factor integrante es $e^{\alpha\, t/m}$; y, por lo tanto, tenemos que: $\dfrac{d}{dt}\left[v\, e^{\alpha\, t/m} \right] = g\, e^{\alpha\, t/m}$, de donde, integrando, se obtiene que: $v\, e^{\alpha\, t/m} = \dfrac{m\, g}{\alpha}\, e^{\alpha\, t/m} + C_1 \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{m\, g}{\alpha} + C_1\, e^{-\alpha\, t/m}$.

Como $v(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = \dfrac{-m\, g}{\alpha} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{v(t) = \frac{m\, g}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha\, t/m} \right]} \qquad (2)$$

- Con la ecuación (2), se determina la velocidad del paracaidista en cualquier instante. En estos casos, como $v'(t) = g\, e^{-\alpha\, t/m} > 0$, para toda $t \geq 0$, entonces $v(t)$ es siempre creciente, para toda $t \geq 0$. Por lo tanto, la máxima velocidad, conocida como *velocidad límite* y denotada por V_l, se obtiene calculando el $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$; o sea: $V_l = \lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \dfrac{m\, g}{\alpha} = \dfrac{W}{\alpha}$

➢ Finalmente, de la ecuación (2), por integración, se obtiene la **distancia recorrida** por el paracaidista. Por lo tanto: $x = \dfrac{m\,g}{\alpha}\left[\, t + \dfrac{m}{\alpha}\, e^{-\alpha\, t/\,m} \right] + C_2$.

Como $x(0)=0 \;\Rightarrow\; C_2 = \dfrac{-\,m^2 g}{\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \dfrac{m\,g}{\alpha}\left[\, t + \dfrac{m}{\alpha}\, e^{-\alpha\, t/\,m} - \dfrac{m}{\alpha} \right]}$

Ejemplo 4

Un velero, junto con su único ocupante, tiene una masa de 600 kg. Suponga que el viento le aplica al velero una fuerza constante de 750 N (newton) y que la fuerza que actúa sobre el velero, debida a la resistencia del agua, es proporcional a su velocidad instantánea y es tal que a 3 m/seg la fuerza de resistencia es de 225 N. Si el velero sale con una velocidad inicial de 2 m/seg, determine: (a) La máxima velocidad que puede alcanzar el velero. (b) La distancia que recorre el velero en cualquier instante y la recorrida al cabo de 16 segundos.

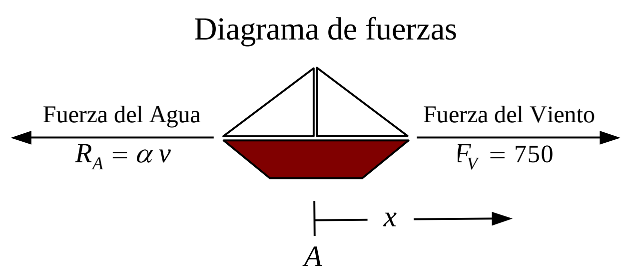


Diagrama: Sea x la posición del velero en el instante t, a partir del punto A.
A: Punto de partida $(t=0)$
Dirección positiva: Hacia adelante

➢ ***Ecuación Diferencial:*** En este caso, actúa **una fuerza constante** en la dirección del velero, la del viento F_V, considerada como la dirección positiva (hacia adelante). La **otra fuerza** que actúa, en dirección opuesta (hacia atrás), es la de la resistencia del agua R_A. Por lo tanto, la fuerza neta en la dirección positiva, está dada por: $F = F_V - R_A$, en donde $F_V = 750$ y $R_A = \alpha\, v$. Ahora bien, dado que $R_A = 225$ si $v=3$; entonces , $225 = 3\alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha = 75$.
Con base en la *segunda Ley de Newton* se tiene: $m\,\dfrac{dv}{dt} = F_V - R_A \quad \Leftrightarrow$

$600\,\dfrac{dv}{dt} = 750 - 75v \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{8}\,v = \dfrac{5}{4}$, con $v(0)=2$ y $x(0)=0$ (1)

➢ ***Solución parte (a):*** Como la ecuación (1) es lineal, con factor integrante igual a $e^{t/8}$, entonces: $\dfrac{d}{dt}\left[\, v\, e^{t/8} \right] = \dfrac{5}{4}\, e^{t/8} \;\Rightarrow\; v\, e^{t/8} = \dfrac{5}{4}\int e^{t/8}\, dt + C_1 \;\Rightarrow$

$v\, e^{t/8} = 10\, e^{t/8} + C_1 \;\Rightarrow\; v = 10 + C_1 e^{-t/8}$. Como $v(0)=2 \;\Rightarrow\; C_1 = -8$.

Así, la *velocidad* del velero en cualquier instante es: $v(t) = 10 - 8e^{-t/8}$ (2)

Ahora bien, dado que $v'(t) = e^{-t/8}$ es siempre positiva, entonces $v(t)$ es creciente para toda t. Por lo tanto, la *máxima velocidad* (*velocidad límite*) que puede alcanzar el velero es de 10 m/seg, puesto que $V_m = \lim_{t \to \infty} v(t) = 10$.

- ***Solución parte (b):*** Por otra parte, la *distancia recorrida* por el velero en cualquier instante la obtenemos, por integración, de la ecuación (2). Por lo tanto: $x(t) = 10t + 64e^{-t/8} + C_2$.

  Como $x(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = -64 \;\Rightarrow\; x(t) = 10t + 64e^{-t/8} - 64$ (3)

  De la ecuación de posición (3), tenemos que $x(16) \cong 104.66$. Así que, al finalizar los 16 segundos, el velero ha recorrido una distancia aproximada de 105 metros.

Ejercicios 1: Plantee y resuelva los problemas siguientes.

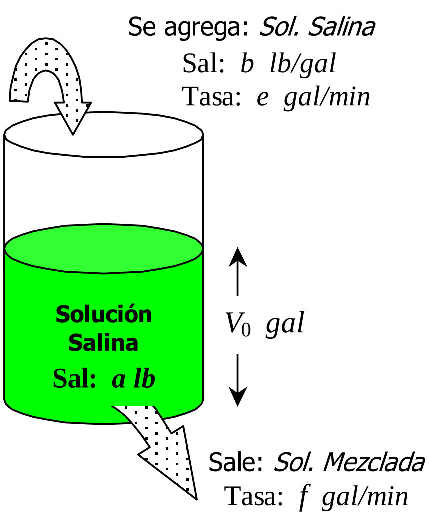
1. Un cuerpo, de 25 gr de masa, se deja caer desde una cima de 250 metros de alto. (a) Encuentre la velocidad y la distancia recorrida 3 seg después de empezar su movimiento. (b) ¿Cuánta distancia recorre el cuerpo entre el 3º y 4º seg y entre el 4º y 5º seg? (c) ¿En qué tiempo y con qué velocidad llega a la Tierra?
2. Un objeto que pesa 64 libras se suelta desde una altura de 100 pies, con una velocidad inicial de 10 pies/seg. Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto. Si la velocidad límite es de 128 pies/seg, encuentre la velocidad y la posición del objeto en cualquier instante.
3. Un cuerpo con una masa de 10 slugs se suelta de una altura de 1000 pies sin velocidad inicial. El cuerpo encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad. Si la velocidad límite es de 320 pies/seg, encontrar: (a) La velocidad y la posición del cuerpo como función del tiempo. (b) El tiempo que necesita el cuerpo para alcanzar una velocidad de 160 pies/seg.
4. Un cuerpo, de un slug de masa, se suelta con una velocidad inicial de 1 pie/seg y se encuentra con una fuerza debida a la resistencia atmosférica dada por la expresión $-8v^2$. Hallar la velocidad para cualquier momento *t*.
5. Un cuerpo de masa *m* se lanza verticalmente en el aire con una velocidad inicial v_0. Si el cuerpo no encuentra resistencia del aire, determine: (a) la ecuación diferencial que describe el movimiento; (b) la velocidad y posición del cuerpo en función del tiempo; (c) el momento en el cual el cuerpo llega a su altura máxima; (d) la altura máxima alcanzada; (e) el tiempo requerido para regresar a su punto de partida; (f) la relación que hay entre (c) y (e).
6. Un punto material de masa igual a 1 gramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante $t = 0$, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10$ segundos, la velocidad es igual a 50 cm/seg y la fuerza igual a 4 dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

7. Un hombre y su bote de motor pesan, juntos, 1120 libras. Suponga que el empuje del motor es equivalente a una fuerza constante de 140 libras en la dirección del movimiento. Si la resistencia del agua al movimiento es igual a 7 veces la velocidad instantánea, en pies/seg, y si el bote está inicialmente en reposo, encuentre: (a) la velocidad del bote en cualquier instante y su velocidad límite; (b) la distancia recorrida por el bote en cualquier instante.
8. Un objeto es arrastrado por el hielo sobre un trineo cuyo peso total, incluido el trineo, es de 80 libras. Suponga que se desprecia la resistencia del hielo y que el aire opone una resistencia en libras igual a 5 veces la velocidad (en pies/seg) del trineo. Si el trineo parte del reposo: (a) plantee la ecuación diferencial y las condiciones asociadas al problema; (b) determine la fuerza constante F que debe ejercerse sobre el trineo para que su velocidad límite sea de 15 pies/seg; (c) la velocidad y la distancia recorrida al cabo de t seg.
9. Una masa de 250 gr se lanza hacia arriba con una velocidad de 2450 cm/seg. (a) Encuentre las distancias desde el punto de partida y las velocidades conseguidas 2 y 4 seg después de empezar el movimiento. (b) Encuentre el punto más alto alcanzado y el tiempo requerido. (c) ¿Cuáles son las distancias totales recorridas después de 2 seg y después de 4 seg?
10. Una pequeña gota de aceite, de 0,2 gr de masa, cae en el aire desde el reposo. Para una velocidad de 40 cm/seg, la fuerza debida a la resistencia del aire es de 160 dinas. Si la fuerza de resistencia atmosférica es proporcional a la velocidad: (a) Encuentre la velocidad y la distancia recorrida como una función del tiempo. (b) Encuentre la velocidad límite.
11. La fuerza de resistencia del agua que actúa sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea, y es tal que a 20 pies/seg la resistencia del agua es de 40 lb. Si el bote pesa 320 lb y el único pasajero pesa 160 lb, y si el motor puede ejercer una fuerza estable de 50 lb en la dirección del movimiento, encuentre: (a) La velocidad y la distancia recorrida en cualquier tiempo, asumiendo que el bote parte del reposo. (b) La máxima velocidad a la cual el bote puede viajar.
12. Un paracaidista y su paracaídas pesan 200 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él esta viajando verticalmente hacia abajo a 40 pies/seg. Si la resistencia del aire varía directamente proporcional a la velocidad instantánea y la resistencia del aire es de 80 lb cuando la velocidad es de 20 pies/seg, encuentre: (a) La velocidad del paracaidista en cualquier tiempo y su velocidad límite. (b) La posición del paracaidista en cualquier tiempo.
13. Un cuerpo de 192 lb tiene una velocidad límite de 16 pies/seg cuando cae en el aire, el cual ofrece una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad instantánea del cuerpo. Si el cuerpo parte del reposo: (a) Encuentre la velocidad del cuerpo después de 1 seg. (b) ¿A qué distancia se encuentra el cuerpo antes de que la velocidad sea de 15 pies/seg?
14. Una partícula se mueve a lo largo del *eje x* estimulada solamente por una fuerza opuesta proporcional a su velocidad instantánea. La partícula empieza en el origen con una velocidad de 10 pies/seg, la cual se reduce a 5 pies/seg después de moverse 2,5 pies. Encuentre su velocidad cuando esté a 4 pies del origen.

2 APLICACIONES A MEZCLAS Y REACCIONES QUÍMICAS

2.1 *Mezclas o Soluciones Químicas*

Considere un tanque que contiene inicialmente V_0 galones de solución salina que contiene *a lb* de sal. Otra solución salina que contiene *b lb* de sal por galón, se vierte en el tanque a una tasa de *e gal/min*, mientras que, simultáneamente, la solución bien mezclada sale del tanque a una tasa de *f gal/min* (con $f \neq e$). ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque al cabo de *t minutos* ?



En este tipo de problemas, en cualquier instante t, se puede determinar:

- $Q(t)$: La cantidad de sal que hay en el tanque (en *libras*)
- $V(t)$: El volumen de solución salina que hay en el tanque (en *galones*)
- $C(t)$: La concentración de sal que tiene el tanque (en *lb/gal*)

Por otro lado, *la razón con que cambia la cantidad de sal en el tanque con respecto al tiempo* es: $\dfrac{dQ}{dt}$ (en *lb/min*)

Además, se tiene que:

1. La rapidez neta con que $Q(t)$ cambia está dada por: $\dfrac{dQ}{dt} = R_1 - R_2$; donde:

- R_1 es la razón (rapidez) con que la solución se agrega al tanque y está dada por:

$$R_1 = \left(b \; \frac{lb}{gal} \right) \left(e \; \frac{gal}{min} \right) = be \; \frac{lb}{min}$$

- R_2 es la razón (rapidez) con que la solución mezclada sale del tanque y está dada por:

$$R_2 = \left(C \; \frac{lb}{gal} \right) \left(f \; \frac{gal}{min} \right) = C\,f \; \frac{lb}{min}$$

Por lo tanto:
$$\frac{dQ}{dt} = be - C\,f \qquad (1)$$

2. El volumen $V(t)$ en cualquier instante t está determinado por:

$$V = V_0 + e\,t - f\,t = V_0 + (e - f)\,t \tag{2}$$

Donde: V_0 = volumen inicial de solución salina que hay en el tanque
$e\,t$ = volumen de solución salina que se agrega al tanque
$f\,t$ = volumen de solución mezclada que sale del tanque

3. La concentración de sal $C(t)$ en cualquier instante t está determinada por:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{Q}{V_0 + (e - f)\,t} \tag{3}$$

4. Finalmente, sustituyendo (3) en (1) se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} = be - \frac{Q}{V_0 + (e - f)\,t}\, f = be - \frac{f}{V_0 + (e - f)\,t}\, Q \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + (e - f)\,t}\, Q = be \tag{4}$$

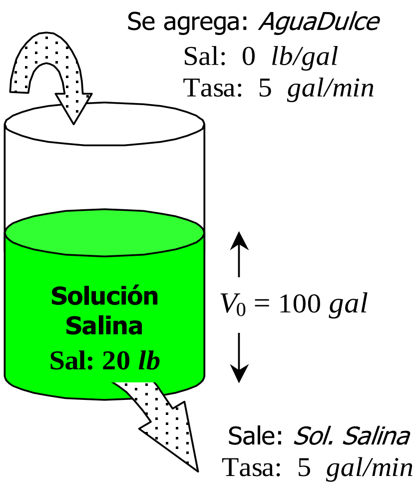
5. Por otra parte, si las tasas de entrada y de salida son iguales; esto es, si $e = f$, entonces $V = V_0$ y $C = \dfrac{Q}{V_0}$ por lo que la ecuación (4) se convierte en:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0}\, Q = be \tag{5}$$

<u>Observe</u> <u>que</u>: Las ecuaciones (4) y (5) son ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, sujetas a la condición inicial $Q(0) = a\ lb$.

Ejemplo 1

Un tanque contiene inicialmente 100 galones de una solución salina que contiene 20 libras de sal. Para $t = 0$, se vierte agua dulce en el tanque a razón de 5 gal/min, mientras que sale del tanque una solución bien mezclada a la misma tasa. Hallar: (a) la cantidad de sal en el tanque como función del tiempo; (b) la cantidad de sal presente después de 20 minutos.



Sea Q la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t.

- En este problema, se tiene que:

  $V_0 = 100$, $b = 0$ y $e = f = 5$.

