INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

TRANSFORMADA DE LAPLACE
ECUACIONES DIFERENCIALES

Prof. Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc.

2016

1 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1.1 *Conceptos Previos*

A continuación, se hará un repaso breve acerca de las integrales definidas en dos variables y su relación con el concepto de *"transformaciones integrales"*.

- Si $f(x,y)$ es una función de dos variables, se sabe que la integral definida de *f* con respecto a una de las variables, nos conduce a otra función en términos de la otra variable; o sea:

$$\int_a^b f(x,y)\,dx = F(x,y)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(y)$$

$$\int_a^b f(x,y)\,dy = F(x,y)\Big|_{y=a}^{y=b} = F(x)$$

Ejemplo 1.1.1:

$$\int_1^2 2xy^2\,dx = y^2\int_1^2 2x\,dx = y^2x^2\Big|_{x=1}^{x=2} = 3y^2 = F(y)$$

Ejemplo 1.1.2:

$$\int_1^2 2xy^2\,dy = 2x\int_1^2 y^2\,dy = 2x\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=1}^{y=2} = \frac{14}{3}\,x = F(x)$$

- De manera similar, en la integral definida siguiente se tiene:

$$\int_a^b k(s,t)\,f(t)\,dt = F(s,t)\Big|_{t=a}^{t=b} = F(s)$$

Se observa que la **integral** anterior **transforma** la función $f(t)$ en una función que depende de la variable *s*; o sea, en una función $F(s)$.

- En particular, nos interesa estudiar las **transformaciones integrales** del tipo antes descrito, pero en el intervalo no acotado de $\left[0,\infty\right[$; a saber, las **integrales impropias** del tipo que se definen a continuación:

Definición 1.1: Sea $f(t)$ una función continua para toda $t \geq 0$; entonces, la integral impropia $\int_0^{\infty} k(s,t)\ f(t)\ dt$ se define como:

$$\int_0^{\infty} k(s,t)\ f(t)\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} k(s,t)\ f(t)\ dt \qquad (*)$$

Si el límite indicado en (*) **NO** existe, se dice que la integral tampoco existe; o sea, es **divergente**.

Por el contrario, si el límite existe, la integral también existe; por lo tanto; dicha integral es **convergente** y nos conduce a una función que depende de la variable s ; o sea:

$$\int_0^{\infty} k(s,t)\ f(t)\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} k(s,t)\ f(t)\ dt = F(s)$$

1.2 *La Transformada de Laplace*

Con la elección de la función $k(s,t) = e^{-st}$, en esta sección se procederá al estudio de una importante **transformación integral obtenida de una integral impropia convergente**.

Definición 1.2: Sea $f(t)$ una función tal que $t \geq 0$. La *Transformada de Laplace* de $f(t)$, denotada por $L\{f(t)\}$, está definida por la integral impropia:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-st}\ f(t)\ dt$$

siempre y cuando $\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt$ sea **convergente**, en cuyo caso nos conduce a una función que depende de la variable s ; a saber, $L\{f(t)\} = F(s)$.

OBSERVACIONES:

a. En caso de que $\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt$ sea convergente, por la definición anterior, convenimos en utilizar la siguiente notación:

$$L\{f(t)\} = F(s)\ ,\ L\{g(t)\} = G(s)\ ,\ L\{y(t)\} = Y(s).$$

b. Es importante hacer notar que la existencia de la *Transformada de Laplace* de una función $f(t)$, depende de los valores de la variable s, lo cual se justificará con los ejemplos que se estudiarán más adelante.

c. Por otra parte, conviene saber que la *Transformada de Laplace* es una transformación lineal; es decir, el símbolo L es un operador lineal, ya que si $L\{f(t)\} = F(s)$ y $L\{g(t)\} = G(s)$; y si a y b son constantes reales, entonces se cumple que:

$$L\{a\,f(t) + b\,g(t)\} = a\,L\{f(t)\} + b\,L\{g(t)\} = a\,F(s) + b\,G(s)$$

Ejemplo 1.2.1: Evaluar $L\{f(t)\}$, donde $f(t) = 1$.

Solución: De la definición de transformada, se tiene: $L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \quad \Rightarrow$

- $$L\{1\} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right] \qquad (1)$$

- Ahora bien, $\lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s} + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-sb}}{s} \right] = \frac{1}{s}$, ya que

  $$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-sb}}{s} \right] = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad s > 0 \qquad (2)$$

- Por lo tanto, de (1) y (2), se concluye que: $L\{1\} = \dfrac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad s > 0$

<u>NOTA</u>: Por brevedad, al calcular transformadas por definición, convenimos, **por ejemplo**, en usar la notación: $\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \left. \dfrac{-e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \dfrac{1}{s} \quad (s>0)$, en el entendido de que el límite superior está dado por: $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$, para $s > 0$. La condición $s > 0$ **garantiza la convergencia** de la integral indicada y por ende, $L\{1\}$ **existe** (aspecto de nuestro interés). En caso contrario, dicha integral **diverge** y por lo tanto $L\{1\}$ **no existe** puesto que si $s < 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = +\infty$.

Ejemplo 1.2.2: Evaluar $L\{ f(t) \}$, donde $f(t) = e^{at}$.

Solución: La definición de transformada nos conduce a:

- $L\{ e^{at} \} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt = \left. \dfrac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_0^{\infty}$ (1)
- Con base en la notación indicada anteriormente, como $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(s-a)t} = 0$, siempre y cuando $s-a>0$; es decir para $s>a$, entonces tenemos que $\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt = \left. \dfrac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_0^{\infty} = \dfrac{1}{s-a} \quad (s>a)$ (2)
- De (1) y (2) se concluye que: $L\{ e^{at} \} = \dfrac{1}{s-a} \quad \Leftrightarrow \quad s>a$

  Así, por ejemplo, $L\{ e^{3t} \} = \dfrac{1}{s-3}$ si $s>3$ y $L\{ e^{-2t} \} = \dfrac{1}{s+2}$ si $s>-2$

Es importante saber que la definición de transformada también nos permite evaluar funciones continuas parte por parte, como se ilustra a continuación.

Ejemplo 1.2.3: Evaluar $L\{ f(t) \}$, donde $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$

Solución: En este caso, tenemos:

- $L\{ f(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{1} -e^{-st}\, dt + \int_1^{\infty} e^{-st}\, dt \qquad \Rightarrow$
- $L\{ f(t) \} = \left. \dfrac{e^{-st}}{s} \right|_0^{1} - \left. \dfrac{e^{-st}}{s} \right|_1^{\infty}$ (1)
- Puesto que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st} = 0$, si $s>0$, entonces de (1) se sigue que:
- $L\{ f(t) \} = \dfrac{e^{-s}}{s} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{e^{-s}}{s} = \dfrac{2e^{-s}-1}{s}$

Ejercicios 1.2.1:

a. Verifique, **usando la definición**, cada una de las siguientes transformadas e indique, en cada caso, para qué valores de s se satisfacen las mismas.

1. $L\left\{ t \right\} = \dfrac{1}{s^2}$
2. $L\left\{ t^2 \right\} = \dfrac{2}{s^3}$
3. $L\left\{ t\, e^{at} \right\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$
4. $L\left\{ t^2 e^{at} \right\} = \dfrac{2}{(s-a)^3}$
5. $L\left\{ \operatorname{sen}(kt) \right\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$
6. $L\left\{ \cos(kt) \right\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

b. **Usando la definición**, compruebe que:

1. $L\left\{ f(at) \right\} = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)$ con a constante, $a>0$.
2. $L\left\{ e^{at} f(bt) \right\} = \dfrac{1}{b}\, F\left(\dfrac{s-a}{b}\right)$ con a y b constantes, $b>0$.

c. **Utilice la definición** para evaluar $L\left\{ f(t) \right\}$ donde $f(t)$ se define como:

1. $f(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ t & \text{si } t \ge 3 \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$

Cabe hacer notar que de los ejercicios de la **parte a**, junto con los **primeros dos ejemplos resueltos**, se constituyen en algunas de las transformadas básicas que aparecen en la ***Tabla de Transformadas de Laplace*** (página 63).

Los siguientes ejemplos se desarrollarán haciendo uso de las primeras catorce entradas de dicha tabla y con base en el hecho de que la Transformada de Laplace es una transformación lineal.

Ejemplo 1.2.4: Sabiendo que $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, calcule: (a) $L\left\{ \operatorname{senh}(kt) \right\}$ y (b) $L\left\{ \cosh(kt) \right\}$.

Solución parte (a): $L\left\{\operatorname{senh}(kt)\right\} = \frac{1}{2}\, L\left\{ e^{kt} - e^{-kt}\right\} = \frac{1}{2}\left[\, L\left\{ e^{kt}\right\} - L\left\{ e^{-kt}\right\}\right]$

$$\Rightarrow \quad L\left\{\operatorname{senh}(kt)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+k-s+k}{(s-k)(s+k)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2k}{s^2-k^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{\operatorname{senh}(kt)\right\} = \frac{k}{s^2-k^2}$$

Solución parte (b): $L\left\{\cosh(kt)\right\} = \frac{1}{2}\, L\left\{ e^{kt} + e^{-kt}\right\} = \frac{1}{2}\left[\, L\left\{ e^{kt}\right\} + L\left\{ e^{-kt}\right\}\right]$

$$\Rightarrow \quad L\left\{\cosh(kt)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+k+s-k}{(s-k)(s+k)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-k^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{\cosh(kt)\right\} = \frac{s}{s^2-k^2}$$

Ejemplo 1.2.5: Determinar $L\left\{\, 2t^3 - t^4 e^{-t} + 4\cos^2 t \,\right\}$.

Solución: Puesto que $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$, entonces tenemos:

$$L\left\{\, 2t^3 - t^4 e^{-t} + 2 + 2\cos(2t) \,\right\} = \frac{12}{s^4} - \frac{24}{(s+1)^5} + \frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+4}$$

Ejemplo 1.2.6: Evaluar $L\left\{\, 6\operatorname{sen}(3t)\cos(5t) + e^{2t}\cos(3t) \,\right\}$.

Solución: Como $\operatorname{sen}(3t)\cos(5t) = \dfrac{\operatorname{sen}(8t) + \operatorname{sen}(-2t)}{2}$, entonces:

$$L\left\{\, 3\operatorname{sen}(8t) - 3\operatorname{sen}(2t) + e^{2t}\cos(3t) \,\right\} = \frac{24}{s^2+64} - \frac{6}{s^2+4} + \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$$

Ejercicios 1.2.2: Usando la *Tabla de Transformadas de Laplace*, calcule:

1. $L\left\{\, 2t - 5t^2 e^{-3t} + 4\cosh(3t) \right\}$
2. $L\left\{\, 4 + t\cos(4t) - 3e^{5t}\operatorname{sen} t \right\}$
3. $L\left\{\, e^{-2t} - 3\operatorname{senh}(2t) - 2\operatorname{sen}^2(3t) \right\}$
4. $L\left\{\, t\operatorname{sen}(6t) - 2\cos(2t)\cos(3t) \right\}$

1.3 *La Transformada Inversa de Laplace*

- Hasta el momento, se ha enfocado la atención en transformar una función $f(t)$ en otra función $F(s)$, en términos de la **convergencia** de la integral impropia $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$. Simbólicamente lo representamos por $L\{f(t)\} = F(s)$.

- Ahora bien, el **problema inverso** se describe como: *Dada una función* $F(s)$*, ¿cuál es la función* $f(t)$ *cuya transformada es* $F(s)$*?*

  En este caso se dice que $f(t)$ es la *transformada inversa* de $F(s)$, lo cual se escribe como: $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ si y solo si $L\{f(t)\} = F(s)$.

- Por otra parte, la *Transformada Inversa de Laplace* es una transformación lineal; es decir, el símbolo L^{-1} es un operador lineal, ya que si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$; y si a y b son constantes reales, entonces se cumple que:

$$L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\} = a f(t) + b g(t)$$

Ejercicios 1.3.1: Usando como referencia la *Tabla de Transformadas de Laplace* (página 63), determine las siguientes transformadas inversas básicas.

1. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s} \right\}$
2. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^2} \right\}$
3. $L^{-1}\left\{ \dfrac{n!}{s^{n+1}} \right\}$
4. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s-a} \right\}$
5. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s-a)^2} \right\}$
6. $L^{-1}\left\{ \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}} \right\}$
7. $L^{-1}\left\{ \dfrac{k}{s^2+k^2} \right\}$
8. $L^{-1}\left\{ \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2} \right\}$
9. $L^{-1}\left\{ \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2} \right\}$
10. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{s^2+k^2} \right\}$
11. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2} \right\}$
12. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2} \right\}$
13. $L^{-1}\left\{ \dfrac{k}{s^2-k^2} \right\}$
14. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{s^2-k^2} \right\}$

Ejemplo 1.3.1: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^6} \right\}$.

Solución: De acuerdo con la entrada No.3 de la tabla de transformadas, se observa que $n+1=6 \quad \Rightarrow \quad n=5$; por lo tanto,

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^6} \right\} = \frac{1}{5!}\, L^{-1}\left\{ \frac{5!}{s^6} \right\} = \frac{t^5}{5!}$$

Ejemplo 1.3.2: Evaluar $L^{-1}\left\{ \dfrac{-12}{(s+5)^4} \right\}$.

Solución: Según la entrada No.6 de la tabla citada, observe que $a=-5$ y que además $n+1=4 \quad \Rightarrow \quad n=3$. Por lo tanto:

$$L^{-1}\left\{ \frac{-12}{(s+5)^4} \right\} = \frac{-12}{3!}\, L^{-1}\left\{ \frac{3!}{(s+5)^4} \right\} = -2\, t^3\, e^{-5t}$$

Ejemplo 1.3.3: Determinar $L^{-1}\left\{ \dfrac{10-3s}{s^2+25} \right\}$.

Solución: Con base en la tabla, en las entradas 7 y 10, respectivamente, se observa que $k=5$ por lo que:

$$L^{-1}\left\{ \frac{10-3s}{s^2+25} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{10}{s^2+25} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{3s}{s^2+25} \right\} = 2\operatorname{sen}(5t) - 3\cos(5t)$$

Ejemplo 1.3.4: Hallar $L^{-1}\left\{ \dfrac{6}{s^2-2s+10} \right\}$.

Solución: La entrada No.8 de la tabla sugiere expresar $s^2-2s+10$ como una suma de cuadrados perfectos, lo cual es posible ya que $\Delta=-36$; o sea , $\Delta<0$. En efecto, se tiene que $s^2-2s+10=(s-1)^2+9$, en donde $a=1$ y $k=3$; por lo tanto:

$$L^{-1}\left\{ \frac{6}{s^2-2s+10} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{6}{(s-1)^2+3^2} \right\} = 2\, e^{t}\operatorname{sen}(3t)$$

Ejercicios 1.3.2: Con base en la *Tabla de Transformadas de Laplace*, calcular las siguientes transformadas inversas.

1. $L^{-1}\left\{ \dfrac{(s+1)^2}{s^4} \right\}$

2. $L^{-1}\left\{ \dfrac{6}{3s+2} + \dfrac{9s}{3s^2+12} \right\}$

3. $L^{-1}\left\{ \dfrac{3s+10}{s^2-25} \right\}$

4. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s-3}{s^2+2s+5} \right\}$

NOTA: Antes de continuar con este tema, es importante indicar que para que $F(s)$ sea una transformada de una función $f(t)$ de orden exponencial y continua en $\left[0,+\infty\right[$ (o parte por parte), se requiere que $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Así, por ejemplo, $L^{-1}\left\{ s^2 \right\}$ y $L^{-1}\left\{ \dfrac{2s}{s+1} \right\}$ **no existen** puesto que $\lim\limits_{s\to\infty} s^2 = +\infty$ y $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{2s}{s+1} = 2$, ambos diferentes de cero. En otras palabras, tanto $F(s)=s^2$ como $F(s)=\dfrac{2s}{s+1}$ **no corresponden** a la transformada de Laplace de ninguna función de $f(t)$.

1.4 *Fracciones Parciales y la Transformada Inversa de Laplace*

- En algunos casos, se tienen transformadas que son funciones racionales de s ; a saber, $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios tales que el grado de $P(s)$ es estrictamente menor que el grado de $Q(s)$.

- En estos casos, se utiliza la descomposición de funciones racionales en *fracciones parciales* para encontrar la transformada inversa de $F(s)$; o sea, $L^{-1}\left\{ \dfrac{P(s)}{Q(s)} \right\}$.

