INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Prof. Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc.

2016

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PRELIMINAR

1.1 *Ecuación Diferencial Lineal de Enésimo Orden*

Definición 1: Una Ecuación Diferencial Lineal de Orden n es de la forma:

$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2}(x)\,y'' + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = F(x)$,

con $a_0(x) \neq 0$ y donde todos los $a_i(x)$ y $F(x)$ dependen solo de la variable x .

Ejemplo 1

a. Para $n=1$, se tiene que $a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = F(x)$ es una ecuación diferencial lineal de primer orden, equivalente a $y' + P(x)\,y = Q(x)$.

b. Para $n=2$, se tiene que $a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = F(x)$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Definición 2: A una Ecuación Diferencial Lineal de Orden n se le denomina:

a. De *coeficientes constantes*, si **todos** los $a_i(x)$, desde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son constantes reales.

b. De *coeficientes variables*, si **no todos** los $a_i(x)$ son constantes; o sea, si **al menos un** $a_i(x)$ depende de la variable x .

Ejemplo 2

a. $5y'' - 3y' + 2y = 5\cos(2x)$ y $y''' + 2y'' - 4y = 7$ son ecuaciones lineales de coeficientes constantes, de segundo y tercer orden respectivamente.

b. $x\,y''' - 2y' + x^2\,y = x^3 - 4$ y $2y^{(4)} - y'' + x^2\,y = 3$ son ecuaciones lineales de coeficientes variables, de tercer y cuarto orden respectivamente.

NOTA: Conviene hacer notar que no toda ecuación diferencial lineal se puede resolver para $n \geq 2$; sin embargo, en varios casos especiales sí puede ser resuelta y algunos de ellos los estudiaremos más adelante, como es el caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Además, se estudiarán algunos tipos de ecuaciones lineales con coeficientes variables de orden dos.

1.2 *El Operador Lineal* D^n

<u>Definición 1</u>: Sea n un número entero positivo; los símbolos $D, D^2, D^3, \dots, D^n$ se llaman *operadores* debido a que ellos definen una operación a ser desarrollada; a saber, la operación de tomar la primera, segunda, tercera, … , enésima derivada de una función determinada.

Con base en la definición anterior, se tienen las equivalencias siguientes:

$$D\,y \approx \frac{dy}{dx} = y' \ , \ D^2 y \approx \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' \ , \ D^3 y \approx \frac{d^3 y}{dx^3} = y''' \ , \dots , \ D^n y \approx \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$$

<u>Definición 2</u>: El operador D^n, n entero positivo, se denomina *operador lineal* si cumple las dos propiedades siguientes, para cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables y k constante:

$$(1) \quad D^n\left[\, f(x) + g(x) \right] = D^n f(x) + D^n g(x)$$

$$(2) \quad D^n\left[k\, f(x) \right] = k\, D^n f(x)$$

<u>Ejemplo 1</u>

a. Para la función $y = e^{-x} - 3x^2$, evaluar $D^3 y - D^2 y + 2D\,y + y$. (*)

<u>Solución</u>: $D\,y = D(e^{-x} - 3x^2) = D(e^{-x}) - 3D(x^2) = -e^{-x} - 6x \quad \Rightarrow$

$D^2 y = D^2(e^{-x} - 3x^2) = D(-e^{-x} - 6x) = e^{-x} - 6 \quad \Rightarrow$

$D^3 y = D^3(e^{-x} - 3x^2) = D^2(-e^{-x} - 6x) = D(e^{-x} - 6) = -e^{-x}$

Sustituyendo en (∗), tenemos: $(D^3 - D^2 + 2D + 1)\ y = -3e^{-x} + 6 - 12x - 3x^2$

b. Considere la función $y = x^2 + e^{-3x}$. Evaluar $x\,D^2 y$.

<u>Solución</u>: En este caso, se tiene que:

$$x\,D^2 y = x\,D^2(x^2 + e^{-3x}) = x\,D(2x - 3e^{-3x}) = x(2 + 9e^{-3x}) = 2x + 9x\,e^{-3x}$$

1.3 *Ecuaciones Lineales y la Notación de Operadores*

❖ Consideremos la ecuación diferencial lineal de Orden n:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2}(x)\,y'' + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = F(x) \qquad (1)$$

❖ Abreviando $a_i(x)$ por a_i, la ecuación (1) puede escribirse en la notación de operadores como sigue:

$$a_0\, D^n y + a_1\, D^{n-1} y + a_2\, D^{n-2} y + \ \dots \ + a_{n-2}\, D^2 y + a_{n-1}\, D\,y + a_n\, y \ = \ F(x)$$

- La ecuación anterior, a su vez, puede expresarse como:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-2} D^2 + a_{n-1} D + a_n)\, y = F(x)$$

- Por tanto, si $\phi(D) \cong a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-2} D^2 + a_{n-1} D + a_n$, la forma abreviada de la ecuación (1) está dada por: $\phi(D)\, y = F(x)$.

<u>NOTA</u>: En particular, $\phi(D)$ es un *operador diferencial lineal*; esto es, para cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$, funciones diferenciables, y para a y b constantes, se cumple que: $\phi(D)\left[a\, f(x) + b\, g(x)\right] = a\, \phi(D)\, f(x) + b\, \phi(D)\, g(x)$.

<u>Ejemplo 1</u>

a. La ecuación $3y^{(4)} - 5y''' + y = \operatorname{sen} x$ se expresa en la notación de operadores como $(3D^4 - 5D^3 + 1)\, y = \operatorname{sen} x$; además, la forma abreviada de estas ecuaciones es $\phi(D)\, y = F(x)$, con $\phi(D) = 3D^4 - 5D^3 + 1$ y $F(x) = \operatorname{sen} x$.

b. La forma abreviada de $2x^2 y'' - 3x y' - y = 5$, o bien $(2x^2 D^2 - 3x D - 1)\, y = 5$, es $\phi(D)\, y = F(x)$, donde $\phi(D) = 2x^2 D^2 - 3x D - 1$ y $F(x) = 5$.

1.4 *La Ecuación Complementaria u Homogénea* $\phi(D)\, y = 0$

<u>Definición 1</u>: Dada una ecuación diferencial lineal de orden n de la forma $\phi(D)\, y = F(x)$, con $F(x) \neq 0$, entonces *su respectiva ecuación complementaria* es $\phi(D)\, y = 0$. En particular, si $F(x) = 0$, la ecuación complementaria de $\phi(D)\, y = 0$ es ella misma.

<u>Ejemplo 1</u>

a. La ecuación complementaria u homogénea de $x^2 y'' + x y' - 2y = \ln x$ está dada por $x^2 y'' + x y' - 2y = 0$.

b. La ecuación complementaria u homogénea de $3y''' - 2x y' = 0$ es ella misma.

1.5 *Concepto de Solución de la Ecuación Diferencial* $\phi(D)\, y = F(x)$

<u>Teorema 1.5</u>: Si la función $y_1 = u(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $\phi(D)\, y = F(x)$ y si la función $y_2 = v(x)$ es una solución de la respectiva ecuación complementaria $\phi(D)\, y = 0$, entonces la función $y = u(x) + v(x)$ es también una solución de la ecuación $\phi(D)\, y = F(x)$.

Demostración:

- Como $y_1 = u(x)$ es solución de $\phi(D)\,y = F(x) \quad \Rightarrow \quad \phi(D)\,u(x) = F(x)$ (1)
- Como $y_2 = v(x)$ es solución de $\phi(D)\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(D)\,v(x) = 0$ (2)
- Sumando las expresiones (1) y (2) se tiene que:
  $\phi(D)\,u(x) + \phi(D)\,v(x) = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(D)\left[u(x) + v(x)\right] = F(x)$
- Por lo tanto, $y = u(x) + v(x)$ es una solución de $\phi(D)\,y = F(x)$.