- Como las tasas de entrada y de salida son iguales, la ecuación diferencial que corresponde es:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0} Q = be \text{ , con } Q(0) = 20$$

- Con base en lo anterior, se obtiene que: $\displaystyle \frac{dQ}{dt} + \frac{5}{100} Q = 0$

- Como la ecuación anterior es de variables separables, entonces:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{20} Q \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{20}$$

- Así, integrando se obtiene:

$$\int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{dt}{20} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln Q = \frac{-t}{20} + C_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad Q = C\, e^{-t/20}$$

  Luego, como $Q(0) = 20 \quad \Rightarrow \quad C = 20$

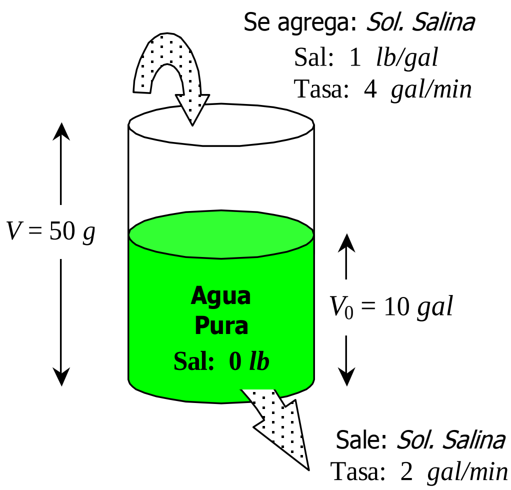
- ***Respuesta parte (a):*** La ecuación que permite determinar la cantidad de sal que hay en el tanque está dada por: $Q(t) = 20\, e^{-t/20}$

  NOTA: Observe que $\lim_{t \to \infty} Q(t) = 0$, lo cual indica que la cantidad de sal tiende a desaparecer con el tiempo puesto que solo se agrega agua dulce al tanque.

- ***Respuesta parte (b):*** Para $t = 20$, $Q(20) = 20\, e^{-1} \cong 7.36$. Por lo tanto, al cabo de 20 minutos, en el tanque hay aproximadamente 7.36 libras de sal.

Ejemplo 2

Un tanque de 50 galones contiene inicialmente 10 galones de agua pura. Para $t = 0$, una solución salina que contiene una libra de sal por galón, se vierte en el tanque a razón de 4 gal/min, mientras que la solución bien mezclada sale del tanque a razón de 2 gal/min. Hallar: (a) la cantidad de tiempo necesaria para que se llene el tanque, (b) la cantidad y la concentración de sal que hay en el tanque en ese mismo instante.



- ***Solución parte (a):*** En este caso, se requiere hallar t tal que $V = 50$.

  Así, como $V = V_0 + (e - f)\,t$

  $\Rightarrow \quad 50 = 10 + (4-2)\,t$

  $\Rightarrow \quad 50 = 10 + 2\,t \quad \Rightarrow \quad t = 20$

  Por lo tanto, se requieren 20 minutos para llenar el tanque.

- ***Solución parte (b):*** En este caso, se requiere hallar *Q* (cantidad de sal) y *C* (concentración de sal) cuando $t = 20$ minutos (observe que $0 \le t \le 20$).

- Dado que las tasas de entrada y de salida son diferentes, la correspondiente ecuación diferencial es:

  $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{f}{V}\,Q = be$, donde $V = 10 + 2t$, $b = 1$, $e = 4$ y $f = 2$. Por lo tanto, $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{2}{10+2t}\,Q = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{5+t}\,Q = 4$, con $Q(0) = 0$

- Como la ecuación anterior el lineal y su factor integrante es $F(t) = 5 + t$, entonces:

$$\frac{d}{dt}\left[Q\cdot(5+t)\right] = 4(5+t) \quad \Leftrightarrow \quad Q\cdot(5+t) = 4\int (5+t)\,dt + C \quad \Leftrightarrow$$

$$Q\cdot(5+t) = 2(5+t)^2 + C \quad \Leftrightarrow \quad Q = 2(5+t) + \frac{C}{5+t}$$

- Como $Q(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -50 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = 2(5+t) - \dfrac{50}{5+t}$

- Luego, para $t = 20$ se tiene: $Q(20) = 48$ y $C(20) = \dfrac{Q(20)}{V(20)} = \dfrac{48}{50} = 0.96$

- Por lo tanto, en el instante en que el tanque se llena, hay 48 libras de sal, con una concentración de 0.96 libras de sal por galón.

<u>Ejercicios 2.1</u>: Plantee y resuelva los siguientes problemas.

1. Un tanque contiene inicialmente 100 galones de una solución salina que contiene 1 libra de sal. Otra solución salina que contiene 1 libra de sal por galón, se agrega al tanque a razón de 3 gal/min. Si la mezcla sale a la misma tasa, hallar: (a) la cantidad de sal en el tanque como función del tiempo, (b) el momento en el cual la mezcla que está en el tanque contiene 2 libras de sal.
2. Un tanque contiene inicialmente 80 galones de una solución salina con 1/8 de libra de sal por galón. Otra solución salina que contiene 1 libra de sal por galón, se agrega en el tanque a razón de 4 gal/min, mientras que la solución bien mezclada sale del tanque a razón de 8 gal/min. Hallar la cantidad de sal en el tanque cuando éste contiene exactamente 40 galones de solución.
3. Un tanque contiene inicialmente 10 galones de agua pura. Una solución de agua salada que contiene 1/2 libra de sal por galón, se vierte en el tanque a una tasa de 2 gal/min. Si la solución mezclada sale a la misma tasa, hallar la cantidad y la concentración de sal que hay en el tanque en cualquier instante.
4. Un depósito cilíndrico con capacidad para 200 galones, contiene 100 galones con 100 libras de sal disuelta. Hacia el depósito fluye agua salada que contiene 2 libras de sal por galón a razón de 4 gal/min y la mezcla fluye hacia afuera a razón de 3 gal/min. Determine la cantidad de sal que contiene el depósito cuando se llene y su concentración en ese mismo instante.
5. Un tanque está lleno con 8 galones de agua salada en la cual 2 libras de sal están disueltas. Agua salada con 3 libras de sal por galón entra al tanque a 4 gal/min, y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa. (a) Encuentre la cantidad de sal como una función del tiempo. (b) Encuentre la concentración de sal después de 8 min. (c) ¿Cuánta sal hay después de un largo tiempo?
6. Un depósito tiene 40 galones de agua pura. Una solución de agua azucarada con 1 libra de azúcar por galón entra a 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa. (a) ¿Cuánta azúcar hay en el tanque en cualquier tiempo? (b) ¿Cuándo el agua que sale tendrá ½ libra de azúcar por galón?
7. Un tanque tiene 60 galones de agua salada con 2 libras de sal por galón. Una solución con 3 libras de sal por galón entra a 2 gal/min, y la mezcla sale a la misma tasa. ¿Cuándo habrá 150 libras de sal en el tanque?
8. Un tanque tiene 100 galones de agua dulce con 40 libras de azúcar disuelta. Agua pura entra a razón de 2 gal/min y sale con la misma tasa. (a) ¿Cuándo la concentración de azúcar será de 0,2 lb/gal? (b) ¿Cuándo la concentración será menor que 0,01 lb/gal?
9. Un tanque tiene 10 galones de agua salada con 2 libras de sal disuelta. Agua salada con 1,5 libras de sal por galón entra a 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a 4 gal/min. (a) Determine la cantidad de sal presente en cualquier instante. (b) Encuentre la concentración de sal en el tanque justo en el momento en que éste queda vacío.

10. Un tanque tiene 60 galones de agua pura. Una solución con 3 libras de sal por galón entra a 2 gal/min y sale a 2,5 gal/min. (a) Encuentre la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo. (b) Encuentre la concentración de sal cuando el tanque tenga 30 galones de agua salada. (c) Encuentre la cantidad de agua en el tanque cuando se tenga la máxima concentración. (d) Determine la máxima cantidad de sal presente en cualquier tiempo.

2.2 *Reacciones Químicas*

El problema que se presenta más adelante, es un ejemplo típico de aplicación de la *"Ley de acción de masa"*, ley que es fundamental en la teoría de tasas de las *Reacciones Químicas*. La *"tasa"* a la cual se forma una sustancia se llama la *"velocidad de reacción"* y aunque ninguna regla general se aplica en todos los casos, la citada ley se puede aplicar para determinar esa tasa.

Ley de acción de masa: *Si la temperatura se mantiene constante, la velocidad de una reacción química es proporcional al producto de las cantidades presentes de las sustancias que están reaccionando.*

En el ejemplo 1 se ilustra una *reacción de segundo orden*; en ésta, se combinan dos sustancias, *A* y *B*, para formar una sustancia *C*, reacción que se acostumbra simbolizar como: $A+B \to C$. En términos muy generales, la reacción indicada se puede describir como sigue:

> Supongamos que para formar la sustancia *C*, se combinan α unidades de la sustancia *A* y β unidades de la sustancia *B*. Sea *x* la cantidad de *C* que se forma en cualquier tiempo *t*. Si para obtener *x* unidades de *C* se necesitan ***m* partes de *A*** y ***n* partes de *B***, entonces la cantidad de unidades de *A* y *B* **presentes** (**que quedan**) en cualquier instante *t*, es:

Cantidad presente de *A*	Cantidad presente de *B*
$\alpha - \dfrac{m}{m+n}\,x$	$\beta - \dfrac{n}{m+n}\,x$

> Por otra parte, por la *Ley de acción de masa*, se sabe que la velocidad (tasa) con que reaccionan las dos sustancias es proporcional, en el tiempo *t*, al producto de las cantidades **presentes** de *A* y *B* que no se han transformado en *C*. Por lo tanto, si $k>0$ es la constante de proporcionalidad, la ecuación diferencial –no lineal– para este tipo de reacción adquiere la forma:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(\alpha - \frac{m}{m+n}\,x\right)\left(\beta - \frac{n}{m+n}\,x\right) \qquad (*)$$

Finalmente, la solución de la ecuación (*), a saber $x(t)$, nos permite calcular en cualquier momento del proceso, la cantidad de la sustancia *C* que se produce de la reacción de las sustancias *A* y *B*.

Ejemplo 1

Dos químicos *A* y *B* reaccionan para formar otro químico *C*. La tasa de formación de *C* es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de los químicos *A* y *B* presentes. La formación de *C* requiere 2 libras de *A* por cada 3 libras de *B*. Si inicialmente están presentes 10 libras de *A* y 30 libras de *B*, y si en 12 minutos se forman 10 libras de *C*: (a) ¿Cuál es la cantidad del químico *C* en cualquier tiempo y cuál es la máxima cantidad de éste que se puede formar? (b) ¿Cuánta cantidad de los químicos *A* y *B* queda después de mucho tiempo?

Solución:

- Sea x es la cantidad presente (en libras) del químico *C* en cualquier tiempo *t* (en horas); entonces, su tasa de formación (velocidad de reacción) es: $\dfrac{dx}{dt}$
- Por otra parte, se sabe que para formar x libras del químico *C*, se necesitan 2 partes del químico *A* y 3 partes del químico *B*; o sea, $2x/5$ de libra de *A* y $3x/5$ de libra de *B*.
- Como inicialmente están presentes 10 libras del químico *A* y 30 libras del químico *B*, entonces, en el instante *t*, se tiene que las cantidades de *A* y *B* presentes (libras que quedan) están dadas por $(10-2x/5)$ y $(30-3x/5)$, respectivamente.
- Si $k_1 > 0$ es la constante de proporcionalidad, la *Ley de acción de masa* nos conduce a la siguiente ecuación diferencial, sujeta a las condiciones iniciales $x(0)=0$ libras y $x(1/5)=10$ libras (12 min = 1/5 hr):

$$\frac{dx}{dt} = k_1\left(10-\frac{2x}{5}\right)\left(30-\frac{3x}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = k_1\left(\frac{50-2x}{5}\right)\left(\frac{150-3x}{5}\right) \qquad (1)$$

- Para simplificar las operaciones algebraicas y el proceso de integración, si en la ecuación (1) se saca como factor común a 2/5 del primer término y a 3/5 del segundo término; y si además, se introduce una nueva constante $k>0$, se obtiene el siguiente par de ecuaciones equivalentes:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6k_1}{25}(25-x)(50-x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = k(25-x)(50-x) \qquad (2)$$

- La ecuación (2) es de variables separables y la integral resultante se resuelve usando la técnica de fracciones parciales; de modo que:

$$\int \frac{dx}{(25-x)(50-x)} = \int k\ dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{D}{25-x} + \frac{E}{50-x} \right) dx = k\,t + C_1 \ ,$$

donde $D = 1/25$ y $E = -1/25$; así , $\dfrac{1}{25} \displaystyle\int \left(\frac{1}{25-x} - \frac{1}{50-x} \right) dx = k\,t + C_1$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|50-x| - \ln|25-x| = 25(k\,t + C_1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left| \frac{50-x}{25-x} \right| = 25\,k\,t + 25\,C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{50-x}{25-x} = C\ e^{25\,k\,t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{50-x}{25-x} = 2\ e^{1.4384\,t} \qquad (3)$$

pues $x(0) = 0 \ \Rightarrow \ C = 2$ y $x(1/5) = 10 \ \Rightarrow \ k = \dfrac{\ln(4/3)}{5} \cong 0.05754$.

- ***Respuesta parte (a):*** La ecuación que permite calcular la cantidad del químico *C* en cualquier instante, se obtiene despejando x de (3), lo cual nos conduce al siguiente par de ecuaciones equivalentes:

$$x(t) = \frac{50\left[e^{1.4384\,t} - 1 \right]}{2\ e^{1.4384\,t} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{50\left[1 - e^{-1.4384\,t} \right]}{2 - e^{-1.4384\,t}} \qquad (4)$$

Por otra parte, se puede verificar que $x'(t) > 0$ $(\forall\ t \geq 0)$ y, por lo tanto, como la función obtenida en (4) es siempre creciente, entonces la máxima cantidad del químico *C* que se puede formar se determina como sigue:

$$C_{máxima} = \lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{50}{2} = 25$$

O sea, después de un largo tiempo, se forman 25 libras del químico *C*.

- ***Respuesta parte (b):*** Con base en lo anterior, después de mucho tiempo, la cantidad presente de los químicos *A* y *B* se obtiene como sigue:

$$A_{presente} = 10 - \frac{2}{5}(25) = 10 - 10 = 0 \quad \wedge \quad B_{presente} = 30 - \frac{3}{5}(25) = 30 - 15 = 15$$

En conclusión, después de un largo tiempo, el químico *A* desaparece, mientras que del químico *B* quedan 15 libras.

Ejercicios 2.2: Plantee y resuelva los problemas siguientes [2].

1. Un químico *A* es transformado en el químico *B*. La tasa a la cual *B* se transforma varía directamente con la cantidad de *A* presente en cualquier instante. Si 10 libras de *A* están presentes inicialmente y si 3 libras se transforman en *B* en una hora: (a) ¿Qué cantidad de *A* se transforma después de 2, 3 y 4 horas? (b) ¿En cuánto tiempo se transforma el 75% del químico *A*? (**Nota:** Este es un tipo de *reacción de primer orden*).
2. El químico *C* se produce de una reacción que involucra los químicos *A* y *B*. La tasa de producción de *C* varía con el producto de las cantidades instantáneas de *A* y *B* presentes. La formación requiere 3 libras de *A* por cada 2 libras de *B*. Si inicialmente están presentes 60 libras de cada químico *A* y *B*, y si se forman 15 libras de *C* en una hora, encontrar: (a) La cantidad de *C* en cualquier tiempo. (b) La cantidad de *C* después de 2 horas. (c) La máxima cantidad de *C* que se puede formar y la cantidad de *A* y *B* presentes, después de un largo tiempo.
3. Dos sustancias, *A* y *B*, se combinan para formar la sustancia *C*. La velocidad de reacción es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de *A* y *B* que no se han convertido en *C*. Al principio hay 40 gramos de *A* y 50 gramos de *B*, en tanto que por cada gramo de *B* se consumen 2 de *A*. Se observa que a los 5 minutos se han formado 10 gramos de *C*. (a) ¿Cuánto de *C* se forma en 20 minutos? (b) ¿Cuál es la cantidad límite de *C* y cuánto de las sustancias *A* y *B* queda al cabo de mucho tiempo?
4. Dos reactivos, *A* y *B*, se combinan para formar una sustancia *C*, de tal manera que se requieren 2 gramos de *A* por cada gramo de *B*. La tasa de producción es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de *A* y *B* que no se han transformado en *C*. Si inicialmente hay 100 y 50 gramos de *A* y *B*, respectivamente, y si se forman 10 gramos de *C* en 5 minutos: (a) ¿Cuál es la cantidad límite de *C* y cuánto de los reactivos *A* y *B* queda después de mucho tiempo? (b) ¿Cuándo se formará la mitad de la cantidad límite de *C* ?
5. Cuando se combinan dos sustancias, *A* y *B*, se forma un compuesto *C*. La reacción entre ambas es tal que por cada gramo de *A* se usan 4 gramos de *B*; además, se observa que a los 10 minutos se han formado 30 gramos del compuesto *C*. Sabiendo que la rapidez de la reacción es proporcional al producto de las cantidades de *A* y *B* que quedan y que al principio hay 50 gramos de *A* y 32 gramos de *B*: (a) Calcule la cantidad de *C* en función del tiempo. (b) Interprete la solución después de mucho tiempo y determine la cantidad de las sustancias *A* y *B* presente en ese momento. (c) ¿Qué cantidad del compuesto *C* hay a los 15 minutos?