- Para tal fin, se estudiarán únicamente tres casos de este método; a saber, cuando el denominador $Q(s)$ contiene:
  (1) solo factores lineales, todos distintos entre sí
  (2) factores lineales y algunos de ellos se repiten
  (3) factores cuadráticos irreductibles no repetidos

Ejemplo 1.4.1: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{s-11}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\}$ (*)

- Las correspondientes fracciones parciales de la función $F(s)$ son:

$$\frac{s-11}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} \qquad \Rightarrow$$

$$s-11 = A(s-2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s-2)$$

De donde, para $s=-1$, $s=2$ y $s=3$, se obtiene que $A=-1$, $B=3$ y $C=-2$, respectivamente.

Por lo tanto, $\dfrac{s-11}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{3}{s-2} + \dfrac{-2}{s-3}$

- Sustituyendo en (*), tenemos:

$$L^{-1}\left\{ \frac{s-11}{(s+1)(s-2)(s-3)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s-2} + \frac{-2}{s-3} \right\} =$$

$$-L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + 3L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - 2L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-3} \right\} = -e^{-t} + 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

Ejemplo 1.4.2: Determinar $L^{-1}\left\{ \dfrac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)} \right\}$ (*)

- Las fracciones parciales que le corresponden a la función $F(s)$ son:

$$\frac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s-2} \qquad \Rightarrow$$

$$2s^2+15s+7 = A(s+1)(s-2) + B(s-2) + C(s+1)^2$$

Luego, sí $s=-1 \Rightarrow B=2$; $s=2 \Rightarrow C=5$; así, para $s=0 \Rightarrow A=-3$.

Por lo tanto, $\dfrac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)} = \dfrac{-3}{s+1} + \dfrac{2}{(s+1)^2} + \dfrac{5}{s-2}$

➢ Sustituyendo en (*), tenemos:

$$L^{-1}\left\{ \frac{2s^2+15s+7}{(s+1)^2(s-2)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{-3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{5}{s-2} \right\} =$$

$$-3L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + 2L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} + 5L^{-1}\left\{ \frac{1}{s-2} \right\} = -3e^{-t} + 2te^{-t} + 5e^{2t}$$

Ejemplo 1.4.3: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{4s}{(s+2)(s^2+4)} \right\}$ (*)

➢ A la función $F(s)$ le corresponden las fracciones parciales:

$$\frac{4s}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \quad \Rightarrow$$

$$4s = A(s^2+4) + (Bs+C)(s+2) \quad \Rightarrow$$

$$4s = (A+B)s^2 + (2B+C)s + (4A+2C) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=4 \\ 4A+2C=0 \end{cases} \qquad (**)$$

Ahora bien, sí $s=-2 \;\Rightarrow\; A=-1$. Luego, al sustituir en (**), obtenemos que $B=1$ y $C=2$, respectivamente.

Por lo tanto, $\dfrac{4s}{(s+2)(s^2+4)} = \dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{s+2}{s^2+4}$

➢ Sustituyendo en (*), se tiene:

$$L^{-1}\left\{ \frac{4s}{(s+2)(s^2+4)} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{-1}{s+2} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} \right\} =$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{-1}{s+2} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\} = -e^{-2t} + \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)$$

Ejercicios 1.4: Evaluar las siguientes transformadas inversas.

1. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s^2+2}{(s+2)(s^2+2s-3)} \right\}$

2. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s-1}{s^2(s^2+1)} \right\}$

3. $L^{-1}\left\{ \dfrac{4s^2-3s-1}{(s-3)(s^2-4s+4)} \right\}$

4. $L^{-1}\left\{ \dfrac{4s^2-6s+8}{(s-1)(s^2-2s+3)} \right\}$

5. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s^2+9s+2}{(2s-1)(s^2+2s+1)} \right\}$

6. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s+10}{(s^2-4s)(s+5)} \right\}$

7. $L^{-1}\left\{ \dfrac{4s^2-3}{(s^2-2s+1)(s+1)} \right\}$

8. $L^{-1}\left\{ \dfrac{5s^2+12s+1}{s^3+3s^2-4} \right\}$

9. $L^{-1}\left\{ \dfrac{2s^2+7s-1}{s^3-2s^2+3s-6} \right\}$

10. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s^2+6s-9}{(3s+1)(s^2-4s+4)} \right\}$

11. $L^{-1}\left\{ \dfrac{8s+25}{(2s-1)(s^2+4s+5)} \right\}$

12. $L^{-1}\left\{ \dfrac{10s^2-22s+16}{(5s+3)(s^2-2s+5)} \right\}$

2 PRIMER TEOREMA DE TRASLACIÓN

A partir de este apartado, se estudiarán algunas propiedades de la *Transformada de Laplace* las cuales nos permitirán hallar la transformada de ciertas funciones sin necesidad de tener que recurrir a su definición.

Para tal efecto, se requiere conocer la transformada de las funciones básicas, tales como: t^n, e^{at}, $\operatorname{sen}(kt)$, $\cos(kt)$, $\operatorname{senh}(kt)$, $\cosh(kt)$, etc.

2.1 *Primer Teorema de Traslación*

Teorema 2.1: Sea a un número real cualquiera. Si $L\{ f(t) \} = F(s)$, entonces:

$$L\left\{ e^{at} f(t) \right\} = F(s-a)$$

Demostración

❖ Usando la definición de *Transformada de Laplace*, tenemos:

$$L\left\{ e^{at} f(t) \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)$$

NOTA: La interpretación del teorema anterior la podemos denotar como sigue:

$$L\left\{ e^{at} f(t) \right\} = L\{ f(t) \}\big|_{s \to s-a} = F(s)\big|_{s \to s-a} = F(s-a)$$

Donde la expresión $L\{ f(t) \}\big|_{s \to s-a}$ significa que, una vez que se ha calculado la $L\{ f(t) \} = F(s)$, se debe trasladar "s" a "$s-a$"; es decir, cambiar "s" por "$s-a$". Ahora bien, por brevedad, usaremos la notación $L\{ f(t) \}\big|_{s-a}$, o bien, $L\{ f(t) \}_{s-a}$.

Ejemplo 2.1.1: Evaluar $L\left\{ e^{-2t} t^4 \right\}$

Solución: $L\left\{ e^{-2t} t^4 \right\} = L\left\{ t^4 \right\}\big|_{s+2} = \left.\dfrac{4!}{s^5}\right|_{s+2} = \dfrac{4!}{(s+2)^5}$

¡ ¡ Compare este resultado usando la entrada No.6 de la tabla ! !

Ejemplo 2.1.2: Calcular $L\left\{ e^{3t}\cos(4t) \right\}$

Solución:

$$L\left\{ e^{3t}\cos(4t) \right\} = L\left\{ \cos(4t) \right\}\big|_{s-3} = \left.\frac{s}{s^2+16}\right|_{s-3} = \frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

Ejemplo 2.1.3: Obtener $L\left\{ e^{at}\operatorname{senh}(kt) \right\}$

Solución:

$$L\left\{ e^{at}\operatorname{senh}(kt) \right\} = L\left\{ \operatorname{senh}(kt) \right\}\big|_{s-a} = \left.\frac{k}{s^2-k^2}\right|_{s-a} = \frac{k}{(s-a)^2-k^2}$$

Ejercicios 2.1: Evaluar las siguientes transformadas:

1. $L\left\{ e^{-3t}t^6 \right\}$
2. $L\left\{ e^{6t}\operatorname{sen}(3t) \right\}$
3. $L\left\{ e^{at}\cosh(kt) \right\}$
4. $L\left\{ e^{-5t}\cosh(2t) \right\}$
5. $L\left\{ e^{2t}h(t) \right\}$, sabiendo que $L\left\{ h(t) \right\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$
6. $L\left\{ e^{-t}f(3t) \right\}$, sabiendo que $L\left\{ f(at) \right\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $a>0$, y $F(s) = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$

2.2 *Forma inversa del Primer Teorema de Traslación*

- Sea a un número real cualquiera. Si $L^{-1}\left\{ F(s) \right\} = f(t)$, entonces:

$$L^{-1}\left\{ F(s-a) \right\} = e^{at}f(t)$$

- **En efecto**, observemos que:

$$L^{-1}\left\{ F(s-a) \right\} = L^{-1}\left\{ F(s)\big|_{s-a} \right\} = e^{at}L^{-1}\left\{ F(s) \right\} = e^{at}f(t)$$

Ejemplo 2.2.1: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s-3)^4} \right\}$

Solución: $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s-3)^4} \right\} = L^{-1}\left\{ \left.\dfrac{1}{s^4}\right|_{s-3} \right\} = e^{3t}L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^4} \right\} = \dfrac{1}{6}e^{3t}t^3$

¡ ¡ Compare este resultado usando la entrada No.6 de la tabla ! !

Ejemplo 2.2.2: Evaluar $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2}\right\}$

Solución:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\left.\frac{s-2}{s^2}\right|_{s+2}\right\}=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}\right\}=e^{-2t}(1-2t)$$

Ejemplo 2.2.3: Hallar $L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+2s+5}\right\}$

Solución:

$$L^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2+2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s+1)-4}{(s+1)^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{\left.\frac{s-4}{s^2+4}\right|_{s+1}\right\} = e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{s-4}{s^2+4}\right\}$$

$$= e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4} - \frac{4}{s^2+4}\right\} = e^{-t}\left[\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t)\right]$$

Ejemplo 2.2.4: Determine $L^{-1}\left\{\dfrac{3s-4}{s^2-4s+2}\right\}$

Solución:

$$L^{-1}\left\{\frac{3s-4}{s^2-4s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3(s-2)+2}{(s-2)^2-2}\right\} = L^{-1}\left\{\left.\frac{3s+2}{s^2-2}\right|_{s-2}\right\} = e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2-2}\right\}$$

$$= e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2-2} + \frac{2}{s^2-2}\right\} = e^{2t}\left[3\cosh\left(\sqrt{2}\,t\right) + \sqrt{2}\,\text{senh}\left(\sqrt{2}\,t\right)\right]$$

Ejercicios 2.2: Evaluar las siguientes transformadas inversas:

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{5s}{s^2-4s+4} - \dfrac{2s-6}{(s+1)^3}\right\}$
2. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2-6s+34} - \dfrac{s+1}{(s-3)^5}\right\}$
3. $L^{-1}\left\{\dfrac{2-4s}{s^2+2s-2}\right\}$
4. $L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+6s+7}\right\}$
5. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s+a}}\right\}$, sabiendo que $L\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

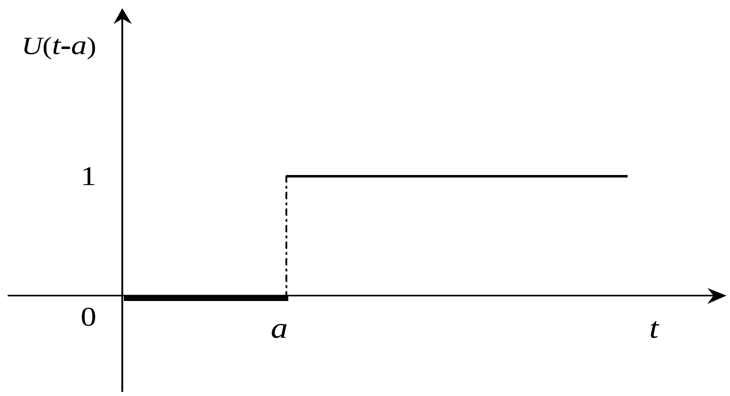
3 SEGUNDO TEOREMA DE TRASLACIÓN

3.1 *La función escalón unitario o función de Heaviside*

Definición 3.1: La *función escalón unitario*, denotada por $U(t-a)$, $a \geq 0$, se define como:

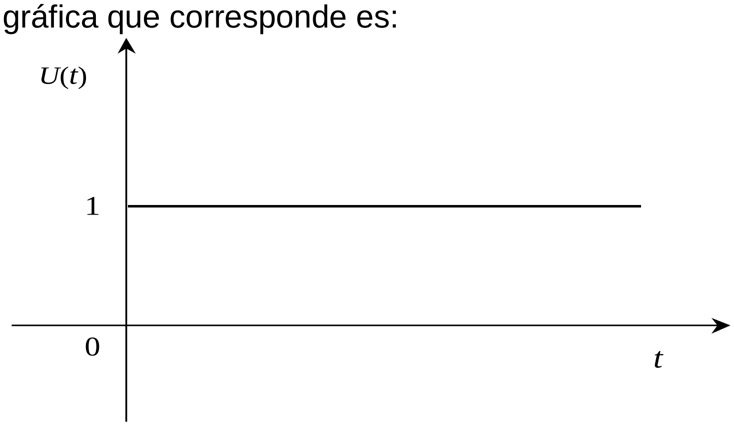
$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$

A esta función también se le conoce como *función de salto unitario* o *función de Heaviside*; en este último caso, puede denotarse también por $H(t-a)$.



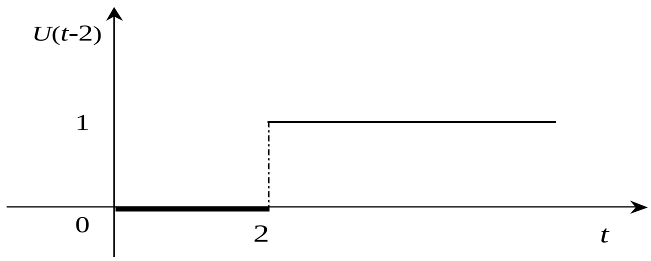
Se puede observar que la función anterior está definida sólo para valores de $t \geq 0$ (eje positivo), ya que esto basta para poder estudiar la Transformada de Laplace de la función de Heaviside. En un sentido mucho más amplio, diríamos que $U(t-a) = 0$ para $t < a$.

Por otra parte, si $a = 0$, entonces se tiene que $U(t) = 1$, con $t \geq 0$. Para este caso particular, la gráfica que corresponde es:

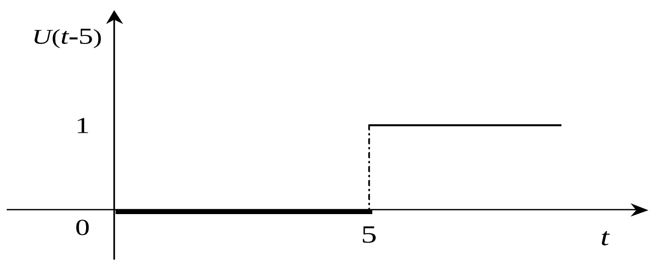


Ejemplo 3.1.1: Trazar la gráfica de las funciones: (a) $U(t-2)$ y (b) $U(t-5)$.

Solución parte (a): Como $U(t-2)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ su gráfica es:



Solución parte (b): La gráfica correspondiente es:



Ejercicios 3.1: Trazar la gráfica de las siguientes funciones:
1. $f(t)=\operatorname{sen} t\, U(t-2\pi)$
2. $f(t)=\cos t\, U(t-2\pi)$

3.2 *Forma de expresar funciones continuas parte por parte en términos de la función escalón unitario*

3.2.1 *Para dos funciones continuas parte por parte*

❖ Consideremos la función definida por: $f(t)=\begin{cases} g(t) & \text{si} \quad 0 \le t < a \\ h(t) & \text{si} \quad t \ge a \end{cases}$

Obsérvese que: $f(t)=\begin{cases} \left[g(t)-g(t)\right] + g(t) & ; \quad 0 \le t < a \\ \left[h(t)-g(t)\right] + g(t) & ; \quad t \ge a \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$f(t)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t < a \\ h(t)-g(t) & ; \quad t \ge a \end{cases} + \begin{cases} g(t) & ; \quad 0 \le t < a \\ g(t) & ; \quad t \ge a \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(t) = \left[h(t) - g(t)\right]\begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t < a \\ 1 & ; \quad t \ge a \end{cases} \quad + \quad g(t)\begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le t < a \\ 1 & ; \quad t \ge a \end{cases}$$

Por lo que, $f(t) = \left[h(t) - g(t)\right]U(t-a) + g(t)\,U(t)$, donde $U(t) = 1$.

- **Resumiendo** se tiene que: $f(t) = g(t) + \left[h(t) - g(t)\right]U(t-a)$

<u>Ejemplo 3.2.1</u>: La función $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t < \pi \\ \cos t & \text{si} \quad t \ge \pi \end{cases}$, en términos de la función escalón unitario (FEU), se expresa como: $f(t) = 2 + (\cos t - 2)\,U(t-\pi)$.