Este teorema nos indica que a toda ecuación lineal de orden n se le asocian dos soluciones. Sabemos que la solución general de una ecuación diferencial de orden n es aquella que contiene n parámetros o constantes arbitrarias; así, del teorema anterior, se puede inferir que si $y_1 = u(x)$ es una solución particular (no tiene constantes) de $\phi(D)\,y = F(x)$ y si $y_2 = v(x)$ es la solución general (contiene n parámetros) de la ecuación homogénea $\phi(D)\,y = 0$, entonces $y = u(x) + v(x)$ es la solución general de la ecuación propuesta; a saber, de $\phi(D)\,y = F(x)$.

Con base en lo indicado, si denotamos con y_c la *solución complementaria* (*general*) de $\phi(D)\,y = 0$ y con y_p la *solución particular* de $\phi(D)\,y = F(x)$, entonces la *solución general* de $\phi(D)\,y = F(x)$ estará dada por: $y = y_c + y_p$. Es importante hacer la observación de que para poder determinar y_p, es requisito indispensable conocer y_c, aspecto que se justificará más adelante.

Ejemplo 1: Usando la técnica para resolver ecuaciones lineales de primer orden, se puede verificar que la solución general de la ecuación $y' - 3y = 8e^{-x}$ es $y = -2e^{-x} + Ce^{3x}$. Por lo tanto, la solución complementaria de $y' - 3y = 0$ es $y_c = Ce^{3x}$ y una solución particular de $y' - 3y = 8e^{-x}$ es $y_p = -2e^{-x}$.

Ejercicio 1.5: Considere la ecuación diferencial: $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 6$: (*)

a. Verifique que $y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ es solución de $y'' - y' - 2y = 0$.
   Observe que y_c contiene dos parámetros por lo que se constituye en la solución general de la ecuación homogénea de (*), denominada solución complementaria.
b. Verifique que $y_p = -2x^2 + 2x$ es solución de $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 6$.
   Observe que y_p **no** contiene parámetros por lo que se constituye en una solución particular de la ecuación dada en (*).
c. Con base en (a) y (b) y el *Teorema 1.5*, escriba la solución general de $y'' - y' - 2y = 4x^2 - 6$ y, además, verifique que efectivamente es solución de esta ecuación.

1.6 *Dependencia e Independencia Lineal*

Los siguientes conceptos son básicos en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Se verá la relación que existe entre la independencia lineal de funciones y las soluciones de una Ecuación Diferencial Lineal de Orden *n*.

1.6.1 Dependencia Lineal (*l.d.*)

<u>Definición 1</u>: Se dice que un conjunto de funciones $y_1(x)\,,\, y_2(x)\,,\, \ldots\,,\, y_n(x)$ es *linealmente dependiente* en un intervalo *I* si existen constantes $\alpha_1\,,\, \alpha_2\,,\, \ldots\,,\, \alpha_n$, **no todas cero**, tales que, $\forall\; x \in I$, se cumple que:

$$\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x) + \ldots + \alpha_n\, y_n(x) = 0$$

1.6.2 Independencia Lineal (*l.i.*)

<u>Definición 2</u>: Se dice que un conjunto de funciones $y_1(x)\,,\, y_2(x)\,,\, \ldots\,,\, y_n(x)$ es *linealmente independiente* en un intervalo *I* si $\forall\; x \in I$, la ecuación:

$$\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x) + \ldots + \alpha_n\, y_n(x) = 0$$

se satisface únicamente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

<u>Ejemplo 1</u>: Determine si las funciones e^{2x}, $-3e^{2x}$ y $2e^{2x}$ son linealmente dependientes o linealmente independientes en IR .

<u>Solución</u>: (En este caso, observe que $e^{2x} \neq 0$, $\forall\, x \in IR$)

- Supongamos que las funciones e^{2x}, $-3e^{2x}$ y $2e^{2x}$ son *l.d.* en *IR*
- De acuerdo con la <u>definición 1</u>, existen constantes reales α, β y λ, **<u>no</u>** todas iguales a cero, de tal manera que $\forall\, x \in IR$, se satisface la ecuación:

$$\alpha e^{2x} - 3\beta e^{2x} + 2\lambda e^{2x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{2x}(\alpha - 3\beta + 2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha - 3\beta + 2\lambda = 0 \qquad\qquad (*)$$

- La ecuación (*) es lineal, en tres variables, y tiene <u>infinitas</u> <u>soluciones</u>, incluyendo la solución trivial $\alpha = \beta = \lambda = 0$. Así, por ejemplo, si α depende de β y λ, dicha ecuación la podemos expresar como: $\alpha = 3\beta - 2\lambda$.

- Lo anterior nos permite concluir que las funciones dadas son <u>linealmente</u> <u>dependientes</u> (*l.d.*) y, por lo tanto, cualquiera de estas se puede expresar como una combinación lineal de las otras dos. Por ejemplo, si $\beta = 1$ y $\lambda = -2$, entonces $\alpha = 7$; luego, $7e^{2x} = 3e^{2x} + 4e^{2x}$.

<u>Ejemplo 2</u>: *Determine si las funciones* e^{2x} y e^{-x} *son linealmente dependientes o linealmente independientes en* IR *.*

<u>Solución</u>: (En este caso, observe que $e^{2x} \neq 0$ y $e^{-x} \neq 0$, $\forall\, x \in IR$)

- Igual que en el caso anterior, partamos del supuesto de que las funciones e^{2x} y e^{-x} son *l.d.* en *IR* .
- Por la <u>definición 1</u>, existen constantes reales α y β , **<u>no</u>** ambas iguales a cero, de tal manera que $\forall\, x \in IR$, se satisface la ecuación:

$$\alpha e^{2x} + \beta e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x}(\alpha e^{3x} + \beta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha e^{3x} + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha e^{3x} \qquad (*)$$

- Puesto que $e^{3x} \neq 0$, $\forall\, x \in IR$, la ecuación (*) se cumple únicamente cuando ambas constantes son cero, o sea, solo si $\alpha = \beta = 0$, lo cual contradice la hipótesis (supuesto inicial).
- Dado lo anterior, se concluye que las funciones dadas son <u>linealmente independientes</u> (*l.i.*).

OBSERVACIONES

- Los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones siempre se refieren a algún intervalo *I* ; sin embargo, por brevedad, en algunos casos se omitirán las palabras “en un intervalo”.
- Recordar que si un conjunto de funciones es *l.d.*, entonces una de estas funciones se puede expresar en términos de las otras (concepto de combinación lineal). En el caso particular de dos funciones *l.d.*, una es múltiplo escalar de la otra.
- La condición de dependencia o independencia lineal, por lo general, NO se puede establecer directamente de las definiciones puesto que en la mayoría de los casos, el cálculo de las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ puede resultar bastante tedioso. Afortunadamente, existe un método alterno el cual se estudiará a continuación.

1.7 El Wronskiano

El *wronskiano*, denotado por *W*, está asociado a un determinante y nos permite concluir con respecto a la dependencia o independencia lineal de un conjunto de funciones sin tener que realizar el cálculo de las constantes contenidas en las definiciones dadas en 1.6.1 y 1.6.2.