[2] Por conveniencia, cuando las unidades están dadas en libras (lb), utilizaremos el tiempo en horas (hr), y cuando están en gramos (gr), en minutos (min).

3 APLICACIONES A CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

3.1 *Problemas de Enfriamiento (Decrecimiento)*

Ley de enfriamiento de Newton: *La tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional, en el tiempo, a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio ambiente.*

- Sea: T = Temperatura del cuerpo en el instante t
  T_m = Temperatura del medio ambiente (constante)
  T_0 = Temperatura inicial del cuerpo; o sea, $T(0) = T_0$
  k = Constante de proporcionalidad ($k > 0$)

- Luego, la razón de cambio de la temperatura del cuerpo es dT/dt y la *Ley de enfriamiento de Newton* puede formularse por una ecuación diferencial de variables separables (o lineal), cuya solución está dada en términos de una función exponencial. Por lo tanto, se tiene que:

Ecuación Diferencial (1)	Solución (2)
$\dfrac{dT}{dt} = -k\left(T - T_m\right)$	$T = T_m + C\,e^{-kt}$

Observaciones:

a. En el proceso de enfriamiento –que consiste en disminuir la temperatura inicial T_0 de un cuerpo–, se requiere que dT/dt sea negativa; en cuyo caso, T decrece en el tiempo. Para tal efecto, dado que $k > 0$ y $T - T_m > 0$ (se parte del supuesto de que $T > T_m$), se necesita el signo “negativo” en la ecuación diferencial (1), la cual tipifica este tipo de problemas.

b. La ecuación (1) también se denomina ***Ley de Decrecimiento Exponencial***, por la forma que tiene su solución.

Ejemplo 1: Una barra metálica a una temperatura de 100º*F* se pone en un cuarto a una temperatura constante de 0º*F*. Si después de 20 minutos la temperatura de la barra es 50º*F*, hallar: (a) el tiempo que gastará la barra para llegar a una temperatura de 25º*F* y (b) la temperatura de la barra después de 10 minutos.

Solución: Sea T la temperatura de la barra en el instante t. En este caso, los datos son: $T_m = 0°F$, $T(0) = 100°F$ y $T(20) = 50°F$. De la ecuación (1) se tiene:

$$\int \frac{dT}{T} = -\int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln T = -kt + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad T = Ce^{-kt}$$

- Como $T(0)=100 \quad \Rightarrow \quad C=100 \quad \Rightarrow \quad T=100\,e^{-kt}$
- Además, $T(20)=50 \quad \Rightarrow \quad 50=100\,e^{-20k} \quad \Rightarrow \quad 0.5=e^{-20k}$

  $\Rightarrow \quad \ln(0.5)=-20k \quad \Rightarrow \quad k \cong 0.035$
- Por lo tanto, la ecuación de la temperatura está dada por: $T(t)=100e^{-0.035t}$

Solución parte (a): Dado que $T(t)=100e^{-0.035t}$, se debe resolver la ecuación:

$$T(t)=25 \quad \Leftrightarrow \quad 25=100e^{-0.035t} \quad \Leftrightarrow \quad -\ln 4=-0.035\,t \quad \Leftrightarrow \quad t=40$$

Por lo tanto, se requieren 40 minutos para que la barra alcance una temperatura de 25º*F*.

Solución parte (b): Como $T(t)=100e^{-0.035t}$, entonces para $t=10$ se tiene que $T(10)=100e^{-0.35}\cong 70.71$. Por lo tanto, cuando han transcurrido 10 minutos, la barra alcanza una temperatura aproximada de 70.71º*F*.

Ejemplo 2: Un cuerpo a una temperatura desconocida se coloca en un cuarto que se mantiene a una temperatura constante de 30º*F*. Si después de 10 minutos y de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de 0º*F* y de 15º*F*, respectivamente, hallar la temperatura inicial desconocida del cuerpo[3].

Solución: Sean *T* la temperatura del cuerpo en el instante t y T_0 la temperatura inicial del cuerpo por determinar. Para este caso, se tienen los datos: $T_m=30°F$, $T(10)=0°F$, $T(20)=15°F$ y $T(0)=T_0$. De la ecuación (1) se obtiene:

$$\int \frac{dT}{T-30}=-\int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(T-30)=-kt+C_1 \quad \Leftrightarrow \quad T=30+Ce^{-kt}$$

- Por otra parte, usando las condiciones iniciales, tenemos:

$$T(10)=0 \quad \Rightarrow \quad -30=Ce^{-10k} \quad \Rightarrow \quad C=-30e^{10k}$$
$$T(20)=15 \quad \Rightarrow \quad -15=Ce^{-20k} \quad \Rightarrow \quad C=-15e^{20k}$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido en el punto anterior, se tiene:

$$30e^{10k}=15e^{20k} \quad \Leftrightarrow \quad 2=e^{10k} \quad \Leftrightarrow \quad \ln 2=10k \quad \Leftrightarrow \quad k\cong 0.069$$

[3] Aquí se ilustra el proceso de calentamiento (aumento de la temperatura inicial de un cuerpo) y también se utiliza la ecuación (1). En este caso, $T-T_m<0$ por lo que $dT/dt>0$, en cuyo caso, T crece en el tiempo.

Luego, sustituyendo en cualquiera de la dos ecuaciones del sistema citado, se obtiene que $C = -60$.

Por lo tanto, la temperatura en función del tiempo está dada por la ecuación: $T(t) = 30 - 60e^{-0.069t}$

- Finalmente, como $T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = 30 - 60 = -30$. Esto indica que la temperatura inicial del cuerpo es de −30º*F*.

<u>Ejercicios</u> <u>3.1</u>: Plantee y resuelva los problemas siguientes.

1. Un cuerpo a una temperatura desconocida se pone en un refrigerador a una temperatura constante de 0º*F*. Si después de 20 minutos y de 40 minutos la temperatura del cuerpo es de 40º*F* y de 20º*F*, respectivamente, hallar la temperatura inicial del cuerpo.
2. Si la temperatura del aire es de 10º*C* y un cuerpo se enfría desde 80º*C* hasta 30º*C* en 30 minutos, ¿cuánto tiempo tardará en descender su temperatura hasta 20º*C* ?
3. Un cuerpo a una temperatura de 50º*F* se coloca al aire libre donde la temperatura es de 100º*F*. Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es de 60º*F*, encontrar: (a) el tiempo que tarda el cuerpo en llegar a una temperatura de 75º*F* y (b) la temperatura del cuerpo después de 20 minutos.
4. En un cuarto, cuya temperatura se mantiene a 100º*F*, se coloca un cuerpo a una temperatura de 0º*F*. Si a los 10 minutos la temperatura del cuerpo es de 25º*F* ; (a) ¿Cuánto tiempo requiere el cuerpo para alcanzar una temperatura de 50º*F* ? (b) ¿Cuál es la temperatura del cuerpo después de 20 minutos?
5. Un horno se mantiene a una temperatura constante de 150º*F*. Si se coloca en el horno un objeto de 50º*F* de temperatura y si después de 10 minutos la temperatura del objeto es de 75º*F*, ¿en cuánto tiempo el objeto tendrá una temperatura de 100º*F* ?
6. Agua a una temperatura de 100º*C*, se enfría en 10 minutos a 80º*C* en un cuarto de 25º*C* de temperatura. (a) ¿Cuál es la temperatura del agua después de 20 minutos? (b) ¿Cuándo la temperatura será de 40º*C* y cuándo de 26º*C* ?
7. Agua a una temperatura de 10º*C* , tarda 5 minutos para calentarse a 20º*C* en un cuarto con temperatura de 40º*C*. (a) Encuentre la temperatura del agua después de 20 minutos y después de ½ hora. (b) ¿Cuándo la temperatura será de 25º*C* ?
8. La temperatura máxima que puede leerse en cierto termómetro es de 110º*F*. Cuando el termómetro marca 36º*F*, se coloca en un horno. Se observa que, después de 1 y 2 minutos, el termómetro marca 60º*F* y 82º*F*, respectivamente. ¿Cuál es la temperatura del horno?

3.2 *Problemas de Desintegración (Decrecimiento)*

Ley de desintegración radioactiva: *La tasa de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional, en el tiempo, a la cantidad de sustancia que está presente.*

- Sea: N = Cantidad de sustancia presente después de un tiempo t
  N_0 = Cantidad inicial de sustancia presente; o sea, $N(0) = N_0$
  k = Constante de proporcionalidad ($k > 0$)

- Luego, la razón de cambio de la cantidad de sustancia presente es dN/dt y la *Ley de desintegración radioactiva* puede formularse por una ecuación diferencial de variables separables; además, su solución es una función exponencial. Por lo tanto, se tiene que:

Ecuación Diferencial (3)	Solución (4)
$\dfrac{dN}{dt} = -k\,N$	$N = C\,e^{-k\,t}$

Observaciones:

a. En el proceso de la desintegración radioactiva –que consiste en la emisión de partículas en forma aleatoria y por tanto la cantidad de sustancia disminuye–, se requiere que dN/dt sea negativa; en cuyo caso, N decrece en el tiempo.
   Para tal efecto, dado que $k > 0$ y $N > 0$, se necesita el signo "negativo" en la ecuación diferencial (3), la cual tipifica este tipo de problemas.

b. La **Vida Media** de una sustancia radioactiva se define como el tiempo que ésta requiere para reducir su masa inicial a la mitad; es decir, para que desaparezca el 50% de la sustancia presente inicialmente.

c. La ecuación (3) también se denomina ***Ley de Decrecimiento Exponencial***, puesto que su solución está dada por una función exponencial.

d. Se parte del supuesto de que N es una función de tiempo derivable y por lo tanto continua. Cabe mencionar que, para problemas de decrecimiento (como el de la desintegración radioactiva), donde N es un valor entero y discreto, esta suposición es incorrecta. Sin embargo, la ecuación (4) proporciona una buena aproximación a las leyes físicas del decrecimiento que rigen tal sistema.

Ejemplo 1: Se sabe que cierto material radioactivo se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 50 miligramos de material presente y después de 2 horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, hallar: (a) una expresión para la masa de material restante en un momento *t*, (b) la masa de material después de 4 horas y (c) el tiempo al cabo del cual el material se ha desintegrado en la mitad de su masa inicial (Vida Media).

Solución parte (a): Sea N la cantidad de material radioactivo presente después de t horas.

- En este caso, se tiene que la masa inicial es: $N(0)=50$ mg. Además, se sabe que después de 2 horas, la masa inicial se ha desintegrado en un 10%; por lo que: $N(2)=50-(50)(0.10)=50-5=45$ mg; es decir, el material radioactivo ha perdido 5 mg de su masa inicial; por tanto, quedan 45 mg de material.
- Por otra parte, de la ecuación (3) se obtiene:

$$\int \frac{dN}{N} = -\int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln N = -k\,t + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad N = C\,e^{-kt}$$

- Como $N(0)=50 \quad \Rightarrow \quad C=50 \quad \Rightarrow \quad N=50\,e^{-kt}$ (*)
- Además, $N(2)=45 \quad \Rightarrow \quad 45=50e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad \ln(0.9)=-2k \quad \Rightarrow \quad k \cong 0.053$
- Sustituyendo el valor de *k* en (*), la ecuación para determinar la masa de material restante, como función del tiempo, está dada por: $N(t)=50\,e^{-0.053t}$

Solución parte (b): Dado que $N(t)=50\,e^{-0.053t}$, entonces para $t=4$ se obtiene que $N(4)=50\,e^{-0.211} \cong 40.49$. Lo anterior indica que, después de 4 horas, quedan aproximadamente 40.5 mg de material radioactivo; es decir, se han perdido alrededor de 9.5 mg de la masa inicial.

Solución parte (c): Se requiere determinar el tiempo al cabo del cual la masa inicial se ha desintegrado en un 50%; esto es, cuando quedan 25 mg.

- Así, como $N(t)=50\,e^{-0.053t}$, se debe resolver la ecuación:

$$N(t)=25 \quad \Leftrightarrow \quad 25=50\,e^{-0.053t} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0.5)=-0.053\,t \quad \Leftrightarrow \quad t \cong 13.08$$

- Finalmente, se concluye que la vida media del material radioactivo es de 13 horas, aproximadamente.

Ejemplo 2: El Pb-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo *t* y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio había N_0 gramos de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90% de su masa inicial?

Solución: Sea N la cantidad del isótopo Pb-209 presente después de t horas.

- Para este caso, la masa inicial se desconoce por lo que $N(0) = N_0$ gramos. Además, dado que la vida media del isótopo Pb-209 es de 3.3 horas, entonces se tiene que $N(3.3) = \dfrac{N_0}{2}$ gramos.
- De la ecuación diferencial (3) de la página 22, obtenemos:

$$\int \frac{dN}{N} = -\int k\,dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln N = -k\,t + C_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad N = C\,e^{-kt}$$

- Como $N(0) = N_0 \quad \Rightarrow \quad C = N_0 \quad \Rightarrow \quad N = N_0\,e^{-kt}$ (*)
- Como $N(3.3) = \dfrac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{N_0}{2} = N_0\,e^{-(3.3)k} \quad \Rightarrow \quad \ln(0.5) = -(3.3)\,k \quad \Rightarrow \quad k \cong 0.21$
- Sustituyendo el valor de *k* en (*), la ecuación que nos permite encontrar la masa de material restante en el instante *t*, está dada por: $N(t) = N_0\,e^{-0.21t}$
- Por otra parte, como se quiere determinar el tiempo al cabo del cual la masa inicial se ha desintegrado en un 90%; o sea, **cuando queda** el 10% de N_0, entonces debemos resolver la ecuación: $N(t) = (0.1)\;N_0$.
- Basado en lo anterior y dado que $N(t) = N_0\,e^{-0.21t}$, se tiene que:

$$N(t) = (0.1)\,N_0 \quad \Leftrightarrow \quad (0.1)\,N_0 = N_0\,e^{-0.21t} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0.1) = -0.21t \quad \Leftrightarrow \quad t \cong 10.96$$

- Finalmente, se concluye que deben transcurrir alrededor de 11 horas para que se desintegre el 90% de la masa inicial del isótopo Pb-209.

Ejercicios 3.2: Plantee y resuelva los problemas siguientes.

1. Un material radioactivo se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 100 miligramos de material presente y después de 2 años se observa que el 5% de su masa original se ha desintegrado, encuentre:
   a. La cantidad de material radioactivo presente en cualquier momento *t*.
   b. El tiempo necesario para que se haya desintegrado el 10% de la masa original.
   c. La vida media del material radioactivo.