3.2.2 *Para tres funciones continuas parte por parte*

- Con base en lo obtenido anteriormente, este caso se puede generalizar como sigue:

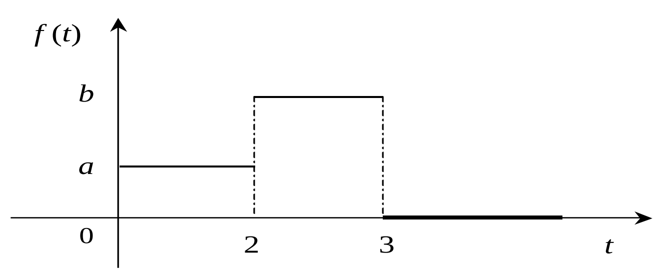
Dada la función $f(t) = \begin{cases} h_1(t) & \text{si} \quad 0 \le t < a \\ h_2(t) & \text{si} \quad a \le t < b \\ h_3(t) & \text{si} \quad t \ge b \end{cases}$

Entonces, $f(t)$ en términos de la *función escalón unitario* está dada por:

$$f(t) = h_1(t) + \left\lfloor h_2(t) - h_1(t) \right\rfloor U(t-a) + \left\lfloor h_3(t) - h_2(t) \right\rfloor U(t-b)$$

<u>Ejemplo 3.2.2</u>: De la gráfica adjunta se tiene que: $f(t) = \begin{cases} a & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ b & \text{si} \quad 2 \le t < 3 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 3 \end{cases}$.

Por lo tanto, ésta se expresa en términos de la función escalón unitario como: $f(t) = a + (b-a)\,U(t-2) - b\,U(t-3)$.



Ejercicios 3.2: Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de la *función de escalón unitario o Heaviside.*

1. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}t & \text{si } 0\le t<3\pi\\ 0 & \text{si } t\ge 3\pi\end{cases}$

2. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}t & \text{si } 0\le t<\pi\\ t & \text{si } \pi\le t<2\pi\\ t-\cos t & \text{si } t\ge 2\pi\end{cases}$

3. $f(t)=\begin{cases}\cos t & \text{si } 0\le t<\pi\\ \operatorname{sen}t & \text{si } t\ge \pi\end{cases}$

4. $f(t)=\begin{cases}6 & \text{si } 0\le t<3\\ 0 & \text{si } 3\le t<5\\ 2 & \text{si } t\ge 5\end{cases}$

3.3 *Segundo Teorema de Traslación (transformada de funciones expresadas en términos de la función escalón unitario)*

Teorema 3.3: Sea a un número real, $a\ge 0$. Si $L\{f(t)\}=F(s)$, entonces:

$$L\{f(t-a)\,U(t-a)\}=e^{-as}\,L\{f(t)\}=e^{-as}\,F(s)$$

Demostración

❖ Usando la definición de la Transformada de Laplace, tenemos:

$$L\{f(t-a)\,U(t-a)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\,f(t-a)\,U(t-a)\,dt$$

❖ Dado que, $f(t-a)\,U(t-a)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le t<a\\ f(t-a) & \text{si } t\ge a\end{cases}$, entonces:

$$L\{f(t-a)\,U(t-a)\}=\int_a^{\infty}e^{-st}\,f(t-a)\,dt \qquad (*)$$

❖ Haciendo el cambio de variable: $v=t-a \Rightarrow t=v+a \Rightarrow dt=dv$.

Además, si $t\to a \Rightarrow v\to 0$ y si $t\to\infty \Rightarrow v\to\infty$. Por lo tanto, sustituyendo en (*), se tiene que:

$$L\{f(t-a)\,U(t-a)\}=\int_0^{\infty}e^{-s(v+a)}\,f(v)\,dv=e^{-as}\int_0^{\infty}e^{-sv}\,f(v)\,dv$$

❖ Finalmente, concluimos que: $L\{f(t-a)\,U(t-a)\}=e^{-as}\,F(s)$ *Q.E.D.*

Caso Particular del Teorema anterior: Se presenta cuando $f(t-a)=1$, por lo que $f(t)=1$. Por lo tanto, como $L\{1\}=\dfrac{1}{s}$, se deduce que:

$$L\{U(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo 3.3.1: Determinar $L\left\{(t-1)^3 U(t-1)\right\}$

Solución: Observemos que $f(t-1)=(t-1)^3$, por lo que $f(t)=t^3$; además, $a=1$. Por lo tanto:

$$L\left\{(t-1)^3 U(t-1)\right\} = e^{-s} L\left\{t^3\right\} = e^{-s}\cdot\frac{3!}{s^4} = \frac{6e^{-s}}{s^4}$$

Ejemplo 3.3.2: Obtener $L\left\{ f(t) \right\}$, donde $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0\le t<2\pi \\ \operatorname{sen} t & \text{si} \quad t\ge 2\pi \end{cases}$

Solución:

Como $f(t)=\operatorname{sen} t\, U(t-2\pi) \quad\Rightarrow\quad L\left\{ f(t) \right\} = L\left\{ \operatorname{sen} t\, U(t-2\pi) \right\}$.
Ahora bien, puesto que $\operatorname{sen}(t-2\pi)=\operatorname{sen} t$, entonces $f(t-2\pi)=\operatorname{sen}(t-2\pi)$ y $f(t)=\operatorname{sen} t$; además, $a=2\pi$. Por lo tanto:

$$L\left\{ \operatorname{sen}(t-2\pi)U(t-2\pi) \right\} = e^{-2\pi s}\, L\left\{ \operatorname{sen} t \right\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

Ejemplo 3.3.3: Calcular $L\left\{ (t+1)\, U(t-2) \right\}$

Solución: En este caso, para poder aplicar el *segundo teorema de traslación*, se requiere que la función que se transforma tenga la forma: $f(t-2)\,U(t-2)$; o sea, se debe expresar $(t+1)$ en términos de $(t-2)$.

Así, $f(t-2)=\left[(t-2+2)+1\right]=\left[(t-2)+3\right] \quad\Rightarrow\quad f(t)=t+3$. Por lo tanto:

$$L\left\{ (t+1)\, U(t-2) \right\} = L\left\{ \left[(t-2)+3\right] U(t-2) \right\} = e^{-2s}\, L\left\{ t+3 \right\} \quad\Rightarrow$$

$$L\left\{ (t+1)\, U(t-2) \right\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right) = \frac{(1+3s)\, e^{-2s}}{s^2}$$

Ejercicios 3.3: Evaluar las siguientes transformadas:

1. $L\{\, U(t-\pi)\,\}$
2. $L\{\, t^2\, U(t-1)\,\}$
3. $L\{\, \cos t\; U(t-2\pi)\,\}$
4. $L\{\, (t+2)\; U(t-5)\,\}$
5. $L\{\, (2t-7)\; U(t-3)\,\}$
6. $L\{\, e^{-t}\, U(t-2)\,\}$
7. $L\{\, h(t)\,\}$, donde $h(t)=\begin{cases} t & \text{si} \quad 0\le t<3 \\ 1+\operatorname{senh}(t-3) & \text{si} \quad t\ge 3 \end{cases}$
8. $L\{\, g(t)\,\}$, donde $g(t)=\begin{cases} t\,\operatorname{sen}(3t) & \text{si} \quad 0\le t<4 \\ t\,\operatorname{sen}(3t)-\cosh(2t-8) & \text{si} \quad t\ge 4 \end{cases}$
9. $L\{\, f(t)\,\}$, donde $f(t)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0\le t<2 \\ -1 & \text{si} \quad 2\le t<3 \\ 0 & \text{si} \quad t\ge 3 \end{cases}$

NOTA: Una **forma alterna** del *Segundo Teorema de Traslación* es:

$$L\{\, f(t)\, U(t-a)\,\} = e^{-as}\, L\{\, f(t+a)\,\}$$

3.4 *Forma inversa del Segundo Teorema de Traslación*

❖ Sabiendo que $a\ge 0$ y dado que $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, se tiene:

$$L^{-1}\{\, e^{-as}\, F(s)\,\} = f(t-a)\, U(t-a)$$

❖ **En efecto**, observemos que:

$$L^{-1}\{\, e^{-as}\, F(s)\,\} = U(t-a)\, L^{-1}\{\, F(s)\,\}\Big|_{t-a} = U(t-a)\, f(t)\Big|_{t-a} = U(t-a)\, f(t-a)$$

Ejemplo 3.4.1: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+4} \right\}$

Solución:

$$L^{-1}\left\{ \frac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+4} \right\} = L^{-1}\left\{ e^{-\pi s}\, \frac{s}{s^2+4} \right\} = U(t-\pi)\, L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+4} \right\}\Bigg|_{t-\pi} \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+4} \right\} = U(t-\pi)\, \cos(2t)\Big|_{t-\pi} = U(t-\pi)\, \cos(2t-2\pi) = U(t-\pi)\, \cos(2t)$$

Ejemplo 3.4.2: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-3s}}{s^2 - 2s + 2} \right\}$

Solución:

$$L^{-1}\left\{ \frac{e^{-3s}}{s^2 - 2s + 2} \right\} = U(t-3)\ L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \right\}\Bigg|_{t-3} \qquad \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{e^{-3s}}{s^2 - 2s + 2} \right\} = U(t-3)\left[\, e^{t}\,\text{sen}t\,\right]_{t-3} = U(t-3)\ e^{t-3}\,\text{sen}(t-3)$$

Ejemplo 3.4.3: Calcular $L^{-1}\left\{ \dfrac{4 + 5e^{-2s}}{s + 4} \right\}$

Solución:

$$L^{-1}\left\{ \frac{4 + 5e^{-2s}}{s + 4} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{4}{s + 4} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{5e^{-2s}}{s + 4} \right\} \qquad \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{4 + 5e^{-2s}}{s + 4} \right\} = 4\,e^{-4t} + 5\,U(t-2)\ L^{-1}\left\{ \frac{1}{s + 4} \right\}\Bigg|_{t-2} \qquad \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{4 + 5e^{-2s}}{s + 4} \right\} = 4\,e^{-4t} + 5\,U(t-2)\ e^{-4t}\Big|_{t-2} = 4\,e^{-4t} + 5\,U(t-2)\ e^{-4(t-2)}$$

Ejercicios 3.4: Evaluar las transformadas inversas siguientes:

1. $L^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-5s} - 4}{(s+1)^3} \right\}$
2. $L^{-1}\left\{ \dfrac{(2s+3)\ e^{-\pi s/2}}{s^2 + 9} \right\}$
3. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s e^{-\pi s} - 4}{s^2 + 6s + 10} \right\}$
4. $L^{-1}\left\{ \dfrac{(2s - 1)\ e^{-2\pi s}}{s^2 - 6s + 34} \right\}$
5. $L^{-1}\left\{ \dfrac{(3s^2 + 6)\ e^{-4s}}{s^3 + s^2 - 2s} \right\}$
6. $L^{-1}\left\{ \dfrac{(s^2 - 24s - 16)\ e^{-s}}{(s^2 + 16)^2} \right\}$

4 DERIVADAS DE TRANSFORMADAS

4.1 *La enésima derivada de una transformada*

En esta sección se estudiará la forma de obtener $F^{(n)}(s)$, para $n=1, 2, 3, \ldots$.

❖ De la definición de la Transformada de Laplace, se tiene:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (*)$$

❖ Diferenciando a ambos lados de (*) con respecto a la variable s, se obtiene:

$$F'(s) = \frac{d\,L\{f(t)\}}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)\right] dt \Rightarrow$$

$$F'(s) = \int_0^{\infty} -t\, e^{-st} f(t)\, dt = -\int_0^{\infty} e^{-st}\left[t\, f(t)\right] dt = -L\{t\, f(t)\} \qquad (**)$$

De (**) se concluye que: $L\{t\, f(t)\} = -F'(s)$.

❖ En forma similar, tenemos:

$$L\left\{t^2 f(t)\right\} = L\{t\left[t\, f(t)\right]\} = \frac{-d}{ds} L\{t\, f(t)\} = \frac{-d}{ds}\left[\frac{-d}{ds} L\{f(t)\}\right]$$

Por lo tanto: $L\left\{t^2 f(t)\right\} = \dfrac{d^2}{ds^2} L\{f(t)\} = F''(s)$

❖ Análogamente, se deduce que:

$$L\left\{t^3 f(t)\right\} = L\left\{t\left[t^2 f(t)\right]\right\} = \frac{-d}{ds} L\left\{t^2 f(t)\right\} = \frac{-d}{ds}\left[\frac{d^2}{ds^2} L\{f(t)\}\right]$$

Por lo tanto: $L\left\{t^3 f(t)\right\} = \dfrac{-d^3}{ds^3} L\{f(t)\} = -F'''(s)$

❖ Con base en lo anterior, la generalización para $n=1, 2, 3, \ldots$, nos conduce a:

$$L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Ejemplo 4.1.1: $L\{\, t\ \mathrm{sen}(k\,t)\,\} = \dfrac{-d}{ds}\, L\{\mathrm{sen}(k\,t)\,\} = \dfrac{-d}{ds}\left(\dfrac{k}{s^2+k^2}\right) \quad \Rightarrow$

$$L\{\, t\ \mathrm{sen}(k\,t)\,\} = -\left(\frac{-2\,k\,s}{(s^2+k^2)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad L\{\, t\ \mathrm{sen}(k\,t)\,\} = \frac{2\,k\,s}{(s^2+k^2)^2}$$

Ejemplo 4.1.2: $L\{\, t\ \cosh(k\,t)\,\} = \dfrac{-d}{ds}\, L\{\cosh(k\,t)\,\} = \dfrac{-d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2-k^2}\right) \quad \Rightarrow$

$$L\{\, t\ \cosh(k\,t)\,\} = -\left(\frac{s^2-k^2-2\,s^2}{(s^2-k^2)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad L\{\, t\ \cosh(k\,t)\,\} = \frac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$$

Ejemplo 4.1.3: $L\left\{ e^t\, t\ \mathrm{sen}t \right\} = L\{\, t\ \mathrm{sen}t\,\}\,\big|_{s-1} = \left[\dfrac{-d}{ds}\ L\{\,\mathrm{sen}t\,\}\right]_{s-1} \quad \Rightarrow$

$$L\left\{ e^t\, t\ \mathrm{sen}t \right\} = \left[\frac{-d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right]_{s-1} = \left[\frac{2\,s}{(s^2+1)^2}\right]_{s-1} \quad \Rightarrow$$

$$L\left\{ e^t\, t\ \mathrm{sen}t \right\} = \frac{2\,(s-1)}{\left[(s-1)^2+1\right]^2} = \frac{2\,(s-1)}{(s^2-2\,s+2)^2}$$

Ejercicios 4.1: Calcular las siguientes transformadas.

1. $L\{\ t\ \cos(k\,t)\,\}$
2. $L\{\ t\ \mathrm{senh}(k\,t)\,\}$
3. $L\left\{\ t^2\,\mathrm{sen}(5t)\right\}$
4. $L\left\{\ t\ e^{-t}\cos t\,\right\}$
5. $L\left\{\ e^{-3t}\ t\ \cosh(2t)\right\}$
6. $L\left\{\ t^2\ e^{2t}\,\mathrm{senh}(3t)\right\}$
7. $L\{\,3t\ h(t)\,\}$, sabiendo que $L\ \{\ h(t)\,\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

4.2 *Forma inversa de la derivada de una transformada*

- Sabemos que $L\left\{ t^n\ f(t)\,\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$. Por lo tanto:

$$t^n\ f(t) = (-1)^n\ L^{-1}\left\{ F^{(n)}(s)\right\} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{(-1)^n}{t^n}\ L^{-1}\left\{ F^{(n)}(s)\right\} \qquad (*)$$

- Como $f(t) = L^{-1}\{\ F(s)\,\}$, de (*) se concluye que:

$$f(t) = L^{-1}\{\ F(s)\,\} = \frac{(-1)^n}{t^n}\ L^{-1}\left\{ F^{(n)}(s)\right\} \qquad (**)$$

NOTA: La forma inversa de la derivada de una transformada se verá **sólo para el caso** en que $n=1$. Así, de (**), tenemos: $\boxed{f(t)=L^{-1}\{\ F(s)\ \}=\dfrac{-1}{t}\ L^{-1}\{\ F'(s)\ \}}$.