1.7.1 Wronskiano de Segundo Orden ($W_{2\times 2}$)

Definición 1: Sean $y_1(x) \wedge y_2(x)$ dos funciones definidas en *I* tales que $y_1'(x) \wedge y_2'(x)$ existen en *I*. El ***wronskiano*** de $y_1 \wedge y_2$, denotado por $W\left(y_1, y_2\right)$, es una función definida por:

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Ejemplo 1: Sean las funciones $y_1 = \cos^2 x \wedge y_2 = \operatorname{sen}^2 x$, ambas definidas en *IR*, entonces:

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} \cos^2 x & \operatorname{sen}^2 x \\ -2\cos x \operatorname{sen} x & 2\operatorname{sen} x \cos x \end{vmatrix} = 2\operatorname{sen} x \cos^3 x + 2\cos x \operatorname{sen}^3 x \quad \Rightarrow$$

$$W\left(y_1, y_2\right) = 2\operatorname{sen} x \cos x \left[\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right] = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

1.7.2 Wronskiano de Enésimo Orden ($W_{n\times n}$)

Definición 2: Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funciones definidas en *I* tales que cada una de ellas tiene al menos $(n-1)$ derivadas en *I*. El *wronskiano* de estas funciones, denotado por $W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$, está definido por:

$$W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2: Para las funciones: $y_1 = 1,\ y_2 = e^{-x} \wedge y_3 = e^{2x}$, todas definidas en *IR*, se tiene:

$$W\left(y_1, y_2, y_3\right) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & e^{2x} \\ 0 & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ 0 & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -4e^{x} - 2e^{x} = -6\, e^{x}$$

Ejercicios 1.7: *Verifique cada una de las siguientes identidades.*

1. $W\left(e^{-3x},\, e^{4x}\right) = 7e^{x}$
2. $W\left(e^{-x}, -2e^{-x}\right) = 0$
3. $W\left(e^{2x}, xe^{2x}\right) = e^{4x}$
4. $W\left(x^2,\, x\,,1\right) = -2$
5. $W\left(e^{-x},\, e^{-2x},\, e^{2x}\right) = -12\, e^{-x}$
6. $W\left(2\,,\ \text{sen}^2 x,\ \cos^2 x\right) = 0$
7. $W\left(\cos(2x)\,,\ \text{sen}(2x)\right) = 2$
8. $W\left(e^{x}\cos x\,,\ e^{x}\,\text{sen}\,x\right) = e^{2x}$

1.8 Soluciones de una Ecuación Lineal y el Wronskiano

Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n: $\phi(D)\,y = F(x)$ y su respectiva ecuación complementaria u homogénea $\phi(D)\,y = 0$, donde:

$$\phi(D) = a_0\, D^n + a_1\, D^{n-1} + a_2\, D^{n-2} + \ . \ . \ . + a_{n-2}\, D^2 + a_{n-1}\, D + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

Dicha ecuación puede ser de coeficientes constantes o de coeficientes variables en cuyo caso, los coeficientes $a_0\,,\, a_1\,, \ldots,\, a_n$ deben ser funciones continuas de x en algún intervalo I.

A continuación se presenta una serie de resultados, básicos y fundamentales para formar la plataforma que nos permitirá, más adelante, poder determinar la solución general de una ecuación lineal de orden superior, como la descrita al inicio de esta sección. Cabe indicar que los teoremas que se enunciarán, los aceptaremos sin demostración alguna, salvo en el caso del primero de ellos, cuya demostración se le solicita al estudiante en los *Ejercicios 1.8*, específicamente en el No.5 (b). Por otra parte, por brevedad, el $W\left(y_1,\, y_2, \ldots,\, y_n\right)$ se denotará simplemente con *W*.

Teorema 1.8 A: Sean $y_1\,,\, y_2\,, \ldots,\, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea $\phi(D)\,y = 0$ en algún intervalo *I*. El ***wronskiano*** de dichas soluciones está dado por la ***Identidad de Abel***, definida por: $W = C\, e^{-\int (a_1/a_0)\, dx}$. Además, puesto que la función exponencial nunca es cero, entonces:

$$W = 0 \iff C = 0 \quad \text{o} \quad W \neq 0 \iff C \neq 0 \ ; \ \forall\, x \in I\,.$$

Ejemplo 1.8 A: Considere la ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ (*). Para cada caso, verifique la *Identidad de Abel*, sabiendo que:

a. Las funciones $e^{-x},\, e^{x}$ y e^{2x} son soluciones de (*) en *IR*.

b. Las funciones $e^{x},\, e^{2x}$ y $3e^{x} - e^{2x}$ son soluciones de (*) en *IR*.

<u>Solución</u> (<u>a</u>):

- Del *Teorema 1.8 A*, dado que $a_0 = 1$ y $a_1 = -2$, se tiene que:

$$W\left(e^{-x}, e^{x}, e^{2x}\right) = C\, e^{-\int -2\, dx} = C\, e^{2x}$$

- De acuerdo con la *definición 2* (página 7), se obtiene que:

$$W\left(e^{-x}, e^{x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 6\, e^{2x}$$

- Por lo tanto, $C\, e^{2x} = 6\, e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad C = 6$, con lo cual se verifica lo requerido.

<u>Solución</u> (<u>b</u>):

- De la solución de la parte (a), por el *Teorema 1.8 A*, se sabe que:

$$W\left(e^{x}, e^{2x}, 3e^{x} - e^{2x}\right) = C\, e^{-\int -2\, dx} = C\, e^{2x}$$

- De acuerdo con la *definición 2* (página 7), se obtiene que:

$$W\left(e^{x}, e^{2x}, 3e^{x} - e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & 3e^{x} - e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{x} - 2e^{2x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 3e^{x} - 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0$$

- Por lo tanto, $C\, e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$, con lo cual se verifica lo requerido.

<u>Teorema 1.8 B</u>: Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea $\phi(D)\, y = 0$ en algún intervalo *I*. Entonces:

a. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son ***linealmente dependientes*** $\Leftrightarrow$ $W = 0$ en *I*

b. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son ***linealmente independientes*** $\Leftrightarrow$ $W \neq 0$ en *I*

<u>Ejemplo 1.8 B</u>: Si $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-3}$, $y_3 = k\, x^2$, *k* constante, son soluciones de la ecuación $x^2 y'' + 2\, x\, y' - 6\, y = 0$ en el intervalo de $\left]0, +\infty\right[$. Determine: (a) si $y_1 \wedge y_2$ son ***l.d.*** o ***l.i.***; (b) si $y_1 \wedge y_3$ son ***l.d.*** o ***l.i.***

Solución:

a. Dado que $W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-3} \\ 2x & -3x^{-4} \end{vmatrix} = -3x^{-2} - 2x^{-2} = -5x^{-2} \neq 0$, se concluye que $y_1 = x^2 \;\wedge\; y_2 = x^{-3}$ son soluciones linealmente independientes.

b. Dado que $W\left(y_1, y_3\right) = \begin{vmatrix} x^2 & kx^2 \\ 2x & 2kx \end{vmatrix} = 2kx^3 - 2kx^3 = 0$, se concluye que $y_1 = x^2 \;\wedge\; y_3 = kx^2$ son soluciones linealmente dependientes.

Teorema 1.8 C: Sean $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ *soluciones linealmente independientes* de la ecuación diferencial homogénea $\phi(D)\,y = 0$ en algún intervalo *I*. Entonces su *solución general* es:

$$y = y_C = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \ldots + c_n\, y_n \quad \text{, para cualesquiera constantes } c_i$$

Recíprocamente, toda ***solución general*** de $\phi(D)\,y = 0$ tiene la forma indicada anteriormente, para selecciones apropiadas de las constantes $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$.

Ejemplo 1.8 C: Consideremos la ecuación $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$. Del ***Ejemplo 1.8 B***, se sabe que $y_1 = x^2 \wedge y_2 = x^{-3}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación dada, en el intervalo de $\left]0 , +\infty\right[$. Por lo tanto, su respectiva solución general (o complementaria) es $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-3}$.

Por otra parte, como del ejemplo anterior se determinó que $y_1 = x^2 \wedge y_3 = kx^2$ son soluciones linealmente dependientes de la ecuación diferencial en cuestión, entonces la función $y = C_1 x^2 + kC_2 x^2 = (C_1 + kC_2)\, x^2 = C x^2$ no puede ser la solución general de esa ecuación diferencial ya que únicamente contiene un parámetro, por lo que la función indicada es solo una solución más de aquella.