2. Un material radioactivo se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad presente. Si después de una hora se observa que el 10% del material se ha desintegrado, hallar su vida media. (*Sugerencia:* Llame con N_0 la masa inicial del material, la cual, explícitamente, no es necesario conocer)
3. La velocidad de desintegración del radio (elemento químico) es proporcional a la cantidad presente. Si su vida media es de 1600 años, hallar qué tanto por ciento resultará desintegrado cuando pasen 100 años. (*Sugerencia:* Llame con R_0 la cantidad de radio presente inicialmente)
4. Si la vida media del radio es de 1700 años y si éste se desintegra a una velocidad que es proporcional a la cantidad presente, ¿qué porcentaje de radio se puede esperar que quede después de 50, 100 y 200 años?
5. Encuentre la vida media de una sustancia radioactiva si el 25% de ésta desaparece en 10 años y sabiendo que la misma decrece a una razón que es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t.
6. Si la rapidez con que una sustancia radioactiva se desintegra es proporcional a la cantidad presente en cualquier instante y si el 30% de esa sustancia desaparece en 10 días, ¿en cuánto tiempo desaparecerá el 90%?
7. La carga eléctrica, en culombios, en una superficie esférica se escapa a una tasa proporcional a la carga instantánea. Inicialmente, la carga es de 5 culombios, y en 20 min se escapa un tercio. ¿Cuándo quedará un culombio?
8. Suponga que una sustancia decrece a una razón que es inversamente proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 12 unidades presentes y si 8 unidades están presentes después de 2 días, ¿cuánto tiempo tomará para que la sustancia desaparezca?

3.3 *Problemas de Poblaciones (Crecimiento)*

Ley de crecimiento de poblaciones: *La tasa de crecimiento de una población es proporcional, en el tiempo, a la cantidad de habitantes que está presente.*

❖ Sea: N = Cantidad de habitantes presente después de un tiempo t
N_0 = Cantidad inicial de habitantes presente; o sea, $N(0) = N_0$
k = Constante de proporcionalidad ($k > 0$)

❖ Luego, la razón de cambio del número de habitantes presente es dN/dt y la *Ley de crecimiento de una población* se puede formular por una ecuación diferencial de variables separables; además, su solución es una función exponencial. Por lo tanto, se tiene:

Ecuación Diferencial (5)	Solución (6)
$\dfrac{dN}{dt} = k\,N$	$N = C\,e^{k\,t}$

<u>Observaciones</u>:

a. En el proceso de crecimiento de una población –donde el número de habitantes aumenta–, se requiere que dN/dt sea positiva; en cuyo caso, *N* crece en el tiempo. Por lo tanto, como $k > 0$ y $N > 0$, **NO** se necesita el signo "negativo" en la ecuación diferencial (5), la cual tipifica este tipo de problemas.

   (<u>NOTA</u>: La observación (d), de la página 22, también es válida en estos casos; a saber, en el crecimiento de poblaciones, donde *N* es un valor entero)

b. La ecuación (5) también se denomina ***Ley de Crecimiento Exponencial***, debido a que su solución está dada por una función exponencial.

<u>Ejemplo 1</u>: Se sabe que un cultivo de bacterias crece a una tasa proporcional a la cantidad presente. Después de una hora, se observa en el cultivo 1000 familias de la bacteria y después de 4 horas, 3000 familias. Hallar, (a) una expresión para el número de familias de la bacteria presente en el cultivo en términos del tiempo; (b) el número de familias de bacterias que había originalmente en el cultivo.

<u>Solución</u> <u>parte</u> (<u>a</u>): Sea *N* la cantidad de familias de la bacteria presente en el cultivo después de *t* horas.

- En este caso, los datos son: $N(1) = 1000$ familias y $N(4) = 3000$ familias.
- Luego, de la ecuación (5) se tiene:

$$\int \frac{dN}{N} = \int k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln N = k\,t + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad N = C\,e^{kt} \qquad (*)$$

- Por otra parte, con las condiciones iniciales, obtenemos:

$$N(1) = 1000 \quad \Rightarrow \quad 1000 = C\,e^{k} \quad \Rightarrow \quad C = 1000\,e^{-k}$$

$$N(4) = 3000 \quad \Rightarrow \quad 3000 = C\,e^{4k} \quad \Rightarrow \quad C = 3000\,e^{-4k}$$

- Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido en el punto anterior, se tiene:

$$1000\,e^{-k} = 3000\,e^{-4k} \quad \Leftrightarrow \quad e^{3k} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3k = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad k \cong 0.366$$

  Luego, sustituyendo en cualquiera de la dos ecuaciones del sistema citado, se obtiene que $C = 1000\,e^{-0.366} \cong 693.5 \cong 694$.

- Finalmente, al sustituir los valores de *C* y *k* en (*), la ecuación para hallar el número de familias de la bacteria presente en el cultivo es: $N(t) = 694\,e^{0.366t}$

<u>Solución</u> <u>parte</u> (<u>b</u>): Como $N(t) = 694\,e^{0.366t}$, si $t = 0$, entonces $N(0) = 694$; por lo que, inicialmente, había alrededor de 694 familias en el cultivo de bacterias.

***Ejercicios* *3.3*:** Plantee y resuelva los problemas siguientes.

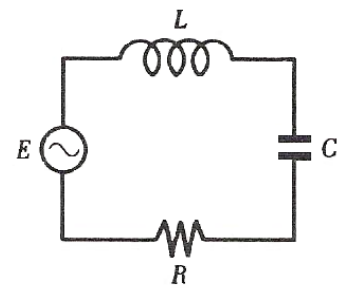
1. Se sabe que la población de cierto país aumenta a una tasa proporcional al número de habitantes actuales de dicho país. Si después de 2 años la población se ha duplicado y después de 3 años la población es de 20 000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en ese país.

2. Se sabe que la población de un estado crece a una tasa proporcional al número de habitantes que viven actualmente en ese estado. Si después de 10 años la población se ha triplicado y después de 20 años la población es de 150 000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en ese estado.
3. Bacterias en cierto cultivo incrementan su reproducción a una velocidad proporcional al número presente. Si el número original se incrementa en un 50% en ½ hora, ¿en cuánto tiempo se espera tener tres veces el número original y cinco veces el número original?
4. Un cultivo de bacterias "enferma" crece a una tasa que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número presente. Si hay inicialmente 9 unidades y si 16 unidades están presentes después de 2 días, ¿en cuánto tiempo habrá 36 unidades?
5. En cierta solución hay 2 gramos de un químico. Después de 1 hora, hay 3 gramos del químico. Si la rapidez con que el químico se incrementa es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo que ha estado en la solución, ¿cuántos gramos habrá después de 4 horas?
6. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes presente en dicho instante. Si la población inicial es de 500 habitantes y si ésta aumenta en un 15% en 10 años, determine:
   a. La población dentro de 30 años
   b. El intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la población aumente en un 60%.
7. En cualquier momento dado, la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de 3 horas se observa que hay 400 individuos. Si pasadas 10 horas, hay 2000 especímenes, ¿cuál era la cantidad inicial de bacterias?
8. Una solución tiene inicialmente N_0 gramos de un compuesto químico y se sabe que la razón de reproducción es proporcional a la cantidad del químico presente en cualquier instante.
   a. Si después de una hora la cantidad medida del compuesto químico es 3/2 de la cantidad inicial, ¿cuánto tiempo se requiere para triplicar el número de gramos iniciales?
   b. Si al cabo de 4 horas hay 10 gramos, ¿cuál era la cantidad inicial del compuesto químico presente en la solución?

4 APLICACIONES A CIRCUITOS ELÉCTRICOS SIMPLES

El flujo de corriente en una red eléctrica consiste de un número finito de circuitos en serie y está gobernada por la **_Segunda Ley de Kirchhoff_** que dice: *La suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes del circuito es igual al voltaje $E(t)$ suministrado*.

4.1 *Circuitos RLC*



El estudio siguiente se reduce al caso de redes que consisten de un circuito eléctrico en serie formado por: una *fuerza electromotriz* o *fuente de voltaje* de E voltios, una *resistencia* de R ohmios, un *inductor* con una *inductancia* de L henrios y un *condensador* o *capacitor* con una *capacitancia* de C faradios.

- La *fuerza electromotriz* (abreviada **fem**), actúa como una fuente de energía – tal como una batería o un generador– que proporciona un voltaje de $E(t)$ voltios en el instante t. Si se cierra el interruptor del circuito, el resultado es una corriente de $I(t)$ amperios en el circuito y una carga de $Q(t)$ culombios en el capacitor, en el instante t.
- La *resistencia* R usa energía, tal como una bombilla eléctrica, un tostador, u otro electrodoméstico.
- El *inductor* L se opone a cambios de corriente. Tiene un efecto de inercia en electricidad de la misma manera que una masa tiene un efecto de inercia en mecánica.
- El *capacitor* C es un elemento que almacena energía.

Por otra parte, se dice que un circuito está orientado si se le ha asignado una dirección positiva para atravesarlo; así, la corriente fluye a través del circuito, del lado positivo (**+**) hacia el lado negativo (**–**) de la fuente de energía (batería o generador).

<u>Unidades eléctricas</u>

El sistema de unidades eléctricas que se usará, en donde el tiempo se mide en segundos, se resume en la tabla siguiente:

Cantidad	**Símbolo**	**Unidad**
Resistencia	R	ohmio
Inductancia	L	henrio
Capacitancia	C	faradio
Corriente	I	amperio
Carga	Q	culombio
Fuerza electromotriz (fem), voltaje	E	voltio

4.2 *Leyes de caída de voltaje*

En física se habla de una caída de voltaje a través de un elemento, el cual puede ser: una resistencia, un inductor o un capacitor. En la práctica, esta caída de voltaje (o caída de potencial o diferencia de potencial) se puede determinar por medio de un instrumento llamado voltímetro. Experimentalmente, las siguientes leyes se cumplen:

1. ***Resistencia:*** *La caída de voltaje a través de una resistencia es proporcional a la corriente que pasa a través de la resistencia.*

   Sea: E_R = caída de voltaje a través de una resistencia
   I = corriente que pasa a través de la resistencia
   R = constante de proporcionalidad llamada el coeficiente de resistencia o simplemente resistencia

   Entonces: $E_R = R\,I$ (*Ley de Ohm*)

2. ***Inductor:*** *La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional, en cualquier momento, a la tasa instantánea de cambio de la corriente.*

   Sea: E_L = caída de voltaje a través del inductor
   I = corriente que fluye en el circuito
   L = constante de proporcionalidad llamada el coeficiente de inductancia o simplemente la inductancia

   Entonces: $$E_L = L\,\frac{dI}{dt}$$

3. ***Capacitor:*** *La caída de voltaje a través de un capacitor es proporcional a la carga eléctrica instantánea en el capacitor.*

   Sea: E_C = caída de voltaje a través del condensador
   Q = carga eléctrica instantánea del condensador
   $1/C$ = constante de proporcionalidad, donde C es el coeficiente de capacitancia o simplemente capacitancia

   Entonces: $$E_C = \frac{1}{C}\,Q = \frac{Q}{C}$$

4.3 *Ecuaciones diferenciales asociadas a circuitos eléctricos*

Se debe hacer notar que, en un instante cualquiera, "*la corriente es la tasa de cambio en la carga*" ; por lo tanto, la relación entre la corriente *I* y la carga *Q* está dada por la ecuación diferencial: $I = \dfrac{dQ}{dt}$

De acuerdo con las *leyes de caída de voltaje* y la *Segunda Ley de Kirchhoff*, se tiene:

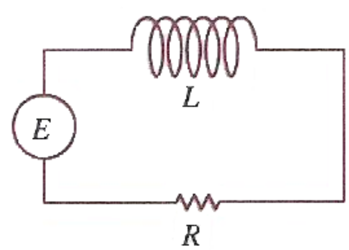
$$E_L + E_R + E_C = E(t) \qquad ; \text{ o sea:}$$

$$L \frac{dI}{dt} + R\, I + \frac{1}{C} Q = E(t) \qquad ; \text{ por tanto:}$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \qquad (*)$$

<u>NOTA</u>: La solución de (*) requiere resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden, procedimiento que se estudiará en otro momento. Sin embargo, es importante indicar que para calcular $Q(t)$, se debe disponer de las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$ y $Q'(0) = I(0) = I_0$; es decir, se requiere conocer la carga inicial del capacitor y la corriente inicial del circuito.

4.4 *Circuito RL (resistencia – inductor)*



Es un circuito simple formado por: una *fuerza electromotriz* E, una *resistencia* R y un *inductor* o una *inductancia* L. (NO contiene capacitor, SIN capacitancia).

En este caso, se debe cumplir que: $E_L + E_R = E(t)$. Así, la ecuación diferencial requerida para determinar la cantidad de corriente $I(t)$ que fluye en el circuito es:

$$\boxed{L \frac{dI}{dt} + R\, I = E(t)} \qquad (1)$$

La ecuación (1) es lineal de primer orden y para resolverla se expresa como:

$$\boxed{\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}} \qquad (2)$$

Ejemplo 1: Un circuito RL tiene una fem de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inicial. Hallar: (a) la corriente en el circuito para un momento *t*, (b) la corriente transitoria y (c) la corriente en condiciones estables (corriente estacionaria).

- ***Ecuación Diferencial:*** En este caso, $E = 5$ voltios, $R = 50$ ohmios y $L = 1$ henrio. Por lo que de la ecuación (1) se tiene:

  $$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dI}{dt} + 50I = 5 , \quad \text{con } I(0) = 0$$

- ***Solución parte (a):*** La ecuación anterior es lineal; su factor integrante es: e^{50t}

  Así, $\frac{d}{dt}\left[I e^{50t} \right] = 5e^{50t} \quad \Rightarrow \quad I e^{50t} = \frac{1}{10}e^{50t} + C \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{10} + Ce^{-50t}$

  Dado que $I(0) = 0$, entonces se obtiene que $C = -1/10$. Por lo tanto, la corriente en el circuito se determina con la ecuación:

  $$I(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-50t} \qquad \Leftrightarrow \qquad I(t) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-50t}\right)$$

- ***Solución partes (b) y (c):*** La corriente transitoria está dada por: $\frac{-1}{10}e^{-50t}$, la cual tiende a "desaparecer" cuando $t \to \infty$. La corriente en condiciones estables (o estacionaria) está dada por: $\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{1}{10}$.

Ejemplo 2: Un circuito RL tiene una fem de $3\,\text{sen}\,2t$ voltios, una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 0.5 henrios y una corriente inicial de 6 amperios. Halle la corriente en el circuito para un momento *t*.

- ***Ecuación Diferencial:*** En este caso, $E = 3\,\text{sen}\,2t$ voltios, $R = 10$ ohmios y $L = 0.5$ henrios. Por lo que de la ecuación (2) se tiene:

  $$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dI}{dt} + 20I = 6\,sen2t , \quad \text{con } I(0) = 6$$

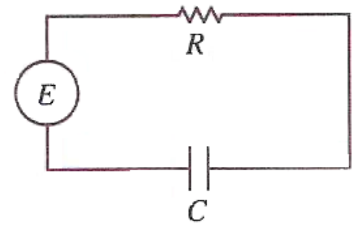
- ***Solución:*** La ecuación anterior es lineal y su factor integrante es: e^{20t}

  Así, $\frac{d}{dt}\left[I e^{20t} \right] = 6e^{20t}\text{sen}\,2t \quad \Rightarrow \quad I e^{20t} = 6\int e^{20t}\text{sen}\,2t\,dt + C \quad \Rightarrow$

  $I e^{20t} = \frac{6e^{20t}\left(20\,\text{sen}\,2t - 2\cos 2t\right)}{404} + C$. Como $I(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{609}{101}$

  Luego, la ecuación de la corriente es: $I = \frac{3}{101}\left(10\,\text{sen}\,2t - \cos 2t + 203e^{-20t}\right)$

4.5 *Circuito RC (resistencia – capacitor)*



Es un circuito simple formado por: una *fuerza electromotriz* E, una *resistencia* R y un *capacitor* o una *capacitancia* C. (NO contiene inductor, SIN inductancia).
En este caso, se debe cumplir que: $E_R + E_C = E(t)$.
requerida para determinar la cantidad de carga eléctrica $Q(t)$ del capacitor es:

$$\boxed{R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}\,Q = E(t)} \qquad (3)$$

La ecuación (3) es lineal de primer orden y para resolverla se expresa como:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}\,Q = \frac{E}{R}} \qquad (4)$$

Ejemplo 1: Un circuito RC tiene una fem de 5 voltios, una resistencia de 10 ohmios, una capacitancia de 10^{-2} faradios y una carga inicial de 5 culombios en el capacitor. Hallar: (a) la carga eléctrica y la corriente en cualquier tiempo, (b) la carga transitoria y (c) la carga estacionaria.