Ejemplo 4.2.1: Determine $L^{-1}\left\{\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)\right\}$

Solución: Con base en el resultado anterior, tenemos:

- $$f(t) = L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{-1}{t}\ L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} \qquad (1)$$

- Por otra parte, $\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right) = \ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right) = \ln(s+1) - \ln s$ (2)

- Luego, de (1) y (2) se obtiene que:

$$f(t) = \frac{-1}{t}\ L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left[\ln(s+1) - \ln s\right]\right\} = \frac{-1}{t}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{-(e^{-t}-1)}{t} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

Ejemplo 4.2.2: $L^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{3}{s}\right)\right\} = \dfrac{-1}{t}\ L^{-1}\left\{\dfrac{d}{ds}\left[\arctan\left(\dfrac{3}{s}\right)\right]\right\} \qquad \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{-1}{t}\ L^{-1}\left\{\frac{-3}{s^2+9}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \frac{\operatorname{sen}(3t)}{t}$$

Ejercicios 4.2: Evaluar las siguientes transformadas inversas.

1. $L^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{s}{s-4}\right) - \dfrac{\pi}{4}\right\}$
2. $L^{-1}\left\{\ln\left(1-\dfrac{16}{s^2}\right) - \arctan(3s) + \dfrac{\pi}{2}\right\}$
3. $L^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{s+3}{5}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right\}$
4. $L^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s-2}{s+2}\right)\right\}$
5. $L^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{2}{s^2}\right)\right\}$
6. $L^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\}$

5 TRANSFORMADA DE DERIVADAS

5.1 *La transformada de la enésima derivada de una función*

En este apartado se estudiará el procedimiento para obtener la transformada de la derivada enésima de $y(t)$, la cual, junto con $y'(t)$, $y''(t)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(t)$, son funciones continuas en $\left[0,\infty\right[$, de orden exponencial y ; además, $y^{(n)}(t)$ es continua parte por parte en $\left[0,\infty\right[$.

5.1.1 *La transformada de* $y'(t)$

De la definición de la Transformada de Laplace, se tiene:

$$L\left\{\, y'(t)\,\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, y'(t)\; dt \qquad (1)$$

De (1), usando integración por partes, en donde $u = e^{-st}$ y $dv = y'(t)\; dt$, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, y'(t)\; dt \;=\; e^{-st}\, y(t)\,\Big|_0^{\infty} \;+\; s\int_0^{\infty} e^{-st}\, y(t)\; dt \;=$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\, y(t)\right] - \; y(0) \;+\; s\, L\left\{\, y(t)\,\right\} \;=\; 0 \;-\; y(0) \;+\; s\, Y(s) \qquad (2)$$

De (1) y (2), se concluye que: $L\left\{\, y'(t)\,\right\} \;=\; s\, Y(s) \;-\; y(0)$ (*)

<u>NOTA</u>: $\int_0^{\infty} e^{-st}\, y(t)\; dt = L\left\{\, y(t)\,\right\} = Y(s)$ y $\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\, y(t)\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; s > 0$.

5.1.2 *La transformada de* $y''(t)$

En forma similar, tenemos: $L\left\{\, y''(t)\,\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, y''(t)\; dt$ (3)

De (3), usando integración por partes, en donde $u = e^{-st}$ y $dv = y''(t)\; dt$, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, y''(t)\, dt = e^{-st}\, y'(t)\,\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}\, y'(t)\, dt =$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\, y'(t)\right] - y'(0) + s\, L\{\, y'(t)\,\} = -\,y'(0) + s\left[sY(s) - y(0)\right] \qquad (4)$$

De (3) y (4), se concluye que: $L\{\, y''(t)\,\} = s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0)$ (**)

NOTA: $\int_0^{\infty} e^{-st}\, y'(t)\, dt = L\{\, y'(t)\,\}$, donde de (*), $L\{\, y'(t)\,\} = sY(s) - y(0)$.

Además, $\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\, y'(t)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s > 0$.

5.1.3 *La transformada de* $y'''(t)$

Análogamente, se deduce que:

$$L\{\, y'''(t)\,\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, y'''(t)\, dt = e^{-st}\, y''(t)\,\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}\, y''(t)\, dt =$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}\, y''(t)\right] - y''(0) + s\, L\{\, y''(t)\,\} = -\,y''(0) + s\left[s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0)\right]$$

Por lo tanto: $L\{\, y'''(t)\,\} = s^3\, Y(s) - s^2 y(0) - s\, y'(0) - y''(0)$

5.1.4 *La transformada de* $y^{(n)}(t)$

Con base en lo anterior, la generalización para $n = 1, 2, 3, \ldots$, nos conduce a:

$$L\{\, y^{(n)}(t)\,\} = s^n\, Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \ldots - s\, y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Donde $Y(s) = L\{\, y(t)\,\}$ y sabiendo, como ya se indicó al inicio, que $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, ..., $y^{(n-1)}(t)$, son funciones continuas en $[0,\infty[$ y de orden exponencial y $y^{(n)}(t)$ es continua parte por parte en $[0,\infty[$.

Ejemplo 5.1.1: Calcular $L\{\, y'(t)\,\}$, donde $y(t) = t\,\operatorname{sen}(k\,t)$.

Solución: $L\{\, y'(t)\,\} = L\left\{\, \frac{d}{dt}\big(t\,\operatorname{sen}(k\,t)\big)\,\right\} = s\; L\{\, t\,\operatorname{sen}(k\,t)\,\} - y(0) \qquad \Rightarrow$

$$L\{\, y'(t)\,\} \;=\; s\left(\frac{2\,k\,s}{(s^2+k^2)^2}\right) - 0 \;=\; \frac{2\,k\,s^2}{(s^2+k^2)^2}$$

Ejercicios 5.1: Para cada caso, calcular $L\{\, y'(t)\,\}$.

1. $y(t) = \cos(k\,t)$
2. $y(t) = \operatorname{sen}(k\,t)$
3. $y(t) = t\,\cos(k\,t)$
4. $y(t) = e^{-t}\operatorname{sen}t$

5.2 *Ecuaciones diferenciales y la transformada de derivadas*

La *transformada de derivadas* es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, no homogéneas, de la forma $\phi(D)\,y = F(t)$, en las cuales $F(t)$ puede involucrar a la *función escalón unitario* y(o) la *función Delta de Dirac*[1], la cual se estudiará junto con las aplicaciones al movimiento vibratorio de sistemas mecánicos.

Ejemplo 5.2.1: Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2\,y' - 3\,y = 9t\;U(t-1)$ sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución: Resolver esta ecuación consiste en hallar la función $y(t)$, la cual se obtiene de $L^{-1}\{\, Y(s)\,\}$, por lo que, en primera instancia, debemos encontrar $Y(s)$ usando transformadas de derivadas.

- De acuerdo con lo indicado, la transformada de Laplace nos conduce a:

$$L\{\, y'' - 2\,y' - 3\,y\,\} \;=\; 9\,L\{\, t\;U(t-1)\,\} \qquad \Rightarrow$$

$$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 2\,s\,Y(s) - 2\,y(0) - 3\,Y(s) \;=\; 9\;e^{-s}\,L\{\, t+1\,\}$$

Como $y(0) = y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^2 - 2\,s - 3)\;Y(s) \;=\; 9\;e^{-s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right] \quad \Rightarrow$

[1] La función Delta de Dirac la puede consultar en el folleto titulado ***Movimiento Vibratorio***, páginas 17 a 20.

$$(s-3)(s+1)\,Y(s) = 9\,e^{-s}\left[\frac{s+1}{s^2}\right] \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{9\,e^{-s}}{s^2(s-3)}$$

- Dado que $y(t) = L^{-1}\{\,Y(s)\,\}$ $\Rightarrow$ $y(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{9\,e^{-s}}{s^2(s-3)}\right\}$ $\Rightarrow$

$$y(t) = U(t-1)\,L^{-1}\left\{\frac{9}{s^2(s-3)}\right\}_{t-1} = U(t-1)\,L^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-3}\right\}_{t-1} \Rightarrow$$

$$y(t) = U(t-1)\left[A+Bt+Ce^{3t}\right]_{t-1} = U(t-1)\left[A+B(t-1)+Ce^{3(t-1)}\right]$$

- Finalmente, al resolver las fracciones parciales, obtenemos $A=-1$, $B=-3$ y $C=1$; por lo tanto, la solución de la ecuación propuesta está dada por:

$$y(t) = U(t-1)\left[-1-3(t-1)+e^{3(t-1)}\right]$$

Ejemplo 5.2.2: Resolver la ecuación $y'+y=f(t)$, con $y(0)=2$, para la cual se tiene que: $f(t)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0\le t<4 \\ -1 & \text{si} \quad t\ge 4 \end{cases}$

Solución: Como $f(t)=2-3\,U(t-4)$, entonces la ecuación diferencial que se debe resolver es $y'+y=2-3\,U(t-4)$, para $y(0)=2$.

- La aplicación de la transformada de Laplace nos lleva a:

$$L\{\,y'+y\,\} = L\{2\}-3\,L\{U(t-4)\} \quad \Rightarrow \quad sY(s)-2+Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{3\,e^{-4s}}{s}$$

$$\Rightarrow \quad (s+1)\,Y(s) = \frac{2(s+1)}{s}-\frac{3\,e^{-4s}}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{3\,e^{-4s}}{s(s+1)}$$

- Puesto que $y(t)=L^{-1}\{\,Y(s)\,\}$ entonces:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3\,e^{-4s}}{s(s+1)}\right\} = 2 - U(t-4)\,L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+1)}\right\}_{t-4} \Rightarrow$$

$$y(t) = 2 - U(t-4)\, L^{-1}\left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \right\}_{t-4} = 2 - U(t-4)\left[A + Be^{-t} \right]_{t-4} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = 2 - U(t-4)\left[A + Be^{-(t-4)} \right]$$

- Resolviendo las fracciones parciales se obtiene que $A=3$ y $B=-3$; en consecuencia, la solución buscada es:

$$y(t) = 2 - 3\,U(t-4)\left[1 - e^{-(t-4)} \right]$$

Ejercicios 5.2.1: Usando la Transformada de Laplace, resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, donde y es una función que depende de la variable t.

1. $y'' - 5y' + 6y = 6\,U(t-2)$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$
2. $y'' + 4y = 4t + 4\cos(2t-6\pi)\,U(t-3\pi)$; $y(0)=-5$, $y'(0)=1$
3. $y'' + 4y' + 4y = 6\,U(t-\pi)\,e^{-2(t-\pi)}$; $y(0)=0$, $y'(0)=-3$
4. $y'' - 2y' = 16\,e^{2t}\cosh(2t)$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$
5. $y'' - y = f(t)$, con $y(0)=0$ y $y'(0)=4$, en donde $f(t) = \begin{cases} 0 \ ; \ 0 \le t < a \\ b \ ; \ t \ge a \end{cases}$
6. $y'' + y = h(t)$, con $y(0)=5$ y $y'(0)=0$, en donde $h(t) = \begin{cases} 5 \ ; \ 0 \le t < 3 \\ t+2 \ ; \ t \ge 3 \end{cases}$
7. $t\,y'' - t\,y' + y = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$
8. $t\,y'' - t\,y' = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-3$
9. $t\,y'(t) + y(t) = t^2$

Ejercicio 5.2.2: Sabiendo que $L\{\, y(t)\,\} = Y(s)$, compruebe que:

$$L\{\, t\,y''(t) + y'(t)\,\} = -s\,Y(s) - s^2\,Y'(s)$$

Ejercicio 5.2.3: Usando el resultado $L\{ y'(t)\} = s\; L\{ y(t)\} - y(0)$ y sabiendo que:

$$L\left\{ \sqrt{t} \right\} = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad ; \quad \text{compruebe que } L\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \,.$$

6 TRANSFORMADA DE INTEGRALES

6.1 Convolución de funciones

Definición 6.1: Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas parte por parte en el intervalo $[0,\infty[$. La *convolución* de estas dos funciones, denotada por $f * g$, se define en términos de una integral como sigue:

$$f * g = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

Propiedades: La convolución de funciones cumple con las propiedades que se indican a continuación, las cuales aceptaremos sin demostración.

- Conmutativa: $f * g = g * f$
- Asociativa: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributiva: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Caso particular: Si $g(t)=1$, entonces $g(t-u)=1$; por lo tanto, tenemos:

$$f * 1 = \int_0^t f(u)\, du$$

Ejemplo 6.1.1: Si $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = 1$, entonces $f * g$ corresponde a:

$$f * g = \operatorname{sen} t * 1 = \int_0^t \operatorname{sen} u\, du = -\cos u \,\Big|_0^t = -\cos t + 1$$

Ejemplo 6.1.2: Si $f(t)=t$ y $g(t)=\cos t$, entonces $f * g$ se obtiene como sigue:

$$t * \cos t = \int_0^t u \cos(t-u)\, du = -u \operatorname{sen}(t-u) \,\Big|_0^t + \int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\, du$$

$$t * \cos t = -u \operatorname{sen}(t-u) \,\Big|_0^t + \cos(t-u) \,\Big|_0^t = 1 - \cos t$$

Nota: Se usó integración por partes

Ejercicios 6.1: Usando la definición de convolución de funciones, verifique que:

1. $2t * 1 = 1 * 2t = t^2$
2. $\cos t * 1 = 1 * \cos t = \operatorname{sen} t$
3. $\operatorname{sen} t * t = t * \operatorname{sen} t = t - \operatorname{sen} t$
4. $e^t * \cos t = \frac{1}{2}\left[e^t - \cos t + \operatorname{sen} t \right]$ (Puede usar tabla de integrales)
5. $\operatorname{sen} t * e^t = \frac{1}{2}\left[e^t - \operatorname{sen} t - \cos t \right]$ (Puede usar tabla de integrales)

6.2 *Transformada de integrales*

El siguiente resultado nos permitirá hallar la *Transformada de Laplace* de la *convolución* de dos funciones sin tener que recurrir a su definición (tal y como están propuestos los ejercicios anteriores); es decir, **NO se requiere calcular o evaluar la integral respectiva**.

***Teorema de Convolución* (*transformada de integrales*)**

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas parte por parte en el intervalo $[0,\infty[$ y de orden exponencial. Entonces, la transformada de $f * g$ está dada por:

$$L\{ f * g \} = L\{ f(t) \} \cdot L\{ g(t) \} = F(s) \cdot G(s)$$

O sea que:

$$L\left\{ \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du \right\} = F(s) \cdot G(s)$$

Caso particular: Si $g(t-u) = 1$, entonces $g(t) = 1$; por lo tanto, se tiene:

$$L\{ f * 1 \} = L\{ f(t) \} \cdot L\{ 1 \} = F(s) \cdot \frac{1}{s}$$

De donde:

$$L\left\{ \int_0^t f(u)\, du \right\} = \frac{F(s)}{s}$$

NOTA: Se puede observar con facilidad que el *Teorema de Convolución* nos conduce directamente a calcular *la transformada de una integral* de funciones, sin tener, como ya se indicó, que evaluar dicha integral.

Ejemplo 6.2.1: Del Teorema de Convolución, se sigue que:

$$L\left\{\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)\, du\right\} = L\left\{ e^t * \operatorname{sen} t \right\} = L\left\{ e^t \right\} \cdot L\left\{\operatorname{sen} t\right\} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Ejemplo 6.2.2: Del caso particular del Teorema de Convolución, tenemos que:

$$L\left\{\int_0^t u\cos(2u)\, du\right\} = \frac{1}{s}\cdot L\left\{ t\cos(2t)\right\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{s(s^2+4)^2}$$

Ejemplo 6.2.3: De acuerdo con el Primer Teorema de Traslación (Sección 2, página 13) y el caso particular del Teorema de Convolución, se sigue que:

$$L\left\{ e^{2t}\int_0^t u^2 e^{-u}\, du\right\} = L\left\{\int_0^t u^2 e^{-u}\, du\right\}_{s-2} = \left[\frac{1}{s}\cdot L\left\{ t^2 e^{-t}\right\}\right]_{s-2}$$

$$= \left[\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+1)^3}\right]_{s-2} = \frac{2}{(s-2)\,(s-1)^3}$$

Ejemplo 6.2.4: Con base en la derivada de una transformada (Sección 4, página 23) y el caso particular del Teorema de Convolución, se tiene:

$$L\left\{ t\int_0^t \cosh(4u)\, du\right\} = \frac{-d}{ds}\, L\left\{\int_0^t \cosh(4u)\, du\right\} = \frac{-d}{ds}\left[\frac{1}{s}\cdot L\left\{\cosh(4t)\right\}\right]$$

$$= \frac{-d}{ds}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2-16}\right] = \frac{-d}{ds}\left[\frac{1}{s^2-16}\right] = -\left[\frac{-2s}{(s^2-16)^2}\right] = \frac{2s}{(s^2-16)^2}$$

Ejercicios 6.2.1: Calcular, sin evaluar la integral, las transformadas siguientes.