Teorema 1.8 D: Sean $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ ***soluciones linealmente independientes*** de la ecuación diferencial homogénea $\phi(D)\,y = 0$ y sea y_p una ***solución particular*** de la ecuación diferencial $\phi(D)\,y = F(x)$. Entonces la *solución general* de <u>esta</u> <u>última</u> <u>ecuación</u> es:

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \ldots + c_n\, y_n + y_p \quad \text{, para cualesquiera constantes } c_i$$

Recíprocamente, toda *solución general* de $\phi(D)\,y = F(x)$ tiene la forma indicada anteriormente, para selecciones apropiadas de las constantes $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$.

Ejemplo 1.8 D: Sea la ecuación $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 6\ln x - 7$. Del ***Ejemplo 1.8 C***, se tiene que la solución complementaria (o general) de la ecuación homogénea $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ es $y_c = C_1 x^2 + C_2 x^{-3}$.

Por otra parte, se puede verificar que $y_p = 1 - \ln x$ es una solución particular de $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 6\ln x - 7$; por lo tanto, $y = y_c + y_p = C_1 x^2 + C_2 x^{-3} + 1 - \ln x$ es la solución general de la ecuación diferencial propuesta.

Ejercicios 1.8: Utilice los *Teoremas 1.8* B, C y D para los ejercicios 1, 2, 3 y 4; además, el *Teorema 1.8 A* para el ejercicio 2.

1. Considere la ecuación diferencial lineal de orden n: $\phi(D)\,y = F(x)$ y su respectiva ecuación homogénea $\phi(D)\,y = 0$. Para cada caso:
   (i) Verifique que y_c es la solución complementaria (general) de $\phi(D)\,y = 0$
   (ii) Verifique que y_p es una solución particular de $\phi(D)\,y = F(x)$
   (iii) Determine la solución general de $\phi(D)\,y = F(x)$

   a. $y'' - 3y' + 2y = x \quad (x \in IR)$
   $y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$
   $y_p = x/2 + 3/4$

   b $y'' - 7y' + 10y = 24\,e^{x} \quad (x \in IR)$
   $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$
   $y_p = 6\,e^{x}$

   c. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln x \quad (x > 0)$
   $y_c = c_1 x^2 + c_2 x$
   $y_p = \dfrac{\ln x}{2} + \dfrac{3}{4}$

   d. $y'' + y = \sec x \quad (x \in IR)$
   $y_c = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$
   $y_p = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x \ln(\cos x)$

   e. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x} \quad (x \in IR)$
   $y_c = e^{-2x}(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x)$
   $y_p = 7\,e^{-4x}$

   f. $2x^2 y'' + 5xy' + y = x^2 - x \quad (x > 0)$
   $y_c = A\,x^{-1/2} + B\,x^{-1}$
   $y_p = \dfrac{x^2}{15} - \dfrac{x}{6}$

2. Para cada caso, verifique: (i) que las funciones dadas son soluciones linealmente independientes, en el intervalo indicado, de la ecuación diferencial propuesta y escriba la respectiva solución general; (ii) la identidad de Abel.
   a. $y'' - y' - 12y = 0 \quad ; \quad e^{-3x} \wedge e^{4x} \quad ; \quad \forall\, x \in IR$
   b. $y'' - 2y' + 5y = 0 \quad ; \quad e^{x}\cos(2x) \wedge e^{x}\,\mathrm{sen}(2x) \quad ; \quad \forall\, x \in IR$
   c. $4y'' - 4y' + y = 0 \quad ; \quad e^{x/2} \wedge x\,e^{x/2} \quad ; \quad \forall\, x \in IR$
   d. $x^2 y'' + xy' + y = 0 \quad ; \quad \cos(\ln x) \wedge \mathrm{sen}(\ln x) \quad ; \quad \forall\, x \in \,]\,0, +\infty\,[$
   e. $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0 \quad ; \quad x,\, x^{-2} \wedge x^{-2}\ln x \quad ; \quad \forall\, x \in \,]\,0, +\infty\,[$

3. Para cada caso, verifique que la familia de funciones de dos parámetros contenida en la función y, es la solución complementaria, en el intervalo indicado, de la correspondiente ecuación diferencial homogénea ($\phi(D)\,y = 0$).

   a. $y'' - 7y' + 10\,y = 24e^{x}$; $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + 6\,e^{x}$; $\forall\ x \in IR$

   b. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$; $y = c_1 e^{2x} + c_2\, x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2$; $\forall\, x \in IR$

4. Resuelva los siguientes problemas:

   a. ¿Es $y = A\,e^{-x}\cos(2x) + B\,e^{-x}\,\mathrm{sen}(2x)$ la solución general de la ecuación $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$? Justifique su respuesta.

   b. Considere la ecuación: $y''' + y'' - y' - y = 0$.

      Si $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + 5C_3 e^{-x}$ $\wedge$ $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$ son dos soluciones de la ecuación dada, ¿cuál es la solución general? Justifique.

   c. ¿Es $y = A + B\,x + C\,\mathrm{sen}\,x + D\,\cos x$ la solución general de la ecuación $y^{(4)} + y'' = 0$? Justifique su respuesta.

   d. ¿Es la función $y = C_1\, x^3 + C_2\, x^4 + 2\ln x + 1$ la solución general de la ecuación diferencial $x^2 y'' - 6\,x\,y' + 12\,y = 24\,\ln x - 2$, $\forall\ x > 0$? Justifique.

5. Considere la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \quad ; \quad \text{con } a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

   donde $a_0(x)$, $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son funciones continuas en un intervalo I.

   Sean $y_1 \wedge y_2$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1).

   a. Si $W\left(y_1, y_2\right)$ es el *wronskiano* de $y_1 \wedge y_2$, demostrar que:

$$a_0(x)\ \frac{dW}{dx} + a_1(x)\ W = 0$$

   b. Con base en lo obtenido en el punto anterior, demostrar el *Teorema 1.8 A* para el caso particular de la ecuación (1); o sea, deducir la *fórmula de Abel* dada por $W = C\,e^{-\int (a_1/a_0)\,dx}$, C constante, para el caso de una ecuación lineal de orden dos.

1.9 La Segunda Solución de una Ecuación Lineal de Orden Dos

El siguiente resultado nos permite obtener la segunda solución de una ecuación lineal de segundo orden, a partir de una solución conocida. La demostración del mismo se plantea en los *Ejercicios 1.9* a fin de que el estudiante la lleve a cabo.

Teorema 1.9: Si $y_1(x)$ es una solución, en algún intervalo I, de la ecuación diferencial lineal de segundo orden $a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \quad (a_0 \neq 0)$, entonces la otra solución $y_2(x)$, linealmente independiente con $y_1(x)$ en I, está dada por:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int (a_1/a_0)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx \qquad (y_1 \neq 0)$$

En tal caso, la solución general es: $y = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$.

Ejemplo 1: Sabiendo que $y_1(x) = x\,e^{-x}$, donde $x \neq 0$, es una solución de la ecuación $y'' + 2y' + y = 0$, obtenga la otra solución $y_2(x)$ de dicha ecuación, que sea linealmente independiente de $y_1(x)$, y escriba la respectiva solución general.

Solución: Observe que la ecuación propuesta es de coeficientes constantes; así, usando el teorema anterior y dado que: $-\int \frac{a_1}{a_0}\,dx = -\int 2\,dx = -2x$, entonces:

- $y_2(x) = xe^{-x}\int \frac{e^{-2x}}{x^2 e^{-2x}}\,dx = xe^{-x}\int \frac{dx}{x^2} = xe^{-x}\left(\frac{-1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = -e^{-x}$
- Por otra parte, $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} xe^{-x} & e^{-x} \\ e^{-x} - xe^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-2x} \neq 0$, por lo que $y_1 \wedge y_2$ son linealmente independiente entre sí.
- Finalmente, la solución general buscada es: $y(x) = C_1\,xe^{-x} - C_2\,e^{-x}$, la cual es equivalente a: $y(x) = A\,x\,e^{-x} + B\,e^{-x}$.