- ***Ecuación Diferencial:*** En este caso, $E = 5$ voltios, $R = 10$ ohmios y $C = 10^{-2}$ faradios. Por lo que de la ecuación (4) se tiene:
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}\,Q = \frac{E}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dQ}{dt} + 10\,Q = \frac{1}{2}\ , \quad \text{con} \quad Q(0) = 5$$

- ***Solución parte (a):*** La ecuación anterior es lineal; su factor integrante es: $e^{10\,t}$
Así, $\frac{d}{dt}\left[\,Q\,e^{10\,t}\,\right] = \frac{1}{2}\,e^{10\,t} \quad \Rightarrow \quad Q\,e^{10\,t} = \frac{1}{20}\,e^{10\,t} + C \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{20} + C\,e^{-10\,t}$
Si $Q(0) = 5 \;\Rightarrow\; C = \frac{99}{20}$. Luego, la **carga** eléctrica es: $Q(t) = \frac{1}{20} + \frac{99}{20}\,e^{-10\,t}$
Por otra parte, como $I = \frac{dQ}{dt}$, entonces la **corriente** es: $I(t) = \frac{-99}{2}\,e^{-10\,t}$

- ***Solución partes (b) y (c):*** La carga transitoria está dada por: $\frac{99}{20}\,e^{-10\,t}$, la cual tiende a "desaparecer" cuando $t \to \infty$. En este caso, la carga estacionaria está dada por: $\lim\limits_{t \to \infty} Q(t) = \frac{1}{20}$.

Ejemplo 2: Una resistencia de 50 ohmios se conecta en serie con un capacitor de 5×10^{-3} faradios y una fem decreciente dada por $300e^{-4t}$. Sabiendo que $Q(0)=0$; (a) encuentre la carga y la corriente en función del tiempo; (b) determine el instante en que la carga es máxima e indique el valor de dicha carga.

- ***Ecuación Diferencial:*** Para este caso, $E(t)=300e^{-4t}$ voltios, $R=50$ ohmios y $C=5\times10^{-3}$ faradios. Por lo que de la ecuación (4) se tiene:
$$\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{RC}\,Q=\frac{E}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dQ}{dt}+4\,Q=6\,e^{-4t}, \quad \text{con } Q(0)=0$$

- ***Solución parte (a):*** La ecuación anterior es lineal; su factor integrante es e^{4t}.
Así, $\dfrac{d}{dt}\left[\,Q\,e^{4t}\,\right]=6 \quad \Rightarrow \quad Q\,e^{4t}=6t+C \quad \Rightarrow \quad Q=6te^{-4t}+Ce^{-4t}$
Dado que $Q(0)=0 \;\Rightarrow\; C=0$. Luego, la carga eléctrica es: $Q(t)=6te^{-4t}$
Luego, como $I=\dfrac{dQ}{dt}$, entonces la corriente es: $I(t)=6e^{-4t}\left[1-4t\,\right]$

- ***Solución parte (b):*** Para determinar el momento en el que la carga del capacitor es máxima, se debe resolver la ecuación $Q'(t)=0$, lo cual nos conduce a: $I(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\dfrac{1}{4}$
Ahora bien, como $Q''(t)=I'(t)=24e^{-4t}\left[4t-2\right] \;\Rightarrow\; Q''(1/4)=-24e^{-1}<0$.
Por lo tanto, se concluye que la carga máxima se presenta al cabo de 0.25 segundos y el valor de la misma, en ese instante, es de aproximadamente 0.552 culombios, puesto que $Q(1/4)=\dfrac{3}{2}\,e^{-1}\cong 0.552$.

Ejercicios 4: Plantee y resuelva los problemas siguientes.

1. Formule una solución general para las ecuaciones (2) y (4) si $E(t)=E_0$ es una constante (ver páginas 30 y 32, respectivamente).
2. Un circuito RL tiene una fem de $4\,\text{sen}\,t$ voltios, una resistencia de 100 ohmios, una inductancia de 4 henrios y no tiene corriente inicial. Hallar la corriente en el circuito en cualquier momento t.
3. Una batería de 12 voltios se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es de 0.5 henrios y la resistencia es de 10 ohmios. Determine la ecuación de la corriente $I(t)$ dado que $I(0)=0$.

4. Un generador con una fem de $20\cos(5t)$ voltios se conecta en serie con una resistencia de 10 ohmios y un inductor de 2 henrios. Si el interruptor se cierra en tiempo $t=0$, establezca una ecuación diferencial para la corriente y determine la corriente en cualquier instante.
5. Un circuito RC tiene una fem de $100\,\text{sen}(2t)$ voltios, una resistencia de 100 ohmios, una capacitancia de 10^{-3} faradios y una corriente inicial de 5 amperios. Encuentre la carga eléctrica del capacitor y la corriente en el circuito en términos del tiempo *t*.
6. Se aplica una fuerza electromotriz de 100 voltios a un circuito RC, donde la resistencia es de 200 ohmios y la capacitancia es de 10^{-4} faradios. Hallar:
   a. La carga del capacitor, si $Q(0)=0$, y la carga transitoria y estacionaria.
   b. La corriente $I(t)$ y la corriente transitoria y estacionaria.
7. Una tensión $E(t) = \begin{cases} 120 & \text{si} \quad 0 \le t \le 20 \\ 0 & \text{si} \quad t > 20 \end{cases}$ se aplica a un circuito RL, en el que la inductancia es de 20 henrios y la resistencia es de 2 ohmios. Determine la corriente en cualquier momento sabiendo que la corriente inicial es cero.
8. En $t=0$ una fem de 20 voltios se aplica a un circuito consistente de un inductor de 2 henrios en serie con una resistencia de 40 ohmios. Si $I(0)=0$:
   a. ¿Cuál es la corriente en cualquier tiempo?
   b. ¿Cuál es la corriente transitoria y cuál es la estacionaria?
9. Una resistencia de 20 ohmios y un inductor de 5 henrios se conectan en serie en un circuito eléctrico en el cual hay un flujo de corriente de 20 amperios en el tiempo $t=0$. Encuentre la corriente para $t \ge 0$ si la fem es cero para $t>0$.
10. Un capacitor de 5×10^{-3} faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de 50 voltios. El interruptor se cierra en $t=0$. Asumiendo que la carga inicial en el capacitor es cero, determine:
    a. La carga y la corriente en cualquier instante.
    b. La carga transitoria y estacionaria.
11. Un capacitor de 5×10^{-3} faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de $50\cos(6t)$ voltios. El interruptor se cierra en $t=0$. Asumiendo que la carga inicial en el capacitor es cero, determine la carga y la corriente en cualquier tiempo.
12. Un circuito en serie consiste de una resistencia de 10 ohmios y un capacitor de 0,01 faradios. Si la carga en el capacitor es de 0,05 culombios, encontrar la carga y la corriente en cualquier tiempo después de cerrar el interruptor.
13. Una resistencia de 4 ohmios y un inductor de 1 henrio se conectan en serie con un voltaje dado por $100e^{-4t}\cos(50t)$, $t \ge 0$. Si la corriente inicial es cero, encontrar la ecuación de la corriente como función del tiempo.

PRÁCTICA GENERAL DE APLICACIONES

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

1. Un depósito contiene 1000 galones de agua en la que hay disueltas 400 libras de azúcar. Se desea reducir la concentración de azúcar hasta obtener 0.01 libras por galón, para lo cual, se vierte hacia el interior del depósito, agua pura a razón de 50 galones por hora. Si la mezcla bien agitada sale al mismo ritmo, ¿en cuánto tiempo se logrará el propósito?

2. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier instante. (a) Si la población se duplicó en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará? (b) Suponga que después de tres años la población es de 10 000 habitantes; entonces, ¿cuál era la población inicial y cuál será la población en 10 años?

3. Un objeto cuyo peso es de 1000 libras se hunde en el agua empezando desde el reposo. La fuerza de resistencia está compuesta por dos fuerzas, una de flotación equivalente a 600 libras y otra que le opone el agua, la cual es proporcional a la velocidad instantánea del objeto, y es tal que, cuando la velocidad es de 2 pies/seg esta segunda fuerza es de 200 libras. Determine:
   a. La velocidad a que se hunde el objeto en cualquier tiempo.
   b. La posición del objeto en cualquier tiempo.
   c. El instante en que la velocidad del objeto alcanza el 50% de su valor límite.

4. Una resistencia de 20 ohmios se conecta en serie con un capacitor de 0.01 faradios y una fuerza electromotriz en voltios dada por la función $40e^{-3t} + 20e^{-6t}$. Si $Q(0) = 0$:
   a. Determine la carga y la corriente en función del tiempo.
   b. Demuestre que la caída máxima en el capacitor es de 0.25 culombios.

5. Un tanque contiene inicialmente 100 galones de una solución salina que contiene 10 libras de sal. Otra solución salina que contiene 1/4 de libra de sal por galón, se vierte en el tanque a razón de a gal/min. Si la solución bien mezclada sale a la misma tasa, hallar el valor de a si se sabe que cuando han transcurrido 100 minutos, la concentración de sal en el tanque es de 0.2 libras por galón.

6. Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de un cuerpo decrece a una velocidad que es proporcional a la diferencia entre la temperatura instantánea del cuerpo y la temperatura del medio ambiente. Un cuerpo se encuentra inicialmente a $100°C$ y se deja enfriar en el aire que está a $20°C$. Encontrar la temperatura del cuerpo como función del tiempo si se observa que en 10 minutos el cuerpo se enfría a $60°C$.

7. Se aplica una fuerza electromotriz de $3E_0$ voltios a un circuito en serie RL con 0.01 henrios de inductancia y 0.6 ohmios de resistencia. Sabiendo que la corriente inicial es de 4 amperios: (a) determine la corriente en función del tiempo; (b) halle la corriente transitoria y la corriente estacionaria definida como el $\lim_{t \to +\infty} I(t)$.

8. En el momento que se abre un paracaídas, éste, junto con el paracaidista, caen a una velocidad de 135 pies/seg. El peso combinado de ambos es de 180 libras y el aire ofrece una resistencia de 25 veces la velocidad instantánea.
   a. Calcule la velocidad del paracaidista en cualquier tiempo t a partir del momento en que se abre el paracaídas.
   b. Determine la velocidad límite del paracaidista.

9. Un depósito de 400 galones de capacidad, contiene inicialmente 100 galones de una solución salina en la cual están disueltas 50 libras de sal. Otra solución salina, cuya concentración es de 1 libra de sal por galón, se vierte en el depósito a razón de 6 gal/min. Si la solución bien mezclada sale a una tasa de 3 gal/min, ¿qué cantidad de sal habrá en el depósito cuando éste se llene y cuál es la concentración de sal en ese mismo instante?

10. Se está remolcando una lancha a una velocidad de 12 millas por hora. En el momento que se suelta la cuerda de remolque $(t=0)$, un hombre, que está en la lancha, comienza a remar siguiendo la dirección del movimiento y ejerciendo una fuerza estable de 20 libras. Si el peso conjunto del hombre y de la lancha es de 480 libras y la resistencia (en libras) es igual al a 1.75 veces la velocidad instantánea v (en pies/seg), hallar la velocidad de la lancha después de 1/2 minuto. (Nota: 1 milla = 5280 pies)

11. Se aplica una fuerza electromotriz de 200 voltios a un circuito en serie que consiste de un condensador de capacitancia igual a 5×10^{-6} faradios y una resistencia es de 1000 ohmios. Sabiendo que la corriente inicial es de 0.4 amperios, determine:
    a. La carga del capacitor y la corriente en función del tiempo y para cuando $t=0.005$ segundos.
    b. La carga estacionaria definida como $\lim_{t\to+\infty} Q(t)$.

12. En 1957, en una fábrica de bombas nucleares, ocurrió un accidente en el que se liberaron 50 gramos del isótopo Pu-240, elemento químico del plutonio. Si la velocidad de desintegración del isótopo es proporcional a la cantidad de material presente y si su vida media es de 5500 años, ¿qué cantidad se ha desintegrado hasta el año 2003?

13. Un tanque está parcialmente lleno con 60 galones de una solución que contiene 0.4 libras de azúcar por galón. Hacia el interior del tanque se bombea agua pura a razón de 6 gal/hora, mientras que la solución bien mezclada sale a una velocidad de 9 gal/hora.

    Determine:
    a. La cantidad de azúcar que se encuentra en el tanque al cabo de t horas.
    b. El momento en el cual la concentración de azúcar en el tanque es de 0.1 lb/gal.
    c. El porcentaje de azúcar que queda en el tanque al cabo de 15 horas.
    d. El tiempo en el cual el tanque contiene 15 libras de azúcar.

14. En $t = 0$ una fem de $100\,\mathrm{sen}(10t)$ voltios se aplica a un circuito consistente de un inductor de 2 henrios en serie con una resistencia de 40 ohmios. Si la corriente inicial es cero, ¿cuál es la corriente en función del tiempo?

15. Desde un acantilado se deja caer un objeto de W libras de peso con una velocidad inicial de 10 pies/seg. Si la fuerza de resistencia del aire es proporcional a la velocidad de manera que a una velocidad de 20 pies/seg dicha fuerza es de 60 libras, determine:
    a. El peso W del objeto para que su velocidad límite sea de 32 pies/seg.
    b. La velocidad y la distancia recorrida por el objeto en función del tiempo.

16. En cierto cultivo de bacterias, la velocidad de aumento es proporcional al número presente. (a) Si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas, ¿qué número se debe esperar al cabo de 12 horas? (b) Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y 4×10^4 al cabo de 5 horas, ¿cuántos habría en un principio?

17. Un depósito de 200 galones, contiene la mitad de su capacidad de una solución salina en la que hay disueltas 200 libras de sal. Se le añade al depósito agua pura a razón de 3 gal/min. La mezcla, que se mantiene uniforme revolviéndola, sale del depósito al ritmo de 2 gal/min.
    a. ¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a 100 lb la cantidad de sal disuelta en él?
    b. ¿Cuál es la concentración de sal al momento de llenarse el depósito?

18. Un objeto de 64 libras se deja caer desde el reposo, en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad instantánea del objeto. Si la resistencia del aire es de 32 libras cuando la velocidad es de 20 pies/seg, encuentre el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

19. Un termómetro que indica $70°F$ se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio del horno, un observador registra que la temperatura es de $110°F$ después de $1/2$ minuto y de $145°F$ después de 1 minuto. ¿A qué temperatura está el horno?

20. Un circuito simple consiste de un condensador (capacitor) y una resistencia conectados en serie. Suponga que el condensador tiene una carga inicial de 0.03 culombios y que el interruptor se cierra en $t = 0$. Si la capacitancia es de 3×10^{-4} faradios y la resistencia de 10000 ohmios; hallar:
    a. La carga en cualquier instante y la carga estacionaria definida como $\lim_{t\to+\infty} Q(t)$.
    b. La corriente en función del tiempo y la caída de voltaje a través de la resistencia.

21. Dos sustancias A y B reaccionan para formar otra sustancia C. La razón a la cual se forma C es proporcional al producto de las cantidades instantáneas presentes de las sustancias A y B. En la formación de C, por cada 2 libras de B se consume una libra de A. Si inicialmente están presentes 10 libras de A y 20 libras de B y si 15 libras de C se forman en 20 minutos, entonces:
    a. ¿Cuál es la cantidad de la sustancia C en cualquier tiempo y cuál es la máxima cantidad de ésta que se puede formar?
    b. ¿Cuánta cantidad de las sustancias A y B queda después de mucho tiempo?