1. $L\left\{\int_0^t u\operatorname{sen}(5t-5u)\, du\right\}$
2. $L\left\{\int_0^t \cos u\; e^{(t-u)}\, du\right\}$
3. $L\left\{\int_0^t e^{-u}\cosh(3u)\, du\right\}$
4. $L\left\{\int_0^t u\, e^{3u}\operatorname{senh} u\, du\right\}$
5. $L\left\{ t\int_0^t \operatorname{sen}(2u)\, du\right\}$
6. $L\left\{ e^{3t}\int_0^t u\cosh u\, du\right\}$
7. $L\left\{\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du\right\}$, sabiendo que $L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

Ejercicios 6.2.2: Sabiendo que $L\{\, y(t) \,\} = Y(s)$, compruebe que:

1. $L\left\{ t^2\, y''(t) \right\} + 4s\, L\left\{ \int_0^t u\, y'(u)\, du \right\} = s^2\, Y''(s) - 2\, Y(s)$

2. $L\left\{ e^t \left[t\, y''(t) - y(t) \right] \right\} + s\, L\left\{ \int_0^t e^u\, y'(u)\, du \right\} = -(s-1)^2\, Y'(s-1) - s\,Y(s-1)$

6.3 *Forma inversa del Teorema de Convolución*

Dado que $L^{-1}\{\, F(s) \,\} = f(t)$ y $L^{-1}\{\, G(s) \,\} = g(t)$, entonces:

$$L^{-1}\{\, F(s) \cdot G(s) \,\} = L^{-1}\{\, F(s) \,\} * L^{-1}\{\, G(s) \,\} = f(t) * g(t)$$

Por lo tanto: $$L^{-1}\{\, F(s) \cdot G(s) \,\} = \int_0^t f(u)\; g(t-u)\; du$$

Para el ***caso particular***, tenemos:

$$L^{-1}\left\{ F(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1}\{\, F(s) \,\} * L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} = f(t) * 1$$

De donde: $$L^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \int_0^t f(u)\; du$$

NOTA: Obsérvese que en el proceso inverso del *Teorema de Convolución*, **se debe evaluar una integral** de funciones.

Ejemplo 6.3.1: De acuerdo con el inverso del Teorema de Convolución, entonces:

$$L^{-1}\left\{ \frac{8}{(s^2+4)^2} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{4}{s^2+4} \cdot \frac{2}{s^2+4} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{4}{s^2+4} \right\} * L^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2+4} \right\} =$$

$$2\,\mathrm{sen}(2t) * \mathrm{sen}(2t) = \int_0^t 2\,\mathrm{sen}(2u)\,\mathrm{sen}(2t-2u)\; du =$$

$$\int_0^t \left[\cos(4u-2t) - \cos(2t) \right] du = \left[\frac{\mathrm{sen}(4u-2t)}{4} - u\cos(2t) \right]_0^t =$$

$$\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} - t\cos(2t) - \frac{\operatorname{sen}(-2t)}{4} = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} - t\cos(2t) + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}$$

Por lo tanto, $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - t\cos(2t) = \dfrac{\operatorname{sen}(2t) - 2t\cos(2t)}{2}$

Ejemplo 6.3.2: Con base en el inverso del Teorema de Convolución, se tiene:

$$L^{-1}\left\{\frac{5}{(s-4)(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{(s-4)}\right\} * L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = 5e^{4t} * e^{-t} =$$

$$\int_0^t 5e^{4u}\, e^{-(t-u)}\, du = e^{-t}\int_0^t 5e^{5u}\, du = e^{-t}\left[e^{5u}\right]_0^t = e^{-t}\left[e^{5t} - 1\right]$$

Por lo tanto, $f(t) = e^{4t} - e^{-t}$

Ejercicios 6.3.1: Evaluar, usando convolución, las transformadas inversas:

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\,(s^2+1)}\right\}$

2. $L^{-1}\left\{\dfrac{27}{s^2\,(s^2+9)}\right\}$

3. $L^{-1}\left\{\dfrac{20s}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$

4. $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$

Ejercicio 6.3.2: Usando el Teorema de Convolución, si $a > 0$, verifique que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\,(s^2+a^2)}\right\} = \frac{at - \operatorname{sen}(at)}{a^3}$$

Ejercicio 6.3.3: Sabiendo que $L\{\, f(t)\,\} = F(s)$ y usando la fórmula:

$$f(t) = L^{-1}\{\, F(s)\,\} = t \cdot L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)\, du\right\}$$, **verifique** que:

a. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\operatorname{senh}(t)$

b. $L^{-1}\left\{\dfrac{6s}{(s^2-9)^2}\right\} = t\operatorname{senh}(3t)$

6.4 *Solución de ecuaciones y el Teorema de Convolución*

El Teorema de convolución nos permite resolver ecuaciones integrales e integro diferenciales como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.4.1: Resolver la ecuación integral: $f(t) = t - \int_0^t (t-u)\, f(u)\, du$.

Solución: Para resolver dicha ecuación, se debe hallar una función $f(t)$ tal que $f(t) = L^{-1}\{ F(s) \}$, por lo que se requiere, en primer lugar, calcular $F(s)$.

- Utilizando la transformada de Laplace, se tiene:

$$L\{ f(t) \} = L\{ t \} - L\left\{ \int_0^t (t-u)\, f(u)\, du \right\} \qquad \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - L\{ t \} \cdot L\{ f(t) \} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} F(s) \quad \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

- Como se sabe que $f(t) = L^{-1}\{ F(s) \}$, entonces:

$$f(t) = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \operatorname{sen} t \qquad \text{(función solución buscada)}$$

Ejemplo 6.4.2: Usando la transformada de Laplace, resolver la ecuación integro diferencial: $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(u)\, du = 1$; con $y(0) = 1$.

Solución: En este caso, se requiere utilizar tanto el Teorema de Convolución como la transformada de una derivada para hallar una función $y(t)$ tal que $y(t) = L^{-1}\{ Y(s) \}$; por lo tanto, aplicado Laplace, obtenemos:

- $L\{ y'(t) + 6y(t) \} + 9\, L\left\{ \int_0^t y(u)\, du \right\} = L\{1\} \qquad \Rightarrow$

$$sY(s) - y(0) + 6\, Y(s) + \frac{9}{s} Y(s) = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow$$

$$\left(s + 6 + \frac{9}{s}\right) Y(s) = \frac{1}{s} + 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s^2 + 6s + 9}{s}\right) Y(s) = \frac{s+1}{s} \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2} = \frac{(s+3) - 2}{(s+3)^2}$$

- Ahora bien, dado que $y(t) = L^{-1}\{ Y(s) \}$, entonces:

$$y(t) = L^{-1}\left\{ \frac{(s+3) - 2}{(s+3)^2} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2} \right\} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = e^{-3t} - 2\, t\, e^{-3t} = e^{-3t} \left[1 - 2t \right] \qquad \text{(función solución buscada)}$$

Ejercicios 6.4.1: Usando la transformada de Laplace, resolver las siguientes ecuaciones integrales e integro diferenciales.

1. $f(t) = 8\, t\, e^t + \int_0^t u\, f(t-u)\, du$
2. $y(t) + e^{-t} = 3\, t^2 + \int_0^t y(u)\, e^{-(t-u)}\, du$
3. $f(t) - 4e^{-t} = 6\, t - \int_0^t f(u) \operatorname{senh}(t-u)\, du$
4. $y(t) - t = 2 \int_0^t y(t-u) \cos(u)\, du$
5. $6t - f(t) = 7\, U(t-4) - 9 \int_0^t (t-u)\, f(u)\, du$
6. $y'(t) + 2\, y(t) + 2 \int_0^t y(u)\, du = 2\, t + 2 \quad ; \quad y(0) = 0$
7. $y'(t) - 18\, t = 2 \operatorname{sen}(3t) - 9 \int_0^t y(u)\, du \quad ; \quad y(0) = 2$
8. $y''(t) + \int_0^t y'(u)\, e^{2(t-u)}\, du = e^{2t} \quad ; \quad y(0) = 0 \ \wedge \ y'(0) = 1.$

Ejercicios 6.4.2: Sabiendo que $L\{ y(t) \} = Y(s)$, resuelva la ecuación para $y(t)$.

1. $t\, y(t) = -t^3 - \int_0^t y(u)\, du$, con $Y(1) = -3/2$
2. $t\, y(t) = t^2 e^t + \int_0^t y(u)\, e^{t-u}\, du$, con $Y(2) = -1$
3. $L\{ t\, y''(t) \} + s\, L\left\{ \int_0^t y'(u)\, du \right\} = -\frac{4}{s}$, con $Y(2) = 2$

7 TRANSFORMADA DE FUNCIONES PERIÓDICAS

7.1 *Función periódica*

Definición 7.1: Se dice que una función $f(t)$ es periódica, de período *T*, $T > 0$, si se cumple que: $f(t+T) = f(t)$.

Por ejemplo, las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ son periódicas, de período $T = 2\pi$, ya que $\operatorname{sen}(t+2\pi) = \operatorname{sen} t$ y $\cos(t+2\pi) = \cos t$.

7.2 *Transformada de una función periódica*

Con base en la definición anterior, la transformada de una función periódica se puede obtener integrando sobre su respectivo período.

Teorema 7.2: Sea $f(t)$ una función continua parte por parte en $[0,\infty[$ y de orden exponencial. Si $f(t)$ es periódica, de período *T* ($T > 0$), entonces:

$$L\{\, f(t)\,\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Demostración

- De la definición de la Transformada de Laplace, se tiene:

$$L\{\, f(t)\,\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

- Para la integral de la derecha en (1), sea $t = v + T \Rightarrow v = t - T$ y $dt = dv$. Además, si $t \to T \Rightarrow v \to 0$ y si $t \to \infty \Rightarrow v \to \infty$. Por lo tanto:

$$L\{\, f(t)\,\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-s(v+T)} f(v+T)\, dv \qquad (2)$$

- Como *f* es de período *T*, entonces $f(v+T) = f(v)$. Así, de (2) se sigue que:

$$L\{\, f(t)\,\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} \int_0^\infty e^{-sv} f(v)\, dv \qquad (3)$$

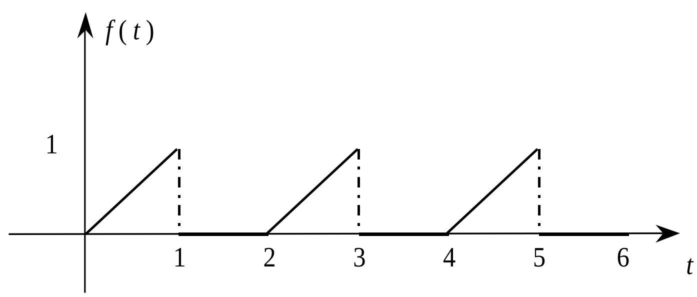
❖ Puesto que $\int_0^{\infty} e^{-sv} f(v)\, dv = L\{ f(t) \}$, de (3) se obtiene que:

$$L\{ f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} L\{ f(t)\} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - e^{-sT}\right) L\{ f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \qquad \Leftrightarrow$$

$$L\{ f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \qquad \textit{Q.E.D.}$$

Ejemplo 7.2.1: Hallar la transformada de Laplace de la función periódica $f(t)$ cuya representación gráfica se muestra a continuación:



Solución

➢ La función $f(t)$, en el intervalo $[0,2]$, está dada por:

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & , \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

➢ Además, se puede observar que el período de la función $f(t)$ es $T = 2$, ya que $f(t+2) = f(t)$, $\forall\, t \ge 2$. Por lo tanto, la transformada de Laplace buscada se obtiene como sigue:

$$L\{ f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

➢ Como $f(t)=t$ para $0\le t<1$ y $f(t)=0$ para $1\le t<2$, entonces, de (1), evaluando la integral respectiva, mediante la técnica de integración por partes (en donde $u=t$ y $dv=e^{-st}dt$), tenemos:

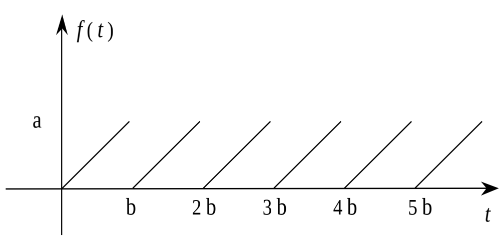
$$\int_0^2 e^{-st}\, f(t)\, dt = \int_0^1 t\, e^{-st}\, dt = \frac{-t e^{-st}}{s}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\, dt =$$

$$\frac{-t e^{-st}}{s}\Bigg|_0^1 - \frac{e^{-st}}{s^2}\Bigg|_0^1 = \frac{-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}-1}{s^2} = \frac{-se^{-s}-e^{-s}+1}{s^2} \qquad (2)$$

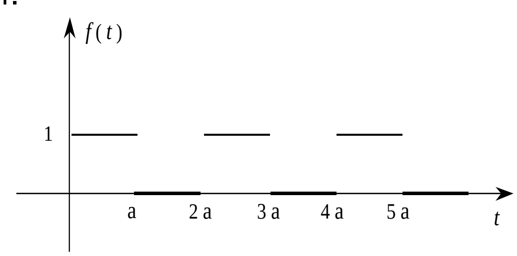
➢ Por lo tanto, de (1) y (2) se concluye que: $L\{\, f(t)\,\} = \dfrac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

Ejercicios 7.2: Hallar la transformada de las siguientes funciones periódicas.

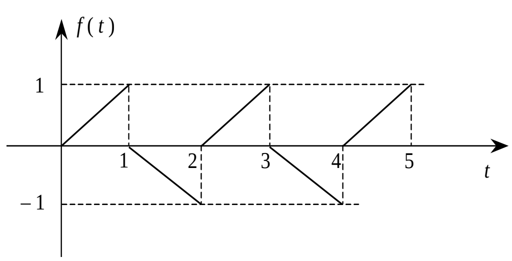
1.



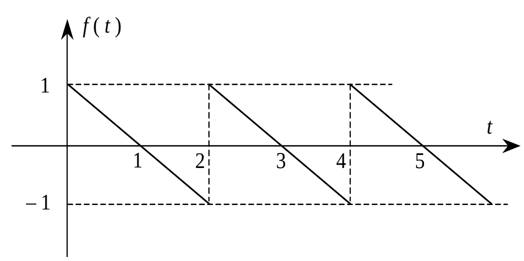
4.



2.



5.



3. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & , \quad 0\le t<\pi \\ 0 & , \quad \pi\le t<2\pi \end{cases}$

6. $f(t)=\begin{cases} e^{t} & , \quad 0\le t<1 \\ -1 & , \quad 1\le t<2 \end{cases}$

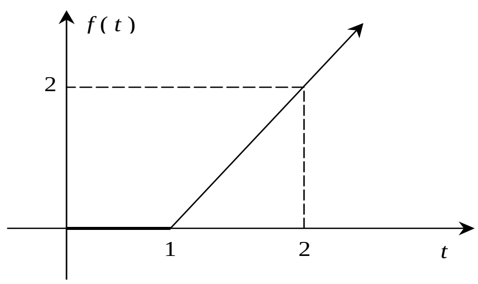
TRANSFORMADA DE LAPLACE
PRÁCTICA GENERAL

I. Utilice la definición de transformada para evaluar $L\{f(t)\}$.

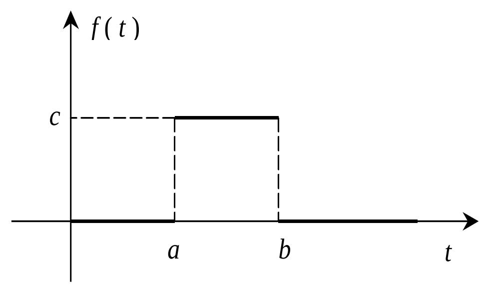
1. $f(t)=\begin{cases} 2t+1 & \text{si } 0\le t<1 \\ 4 & \text{si } t\ge 1 \end{cases}$

2. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0\le t<\pi \\ \cos t & \text{si } t\ge \pi \end{cases}$

3.