Ejemplo 2: Sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es una de las soluciones particulares de la ecuación $x\,y'' - (x+1)\,y' + y = 0$, con $x > 0$, obtenga la otra solución particular $y_2(x)$, linealmente independiente de $y_1(x)$, y dé la solución general.

Solución: Aquí, la ecuación propuesta es de coeficientes variables; así, usando el teorema anterior y dado que: $-\int \frac{a_1}{a_0}\,dx = \int \frac{x+1}{x}\,dx = x + \ln x$, entonces:

- $y_2(x) = e^x \int \frac{e^{x+\ln x}}{e^{2x}}\,dx = e^x \int \frac{x e^x}{e^{2x}}\,dx = e^x \int x\,e^{-x}\,dx$ (1)
- En la expresión anterior, la integral de la derecha requiere de una integración por partes, lo cual nos conduce a: $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x}$ (2)
- Luego, sustituyendo (2) en (1) se obtiene que:
  $y_2(x) = e^x\left[-x\,e^{-x} - e^{-x}\right] \quad \Leftrightarrow \quad y_2(x) = -x-1 = -(x+1)$
- Por otra parte, $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & -x-1 \\ e^x & -1 \end{vmatrix} = x\,e^x \neq 0$; por lo tanto, se concluye que $y_1 \wedge y_2$ son linealmente independiente entre sí.
- Finalmente, la solución general es: $y(x) = C_1 e^x - C_2(x+1)$, equivalente con la función: $y(x) = A\,e^x + B\,(x+1)$.

Ejercicios 1.9: Resuelva las siguientes situaciones.

1. Demuestre el *Teorema 1.9* ; o sea, (i) verifique la forma de $y_2(x)$; (ii) verifique que $y_1(x) \wedge y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación dada; (iii) justifique la forma de escribir la solución general. (Sugerencia: De los *Ejercicios 1.8*, use el No. 5, parte b, y la definición de wronskiano)
2. Para cada caso, usando el resultado del *Teorema 1.9*, determine la otra solución y_2, linealmente independiente con la solución particular dada y_1; además, indique la solución general de la respectiva ecuación diferencial.
   a. $y'' + 6y' + 9y = 0$ $\quad y_1 = e^{-3x}$
   b. $y'' - y' - 30y = 0$ $\quad y_1 = e^{6x}$
   c. $y'' + 9y = 0$ $\quad y_1 = \cos(3x)$
   d. $x^2 y'' - 6y = 0$ $\quad y_1 = x^3$
   e. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ $\quad y_1 = x^2$
   f. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$ $\quad y_1 = x^2\cos(\ln x)$
   g. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4^{-1})y = 0$ $\quad y_1 = \operatorname{sen} x \big/ \sqrt{x}$
   h. $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$ $\quad y_1 = 1$
   i. $4x^2 y'' + y = 0$ $\quad y_1 = \sqrt{x}\,\ln x$
   j. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ $\quad y_1 = e^{kx}\ (k \in IR,\ k \neq 0)$
   (Sugerencia: Primero determine el valor de la constante k)

2 PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER LA ECUACIÓN LINEAL DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES

❖ Recordar que una Ecuación Diferencial Lineal de Orden n, con <u>coeficientes constantes</u>, tiene la forma:
$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2}\, y'' + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = F(x) \qquad (a_0 \neq 0)$$
donde $a_0\,, a_1\,, \ldots\,, a_n$ son constantes.

❖ <u>Usando</u> <u>operadores</u>, la ecuación anterior se expresa como: $\phi(D)\, y = F(x)$ y la ecuación complementaria (homogénea) asociada a esta es: $\phi(D)\, y = 0$, con:
$$\phi(D) = a_0\, D^n + a_1\, D^{n-1} + a_2\, D^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\, D^2 + a_{n-1}\, D + a_n$$

❖ Por otra parte, se sabe que la <u>solución</u> <u>general</u> de la ecuación $\phi(D)\, y = F(x)$ está dada por: $y = y_c + y_p$, donde y_c –provista de parámetros arbitrarios– es la solución complementaria (solución general) de la ecuación homogénea $\phi(D)\, y = 0$, mientras que y_p –libre de parámetros– es una solución particular de la ecuación **no** homogénea $\phi(D)\, y = F(x)$.

2.1 *Solución Complementaria de la Ecuación Homogénea*

A continuación, se desarrollará la técnica para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea $\phi(D)\, y = 0$; o sea, se estudiará la forma de proceder para determinar la *solución complementaria* y_c de dicha ecuación.

❖ Como introducción al tema, considere la ecuación lineal de primer orden: $y' - 2\,y = 0$. Se puede verificar que su solución general es: $y = C\,e^{2x}$. Lo anterior nos permite suponer que toda ecuación homogénea $\phi(D)\, y = 0$, con **coeficientes constantes**, tiene por solución particular (o principal) una función exponencial de la forma: $y = e^{m x}$, donde m es un número por determinar.

❖ En efecto, observe que $y' = m\, e^{m x}$ y si $y = e^{m x}$ es una solución de $y' - 2\,y = 0$
$\Rightarrow \quad m\, e^{m x} - 2\, e^{m x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{m x}(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2$.
Por lo tanto, $y = e^{2x}$ es una solución particular de $y' - 2\,y = 0$ y su respectiva solución general es $y = C\,e^{2x}$ (*Teorema 1.8 C*, página 10).

❖ Por otra parte, usando la **notación** de **operadores**, dado que $y' - 2\,y = 0$, se sigue que $(D-2)\,y = 0$, donde $\phi(D) = D - 2$. Se puede observar que la solución principal de la ecuación propuesta; y por tanto, su solución general, se puede obtener del cero o raíz de la ecuación $\phi(m) = 0$ (*ecuación auxiliar*), donde $\phi(m)$ tiene la misma forma que $\phi(D)$; a saber, $\phi(m) = m - 2$.

2.1.1 Ecuación Lineal Homogénea de Segundo Orden

❖ Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0 \quad (a_0 \neq 0),\ \text{con}\ a_0,\, a_1,\, a_2\ \text{constantes.} \tag{1}$$

❖ En la notación de operadores se tiene que:

$$(a_0\, D^2 + a_1\, D + a_2)\, y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(D) = a_0\, D^2 + a_1\, D + a_2$$

❖ Sabiendo que $\phi(m)$ tiene la misma forma que $\phi(D)$, entonces la respectiva *ecuación auxiliar* o *ecuación característica* está dada por:

$$\phi(m) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_0\, m^2 + a_1\, m + a_2 = 0$$

❖ Si $y = e^{m\,x}$, con m número real o complejo, es una solución particular de la ecuación (1), entonces su *solución complementaria* y_c (o solución general) se obtiene directamente de las raíces de la *ecuación auxiliar* $\phi(m) = 0$.

❖ Dado que $\phi(m) = 0$ es una ecuación cuadrática y los ceros de ésta dependen del valor del discriminante $\Delta = a_1^2 - 4\,a_0\, a_2$, se deben considerar tres casos, los cuales se describen a continuación:

<u>I CASO</u>: El discriminante es mayor que cero $(\Delta > 0)$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow \phi(m) = 0$ tiene *dos raíces reales diferentes*; a saber, $m_1 \wedge m_2$.
- Luego, $y_1 = e^{m_1 x} \wedge y_2 = e^{m_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes (*l.i.*) de la ecuación (1).
- Por lo tanto, la *solución complementaria* o *general* viene dada por:

$$y = y_c = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 \qquad \Rightarrow \qquad y = C_1\, e^{m_1 x} + C_2\, e^{m_2 x}$$

<u>Ejemplo 1</u>: Resuelva la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 0$ o bien $(D^2 - 3D + 2)\, y = 0$

.***<u>Solución</u>:* *En este caso, la* *ecuación auxiliar*** $\phi(m) = 0$ ***es*** $m^2 - 3m + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (m-1)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$ y $m = 2$ (ceros reales diferentes)

$\Rightarrow \quad y_1 = e^{x} \wedge y_2 = e^{2x}$ son las dos soluciones *l.i.* de la ecuación propuesta.