22. Si en cierto cultivo se denota con P la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t y si esta cambia a una razón proporcional a $P^2 - P$, con $P^2 - P > 0$, determine $P(t)$ sabiendo que inicialmente hay 1000 bacterias y al cabo de 5 horas hay 100 bacterias.

23. Un velero, junto con su único ocupante, tiene una masa de 500 kg. Suponga que el viento le aplica al velero una fuerza constante de 750 N (newton) y que la fuerza que actúa sobre el velero, debida a la resistencia del agua, es proporcional a su velocidad instantánea y es tal que a 4 m/seg la fuerza de resistencia es de 200 N. Si el velero sale con una velocidad inicial de 2 m/seg , determine:
    a. La máxima velocidad que puede alcanzar el velero.
    b. La distancia recorrida por el velero en cualquier instante.

24. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es de 50 ohmios, se le aplica un voltaje de 30 voltios. Si $I(0) = 0$, encuentre la corriente en cualquier instante y la corriente estacionaria definida como el $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.

25. En un cultivo de levadura, la cantidad de fermento activo crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si en una hora se duplica la cantidad inicial, ¿cuantas veces puede esperarse que se tenga la cantidad original al cabo de $2\frac{3}{4}$ horas?

26. Un tanque con capacidad para 20 galones, está parcialmente lleno con 10 galones de una solución que contiene 0.5 libras de azúcar por galón. Se bombea, hacia el interior del tanque, agua pura a razón de 4 gal/hora, mientras que la solución bien mezclada sale a una velocidad de 2 gal/hora. Encuentre:
    a. La cantidad de azúcar que hay en el tanque en función del tiempo.
    b. El tiempo en el cual el tanque contiene 16 galones de solución azucarada.
    c. La concentración de azúcar cuando el tanque contiene exactamente 16 galones de solución azucarada.

27. Una caja que pesa 160 libras se va a lanzar desde un avión. Si el aire ofrece una resistencia igual a 2 veces la velocidad instantánea, ¿a qué altura debe soltarse para que llegue a la tierra con una velocidad de 40 pies/seg ?

28. Supongamos que un termómetro ha marcado $70°F$ dentro de la casa, posteriormente el termómetro se pone en el exterior de la casa, donde la temperatura del aire es de $10°F$. Si 3 minutos después se encuentra que el termómetro marca $25°F$, determine la temperatura del termómetro fuera de la casa para cualquier tiempo.

29. Un depósito está parcialmente lleno con 100 galones de agua en los cuales se disuelven 10 libras de sal. Una solución salina, que contiene 0.5 libras de sal por galón, se bombea hacia dentro del depósito con una rapidez de 6 gal/min y la solución, adecuadamente mezclada, se bombea hacia fuera del depósito a razón de 4 gal/min.
    a. Determine la cantidad de sal en el depósito como función del tiempo.
    b. ¿Cuál es la cantidad y la concentración de sal que hay en el depósito cuando éste contiene 200 galones de solución?

30. Un circuito RC tiene una fem de $400\cos(2t)$ voltios, una resistencia de 100 ohmios y una capacitancia de 10^{-2} faradios. Sabiendo que inicialmente no hay carga en el capacitor, determine la carga eléctrica del capacitor y la corriente en el circuito en cualquier instante.

31. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radioactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó en un 3%. Si la rapidez de desintegración, en cualquier instante, es proporcional a la cantidad de sustancia en dicho instante, determine:
    a. La cantidad de sustancia que queda después de 24 horas.
    b. La semivida de la sustancia radioactiva.

32. Un cuerpo con un peso de 320 libras, que parte del reposo, se suelta a partir de una cierta altura. El cuerpo encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea. Si la velocidad límite es de 320 pies/seg, determine:
    a. La velocidad del cuerpo en cualquier instante.
    b. El tiempo requerido para alcanzar una velocidad de 160 pies/seg.

33. Un tanque, con capacidad máxima de 200 galones, contiene 100 galones de agua salada en la cual están disueltas 10 libras de sal. En un instante dado, comienza a entrar agua salada a razón de 6 gal/min conteniendo 1/2 libra de sal por galón. Si la mezcla bien agitada sale del tanque a una tasa de 4 gal/min; entonces:
    a. Determine la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo. ¿Qué cantidad de sal hay a los 30 minutos?
    b. Encuentre la concentración de sal en el tanque en cualquier instante. ¿Cuál es la concentración a los 30 minutos?
    c. Halle la cantidad de sal en el tanque cuando éste se llena. ¿Cuál es la concentración de sal en ese momento?

34. Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es de $20°C$, se deja caer en un recipiente con agua hirviente, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar $90°C$ si se sabe que su temperatura aumentó 2°C en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a $98°C$?

35. El químico C se produce de una reacción que involucra los químicos A y B. La tasa de producción de C varía con el producto de las cantidades instantáneas de A y B presentes. La formación requiere 2 libras de A por cada libra de B. Si inicialmente están presentes 12 libras del químico A y 15 libras del químico B, y se forman 6 libras de C en una hora, encontrar la cantidad del químico C en cualquier instante y la máxima cantidad de éste que se puede obtener.

36. Una batería de E_0 voltios se conecta a un circuito en serie en el cual la inductancia es de L_0 henrios y una resistencia de R_0 ohmios. Si la corriente inicial es cero, determine $I(t)$. Calcule la corriente estacionaria definida como el $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$.

37. El einstenio Es-253 es un material que decrece con una rapidez proporcional a la cantidad de material presente. Determine su vida media si éste pierde una tercera parte de su masa al cabo de 11.7 días.

38. Un cuerpo que pesa 64 libras se suelta desde una altura de 100 pies con una velocidad inicial de 10 pies/seg. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea del cuerpo y que, en el momento en que la velocidad es de 40 pies/seg, la resistencia es de 20 libras, encuentre:
    a. La velocidad y la distancia recorrida en función del tiempo.
    b. La velocidad después de un tiempo largo (velocidad máxima).
    c. Si se supone una resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, plantee el problema de valor inicial asociado (no debe resolverlo).

39. Un tanque tiene inicialmente 200 galones de agua dulce con 400 libras de azúcar disueltas. Agua dulce que contiene una libra de azúcar por galón fluye hacia el tanque a razón de 3 gal/min y la mezcla bien agitada fluye hacia fuera a razón de 4 gal/min. Determine la cantidad de azúcar en el tanque y su concentración cuando en él queda la mitad de su contenido inicial.

40. Una masa de 2 kilogramos, forzada a moverse horizontalmente, está sujeta a una fuerza dada por $10\operatorname{sen}(2t)$ Newton y retardada en su movimiento por una fricción igual a dos veces la velocidad instantánea (en m/seg). Si el cuerpo inicia su movimiento desde el reposo, exprese la velocidad y la posición del cuerpo como una función del tiempo.

41. En determinado momento, un tanque se encuentra a la mitad de su capacidad, con 50 galones de agua en los que hay 100 lb de sal disuelta. En este mismo instante, empieza a ingresar agua pura a una tasa constante de 6 gal/min y se inicia la extracción de agua salada, bien mezclada con la sal que queda en el tanque, a razón de 1 gal/min. Calcule la cantidad de sal que hay en el tanque en el momento en que éste se ha terminado de llenar.

42. En problemas de comportamiento poblacional, suelen hacerse suposiciones mucho más realistas que la simple ecuación $\frac{dY}{dt} = kY$, donde Y representa el tamaño de la población. Una de las más sencillas es aquella que asume que el suministro de elementos necesarios para la vida (alimento, espacio, etc) es limitado y que sólo es suficiente para un máximo de población M.
    Esto obliga a suponer que la constante k en el modelo citado, debe sustituirse por una función que dependa tanto de Y como de M y que, de hecho, k tienda a cero cuando Y esté cerca de M. Si usamos $k = M - Y$, la ecuación resultante es $\frac{dY}{dt} = MY - Y^2$.
    Resuelva esta ecuación diferencial haciendo la sustitución $v = \frac{1}{Y}$; para lo cual, asuma una población inicial P_0. Además, analice el comportamiento de la población para un tiempo largo.

43. El Hidrógeno y el Oxígeno se combinan para formar agua. Experimentalmente, se ha encontrado que cuando se dispone de 100 gr de Hidrógeno y 800 gr de Oxígeno, se forman 300 gr de agua en 5 unidades de tiempo y que se requieren 4 gr de Hidrógeno y 32 gr de Oxígeno para obtener una masa de agua de 36 gr. Si la tasa de producción de agua es proporcional al producto de las cantidades presentes de Hidrógeno y Oxígeno, determine la cantidad de agua que se forma en función del tiempo.

44. Se bombea cerveza con un contenido de 6% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 400 galones de cerveza con 3% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior con una rapidez de 3 gal/min; en tanto, el líquido mezclado se extrae con una rapidez de 4 gal/min. Entonces:
    a. Calcule la cantidad de galones de alcohol que hay en el tanque en cualquier instante.
    b. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de 60 minutos?
    c. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse?

45. Un termómetro se saca de una habitación, en la cual la temperatura del aire es de $70°F$, al exterior, en donde la temperatura es de $10°F$. Si después de 0.5 minutos el termómetro marca $50°F$, entonces:
    a. ¿Cuánto marca el termómetro después de un minuto?
    b. ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los $15°F$?

46. Considere un tanque cilíndrico usado para experimentos. Después de realizar uno de estos experimentos, el tanque contiene 200 galones de una solución de colorante con una concentración de 1 libra de colorante por galón. A fin de preparar el siguiente experimento, el tanque debe lavarse con agua pura la cual fluye hacia el interior del tanque a razón de 2 gal/min. Si la solución bien mezclada sale a la misma tasa, halle el tiempo que debe transcurrir antes de que la concentración de colorante en el tanque alcance el 1% de su valor original.

47. Un objeto de 1000 libras de peso se hunde en el agua empezando desde el reposo. Dos fuerzas actúan sobre él, una fuerza de flotación de 200 libras y una fuerza de resistencia del agua, la cual es numéricamente igual a 100 v libras, v en pies/seg. Encuentre:
    a. La velocidad y la distancia recorrida por el objeto en cualquier instante.
    b. El instante en que la velocidad del objeto alcanza el 20% de su valor límite.

48. Un tanque contiene inicialmente 10 galones de una solución salina en la cual 10 libras de sal están disueltas. Luego se vierte otra solución, a razón de 2 galones por minuto, que contiene $3e^{-t/10}$ libras de sal por galón. Si la mezcla sale a la misma tasa, hallar:
    a. La cantidad de sal en cualquier instante.
    b. La concentración de sal al cabo de 10 minutos.

49. Se deja un recipiente con agua hirviendo a una temperatura inicial de 100°C en una habitación cuya temperatura es de 25°C. Si a los 10 minutos la temperatura del agua ha descendido hasta 75°C, calcule la temperatura del agua en el recipiente a los 20 minutos de haberse iniciado el proceso.

50. Un hombre y un bote de motor pesan juntos 320 libras. Si la fuerza que puede ejercer el motor, en la dirección del movimiento, es equivalente a 10 libras y si se asume una fuerza de resistencia del agua proporcional a la velocidad instantánea del bote y tal que a 20 pies/seg es de 40 libras, entonces:
    a. Determine la posición del bote en función del tiempo, asumiendo que parte del reposo.
    b. Encuentre la velocidad límite del bote.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios 1, **página 8** **(Aplicaciones a la Mecánica)**

1. **NOTA:** La ecuación diferencial es: $x''(t) = g$. Condiciones: $x'(0) = x(0) = 0$.
   (a) Velocidad: Como $v(t) = 980t$, entonces $v(3) = 2940$ cm/seg.
   Distancia: Dado que $x(t) = 490t^2$, entonces $x(3) = 4410$ cm.
   (b) Entre el 3° y 4° seg recorre 3430 cm; y, entre el 4° y 5° seg, 4410 cm.
   (c) Llega a la Tierra en aproximadamente 7.143 seg, con una velocidad aproximada de 7000 cm/seg.

2. Velocidad: $v(t) = 128 - 118\, e^{-t/4}$. Posición: $x(t) = 128t + 472(e^{-t/4} - 1)$.

3. (a) Velocidad: $v(t) = 320\left[1 - e^{-t/10}\right]$. Posición: $x(t) = 320\left[t + 10e^{-t/10} - 10\right]$.
   (b) Alcanza una velocidad de 160 pies/seg, cuando $t = 10 \ln 2 \cong 6.93$ seg.

4. Velocidad: $v(t) = \dfrac{2\,(3e^{32t} - 1)}{3e^{32t} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = \dfrac{2\,(3 - e^{-32t})}{3 + e^{-32t}}$.

5. (a) Ecuación diferencial: $x''(t) = -g$. Condiciones: $x'(0) = v_0$ y $x(0) = 0$.
   (b) Velocidad: $v(t) = -gt + v_0$. Posición: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0\, t$.
   (c) Alcanza su altura máxima cuando $t = v_0/g$. (Resolver: $v(t) = 0$)
   (d) La altura máxima está dada por: $x(v_0/g) = \dfrac{v_0^{\,2}}{2g}$.
   (e) Regresa a su punto de partida cuando $t = 2v_0/g$. (Resolver: $x(t) = 0$)
   (f) El cuerpo tarda el doble del tiempo en regresar a su punto de partida con respecto al que tarda en alcanzar su máxima altura.

6. En 60 seg, la velocidad aproximada es de 269.26 cm/seg ($v^2 = 20t^2 + 500$).

7. (a) Velocidad: $v(t) = 20\left[1 - e^{-t/5}\right]$. La velocidad máxima que puede alcanzar el bote es de 20 pies/seg. (Velocidad límite: $V_l = \lim\limits_{t\to\infty} v(t)$)
   (b) Distancia: $x(t) = 20t + 100\left[e^{-t/5} - 1\right]$.

8. (a) Ecuación diferencial: $v'(t) + 2v = \dfrac{2}{5}F$; con $v(0) = 0$ y $x(0) = 0$.
   (b) Se debe ejercer una fuerza de 75 libras sobre el trineo ($F = 75$).
   (c) Velocidad: $v(t) = 15\left[1 - e^{-2t}\right]$. Distancia: $x(t) = 15t + \dfrac{15}{2}\left[e^{-2t} - 1\right]$.

9. (a) Cuando $t = 2$ seg, la masa se dirige hacia arriba con una velocidad de 490 cm/seg y está a 2940 cm del punto de partida. Cuando $t = 4$, se dirige hacia abajo con una velocidad de 1470 cm/seg y se encuentra a una distancia de 1960 cm del punto de partida.

   (Nota: $x(t) = -490t^2 + 2450t$ y $v(t) = -980t + 2450$)

   (b) La masa alcanza una altura máxima de 3062.5 cm, a los 2.5 seg después de empezar el movimiento.

   (c) La distancia total recorrida después de 2 seg es de 2940 cm. Después de 4 seg, la distancia total recorrida es de 4165 cm.

10. (a) Velocidad: $v(t) = 49\left[1 - e^{-20t}\right]$. Distancia: $x(t) = 49t + \frac{49}{20}\left[e^{-20t} - 1\right]$.

   (b) La velocidad máxima que alcanza la gota de aceite es de 49 cm/seg. (Velocidad límite: $V_l = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\alpha} = \frac{W}{\alpha}$)

11. (a) Velocidad: $v(t) = 25\left[1 - e^{-2t/15}\right]$. Distancia: $x(t) = 25t + \frac{375}{2}\left[e^{-2t/15} - 1\right]$.

   (b) La máxima velocidad a la cual puede viajar el bote es de 25 pies/seg. (Nota: Se obtiene calculando $\lim_{t\to\infty} v(t)$, pues $v'(t) > 0$, $\forall\ t \geq 0$)

12. (a) Velocidad: $v(t) = 50 - 10\, e^{-0.64t}$. La máxima velocidad que alcanza el paracaidista, junto con su paracaídas, es de 50 pies/seg.