4.



II. Utilice las tablas para evaluar $L\{f(t)\}$.

5. $f(t)=(1+e^{-2t})^2$
6. $f(t)=(e^{t}-e^{-t})^2$
7. $f(t)=3t^2-4\cosh(2t)$
8. $f(t)=\operatorname{sen}^2 t-2t+1$
9. $f(t)=\operatorname{sen} t\cdot\cos(2t)$
10. $f(t)=\operatorname{sen}(3t)\cdot\operatorname{sen}(2t)$
11. $f(t)=\cos t\cdot\cos(3t)$
12. $f(t)=\cos(2t)\cdot\operatorname{sen}(3t)$
13. $f(t)=2\operatorname{senh}(3t)-\operatorname{sen} t$
14. $f(t)=\cos^2(2t)$
15. $f(t)=\operatorname{sen}^3 t$

    Sug: $\operatorname{sen}^3 t=\operatorname{sen} t\cdot\operatorname{sen}^2 t$
16. $f(t)=\cos^3 t$

III. Para cada caso, determine la $L^{-1}\{F(s)\}$ (transformada inversa).

17. $F(s)=\left(\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s^3}\right)^2$
18. $F(s)=\dfrac{(s+1)^3}{s^4}$
19. $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2-4s}$
20. $F(s)=\dfrac{4s}{4s^2+1}$

21. $F(s)=\dfrac{10\ s}{4s^2-25}$

22. $F(s)=\dfrac{1}{2s+1}+\dfrac{1}{3s-2}$

23. $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s-20}$

24. $F(s)=\dfrac{s+1}{(s+5)\,(s^2-4s)}$

25. $F(s)=\dfrac{s-1}{s^2(s^2+1)}$

26. $F(s)=\dfrac{2s+4}{(s-2)\,(s^2+4s+3)}$

IV. Escriba cada función en términos de funciones escalón unitario (Heaviside) y calcule la respectiva transformada de Laplace.

27. $f(t)=\begin{cases} 2 & , \quad 0\le t<3 \\ -2 & , \quad t\ge 3 \end{cases}$

28. $f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad 0\le t<3\pi/2 \\ \cos t & , \quad t\ge 3\pi/2 \end{cases}$

29. $f(t)=\begin{cases} t^2 & , \quad 0\le t<1 \\ 1 & , \quad t\ge 1 \end{cases}$

30. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & , \quad 0\le t<\pi \\ 0 & , \quad \pi\le t<2\pi \\ 1 & , \quad t\ge 2\pi \end{cases}$

V. Encuentre $F(s)$ o $f(t)$ según se indique.

31. $L\left\{e^{5t}\operatorname{senh}(3t)\right\}$

32. $L\left\{e^{-t}\cosh(2t)\right\}$

33. $L\left\{e^{t}\cos^2 t\right\}$

34. $L\left\{t^2\operatorname{senh} t\right\}$

35. $L\left\{e^{2t}\ U(t-2)\right\}$

36. $L\left\{t\ e^{2t}\operatorname{senh}(6t)\right\}$

37. $L\left\{e^{t}\ t^2\ \operatorname{senh} t\right\}$

38. $L\left\{e^{-2t}\ t\ \cosh t\right\}$

39. $L\left\{e^{-3t}\ t\ \cos(2t)\right\}$

40. $L\left\{(t-1)^3\ e^{t-1}\ U(t-1)\right\}$

41. $L\left\{\cos(2t)\ U(t-\pi)\right\}$

42. $L\left\{(3t+1)\ U(t-3)\right\}$

43. $L\left\{\operatorname{sen} t\ U(t-\pi/2)\right\}$

44. $L\left\{t\ \operatorname{sen}(t-2\pi)\ U(t-2\pi)\right\}$

45. $L^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$

46. $L^{-1}\left\{\dfrac{3\ s}{(s+2)^3}\right\}$

47. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+2}\right\}$

48. $L^{-1}\left\{\dfrac{3\ s-1}{s^2+6s+34}\right\}$

49. $L^{-1}\left\{ \dfrac{2\,s-1}{(s+1)^5} \right\}$

50. $L^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-2s}}{s^2\,(s-1)} \right\}$

51. $L^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-\pi s} - s\,e^{-\pi s/2}}{s^2+4} \right\}$

52. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s\,e^{-\pi s} + e^{-\pi s}}{s^2+2s+5} \right\}$

VI. Sabiendo que $f(t) = L^{-1}\{\,F(s)\,\} = \dfrac{-1}{t}\,L^{-1}\{\,F'(s)\,\}$, evaluar:

53. $L^{-1}\left\{ \ln\left(\dfrac{s-3}{s+1} \right) \right\}$

54. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s} - \operatorname{arccot}\left(\dfrac{4}{s} \right) + \dfrac{\pi}{2} \right\}$

55. $L^{-1}\left\{ \ln\left(1 + \dfrac{1}{s^2} \right) \right\}$

56. $L^{-1}\left\{ \ln\left(\dfrac{s^2+1}{(s+2)\,(s-3)} \right) \right\}$

57. $L^{-1}\left\{ \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{s}{2} \right) \right\}$

58. $L^{-1}\left\{ \arctan\left(\dfrac{5}{s+2} \right) \right\}$

VII. Obtenga, sin evaluar la integral, la transformada que se indica.

59. $L\left\{ \int_0^t \operatorname{sen} u\,\cos(t-u)\,du \right\}$

60. $L\left\{ \int_0^t u\,e^{2u}\,\operatorname{senh}(3t-3u)\,du \right\}$

61. $L\left\{ \int_0^t e^{-u}\cos(2u)\,du \right\}$

62. $L\left\{ t\int_0^t u\,e^{-u}\,du \right\}$

63. $L\left\{ \int_0^t u\,\operatorname{sen}(3u)\,du \right\}$

64. $L\left\{ \int_0^t u\,\cos u\,e^{-2(t-u)}\,du \right\}$

65. $L\left\{ \int_0^t u\,\cosh u\,du \right\}$

66. $L\left\{ t\int_0^t \operatorname{sen} u\,du \right\}$

67. $L\left\{ \int_0^t e^{-u}\cosh(2u)\,du \right\}$

68. $L\left\{ e^{-t}\int_0^t \cos(2u)\,du \right\}$

VIII. Dado que $L^{-1}\left\{ F(s)\, G(s) \right\} = f(t) * g(t)$, usando convolución, calcular:

69. $L^{-1}\left\{ \dfrac{s}{(s^2+9)^2} \right\}$

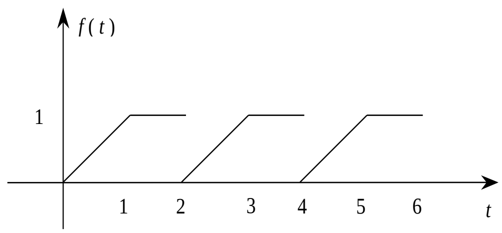
70. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s+3)\,(s^2+1)} \right\}$

71. $L^{-1}\left\{ \dfrac{1}{(s^2+4s+5)^2} \right\}$

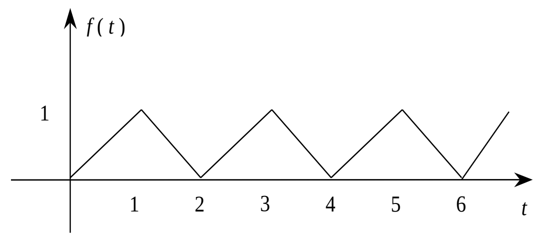
72. $L^{-1}\left\{ \dfrac{2}{s^2(s^2+4)} \right\}$

IX. Hallar la transformada de las siguientes funciones periódicas.

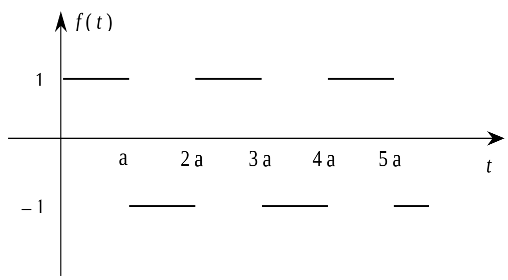
73.



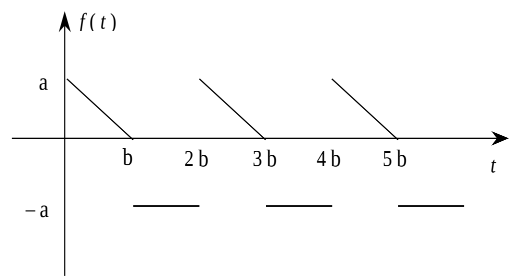
74.



75.



76.



X. Utilice la Transformada de Laplace para resolver los problemas de valor inicial que se plantean.

77. $y'' - y' = e^{t}\cos t \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$

78. $y'' - 2y' = e^{t}\,\text{senh}\, t \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$

79. $y'' + 4y = U(t-2\pi)\ \text{sen}\, t \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0$

80. $y'' + 2y' = \delta(t-1) \quad ; \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1$

81. $y'' + y = \delta(t-2\pi) \quad ; \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1$

82. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t-2\pi) \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$

83. $y'' - 2y' = 1 + \delta\,(t-2) \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$

84. $y'' + y = 2\,\delta(t-\pi/2) \quad ; \quad y(0) = -1 \ , \quad y'(0) = 1$

85. $y'' + 4y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ y $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$

86. $y'' + y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < \pi \\ 1 & \text{si } \pi \le t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t \ge 2\pi \end{cases}$

87. $y'' + y = f(t)$; $y(0) = y'(0) = 0$ y $f(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \le t < 2 \\ t+2 & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$

88. $y'' + 4y = 4h(t) - 5\delta(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

donde $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < \pi \\ \cos(t-\pi) & \text{si } t \ge \pi \end{cases}$

89. $y(t) = 3e^{-t} - 2\int_0^t (t-u)\, y(u)\, du$

90. $f(t) = 2t - 3\int_0^t \operatorname{sen}(u)\, f(t-u)\, du$

91. $f(t) + 2\int_0^t f(u)\cos(t-u)\, du = 4e^{-t} + \operatorname{sen}(t)$

92. $y(t) = e^{3t} + 2\int_0^t e^{t-u}\, y(u)\, du$

93. $y(t) = t^2 + \int_0^t y(u)\operatorname{sen}(t-u)\, du$

94. $f(t) + \int_0^t e^{t-u} f(u)\, du = t + e^{-2t}$

95. $f(t) + \int_0^t e^{u} f(t-u)\, du = \operatorname{sen}(t)$

96. $5\operatorname{sen}(2t) = 2y(t) + 2\int_0^t y(u)\, du$

97. $y'(t) = 1 - \operatorname{sen}(t) - \int_0^t y(u)\, du$, $y(0) = 0$

98. $y'(t) - \operatorname{sen}(2t) = 3 - 4\int_0^t y(u)\, du$, $y(0) = -3$

99. $t\, f(t) = t^3 + \int_0^t f(u)\, du$, sabiendo que $F(1) = 5$

100. $t\, f(t) = t^2 + \int_0^t e^{u} f(t-u)\, du$, sabiendo que $F(2) = -5/4$

XI. Ejercicios varios.

101. Sea $g(t) = e^{-4t}\cosh(3t) + h(t)$, donde $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ t^2 & \text{si } 3 \le t < 7 \\ t^2 - 5 & \text{si } t \ge 7 \end{cases}$

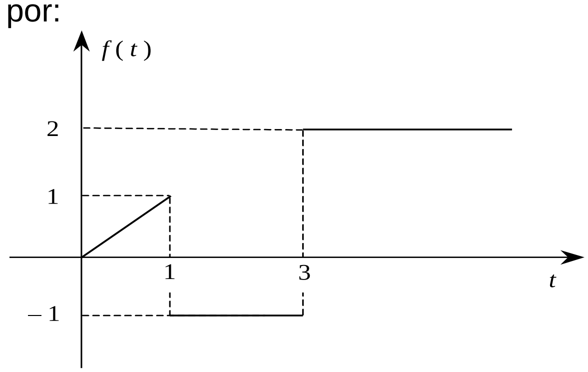
   Calcule $L\{\, g(t)\,\}$

102. Sea $h(t) = t\,\text{senh}(4t) + g(t)$, donde $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 5 \\ t e^{5-t} & \text{si } 5 \le t < 8 \\ -3 + t e^{5-t} & \text{si } t \ge 8 \end{cases}$

   Calcule $L\{\, h(t)\,\}$

103. Calcule $L\{\, f(t)\,\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \le t < 2 \\ e^{t-2}\,\text{senh}(2t-4) & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$

104. Calcule $L\{\, f(t)\,\}$ sabiendo que la representación gráfica de la función $f(t)$ está dada por:



105. Conociendo que $L\left\{ f\left(\frac{t}{a}\right) \right\} = a\,F(a\,s)$, donde a es una constante real tal que $a > 0$, determine: $L\left\{ e^t \int_0^t u\, f\left(\frac{u}{a}\right) du \right\}$

106. Si $L\left\{ \frac{\text{sen}t}{t} \right\} = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$, determine: $L\left\{ e^{2t} \int_0^t \frac{u - \text{sen}u}{u}\, du \right\}$

107. Sean a y b constantes reales tales que $a \ne -b$. <u>**Compruebe**</u> que:

$$e^{-at} * e^{bt} = \frac{e^{bt} - e^{-at}}{a + b}$$

108. Calcule las siguientes transformadas:

(a) $L\left\{\, e^{2t}\,\text{senh}(3t-6\pi)\,U(t-2\pi)\right\}$

(b) $L\left\{\, t\, e^{3t}\int_0^t u\,\text{sen}u\; du\,\right\}$

(c) $L\left\{\, t\int_0^t u\, e^{u}\, f(t-u)\, du\,\right\}$

109. Calcule las siguientes transformadas inversas:

(a) $L^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{5}{s^2-1}+1\right)\right\}$

(b) $L^{-1}\left\{e^{-s}\ \ln\left(\dfrac{3s+1}{3s-2}\right)\right\}$

(c) $L^{-1}\left\{e^{-2s}\ \arctan\left(\dfrac{1}{s-5}\right)\right\}$

(d) $L^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{4s}{4s+3}\right)+\text{arccot}(5s)\right\}$

(e) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2s-a}}\right\}$ con $a\in IR$ $(a\neq 0)$ y dado que $L\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

110. Si $b\in IR$ $(b\neq 0)$; **verifique**, usando el **Teorema de Convolución**, que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\,(s-b)}\right\}=\frac{e^{bt}-bt-1}{b^2}$$

111. Usando **completación de cuadrados**, calcule la siguiente transformada inversa:

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}\ (s-5)}{s^2+2s-3}\right\}$$

112. Usando el **Teorema de Convolución**, calcule las siguientes transformadas inversas:

(a) $L^{-1}\left\{ \dfrac{4\,(s+1)}{(s^2+2s+5)^2} \right\}$

(b) $L^{-1}\left\{ \dfrac{2}{(s^2-6s+13)(s-3)^2} \right\}$

(c) $L^{-1}\left\{ \dfrac{F(s)}{s^2} \right\}$ sabiendo que $L\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} \right\} = F(s)$

113. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $y(t) + e^{-t} = 5t^2 - \int_0^t y(u)\, e^{t-u}\, du$

(b) $\int_0^t y(u)\, du = t^3 e^{-2t} + \int_0^t y(t-u)\, e^{-2u}\, du$

(c) $y'' - 2y' + y = f(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$ y $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 3 \\ -1 & \text{si } t \ge 3 \end{cases}$

(d) $y'(t) = t - \int_0^t \left[\, y(u) + 2\cos u \,\right] du$, $y(0)=5$

(e) $y'(t) - 3y(t) + \int_0^t u\; y'(t-u)\, du = 4t + \int_0^t y(u)\, du$, $y(0)=2$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios 1.2.1 (*c*) , página 5 (Transformada de Laplace – Definición)

1. $F(s) = \dfrac{4\left(1-e^{-2s}\right)}{s}$
2. $F(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s^2}$
3. $F(s) = \dfrac{e^{-3s}\left(3s+1\right)}{s^2}$
4. $F(s) = \dfrac{e^{-s}+s-1}{s^2}$

Ejercicios 1.2.2 , página 6 (Transformada de Laplace – Tablas)