Así, la solución general (complementaria) es: $y = y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

<u>II CASO</u>: El discriminante es igual a cero $(\Delta = 0)$

- Si $\Delta = 0 \;\Rightarrow\; \phi(m) = 0$ tiene *dos raíces reales iguales* a m_1 (raíz doble).

  Por lo tanto, **solo** se puede obtener **una** solución exponencial: $y_1 = e^{m_1 x}$, para la cual, por la fórmula cuadrática, se sabe que $m_1 = -a_1/2\,a_0$ o $2m_1 = -a_1/a_0$.

- Por otra parte, la **segunda solución** de la ecuación (1) se obtiene haciendo uso del *Teorema 1.9* (página 13); a saber:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int (a_1/a_0)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = y_1 \int \frac{e^{-(a_1/a_0)\,x}}{(y_1)^2}\,dx \,.\text{ Como } 2m_1 = -a_1/a_0 \quad \Rightarrow$$

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2\,m_1 x}}{e^{2\,m_1 x}}\,dx = e^{m_1 x} \int dx = x\,e^{m_1 x}$$

- Luego, $y_1 = e^{m_1 x} \wedge y_2 = x\,e^{m_1 x}$ son dos soluciones *l.i.* de la ecuación (1).
- Por lo tanto, la *solución complementaria* (*general*) viene dada por:

$$y = y_c = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{m_1 x} + C_2\, x e^{m_1 x} = (C_1 + C_2\, x)\, e^{m_1 x}$$

<u>Ejemplo 2</u>: Resuelva la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$ o bien $(D^2 + 4D + 4)\,y = 0$

<u>Solución</u>: En este caso, la *ecuación auxiliar* $\phi(m) = 0$ es $m^2 + 4m + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad (m+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2$ (raíz real doble)

$\Rightarrow \quad y_1 = e^{-2x} \wedge y_2 = x e^{-2x}$ son las dos soluciones *l.i.* buscadas.

Luego, la solución general es: $y = C_1 e^{-2x} + C_2\, x e^{-2x} = (C_1 + C_2\, x)\, e^{-2x}$.

<u>III CASO</u>: El discriminante es menor que cero $(\Delta < 0)$

- Si $\Delta < 0 \;\Rightarrow\; \phi(m) = 0$ tiene *dos raíces complejas diferentes*; a saber, $m_1 = a + bi \wedge m_2 = a - bi$, con $a \wedge b \in IR$ (raíces complejas conjugadas).

- Luego, $y_1 = e^{(a+bi)\,x} \quad \wedge \quad y_2 = e^{(a-bi)\,x}$ son dos soluciones *l.i.* de (1).

- Por lo tanto, la *solución complementaria* (*general*) viene dada por:

$$y = A\,e^{(a+bi)\,x} + B\,e^{(a-bi)\,x} = e^{ax}\left\lfloor A\,e^{bix} + B\,e^{-bix} \right\rfloor \qquad \Rightarrow$$

$$y = e^{ax}\left[A\left(\cos(bx) + i\ \mathrm{sen}(bx)\right) + B\left(\cos(bx) - i\ \mathrm{sen}(bx)\right)\right] \qquad \Rightarrow$$

$$y = e^{ax}\left[(A+B)\cos(bx) + (Ai - Bi)\,\mathrm{sen}(bx)\right] = e^{ax}\left[C_1\cos(bx) + C_2\,\mathrm{sen}(bx)\right],$$

$C_1 \wedge C_2$ constantes reales, lo que ocurre si *A* y *B* son complejos conjugados.

- **Observe** que las dos soluciones principales o particulares *l.i.* son:

$$y_1 = e^{ax}\cos(bx) \qquad \wedge \qquad y_2 = e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)$$

Ejemplo 3: Resuelva la ecuación $y'' + 2y' + 5y = 0$ o bien $(D^2 + 2D + 5)\,y = 0$

Solución: En este caso, la *ecuación auxiliar* $\phi(m) = 0$ es $m^2 + 2m + 5 = 0$.

Como $\Delta = -16 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} \quad \Rightarrow \quad m = -1 \pm 2i$ (raíz compleja)

$\Rightarrow \quad y_1 = e^{-x}\cos(2x) \ \wedge \ y_2 = e^{-x}\,\mathrm{sen}(2x)$ son las dos soluciones *l.i.* buscadas.

Por lo que la solución general es: $y = y_c = e^{-x}\left[C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x)\right]$.

Ejercicios 2.1.1: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

1. $9y'' - 4y = 0$
2. $4y'' + 4y' + y = 0$
3. $y'' + 4y' + 5y = 0$
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$
5. $y'' - y' - 12y = 0$
6. $2y'' - 6y' + 5y = 0$
7. $y'' - y' - 2y = 0$
8. $2y'' + 5y' = 0$
9. $16y'' + 9y = 0$
10. $9y'' - 6y' + y = 0$

2.1.2 Ecuación Lineal Homogénea de Orden Superior

❖ El método para resolver una ecuación diferencial lineal homogénea de orden *n*, con $n \geq 3$, de la forma $\phi(D)\,y = 0$, *es una generalización* de la técnica desarrollada para las ecuaciones lineales de orden dos.

❖ De la misma manera, los ceros o raíces de su respectiva *ecuación auxiliar* $\phi(m) = 0$, determinan la solución general de $\phi(D)\,y = 0$, sabiendo que una solución principal o particular de ésta es una función exponencial de la forma: $y = e^{mx}$, donde *m* es un número real o complejo por determinar. Por lo tanto, se tienen las siguientes tres situaciones:

<u>I CASO</u>: La ecuación auxiliar $\phi(m)=0$, tiene *n raíces reales diferentes*; a saber: m_1, m_2, m_3, …, m_n.

- Así, las n soluciones $l.i.$ de $\phi(D)\,y=0$ son: $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, e^{m_3 x}, \dots, e^{m_n x}$
- Por lo tanto, la *solución complementaria* (*general*) viene dada por:

$$y = C_1\, e^{m_1 x} + C_2\, e^{m_2 x} + C_3\, e^{m_3 x} + \dots + C_n\, e^{m_n x}$$

<u>Ejemplo 1</u>: Resuelva la ecuación $(D^3+D^2-6D)\,y=0 \quad (y'''+y''-6y'=0)$.

<u>Solución</u>: En este caso, la *ecuación auxiliar* $\phi(m)=0$ es $m^3+m^2-6m=0$

$\Rightarrow \quad m(m-2)(m+3)=0 \quad \Rightarrow \quad m=0$, $m=2$ y $m=-3$ (ceros diferentes)

$\Rightarrow \quad y_1=1$, $y_2=e^{2x} \quad \wedge \quad y_3=e^{-3x}$ son las soluciones $l.i.$ buscadas.

Así, la solución general (complementaria) es: $y=y_c=C_1+C_2\,e^{2x}+C_3\,e^{-3x}$.

<u>II CASO</u>: La ecuación auxiliar $\phi(m)=0$, tiene a m_1 como *raíz repetida k veces* (multiplicidad *k*), por lo que $(m-m_1)^k$ es un factor de dicha ecuación.