   (b) Posición: $x(t) = 50t + \frac{125}{8}\left[e^{-0.64t} - 1\right]$.

13. (a) Como $v(t) = 16\left[1 - e^{-2t}\right]$, se tiene que $v(1) \cong 13.8$ pies/seg.

   (b) El cuerpo se encuentra a una distancia aproximada de 14.68 pies, cuando la velocidad es de 15 pies/seg.

   (Nota: $x(t) = 16t + 8\left[e^{-2t} - 1\right]$; además, $v(t) = 15 \iff t = \ln 4 \cong 1.3863$)

14. Cuando la partícula está a 4 pies del origen, su velocidad es de 2 pies/seg.

   (Nota: $v(t) = 10e^{-2t}$, $x(t) = 5\left[1 - e^{-2t}\right]$; además, $x(t) = 4 \iff t = (0.5)\ln 5$)

***Ejercicios 2.1*, página 14** **(Mezclas o Soluciones Químicas)**

1. (a) Cantidad de sal en términos del tiempo: $Q(t) = 100 - 99e^{-3t/100}$.

   (b) La mezcla que está en el tanque tendrá 2 lb de sal en aproximadamente 0.34 min. (Nota: $Q(t) = 2 \iff t \cong 0.34$)

2. En el tanque hay 22.5 lb de sal cuando éste contiene 40 gal de solución. (Nota: $Q(t) = 4(20-t) - \frac{7}{40}(20-t)^2,\ 0 \le t \le 20$, y $V(t) = 40 \iff t = 10$)

3. Cantidad de sal en función del tiempo: $Q(t) = 5\left[1 - e^{-t/5}\right]$. Concentración de sal en función del tiempo: $C(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t/5}\right]$

4. Cuando el depósito está lleno, contiene 387.5 lb de sal y una concentración aproximada de 1.94 lb de sal por galón. (Nota: $V(t) = 200 \iff t = 100$; además, $Q(t) = 2(100+t) - (100)^4(100+t)^{-3},\ 0 \le t \le 100$)

5. (a) Cantidad de sal en términos del tiempo: $Q(t) = 24 - 22e^{-t/2}$.
   (b) Después de 8 min, la concentración de sal que hay en el tanque es de 2.95 lb/gal, aproximadamente. (Nota: $Q(8) \cong 23.5971$)
   (c) El tanque contendrá 24 libras de sal después de un largo tiempo. (Nota: La cantidad máxima de sal está dada por: $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 24$)

6. (a) Cantidad de azúcar en función del tiempo: $Q(t) = 40\left[1 - e^{-t/20}\right]$.
   (b) El agua de salida tendrá una la concentración de azúcar de ½ libra por galón, aproximadamente en 13.86 min.

7. El tanque tendrá 150 lb de sal en un tiempo aproximado de 20.79 min. (Nota: $Q(t) = 180 - 60e^{-t/30}$)

8. (a) En 34.66 minutos, aproximadamente, se tendrá una concentración de azúcar de 0.2 lb/gal. (Nota: $Q(t) = 40e^{-t/50}$)
   (b) Se tendrá una concentración de azúcar menor que 0.01 lb/gal, cuando el tiempo sea mayor que 184.44 minutos ($t > 184.44$).

9. (a) La cantidad de sal presente en función del tiempo, con $0 \le t \le 10$, está dada por: $Q(t) = (10-t)\left[\frac{3}{2} - \frac{13}{10^4}(10-t)^3\right]$
   (b) La concentración de sal cuando el tanque se vacía es de 1.5 lb/gal y se da cuando han transcurrido 10 minutos.

10. (a) La concentración de sal en función del tiempo, con $0 \le t \le 120$, está dada por: $C(t) = 3\left[1 - \left(1 - \frac{t}{120}\right)^4\right]$
    (b) Cuando el tanque tiene 30 galones de agua salada (lo que ocurre en 60 minutos), la concentración de sal es de 2.81 lb/gal, aproximadamente.

(c) La máxima concentración de sal se da en 120 min; en ese instante, el tanque está vacío. (Nota: $C'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 120$ min; además, $C(120) = 3$ lb/gal y $V(120) = 0$ gal)

(d) La máxima cantidad de sal presente en cualquier tiempo es de 96.3 lb, aproximadamente. (Nota: $Q'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \cong 39.8$ min)

Ejercicios 2.2, **página 18** **(Reacciones Químicas)**

1. (a) La cantidad del químico *A* transformado en el químico *B* es de: 5.1 lb, 6.57 lb y 7.6 lb, después de 2, 3 y 4 horas, respectivamente. Nota: La ecuación que permite calcular la cantidad presente del químico *A* está dada por: $x(t) = 10\left[1 - e^{-0.3567\,t}\right]$

 (b) El 75% del químico *A* se transforma en 3.89 horas, aproximadamente.

2. (a) La ecuación para calcular la cantidad del químico *C* en el tiempo es:

$$x(t) = \frac{300\left[e^{0.0572\,t} - 1\right]}{3\,e^{0.0572\,t} - 2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{300\left[1 - e^{-0.0572\,t}\right]}{3 - 2\,e^{-0.0572\,t}}$$

 (b) Después de 2 horas, se tiene un aproximado de 26.65 lb del químico *C*.

 (c) Después de mucho tiempo, la máxima cantidad del químico *C* que se puede formar es de 100 lb; mientras que, el químico *A* desaparece y del químico *B* quedan 20 lb. (Nota: $C_{máxima} = \lim_{t\to\infty} x(t) = 100$)

3. (a) En 20 min se forman 29.32 gramos de la sustancia *C*, aproximadamente.

 Nota: La ecuación para calcular la cantidad de *C* en el tiempo es:

$$x(t) = \frac{300\left[e^{0.0227\,t} - 1\right]}{5\,e^{0.0227\,t} - 2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{300\left[1 - e^{-0.0227\,t}\right]}{5 - 2\,e^{-0.0227\,t}}$$

 (b) Al cabo de mucho tiempo, la cantidad límite de la sustancia *C* es de 60 gramos; además, la sustancia *A* desaparece y de la sustancia *B* quedan 30 gramos.

4. (a) Después de mucho tiempo, se forman no más de 150 gramos de la sustancia *C* ; además, tanto el reactivo *A*, como el *B*, desaparecen.

 Nota: La ecuación para determinar la formación de *C* es: $x(t) = \dfrac{150\,t}{t + 70}$

 (b) La mitad de la cantidad máxima de la sustancia *C*, que corresponde a 75 gramos, se forma en 70 minutos.

5. (a) La ecuación para calcular la cantidad del compuesto *C* en el tiempo es:

$$x(t) = \frac{1000\left[\, e^{0.1258\,t} - 1 \,\right]}{25\; e^{0.1258\,t} - 4} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{1000\left[\, 1 - e^{-0.1258\,t} \,\right]}{25 - 4\; e^{-0.1258\,t}}$$

(b) Con el tiempo, como máximo, se forman 40 gramos de *C* ; además, la sustancia *B* desaparece y de la sustancia *A* quedan 42 gramos.

(c) Se forman 34.78 gramos de la sustancia *C* en 15 min, aproximadamente.

***<u>Ejercicios 3.1</u>*, página 21 (Problemas de Enfriamiento−Calentamiento)**

1. La temperatura inicial del cuerpo es de 80º*F*. (<u>Nota</u>: $T(t) = 80\, e^{-0.035t}$)

2. El cuerpo tarda aproximadamente 46.33 min para descender su temperatura a 20º*C*. (<u>Nota</u>: $T(t) = 10 + 70\, e^{-0.042t}$)

3. (a) El cuerpo tarda aproximadamente 15.4 min para llegar a una temperatura de 75º*F*. (<u>Nota</u>: $T(t) = 100 - 50\, e^{-0.045t}$)

   (b) Después de 20 min, la temperatura aproximada es de 79.67º*F*.

4. (a) El tiempo aproximado para que el cuerpo alcance una temperatura de 50º*F* es de 23.9 min. (<u>Nota</u>: $T(t) = 100 - 100\, e^{-0.029t}$)

   (b) Después de 20 min, la temperatura aproximada es de 44.01º*F*.

5. El cuerpo tarda aproximadamente 23.9 min para alcanzar una temperatura de 100º*F*. (<u>Nota</u>: $T(t) = 150 - 100\, e^{-0.029t}$)

6. (a) Después de 20 min, la temperatura aproximada del agua es de 65.33º*C*. (<u>Nota</u>: $T(t) = 25 + 75\, e^{-0.031t}$)

   (b) El tiempo aproximado para que la temperatura del agua sea de 40º*C* y de 26º*C* es de 51.92 y de 139.27 minutos, respectivamente.

7. (a) La temperatura aproximada del agua, después de 20 y 30 minutos, es de 34.07º*C* y 37.37º*C*, respectivamente. (<u>Nota</u>: $T(t) = 40 - 30\, e^{-0.0811t}$)

   (b) La temperatura del agua será de 25º*C* en 8.55 min, aproximadamente.

8. La temperatura del horno (temperatura del medio ambiente) es de 324º*F*. (<u>Nota</u>: $T(t) = 324 - 288\, e^{-0.087t}$)

***Ejercicios 3.2*, página 24** **(Problemas de Desintegración)**

1. (a) Cantidad de material presente en función del tiempo: $N(t) = 100\,e^{-0.026\,t}$.
   (b) El 10% de la masa original se desintegra en, aproximadamente, 4 años.
   (c) La vida media es de aproximadamente 27 años.
2. La vida media del material radioactivo es de 7 horas, aproximadamente. (Nota: $N(t) = N_0\ e^{-0.105\,t}$)
3. Aproximadamente, un 4.24% del radio inicial resultará desintegrado después de 100 años. (Nota: $N(t) = R_0\ e^{-0.000433\,t}$)
4. Aproximadamente, después de 50, 100 y 200 años, se espera tener un 98%, 96% y 92%, respectivamente, del radio inicial. (Nota: $N(t) = R_0\ e^{-0.000408\,t}$)
5. La sustancia radioactiva tiene una vida media aproximada de 24 años. (Nota: $N(t) = N_0\ e^{-0.0288\,t}$)
6. El 90% de la sustancia radioactiva desaparecerá en, aproximadamente, 64 días. (Nota: $N(t) = N_0\ e^{-0.0357\,t}$)
7. Aproximadamente en 79 minutos, quedará 1 culombio de la carga eléctrica de la superficie esférica. (Nota: $N(t) = 5\,e^{-0.0203\,t}$)
8. Se espera que la sustancia desaparezca en 4 días, aproximadamente. (Nota: $N(t) = \sqrt{144 - 40t}$)

***Ejercicios 3.3*, página 27** **(Problemas de Poblaciones)**

1. Inicialmente había un aproximado de 7062 habitantes. ($N(t) = 7\,062\ e^{0.347\,t}$)
2. Inicialmente había un aproximado de 16620 habitantes. ($N(t) = 16\,620\ e^{0.11\,t}$)
3. Se espera tener 3 y 5 veces el número original de bacterias en un tiempo aproximado de 1.35 y 1.98 horas, respectivamente. (Nota: $N(t) = N_0\ e^{0.811\,t}$)
4. Habrá 36 unidades presentes después de 10 días, aproximadamente. (Nota: $N(t) = \left[(37/2)\ t\ +\ 27\right]^{2/3}$)
5. Después de 4 hr, la solución tendrá 10 gr de químico. (Nota: $N(t) = t^{3/2} + 2$)
6. (a) Dentro de 30 años se tendrá un aproximado de 760 habitantes. (Nota: $N(t) = 500\ e^{0.013976\,t}$)
   (b) La población aumenta en un 60% en aproximadamente 34 años.

7. La cantidad inicial de bacterias en el cultivo era de 201 especímenes, aproximadamente. (Nota: $N(t) = 201\, e^{0.22992\, t}$)

8. (a) Se requiere un tiempo aproximado de 2.71 horas para triplicar la cantidad inicial de gramos. (Nota: $N(t) = N_0\, e^{0.40547\, t}$)

   (b) Inicialmente, el contenido aproximado del compuesto químico en la solución, era de 1.98 gramos.

***Ejercicios 4*, página 33** **(Aplicaciones a Circuitos Eléctricos)**

1. La ecuación diferencial (2) es $\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}\, I = \dfrac{E_0}{L}$ y su respectiva solución general es: $I(t) = \dfrac{E_0}{R} + C e^{-Rt/L}$, donde $I(t)$ es la cantidad de corriente que fluye en el circuito en el instante t.

   La ecuación diferencial (4) es $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{RC}\, Q = \dfrac{E_0}{R}$ y su respectiva solución general es: $Q(t) = C E_0 + K e^{-t/RC}$, donde $Q(t)$ es la cantidad de carga eléctrica del capacitor en el instante t.

2. Corriente en el circuito: $I(t) = \dfrac{1}{626}\left[\, 25\, \text{sen}\, t - \cos t + e^{-25\, t}\,\right]$.

3. Corriente en el circuito en función del tiempo: $I(t) = \dfrac{6}{5}\left[\, 1 - e^{-20\, t}\,\right]$.

4. Ecuación diferencial para la corriente: $\dfrac{dI}{dt} + 5I = 10\cos(5t)$, con $I(0) = 0$.

   Corriente en el circuito: $I(t) = \dfrac{1}{25}\left[\, \cos(5t) + \text{sen}(5t) - e^{-5\, t}\,\right]$.

5. Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = \dfrac{1}{52}\left[\, 5\, \text{sen}(2t) - \cos(2t) - 25\, e^{-10\, t}\,\right]$.

   Corriente en el circuito: $I(t) = \dfrac{1}{26}\left[\, 5\cos(2t) + \text{sen}(2t) + 125\, e^{-10\, t}\,\right]$.

6. (a) Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = \frac{1}{100}\left[1 - e^{-50\,t}\right]$.

Carga transitoria: $\frac{1}{100}\,e^{-50\,t}$ y carga estacionaria: $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{1}{100}$.

(b) Corriente en el circuito: $I(t) = \frac{1}{2}\,e^{-50\,t}$.

Corriente transitoria: $\frac{1}{2}\,e^{-50\,t}$ y corriente estacionaria: $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$.

7. Corriente en el circuito: $I(t) = 60\left[1 - e^{-t/10}\right]$, **si** $0 \le t \le 20$. $I(t) = 0$, **si** $t > 20$

.

8. (a) Corriente en el circuito en función del tiempo: $I(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-20\,t}\right]$.

(b) Corriente transitoria: $\frac{1}{2}\,e^{-20\,t}$ y corriente estacionaria: $\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{1}{2}$.

9. Corriente en el circuito en términos del tiempo: $I(t) = 20\,e^{-4\,t}$.

10. (a) Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = \frac{1}{4}\left[1 - e^{-8\,t}\right]$.

Corriente en el circuito: $I(t) = 2\,e^{-8\,t}$.

(b) Carga transitoria: $\frac{1}{4}\,e^{-8\,t}$ y carga estacionaria: $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{1}{4}$.

11. Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = \frac{1}{25}\left[4\cos(6t) + 3\,\mathrm{sen}(6t) - 4\,e^{-8\,t}\right]$.

Corriente en el circuito: $I(t) = \frac{2}{25}\left[-12\,\mathrm{sen}(6t) + 9\cos(6t) + 16\,e^{-8\,t}\right]$.

12. Carga eléctrica del capacitor en función del tiempo: $Q(t) = 0.05\,e^{-10\,t}$.

Corriente en el circuito en función del tiempo: $I(t) = -0.5\,e^{-10\,t}$.

13. Corriente en el circuito en función del tiempo: $I(t) = 2\,e^{-4\,t}\,\mathrm{sen}(50t)$.

RESPUESTAS DE LA PRÁCTICA GENERAL DE APLICACIONES

1. Se requieren alrededor de 74 hr para reducir la concentración de azúcar a 0.01 lb/gal. (Nota: $Q(t) = 400\, e^{-t/20}$)

2. (a) La población se triplicará y cuadruplicará en 7.93 años y 10 años, respectivamente. (Nota: $N(t) = N_0\, e^{0.1386\, t}$; o bien, $N(t) = N_0\, 2^{t/5}$)

   (b) Al inicio habían 6 598 habitantes y dentro de 10 años habrán 26 392 habitantes.