1. $F(s) = \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{10}{(s+3)^3} + \dfrac{4s}{s^2-9}$
2. $F(s) = \dfrac{4}{s} + \dfrac{s^2-16}{(s^2+16)^2} - \dfrac{3}{(s-5)^2+1}$
3. $F(s) = \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{6}{s^2-4} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{s}{s^2+36}$
4. $F(s) = \dfrac{12s}{(s^2+36)^2} - \dfrac{s}{s^2+25} - \dfrac{s}{s^2+1}$

Ejercicios 1.3.2 , página 9 (Transformada Inversa de Laplace)

1. $f(t) = t + t^2 + \dfrac{t^3}{6}$
2. $f(t) = 2e^{-2t/3} + 3\cos(2t)$
3. $f(t) = 3\cosh(5t) + 2\,\text{senh}(5t)$
4. $f(t) = e^{-t}\left[\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t)\right]$

Ejercicios 1.4 , página 12 (T. Inversa – Fracciones Parciales)

1. $f(t) = -2e^{-2t} + \dfrac{11e^{-3t}}{4} + \dfrac{e^t}{4}$
2. $f(t) = 1 - t - \cos t + \text{sen}\,t$
3. $f(t) = 26e^{3t} - (9t+22)\,e^{2t}$
4. $f(t) = \left[3 + \cos\left(\sqrt{2}\,t\right) + \sqrt{2}\,\text{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right)\right]e^t$
5. $f(t) = \dfrac{3}{2}\,e^{t/2} + (2t-1)\,e^{-t}$
6. $f(t) = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{7e^{4t}}{18} + \dfrac{e^{-5t}}{9}$
7. $f(t) = \dfrac{15e^t}{4} + \dfrac{te^t}{2} + \dfrac{e^{-t}}{4}$
8. $f(t) = 2e^t + (t+3)\,e^{-2t}$

9. $f(t) = 3e^{2t} - \cos\left(\sqrt{3}\,t\right) + \dfrac{5}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)$

10. $f(t) = (t+1)\,e^{2t} - \dfrac{2}{3}\,e^{-t/3}$

11. $f(t) = 2e^{t/2} - (2\cos t + \text{sen}\,t)\,e^{-2t}$

12. $f(t) = e^{-3t/5} + \left[\cos(2t) - \text{sen}(2t)\right] e^{t}$

Ejercicios 2.1 **, página 14 (Primer Teorema de Traslación)**

1. $F(s) = \dfrac{6!}{(s+3)^7}$

2. $F(s) = \dfrac{3}{(s-6)^2 + 9}$

3. $F(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$

4. $F(s) = \dfrac{s+5}{(s+5)^2 - 4}$

5. $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{(s-2)^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 4s + 5}}$

6. $F(s) = \dfrac{e^{-3/(s+1)}}{s+1}$

Ejercicios 2.2 **, página 15 (Inversa Primer Teorema de Traslación)**

1. $f(t) = 5e^{2t}\left(1+2t\right) - 2t\,e^{-t}\left(1-2t\right)$

2. $f(t) = e^{3t}\left[\cos(5t) + \text{sen}(5t) - \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^4}{6}\right]$

3. $f(t) = e^{-t}\left[2\sqrt{3}\,\text{senh}\left(\sqrt{3}\,t\right) - 4\cosh\left(\sqrt{3}\,t\right)\right]$

4. $f(t) = e^{-3t}\left[\cosh\left(\sqrt{2}\,t\right) - 3\sqrt{2}\,\text{senh}\left(\sqrt{2}\,t\right)\right]$

5. $f(t) = \dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$

Ejercicios 3.2 **, página 19 (Funciones en términos de la FEU)**

1. $f(t) = \text{sen}\,t - \text{sen}\,t\;U(t-3\pi)$
2. $f(t) = \text{sen}\,t + (t - \text{sen}\,t)\;U(t-\pi) - \cos t\;U(t-2\pi)$
3. $f(t) = \cos t + (\text{sen}\,t - \cos t)\;U(t-\pi)$
4. $f(t) = 6 - 6\,U(t-3) + 2\,U(t-5)$

Ejercicios 3.3 **, página 21 (Segundo Teorema de Traslación)**

1. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s}$

2. $F(s) = e^{-s}\left[\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{1}{s}\right]$

3. $F(s) = \dfrac{s\,e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$

4. $F(s) = \dfrac{(1+7s)e^{-5s}}{s^2}$ 5. $F(s) = \dfrac{(2-s)e^{-3s}}{s^2}$ 6. $F(s) = \dfrac{e^{-2(s+1)}}{s+1}$

7. $H(s) = \dfrac{1}{s^2} - e^{-3s}\left[\dfrac{1+2s}{s^2} - \dfrac{1}{s^2-1}\right]$

8. $G(s) = \dfrac{6s}{(s^2+9)^2} - \dfrac{s e^{-4s}}{s^2-4}$ 9. $F(s) = \dfrac{2-3e^{-2s}+e^{-3s}}{s}$

Ejercicios 3.4 **, página 22 (Inversa Segundo Teorema de Traslación)**

1. $f(t) = \frac{1}{2}(t-5)^2\ e^{-(t-5)}\ U(t-5) - 2\,t^2\,e^{-t}$

2. $f(t) = \left[2\cos(3t-3\pi/2) + \text{sen}(3t-3\pi/2)\right]U(t-\pi/2) \quad \Rightarrow$
   $f(t) = \left[-2\text{sen}(3t) + \cos(3t)\right]U(t-\pi/2)$

3. $f(t) = e^{-3(t-\pi)}\left[\cos(t-\pi) - 3\text{sen}(t-\pi)\right]U(t-\pi) - 4\,e^{-3t}\text{sen}t \quad \Rightarrow$
   $f(t) = e^{-3(t-\pi)}\left[-\cos t + 3\text{sen}t\right]U(t-\pi) - 4\,e^{-3t}\text{sen}t$

4. $f(t) = e^{3(t-2\pi)}\left[2\cos(5t-10\pi) + \text{sen}(5t-10\pi)\right]U(t-2\pi) \quad \Rightarrow$
   $f(t) = e^{3(t-2\pi)}\left[2\cos(5t) + \text{sen}(5t)\right]U(t-2\pi)$

5. $f(t) = \left[-3 + 3\,e^{t-4} + 3\,e^{-2(t-4)}\right]U(t-4)$

6. $f(t) = \left[(t-1)\cos(4t-4) - 3\,(t-1)\,\text{sen}(4t-4)\right]U(t-1)$

Ejercicios 4.1 **, página 24 (Derivadas de Transformadas)**

1. $F(s) = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

2. $F(s) = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$

3. $F(s) = \dfrac{30s^2-250}{(s^2+25)^3}$

4. $F(s) = \dfrac{(s+1)^2-1}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}$

5. $F(s) = \dfrac{(s+3)^2+4}{\left[(s+3)^2-4\right]^2}$

6. $F(s) = \dfrac{18\left[(s-2)^2+3\right]}{\left[(s-2)^2-9\right]^3}$

7. $F(s) = \dfrac{3s}{\sqrt{(s^2+1)^3}}$

Ejercicios 4.2 **, página 25 (Inversa Derivada de Transformadas)**

1. $f(t) = \dfrac{e^{2t}\,\text{sen}(2t)}{t}$

2. $f(t) = \dfrac{2 + \text{sen}(t/3) - 2\cosh(4t)}{t}$

3. $f(t) = \dfrac{-e^{-3t}\,\text{sen}(5t)}{t}$

4. $f(t) = \dfrac{e^{-2t} - e^{2t}}{t}$

5. $f(t) = \dfrac{\left(e^{t} - e^{-t}\right)\text{sen}t}{t}$

6. $f(t) = \dfrac{2\cos(2t) - 2\cos t}{t}$

Ejercicios 5.1 **, página 28 (Transformada de Derivadas)**

1. $F(s) = \dfrac{-k^2}{s^2 + k^2}$

2. $F(s) = \dfrac{k\,s}{s^2 + k^2}$

3. $F(s) = \dfrac{s(s^2 - k^2)}{(s^2 + k^2)^2}$

4. $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2 + 1}$

Ejercicios 5.2.1 **, página 30 (Solución de Ecuaciones Diferenciales)**

1. $Y(s) = \dfrac{6e^{-2s}}{s(s-2)(s-3)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = U(t-2)\left[1 - 3e^{2(t-2)} + 2e^{3(t-2)}\right]$

2. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{5s}{s^2 + 4} + \dfrac{4s\,e^{-3\pi s}}{(s^2 + 4)^2} \quad \Rightarrow$

   $y(t) = t - 5\cos(2t) + U(t-3\pi)\left[(t-3\pi)\,\text{sen}(2t-6\pi)\right]$

3. $Y(s) = \dfrac{6\,e^{-\pi s}}{(s+2)^3} - \dfrac{3}{(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3U(t-\pi)\left[(t-\pi)^2\,e^{-2(t-\pi)}\right] - 3t\,e^{-2t}$

4. $Y(s) = \dfrac{16}{s^2(s-4)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{4t} - 4t - 1$

5. $Y(s) = \dfrac{b\,e^{-as}}{s(s-1)(s+1)} + \dfrac{4}{s^2 - 1} \quad \Rightarrow$

   $y(t) = b\,U(t-a)\left[-1 + \dfrac{1}{2}\,e^{t-a} + \dfrac{1}{2}\,e^{-(t-a)}\right] + 4\,\text{senh}(t)$

6. $Y(s) = \dfrac{5}{s} + \dfrac{e^{-3s}}{s^2(s^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 5 + U(t-3)\left[(t-3) - \text{sen}(t-3)\right]$

7. $Y(s) = \dfrac{C}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2t$

8. $Y(s) = \dfrac{C}{s(s-1)} = \dfrac{C}{s-1} - \dfrac{C}{s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3 - 3e^{t}$

9. $Y(s) = \dfrac{2}{3s^3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{3}\, t^2$

Ejercicios 6.2.1 **, página 33 (Transformada de Integrales–T. Conv.)**

1. $F(s) = \dfrac{5}{s^2(s^2+25)}$
2. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s-1)}$
3. $F(s) = \dfrac{s+1}{s(s^2+2s-8)}$
4. $F(s) = \dfrac{2(s-3)}{s(s^2-6s+8)^2}$
5. $F(s) = \dfrac{2(3s^2+4)}{(s^3+4s)^2}$
6. $F(s) = \dfrac{s^2-6s+10}{(s-3)(s^2-6s+8)^2}$
7. $F(s) = \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+1}}\right]$

Ejercicios 6.3.1 **, página 35 (Forma Inversa, Teorema Convolución)**

1. $f(t) = 1 - \cos t$
2. $f(t) = 3t - \text{sen}(3t)$
3. $f(t) = 4\left[\cos(2t) - \cos(3t)\right]$
4. $f(t) = e^{2t} - 2\,\text{sen}\,t - \cos t$

Ejercicios 6.4.1 **, página 37 (Ecuación Integral e Integro Diferencial)**

1. $F(s) = \dfrac{8s^2}{(s-1)^3(s+1)} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{t}\left[1 + 6t + 2t^2\right] - e^{-t}$

2. $Y(s) = \dfrac{6}{s^4} + \dfrac{6}{s^3} - \dfrac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t^3 + 3t^2 - 1$

3. $F(s) = \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{6}{s^4} + \dfrac{4}{s} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2t - t^3 + 4$

4. $Y(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2\,(s-1)^2}$ $\Rightarrow$ $y(t) = 2 + t + 2\,e^t\left[t-1\right]$

5. $F(s) = \dfrac{6}{s^2-9} - \dfrac{7\,s\,e^{-4s}}{s^2-9}$ $\Rightarrow$ $f(t) = 2\,\text{senh}(3t) - 7\,U(t-4)\cosh(3t-12)$

6. $Y(s) = \dfrac{2\,(s+1)}{s\,(s^2+2\,s+2)}$ $\Rightarrow$ $y(t) = 1 + e^{-t}\left(\text{sen}t - \cos t\right)$

7. $Y(s) = \dfrac{2}{s} + \dfrac{6\,s}{(s^2+9)^2}$ $\Rightarrow$ $y(t) = 2 + t\,\text{sen}(3t)$

8. $Y(s) = \dfrac{1}{s\,(s-1)}$ $\Rightarrow$ $y(t) = e^t - 1$

***<u>Ejercicios 6.4.2</u>* , página 37 (Ecuación Integral e Integro Diferencial)**

1. $Y(s) = \dfrac{-3}{2\,s^3}$ $\Rightarrow$ $y(t) = \dfrac{-3t^2}{4}$

2. $Y(s) = \dfrac{2}{(s-1)^2} - \dfrac{3}{s-1}$ $\Rightarrow$ $y(t) = 2t\,e^t - 3e^t$

3. $Y(s) = \dfrac{-4}{s^2} + \dfrac{6}{s}$ $\Rightarrow$ $y(t) = -4t + 6$

***<u>Ejercicios 7.2</u>* , página 40 (Transformada Función Periódica)**

1. $F(s) = \dfrac{a}{s}\left[\dfrac{1}{b\,s} - \dfrac{1}{e^{bs}-1}\right]$

2. $F(s) = \dfrac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2\left(e^{-s}+1\right)}$

3. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})} = \dfrac{e^{\pi s}}{(s^2+1)(e^{\pi s}-1)}$

4. $F(s) = \dfrac{1}{s\,(1+e^{-as})} = \dfrac{e^{as}}{s\,(e^{as}+1)}$

5. $F(s) = \dfrac{(s+1)e^{-2s}+s-1}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

6. $F(s) = \dfrac{1}{1-e^{-2s}}\left[\dfrac{1-e^{-s+1}}{s-1} + \dfrac{e^{-2s}-e^{-s}}{s}\right]$

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS DE LA PRÁCTICA GENERAL TRANSFORMADA DE LAPLACE

I. Transformada de Laplace – Definición (página 41)

1. $F(s) = \dfrac{s + 2 + (s-2)e^{-s}}{s^2}$

2. $F(s) = \dfrac{-s\, e^{-\pi s}}{s^2+1}$

3. $F(s) = \dfrac{2\, e^{-s}}{s^2}$

4. $F(s) = \dfrac{c\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)}{s}$

II. Transformada de Laplace – Tablas (página 41)

5. $F(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s+2} + \dfrac{1}{s+4}$

6. $F(s) = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s+2}$

7. $F(s) = \dfrac{6}{s^3} - \dfrac{4s}{s^2-4}$

8. $F(s) = \dfrac{3}{2s} - \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{s}{2(s^2+4)}$

9. $F(s) = \dfrac{3}{2(s^2+9)} - \dfrac{1}{2(s^2+1)}$

10. $F(s) = \dfrac{s}{2(s^2+1)} - \dfrac{s}{2(s^2+25)}$

11. $F(s) = \dfrac{s}{2(s^2+16)} + \dfrac{s}{2(s^2+4)}$

12. $F(s) = \dfrac{5}{2(s^2+25)} + \dfrac{1}{2(s^2+1)}$

13. $F(s) = \dfrac{6}{s^2-9} - \dfrac{1}{s^2+1}$

14. $F(s) = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{s}{2(s^2+16)}$

15. $F(s) = \dfrac{3}{4(s^2+1)} - \dfrac{3}{4(s^2+9)}$

16. $F(s) = \dfrac{3s}{4(s^2+1)} + \dfrac{s}{4(s^2+9)}$

III. Transformada Inversa de Laplace (página 41)

17. $f(t) = 4t - \dfrac{2t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5!}$

18. $f(t) = 1 + 3t + \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6}$

19. $f(t) = \dfrac{5e^{4t}}{4} - \dfrac{1}{4}$

20. $f(t) = \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$

21. $f(t) = \dfrac{5}{2}\cosh\left(\dfrac{5t}{2}\right)$

22. $f(t) = \dfrac{e^{-t/2}}{2} + \dfrac{e^{2t/3}}{3}$

23. $f(t) = \dfrac{e^{4t}}{9} - \dfrac{e^{-5t}}{9}$

24. $f(t) = \dfrac{5e^{4t}}{36} - \dfrac{4e^{-5t}}{45} - \dfrac{1}{20}$

25. $f(t) = 1 - t - \cos t + \operatorname{sen} t$

26. $f(t) = \dfrac{8e^{2t}}{15} - \dfrac{e^{-3t}}{5} - \dfrac{e^{-t}}{3}$

IV. Transformada de Funciones Escalón Unitario (página 42)

27. $f(t) = 2 - 4\,U(t-3) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4e^{-3s}}{s} = \dfrac{2-4e^{-3s}}{s}$