- Luego, las k soluciones *l.i.* son: $e^{m_1 x}, x\, e^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, x^3 e^{m_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{m_1 x}$

- Por lo tanto, la *solución complementaria* de $\phi(D)\,y=0$ debe contener una combinación lineal de esas k soluciones; a saber, una expresión de la forma:

$$e^{m_1 x}\,(C_1 + C_2\, x + C_3\, x^2 + C_4\, x^3 + \dots + C_k\, x^{k-1}) \qquad (*)$$

- Si la multiplicidad de m_1 coincide con el orden de la ecuación diferencial; o sea, si $k=n$, entonces (*) es la solución general buscada. En caso contrario, si $k<n$, entonces (*) debe combinarse con las otras soluciones de la ecuación auxiliar para obtener la solución general completa de $\phi(D)\,y=0$.

<u>Ejemplo 2</u>: Resuelva la ecuación $(D^3+3D^2-4)\,y=0 \quad (y'''+3y''-4y=0)$.

<u>Solución</u>: Aquí, la *ecuación auxiliar* $\phi(m)=0$ es $m^3+3m^2-4=0$

$\Rightarrow \quad (m-1)(m+2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=1$ y $m=-2$ (raíz doble)

$\Rightarrow \quad y_1=e^{x}$, $y_2=e^{-2x} \quad \wedge \quad y_3=xe^{-2x}$ son las soluciones $l.i.$ requeridas.

Por lo tanto, la solución general buscada es: $y=y_c=C_1 e^{x}+(C_2+C_3 x)\,e^{-2x}$.

<u>III CASO</u>: La ecuación auxiliar $\phi(m)=0$, tiene *raíces complejas conjugadas*, diferentes o repetidas, a saber: $m = a \pm b\,i$ (en parejas).

- En este caso, a **cada pareja** le corresponde **una** solución de la forma:

$$e^{ax}\left[C_1\cos(bx)+C_2\,\operatorname{sen}(bx)\right]$$

- Finalmente, la *solución general* (*complementaria*) de la ecuación diferencial $\phi(D)\,y=0$ resulta de combinar las soluciones anteriores, con las otras soluciones de la ecuación auxiliar $\phi(m)=0$; para lo cual, se aplican, según corresponda, los casos vistos para las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden.

<u>Ejemplo 3</u>: Resuelva la ecuación $(D^5-4D^4+2D^3-8D^2+D-4)\,y=0$.

<u>Solución</u>: Aquí, la *ecuación auxiliar* es $m^5-4m^4+2m^3-8m^2+m-4=0$

$\Rightarrow \quad (m-4)(m^4+2m^2+1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad (m-4)(m^2+1)^2=0$

$\Rightarrow \quad m=4$ y $m=\pm\,i$ (raíz compleja doble)

Por lo tanto, las soluciones $l.i.$ que corrresponden para esta situación son:

$$y_1=e^{4x},\;\; y_2=\cos x,\;\; y_3=\operatorname{sen}x,\;\; y_4=x\cos x \;\;\wedge\;\; y_5=x\operatorname{sen}x$$

Finalmente, la solución general está dada por:

$$y=C_1e^{4x}+C_2\cos x+C_3\operatorname{sen}x+x\left[C_4\cos x+C_5\operatorname{sen}x\right]$$ o bien

$$y=A\,e^{4x}+(Bx+C)\cos x+(Dx+E)\operatorname{sen}x\,.$$

<u>Ejercicios 2.1.2</u>:

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

a. $2y'''+y''-18y'-9y=0$

b. $y'''-3y''+3y'-y=0$

c. $y^{(4)}+3y''-4y=0$

d. $y'''-6y''+11y'-6y=0$

e. $4y'''-3y'+y=0$

f. $y'''-5y''+9y'-45y=0$

g. $3y^{(4)}+y'''-3y''-y'=0$

h. $y^{(4)}+2y'''-2y'-y=0$

i. $3y'''-19y''+36y'-10y=0$

j. $y^{(4)}-y'''-7y''+y'+6y=0$

k. $y^{(5)}-y^{(4)}-2y'''+2y''+y'-y=0$

l. $y^{(4)}-4y''+16y'+32y=0$

2. ¿Cuál es la solución general de una ecuación lineal homogénea, cuya ecuación auxiliar tiene: (a) las raíces –3 y 2; (b) la raíz triple 0; (c) las raíces dobles $-1 \pm i\sqrt{2}$. ¿Cuál es el orden de esta ecuación?

3. Una ecuación lineal homogénea, de tercer orden, tiene una solución dada por: $y = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^{3x}$. ¿Podría ser esta la solución general de dicha ecuación? (Justifique). En caso afirmativo, ¿cuál es la respectiva ecuación diferencial?

4. Una ecuación diferencial homogénea, de tercer orden, tiene una solución dada por la función: $y = C_1 + C_2\operatorname{sen}^2 x + C_3\cos^2 x$. ¿Es esta la solución general de dicha ecuación? (Justifique).

5. Determine la ecuación diferencial lineal que tiene como solución general la función dada por:
   a. $y = (C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2)\,e^{-2x}$
   b. $y = C_1\,e^{-3x} + C_2\,e^{2x} + C_3\,x\,e^{2x}$
   c. $y = C_1 + C_2\,e^{x} + C_3\cos(3x) + C_4\operatorname{sen}(3x)$
   d. $y = A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x) + e^{-x}\left[C\operatorname{sen}x + D\cos x\right]$

6. Sabiendo que $y = A\,e^{x/2} + e^{-2x}\left[B\operatorname{sen}(4x) + C\cos(4x)\right]$ es la solución general de la ecuación lineal $(a_0 D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3)\,y = 0$, determine el valor de los coeficientes a_0 , a_1 , $a_2 \wedge a_3$ y escriba la ecuación diferencial resultante.

7. Determine el valor de las constantes a, b, c y d tales que la ecuación diferencial $y^{(4)} + a\,y''' + b\,y'' + c\,y' + d\,y = 0$ tenga como solución general a la función dada por $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{x} + e^{-x}\left[C_3\operatorname{sen}(3x) + C_4\cos(3x)\right]$.

OBSERVACIÓN FINAL

En este contexto, *"ecuación homogénea"* **NO** significa que la ecuación está compuesta de *"funciones homogéneas"* (concepto estudiado en la etapa de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden). Aquí, el concepto de *"ecuación homogénea"* se refiere, simple y sencillamente, a que la ecuación diferencial **está igualada a cero**.

2.2 *Solución Particular de la Ecuación* $\phi(D)\,y = F(x)$, $F(x) \neq 0$

En esta sección se estudiará el procedimiento para obtener la **solución general** de la ecuación diferencial lineal de **coeficientes constantes** $\phi(D)\,y = F(x)$, con $F(x) \neq 0$ –**también conocida como ecuación no homogénea**–, solución que, como ya lo sabemos, tiene la forma $y = y_c + y_p$.

Para tal efecto, **primero** se debe encontrar la *solución complementaria* y_c de la ecuación homogénea asociada, tema ya desarrollado en la **Sección 2.1**. En **segundo** lugar, debemos hallar *cualquier solución particular* y_p de la ecuación no homogénea, aspecto del cual nos ocuparemos en los **apartados 2.2.1** y **2.2.2**.

Es importante hacer la observación de que la técnica que se desarrolla en el siguiente apartado (2.2.1) no es única. Existe otro método, con un enfoque muy diferente al que se tratará aquí, que requiere de un conocimiento del concepto del *"operador aniquilador"*, técnica que será presentada en el **Anexo A**, a fin de que el profesor, así como el estudiante, tenga la opción de utilizar el procedimiento que más le satisfaga.