3. (a) Velocidad del objeto: $v(t) = 4 - 4\, e^{-16\, t/5}$.

   (b) Posición del objeto: $x(t) = 4t + \frac{5}{4}\, e^{-16\, t/5} - \frac{5}{4}$.

   (c) El objeto alcanza el 50% de su velocidad límite, en aproximadamente 0.217 seg.

4. (a) Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = e^{-3\, t} - e^{-6\, t}$.

   Corriente en el circuito: $I(t) = 6e^{-6\, t} - 3e^{-3\, t}$.

   (b) La caída (carga) máxima en el capacitor se da cuando:

   $$Q'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6e^{-6\, t} - 3e^{-3\, t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{3\, t} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{3} \cong 0.231 \text{ seg}$$

   Por lo tanto, $Q\left(\frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$ culombios.

5. En este caso, se tiene que la cantidad de sal en términos del tiempo está dada por $Q(t) = 25 - 15\, e^{-a t/100}$; por lo tanto, $C(100) = 0.2 \Leftrightarrow Q(100) = 20 \Leftrightarrow a = \ln 3$. (Nota: El valor de a corresponde a la tasa de entrada y de salida)

6. La temperatura del cuerpo en función del tiempo es: $T(t) = 20 + 80\, e^{-0.0693\, t}$.

7. (a) Corriente en el circuito: $I(t) = 5E_0 + (4 - 5E_0)\, e^{-60\, t}$.

   (b) Corriente transitoria: $(4 - 5E_0)\, e^{-60\, t}$.

   Corriente estacionaria (corriente máxima): $\lim\limits_{t \to \infty} I(t) = 5E_0$ (amperios).

8. (a) Velocidad del paracaidista: $v(t) = \frac{36}{5} + \frac{639}{5}\, e^{-40\, t/9}$.

   (b) Velocidad límite del paracaidista: $V_l = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \frac{36}{5}$ pies/seg.

9. Hay 387.5 libras de sal cuando el depósito se llena (a los 100 min) y la concentración de sal, en ese mismo instante, es de 0.97 lb/gal.

   (Nota: $Q(t) = (100+3t) - \dfrac{5000}{100+3t}$, con $0 \le t \le 100$)

10. Después de 1/2 minuto (30 segundos), la velocidad de la lancha es de 11.6 pies/seg, aproximadamente. (Nota: $v(t) = \dfrac{80}{7} + \dfrac{216}{35}\, e^{-7\,t/60}$)

11. (a) Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = 10^{-3} - 0.002\, e^{-200\,t}$.

    Corriente en el circuito: $I(t) = 0.4\, e^{-200\,t}$.

    Para $t = 0.005$ segundos, la carga eléctrica es de 0.000264 culombios y la corriente es de 0.1472 amperios.

    (b) Carga estacionaria (carga máxima): $\lim_{t \to +\infty} Q(t) = 10^{-3} = 0.001$ (culombios).

12. Al año 2003, están presentes 49.7 gramos del isótopo Pu-240. Por lo tanto, desde 1956 al 2003 (46 años), se han desintegrado aproximadamente 0.3 gramos de dicho isótopo. (Nota: $N(t) = 50\, e^{-0.00013\,t}$)

13. (a) Cantidad de azúcar en términos del tiempo: $Q(t) = \dfrac{3(20-t)^3}{10^3}$.

    (b) En 10 horas, la concentración de azúcar en el tanque es de 0.1 lb/gal.

    (c) Al cabo de 15 horas, queda un 2.5% de azúcar en el tanque (o sea, una concentración de 0.025 libras de azúcar por galón).

    (d) El tanque contiene 15 libras de azúcar al cabo de 2.9 horas.

14. Corriente en el circuito: $I(t) = 2\operatorname{sen}(10t) - \cos(10t) + e^{-20\,t}$.

15. (a) El peso del objeto es de 96 libras $(W = 96)$.

    (b) Velocidad del objeto: $v(t) = 32 - 22\, e^{-t}$.

    Posición del objeto: $x(t) = 32t + 22\, e^{-t} - 22$.

16. (a) Al cabo de 12 horas, se espera tener 8 veces la cantidad inicial de bacterias.

    (Nota: $N(t) = N_0\, e^{2.0794\,t}$; o bien, $N(t) = N_0\, 2^{t/4}$)

    (b) Al inicio había un aproximado de 1 250 bacterias.

17. (a) La cantidad de sal se reduce a 100 libras, en aproximadamente 41.42 minutos.

    (b) Cuando el depósito se llena (a los 100 min) hay una concentración de 0.25 libras de sal por galón. (Nota: $Q(t) = 2\,(100)^3(100+t)^{-2}$)

18. Para que el objeto alcance el 90% de su velocidad límite, se requieren alrededor de 2.88 segundos. (Nota: $v(t) = 40 - 40\, e^{-4t/5}$)

19. La temperatura del horno es de 390º*F*.

    Nota: $T(t) = 390 - 320\, e^{-0.2671\,t}$, o bien, $T(t) = 390 - 320 \left(\dfrac{49}{64} \right)^{t}$

20. (a) Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = \dfrac{3E_0}{10^4} + \dfrac{3(100 - E_0)\, e^{-t/3}}{10^4}$.

    Carga estacionaria: $\lim\limits_{t \to \infty} Q(t) = \dfrac{3E_0}{10^4}$.

    (b) Corriente en el circuito: $I(t) = \dfrac{(E_0 - 100)\, e^{-t/3}}{10^4}$.

    Caída de voltaje a través de la resistencia: $E_R = (E_0 - 100)\, e^{-t/3}$.

21. (a) Cantidad de la sustancia *C* en función del tiempo: $x(t) = \dfrac{90t}{3t+1}$.

    La máxima cantidad de la sustancia *C* que se puede formar es de 30 libras. (Nota: $C_{máxima} = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 30$).

    (b) Después de un largo tiempo, las sustancias *A* y *B* desaparecen.

22. La cantidad de bacterias presentes está dada por: $P(t) = \dfrac{1}{1 - C e^{-kt}}$, en donde $C = \dfrac{999}{1000} \cong 1$ y $k \cong 0.002$.

23. (a) Velocidad máxima del velero: $V_l = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 15$ m/seg. ($v(t) = 15 - 13\, e^{-t/10}$)

    (b) Distancia del velero: $x(t) = 15t + 130\, e^{-t/10} - 130$.

24. Corriente en el circuito: $I(t) = \dfrac{3}{5}\left[1 - e^{-500\,t}\right]$.

    Corriente estacionaria: $\lim\limits_{t \to \infty} I(t) = \dfrac{3}{5}$ (amperios).

25. Al cabo de 2.75 horas, se espera tener alrededor de 7 veces la cantidad inicial de fermento activo en el cultivo de levadura. ($N(t) = N_0\, e^{0.6932\,t}$; o bien, $N(t) = N_0\, 2^{t}$)

26. (a) Cantidad de azúcar en función del tiempo: $Q(t) = \dfrac{25}{t+5}$.

    (b) En 3 horas, el tanque contiene 16 galones de solución azucarada.

    (c) La concentración de azúcar, en el instante en que el tanque tiene 16 galones de solución, es de 0.195 lb/gal, aproximadamente.

27. La caja debe lanzarse desde una altura aproximada de 38.63 pies.

    Nota: $v(t) = 80 - 80\,e^{-2\,t/5}$ y $x(t) = 80t + 200\,e^{-2\,t/5} - 200$.

28. La temperatura del termómetro en función del tiempo es: $T(t) = 10 + 60\,e^{-0.4621\,t}$.

29. (a) Cantidad de sal en función del tiempo: $Q(t) = (50+t) - \dfrac{10^5}{(50+t)^2}$.

    (b) Cuando el depósito contiene 200 galones de solución (a los 50 min), hay 90 libras de sal y tiene una concentración de 0.45 libras de sal por galón.

30. Carga eléctrica del capacitor: $Q(t) = \dfrac{4}{5}\left[\cos(2t) + 2\operatorname{sen}(2t) - e^{-t}\right]$.

    Corriente en el circuito: $I(t) = \dfrac{4}{5}\left[4\cos(2t) - 2\operatorname{sen}(2t) + e^{-t}\right]$.

31. (a) Después de 24 horas, quedan alrededor de 88.5 mg de la sustancia radioactiva. (Nota: $N(t) = 100\,e^{-0.0051\,t}$)

    (b) La semivida de la sustancia radioactiva es de 136 horas aproximadamente.

32. (a) Velocidad del cuerpo: $v(t) = 320 - 320\,e^{-t/10}$.

    (b) En aproximadamente 6.93 seg, el cuerpo alcanza una velocidad de 160 pies/seg.

33. (a) Cantidad de sal en función del tiempo: $Q(t) = (50+t) - \dfrac{40\,(50)^2}{(50+t)^2}$.

    Además, a los 30 minutos, hay 64.375 libras de sal.

    (b) Concentración de sal en el tiempo: $C(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{20\,(50)^2}{(50+t)^3}$. Además, a los 30 minutos, la concentración de sal es de 0.11 lb/gal.

    (c) Cuando el tanque se llena (a los 50 min), hay 90 libras de sal y su concentración es de 0.45 libras de sal por galón.

34. La barra alcanza los 90º*C* y los 98º*C* en aproximadamente 82.13 y 145.7 segundos, respectivamente. (Nota: $T(t) = 100 - 80\,e^{-0.0253\,t}$, o bien, $T(t) = 100 - 80\left(\dfrac{39}{40}\right)^t$)

35. La ecuación para calcular la cantidad del químico *C* en el tiempo es:
$$x(t) = \frac{90\left[e^{0.2624\,t} - 1\right]}{5\,e^{0.02624\,t} - 2} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{90\left[1 - e^{-0.2624\,t}\right]}{5 - 2\,e^{-0.2624\,t}}$$
Por otra parte, la máxima cantidad del químico *C* que se puede formar es de 18 libras; mientras que, del químico *B* quedan 9 libras y el químico *A* desaparece.
(Nota: $C_{máxima} = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 18$).

36. Corriente en el circuito: $I(t) = \frac{E_0}{R_0}\left[1 - e^{-R_0\,t/L_0}\right]$.

Corriente estacionaria: $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \frac{E_0}{R_0}$ (amperios).

37. La vida media del einstenio es de aproximadamente 20 días. ($N(t) = N_0\,e^{-0.0347\,t}$)

38. (a) Velocidad del cuerpo: $v(t) = 128 - 118\,e^{-t/4}$.

Distancia del cuerpo: $x(t) = 128t + 472\,e^{-t/4} - 472$.

(b) La velocidad máxima (o límite) del cuerpo es de 128 pies/seg.

(c) Problema de valor inicial: $v' + \frac{1}{160}v^2 = 32$, $x(0) = 0$ pies y $v(0) = 10$ pies/seg.

39. Cuando quedan 100 galones de solución azucarada, lo cual se presenta a los 100 min, el tanque contiene 112.5 libras de azúcar y su concentración es de 1.125 lb/gal.

Nota: $Q(t) = (200 - t) + \frac{(200 - t)^4}{(200)^3}$

40. Velocidad del cuerpo: $v(t) = \operatorname{sen}(2t) - 2\cos(2t) + 2\,e^{-t}$.

Posición del cuerpo: $x(t) = \frac{-\cos(2t)}{2} - \operatorname{sen}(2t) - 2\,e^{-t} + \frac{5}{2}$.

41. La cantidad de sal en el tanque cuando éste se llena, lo que ocurre a los 10 minutos, es de aproximadamente 87.1 libras. (Nota: $Q(t) = (10)^{11/5}\,(10 + t)^{-1/5}$)

42. Solución de la ecuación diferencial: $Y(t) = \frac{M\,P_0}{P_0 + (M - P_0)\,e^{-4\,t}}$, donde P_0 es la población inicial y *M* es la población máxima. Además, después de mucho tiempo, el tamaño de la población tiende a *M*.

43. La cantidad de agua que se puede formar está dada por la ecuación: $x(t) = \frac{900t}{t + 10}$.

44. (a) La cantidad de galones de alcohol en cualquier instante está dada por la ecuación: $Q(t) = \frac{3}{50}(400 - t) - \frac{12}{(400)^4}(400 - t)^4$.

(b) Después de 60 minutos, el tanque contiene aproximadamente un 4.16% de alcohol.

(c)El tanque tarda en vaciarse 400 minutos.

45. (a) El termómetro marca una temperatura aproximada de 36.66º*F* después de un minuto.

(b) El termómetro alcanza los 15º*F* en un tiempo aproximado de 3.064 minutos.

Nota: $T(t) = 10 + 60\, e^{-0.811\, t}$, o bien, $T(t) = 10 + 60\left(\frac{4}{9}\right)^t$

46. El tiempo que debe transcurrir es de 460.52 minutos, aproximadamente.

Nota: $Q(t) = 200\, e^{-t/100}$

47. (a) Velocidad del objeto: $v(t) = 8 - 8\, e^{-16\, t/5}$.

Distancia del objeto: $x(t) = 8t + \frac{5}{2}\, e^{-16\, t/5} - \frac{5}{2}$.

(b) El objeto alcanza el 20% de su velocidad límite en aproximadamente 0.07 segundos.

48. (a) La cantidad de sal en cualquier instante es: $Q(t) = 60\, e^{-t/10} - 50\, e^{-t/5}$.

(b) Al cabo de 10 minutos, hay aproximadamente una concentración de 1.53 libras de sal por galón.

49. A los 20 minutos, la temperatura aproximada del agua es de 58.33º*C*.

Nota: $T(t) = 25 + 75\, e^{-0.0406\, t}$, o bien, $T(t) = 25 + 75\left(\frac{2}{3}\right)^{t/10}$

50. (a) Posición del bote: $x(t) = 5t + 25\, e^{-t/5} - 25$

(b) Como $v(t) = 5 - 5\, e^{-t/5}$, entonces la velocidad máxima del bote es de 5 pies/seg.

Nota: La velocidad límite (máxima) está dada por: $V_l = \lim_{t \to \infty} v(t) = 5$

TABLA DE ALGUNAS INTEGRALES BÁSICAS*

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\ ,\ n \neq -1$

2. $\int e^{au}\,du = \dfrac{e^{au}}{a}\ ,\ a \neq 0$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u|$

4. $\int \ln u\,du = u\ln u - u$

5. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$

6. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u$

7. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$

8. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u|$

9. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u|$

10. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u|$

11. $\int \sec u\,\tan u\,du = \sec u$

12. $\int \csc u\,\cot u\,du = -\csc u$

13. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

14. $\int \cos^2 u\,du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

15. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u$

16. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u$

17. $\int \sec^2 u\,du = \tan u$

18. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u$

19. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{u}{a}\right)$

20. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{u}{a}\right)$

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|$

22. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|$

23. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$

24. $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right|$

25. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \dfrac{e^{au}\,(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu)}{a^2+b^2}$

26. $\int e^{au}\cos bu\,du = \dfrac{e^{au}\,(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu)}{a^2+b^2}$

* Se omite la constante de integración.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank Jr. ***Ecuaciones Diferenciales***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1970 y 1991.

Bronson, Richard. ***Ecuaciones Diferenciales Modernas***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1976.

Edwards, C.H. Jr y Penny, D. E. ***Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones***. Editorial Editorial Prentice-Hall, México, 1986.

Kiseliov, A., Krasnov, M. Y Makarenko, G. ***Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***. Editorial Mir, Moscú, 1979.

Marcus, Daniel A. ***Ecuaciones Diferenciales***. Editorial CECSA, México, 1998.

Spiegel, Murray. ***Ecuaciones Diferenciales Aplicadas***. Editorial Prentice-Hall, México, 1983.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones***. Editorial Grupo Iberoamérica, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sexta edición, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sétima edición, México, 2002.

Zill, Dennis G. y Cullen, M. R. ***Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera***. Editorial Thompson, México, 2002.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES **ORDINARIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN**

CONTENIDOS **PÁGINA**