28. $f(t) = 1 + (\cos t - 1)\,U(t-3\pi/2) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \dfrac{1-e^{-3\pi s/2}}{s} + \dfrac{e^{-3\pi s/2}}{s^2+1}$

29. $f(t) = t^2 + (1-t^2)\,U(t-1) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{(2+2s)e^{-s}}{s^3}$

30. $f(t) = \operatorname{sen} t - U(t-\pi)\operatorname{sen} t + U(t-2\pi) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1} + \dfrac{e^{-2\pi s}}{s}$

V. Transformada de Laplace y(o) Transformada Inversa (página 42)

31. $F(s) = \dfrac{3}{(s-5)^2 - 9}$

32. $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2 - 4}$

33. $F(s) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}\right]$

34. $F(s) = \dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$

35. $F(s) = \dfrac{e^{-2(s-2)}}{s-2}$

36. $F(s) = \dfrac{12(s-2)}{\left[(s-2)^2 - 36\right]^2}$

37. $F(s) = \dfrac{6(s-1)^2+2}{\left[(s-1)^2-1\right]^3}$

38. $F(s) = \dfrac{(s+2)^2+1}{\left[(s+2)^2-1\right]^2}$

39. $F(s) = \dfrac{(s+3)^2-4}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$

40. $F(s) = \dfrac{6e^{-s}}{(s-1)^4}$

41. $F(s) = \dfrac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+4}$

42. $F(s) = \dfrac{(3+10s)e^{-3s}}{s^2}$

43. $F(s) = \dfrac{s\,e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$

44. $F(s) = \dfrac{2s\,e^{-2\pi s}}{(s^2+1)^2} + \dfrac{2\pi e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

45. $f(t) = e^{-2t}\left(t - t^2 + \dfrac{1}{6}t^3\right)$

46. $f(t) = 3e^{-2t}\left(t - t^2\right)$

47. $f(t) = e^{-3t}\left[\cosh\left(\sqrt{7}\,t\right) - \dfrac{2\operatorname{senh}\left(\sqrt{7}\,t\right)}{\sqrt{7}}\right]$

48. $f(t) = e^{-3t}\left[3\cos(5t) - 2\,\text{sen}(5t)\right]$

49. $f(t) = e^{-t}\left(\dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{8}\right)$

50. $f(t) = U(t-2)\left\lfloor 1 - t + e^{t-2}\right\rfloor$

52. $f(t) = e^{-(t-\pi)}\cos(2t)\,U(t-\pi)$

51. $f(t) = \dfrac{1}{2}\,U(t-\pi)\,\text{sen}(2t) + U(t-\pi/2)\cos(2t)$

VI. Derivada de Transformadas – Forma Inversa (página 43)

53. $f(t) = \dfrac{e^{-t} - e^{3t}}{t}$

54. $f(t) = 1 + \dfrac{\text{sen}(4t)}{t}$

55. $f(t) = \dfrac{2 - 2\cos t}{t}$

56. $f(t) = \dfrac{e^{3t} + e^{-2t} - 2\cos t}{t}$

57. $f(t) = \dfrac{\text{sen}(2t)}{t}$

58. $f(t) = \dfrac{e^{-2t}\,\text{sen}(5t)}{t}$

VII. Transformada de Integrales (página 43)

59. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

60. $F(s) = \dfrac{3}{(s-2)^2\,(s^2-9)}$

61. $F(s) = \dfrac{s+1}{s\left[(s+1)^2 + 4\right]}$

62. $F(s) = \dfrac{3s+1}{s^2\,(s+1)^3}$

63. $F(s) = \dfrac{6}{(s^2+9)^2}$

64. $F(s) = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2\,(s+2)}$

65. $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s\,(s^2-1)^2}$

66. $F(s) = \dfrac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$

67. $F(s) = \dfrac{s+1}{s\left[(s+1)^2 - 4\right]}$

68. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2 + 4}$

VIII. Transformada Inversa – Convolución (página 44)

69. $f(t) = \dfrac{t\,\text{sen}(3t)}{6}$

70. $f(t) = \dfrac{3\,\text{sen}t - \cos t + e^{-3t}}{10}$

71. $f(t) = \dfrac{(\text{sen}t - t\cos t)\,e^{-2t}}{2}$

72. $f(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{\text{sen}(2t)}{4}$

IX. Transformada de Funciones Periódicas (página 44)

73. $F(s) = \dfrac{1 - e^{-s} - s e^{-2s}}{s^2 \left[1 - e^{-2s} \right]}$

74. $F(s) = \dfrac{2s - (s+1)e^{-s} + e^{-2s}}{s^2 \left[1 - e^{-2s} \right]}$

75. $F(s) = \dfrac{1 - e^{-as}}{s \left[1 + e^{-as} \right]}$

76. $F(s) = \dfrac{a \left[(1-s)e^{-bs} + s(e^{-2bs} + 1) - 1 \right]}{b s^2 \left[1 - e^{-2bs} \right]}$

X. Solución de Ecuaciones (página 44)

77. $Y(s) = \dfrac{1}{s\left[(s-1)^2 + 1 \right]} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{2} \left[e^t \left(\operatorname{sen} t - \cos t \right) + 1 \right]$

78. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2 (s-2)^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1 + t - e^{2t} + t e^{2t}}{4}$

79. $Y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4} + \dfrac{e^{-2\pi s}}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} \quad \Rightarrow$

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{1}{6} U(t - 2\pi) \left[2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2t) \right]$$

80. $Y(s) = \dfrac{1}{s(s+2)} + \dfrac{e^{-s}}{s(s+2)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{1}{2} U(t-1) \left[1 - e^{-2(t-1)} \right] + \dfrac{1}{2} \left[1 - e^{-2t} \right]$

81. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2 + 1} + \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \operatorname{sen} t + U(t - 2\pi) \operatorname{sen} t$

82. $Y(s) = \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 4s + 5} \quad \Rightarrow \quad y(t) = U(t - 2\pi) \operatorname{sen} t \; e^{-2(t-\pi)}$

83. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s-2)} + \dfrac{e^{-2s}}{s(s-2)} \quad \Rightarrow$

$$y(t) = \frac{1}{2} U(t-2) \left[e^{2(t-2)} - 1 \right] - \frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{e^{2t}}{4}$$

84. $Y(s) = \dfrac{2e^{-\pi s/2}}{s^2 + 1} - \dfrac{s}{s^2 + 1} + \dfrac{1}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow$

$$y(t) = 2U(t - \pi/2) \operatorname{sen}(t - \pi/2) - \cos t + \operatorname{sen} t$$

85. $Y(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 4)} - \dfrac{e^{-s}}{s(s^2 + 4)} - \dfrac{1}{s^2 + 4} \quad \Rightarrow$

$$y(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{4} - \frac{1}{4} U(t-1) \left[1 - \cos(2t - 2) \right] - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}$$

86. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)} - \dfrac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+1)} \Rightarrow$
$y(t) = \operatorname{sen} t + U(t-\pi)\left[1-\cos(t-\pi)\right] - U(t-2\pi)\left[1-\cos t\right]$

87. $Y(s) = \dfrac{4}{s(s^2+1)} + \dfrac{e^{-2s}}{s^2(s^2+1)} \Rightarrow y(t) = 4-4\cos t + U(t-2)\left[t-2-\operatorname{sen}(t-2)\right]$

88. $Y(s) = \dfrac{4\,s\,e^{-\pi s}}{(s^2+4)(s^2+1)} - \dfrac{6}{s^2+4} \Rightarrow$
$y(t) = \dfrac{4}{3}\,U(t-\pi)\left[\cos(t-\pi) - \cos(2t-2\pi)\right] - 3\operatorname{sen}(2t)$

89. $Y(s) = \dfrac{3s^2}{(s^2+2)(s+1)} \Rightarrow y(t) = e^{-t} + 2\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) - \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right)$

90. $F(s) = \dfrac{2}{s^2+4} + \dfrac{2}{s^2(s^2+4)} \Rightarrow f(t) = \dfrac{3\operatorname{sen}(2t)}{4} + \dfrac{t}{2}$

91. $F(s) = \dfrac{4(s^2+1)}{(s+1)^3} + \dfrac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow f(t) = e^{-t}\left[4-7t+4t^2\right]$

92. $Y(s) = \dfrac{s-1}{(s-3)^2} \Rightarrow y(t) = e^{3t}\left[1+2t\right]$

93. $Y(s) = \dfrac{2(s^2+1)}{s^5} = \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{s^5} \Rightarrow y(t) = t^2 + \dfrac{t^4}{12}$

94. $F(s) = \dfrac{s-1}{s^3} + \dfrac{s-1}{s(s+2)} \Rightarrow f(t) = \dfrac{2t - t^2 + 3e^{-2t} - 1}{2}$

95. $F(s) = \dfrac{s-1}{s\,(s^2+1)} \Rightarrow f(t) = \cos t + \operatorname{sen} t - 1$

96. $Y(s) = \dfrac{5s}{(s+1)(s^2+4)} \Rightarrow y(t) = -e^{-t} + \cos(2t) + 2\operatorname{sen}(2t)$

97. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow y(t) = \operatorname{sen} t - \dfrac{t\,\operatorname{sen} t}{2}$

98. $Y(s) = \dfrac{2s}{(s^2+4)^2} + \dfrac{3}{s^2+4} - \dfrac{3s}{s^2+4} \Rightarrow$
$y(t) = \dfrac{t\,\operatorname{sen}(2t)}{2} + \dfrac{3\operatorname{sen}(2t)}{2} - 3\cos(2t)$

Le agradezco a la Profesora Sandra Schmidt Quesada su valiosa colaboración en la solución de estos ejercicios.

99. $F(s) = \dfrac{3}{s^3} + \dfrac{2}{s} \Rightarrow f(t) = \dfrac{3}{2}\,t^2 + 2$

100. $F(s) = \dfrac{-2s^2+2s-1}{s^2(s-1)} \Rightarrow f(t) = -1 + t - e^t$

XI. Ejercicios Varios (página 46)

101. $G(s) = \dfrac{s+4}{(s+4)^2 - 9} + e^{-3s}\left[\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} + \dfrac{9}{s}\right] - \dfrac{5e^{-7s}}{s}$

102. $H(s) = \dfrac{8s}{(s^2-16)^2} + e^{-5s}\left[\dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{5}{s+1}\right] - \dfrac{3e^{-8s}}{s}$

103. $F(s) = \dfrac{3}{s} + \dfrac{2e^{-2s}}{(s-1)^2 - 4} - \dfrac{3e^{-2s}}{s}$

104. $F(s) = \dfrac{1}{s^2} + e^{-s}\left[\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s}\right] + \dfrac{3e^{-3s}}{s}$

105. $G(s) = \dfrac{-a^2\, F'(as-a)}{s-1}$

106. $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2} - \dfrac{\arctan\left((s-2)^{-1}\right)}{s-2}$

108. (a) $F(s) = \dfrac{3e^{-2\pi(s-2)}}{(s-2)^2 - 9}$

(b) $F(s) = \dfrac{8(s-3)}{\left[(s-3)^2+1\right]^3}$

(c) $G(s) = \dfrac{2F(s) - (s-1)F'(s)}{(s-1)^3}$

109. (a) $f(t) = \dfrac{2\cosh t - 2\cos(2t)}{t} = \dfrac{e^{t} + e^{-t} - 2\cos(2t)}{t}$

(b) $f(t) = \dfrac{U(t-1)}{t-1}\left[e^{\frac{2(t-1)}{3}} - e^{\frac{-(t-1)}{3}}\right]$

(c) $f(t) = \dfrac{U(t-2)\, e^{5(t-2)}\,\mathrm{sen}(t-2)}{t-2}$

(d) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(t/5) + e^{-3t/4} - 1}{t}$

(e) $f(t) = \dfrac{e^{a\,t/2}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{t}}$

111. $f(t) = U(t-3)\left[\cosh(2t-6) - 3\operatorname{senh}(2t-6)\right] e^{-(t-3)}$

112. (a) $f(t) = t\, e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$

(b) $f(t) = e^{3t}\left[\dfrac{t}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]$

(c) $f(t) = \dfrac{4}{3}(t+1)^{3/2} - 2t - \dfrac{4}{3}$

113. (a) $Y(s) = \dfrac{10}{s^3} - \dfrac{10}{s^4} - \dfrac{s-1}{s(s+1)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 5t^2 - \dfrac{5}{3}t^3 - 2\,e^{-t} + 1$

(b) $Y(s) = \dfrac{3s}{(s+2)^3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3\,t\,e^{-2t}(1-t)$

(c) $Y(s) = \dfrac{-1}{s(s-1)} - \dfrac{2\,e^{-3s}}{s(s-1)^2} \quad \Rightarrow$

$$y(t) = 1 - e^{t} - 2U(t-3)\left[(t-3)\,e^{(t-3)} - e^{(t-3)} + 1\right]$$

(d) $Y(s) = \dfrac{5s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s(s^2+1)^2} - \dfrac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4\cos t - t\operatorname{sen} t - 1$

(e) $Y(s) = \dfrac{6}{s^2(s-3)} + \dfrac{2}{s-3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{8}{3}e^{3t} - 2t - \dfrac{2}{3}$

TABLA DE ALGUNAS INTEGRALES BÁSICAS*

1. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$

2. $\int e^{au}\, du = \dfrac{e^{au}}{a}$, $a \neq 0$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u|$

4. $\int \ln u\, du = u \ln u - u$

5. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u$

6. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u$

7. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$

8. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u|$

9. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u|$

10. $\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u|$

11. $\int \sec u \tan u\, du = \sec u$

12. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u$

13. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

14. $\int \cos^2 u\, du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

15. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u$

16. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u$

17. $\int \sec^2 u\, du = \tan u$

18. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u$

19. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{u}{a}\right)$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \arctan\left(\dfrac{u}{a}\right)$

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|$

22. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|$

23. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|$

24. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right|$

25. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\, du = \dfrac{e^{au}\,(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

26. $\int e^{au} \cos bu\, du = \dfrac{e^{au}\,(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu)}{a^2 + b^2}$

* Se omite la constante de integración.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

N°	$L\{f(t)\} = F(s)$	N°	$L\{f(t)\} = F(s)$
1.	$L\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s>0$	4.	$L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s>a$
2.	$L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, $s>0$	5.	$L\{t\,e^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$, $s>a$
3.	$L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $n=1,2,3,\dots$; $s>0$ $L\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$; $n>-1$; $s>0$	6.	$L\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s>a$
7.	$L\{\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, $s>0$	10.	$L\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$, $s>0$
8.	$L\{e^{at}\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$, $s>a$	11.	$L\{e^{at}\cos kt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$, $s>a$
9.	$L\{t\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$, $s>0$	12.	$L\{t\cos kt\} = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$, $s>0$
13.	$L\{\operatorname{senh} kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$, $s>\lvert k\rvert$	14.	$L\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$, $s>\lvert k\rvert$
15.	$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$	16.	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
17.	$L\{f(t-a)\,U(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $a\geq 0$	18.	$L\{U(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$ $L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$
19.	$L\left\{\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du\right\} = F(s)G(s)$	20.	$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
21.	$L\{y'(t)\} = sY(s)-y(0)$; $Y(s)=L\{y(t)\}$ $L\{y''(t)\} = s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)$ $L\{y^{(n)}(t)\} = s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-\dots-y^{(n-1)}(0)$	22.	$L\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ $f(t)$ función periódica, de período T
	$2\operatorname{sen} A\cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$ $2\cos A\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)$		$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ $2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

Elaborada por Sharay Meneses Rodríguez, MSc. Profesora del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank Jr. ***Ecuaciones Diferenciales***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1970 y 1991.

Bronson, Richard. ***Ecuaciones Diferenciales Modernas***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1976.

Edwards, C.H. Jr y Penny, D. E. ***Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones***. Editorial Editorial Prentice-Hall, México, 1986.

Kiseliov, A., Krasnov, M. Y Makarenko, G. ***Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***. Editorial Mir, Moscú, 1979.

Marcus, Daniel A. ***Ecuaciones Diferenciales***. Editorial CECSA, México, 1998.

Spiegel, Murray. ***Ecuaciones Diferenciales Aplicadas***. Editorial Prentice-Hall, México, 1983.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones***. Editorial Grupo Iberoamérica, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sexta edición, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sétima edición, México, 2002.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

CONTENIDOS **PÁGINA**