2.2.1 Método de los Coeficientes Indeterminados

Esta técnica se aplica para obtener una *solución particular* y_p de la ecuación lineal no homogénea de orden n, $\phi(D)\,y = F(x)$, **siempre y cuando** se cumplan, **simultáneamente**, las **dos** condiciones siguientes:

1. La ecuación diferencial sea **solo** de **coeficientes constantes**
2. La función $F(x)$ contenga:
   - expresiones polinomiales (constantes, lineales, de grado dos, etc.)
   - expresiones de la forma: e^{ax}, $\operatorname{sen}(bx)$, $\cos(bx)$ (a y b constantes reales)
   - combinaciones lineales de sumas y productos <u>finitos</u> de estas expresiones

El tipo de funciones descrito anteriormente tiene la propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son, de nuevo, sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales, senos y cosenos.

Así, **por ejemplo**, para el caso de la ecuación diferencial lineal de segundo orden $a_0\,y'' + a_1\,y' + a_2\,y = F(x)$, si y_p es una solución particular de ésta, entonces debe satisfacerla; es decir, que la combinación lineal de y_p y sus derivadas debe ser igual a $F(x)$. En otras palabras, $a_0\,y_p'' + a_1\,y_p' + a_2\,y_p = F(x)$ **es una identidad**.

Con base en lo anterior, **parece razonable suponer** que una adecuada propuesta para y_p es aquella que **tiene la misma forma que** $F(x)$ (ver el I CASO). Sin embargo, esta **conjetura** puede, eventualmente, enfrentarnos ante una situación, conocida como los *"tropiezos del método"*, en la cual la **suposición obvia** para y_p **no es la correcta**, por lo que se debe tomar en consideración algunos otros aspectos que serán tratados posteriormente (ver el II CASO).

I CASO: Ninguna de las funciones que conforman la propuesta de y_p se repite con respecto a las funciones que componen la solución complementaria y_c.

Lo anterior se puede sintetizar diciendo que *"la forma de la solución particular* **NO está contenida** *en la solución complementaria"*, o sea, $y_p \not\subset y_c$. Veamos algunas propuestas con el fin de ilustrar el presente caso.

PROPUESTAS DE SOLUCIONES PARTICULARES

Función $F(x)$	Forma de y_p (basada en la estructura de $F(x)$)
$3\,e^{2x}$	$A\,e^{2x}$
$2x+5$	$Ax+B$
x^2-x-3	Ax^2+Bx+C
$(x-3)\,e^{-x/2}$	$(Ax+B)\,e^{-x/2}$
$(x^2-1)\,e^{-3x}$	$(Ax^2+Bx+C)\,e^{-3x}$
$\operatorname{sen}(3x)$	$A\operatorname{sen}(3x)+B\cos(3x)$
$e^{-x}\cos(2x)$	$e^{-x}\left(A\cos(2x)+B\operatorname{sen}(2x)\right)$
$3x^2\operatorname{sen}(5x)$	$(Ax^2+Bx+C)\operatorname{sen}(5x)+(Dx^2+Ex+F)\cos(5x)$
$x\,e^x\cos x$	$e^x\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\operatorname{sen}x\right]$

Cabe recordar que como y_p carece de parámetros arbitrarios, en todos los casos, A, B, C, D, etc., son coeficientes por determinar; o sea, que se bebe encontrar un **valor específico** para cada una de estas constantes. Esto justifica el nombre de *coeficientes indeterminados* con que se denomina el método que nos ocupa.

A continuación, se presenta un resumen del procedimiento a seguir para resolver la ecuación diferencial lineal, no homogénea, $\phi(D)\,y = F(x)$:

a. Resuelva la ecuación homogénea $\phi(D)\,y = 0$ para obtener la respectiva solución complementaria y_c, lo cual permite verificar si $F(x)$, y por lo tanto la supuesta forma de y_p, contiene términos duplicados con respecto a y_c.

b. Determine la **forma** de y_p con base en la estructura de la función $F(x)$; use coeficientes indeterminados tales como: A, B, C, D, etc.

c. Basado en el hecho de que y_p satisface la ecuación diferencial por resolver, sustituya y_p y sus derivadas en la ecuación $\phi(D)\,y = F(x)$, a fin de obtener la identidad buscada.

d. Para obtener los valores de los coeficientes indeterminados de y_p, resuelva el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al igualar, según corresponda, los coeficientes (determinados e indeterminados) de las diferentes funciones que aparecen en ambos lados de la identidad resultante del paso anterior.

e. Escriba la solución general correspondiente; a saber: $y = y_c + y_p$.

<u>Ejemplo 1</u>: Resuelva la ecuación $y'' - 2y' + y = 3x - 4\,\text{sen}x$. (*)

- De la ecuación homogénea $y'' - 2y' + y = 0$, se tiene la ecuación auxiliar $m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$ (raíz doble).

  Por lo tanto, la solución complementaria es: $y_c = C_1 e^x + C_2\, x e^x$.

- Se puede observar que **ninguno** de los términos de $F(x) = 3x - 4\,\text{sen}x$ se encuentra en y_c. Además, $F(x)$ contiene a la función $F_1(x) = 3x$ y a la función $F_2(x) = -4\,\text{sen}x$, cuyas derivadas sucesivas producen términos del $\text{sen}x$ y $\cos x$. Lo indicado sugiere que la forma de y_p debe incluir un polinomio lineal, así como una combinación lineal del $\text{sen}x$ y $\cos x$.

  Con base en lo anterior, **la forma apropiada** de la solución particular es:

$$y_p = Ax + B + C\,\text{sen}x + D\cos x \qquad \Rightarrow$$
$$y_p' = A + C\cos x - D\,\text{sen}x \qquad \Rightarrow$$
$$y_p'' = -C\,\text{sen}x - D\cos x$$

- Como se busca determinar **valores específicos** para los coeficientes A, B, C y D, para los cuales y_p es una solución de la ecuación diferencial dada en (*), entonces se sustituye y_p –y sus derivadas– en la ecuación indicada para obtener la identidad $y_p'' - 2y_p' + y_p = 3x - 4\,\text{sen}x$, de la cual, después de operar y reagrupar términos semejantes, se llega a:

$$Ax + (B - 2A) - 2C\cos x + 2D\,\text{sen}x = 3x - 4\,\text{sen}x$$

- Igualando, según corresponda, los coeficientes de las diferentes funciones que aparecen en ambos lados de la identidad anterior, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, a saber:

  $$A = 3\ ,\ \ B - 2A = 0\ ,\ \ -2C = 0 \quad \text{y} \quad 2D = -4$$

  Resolviendo, se encuentra que: $A = 3$, $B = 6$, $C = 0$ y $D = -2$

  Como consecuencia: $y_p = 3x + 6 - 2\cos x$.
- Finalmente, la solución general buscada es:

  $$y = y_c + y_p = (C_1 + C_2\, x)\, e^{x} + 3x + 6 - 2\cos x$$

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación $y'' - 4y' + 3y = 27 - 32\,xe^{-x}$. (*)

- La ecuación homogénea $y'' - 4y' + 3y = 0$, nos lleva a la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 3 = 0 \;\Rightarrow\; (m-1)(m-3) = 0 \;\Rightarrow\; m = 1$ y $m = 3$ (raíces reales diferentes).

  Por lo que la solución complementaria es: $y_c = C_1 e^{x} + C_2\, e^{3x}$.

- Al Igual que en el *Ejemplo 1*, se observa que **ninguno** de los términos de $F(x) = 27 - 32\,xe^{-x}$ se encuentra en y_c. Por otra parte, $F(x)$ contiene a la función $F_1(x) = 27$, que sugiere que y_p incluya un polinomio constante, y a la función $F_2(x) = -32\,xe^{-x}$ cuyas derivadas sucesivas producen los términos $-32e^{-x}$ y $32\,xe^{-x}$ lo cual sugiere que y_p los incluya a ambos.

  Con base en lo anterior, **la forma adecuada** de la solución particular es:

  $$y_p = A + Be^{-x} + C\,xe^{-x} \qquad \Rightarrow$$
  $$y_p' = -Be^{-x} + Ce^{-x} - C\,xe^{-x} \qquad \Rightarrow$$
  $$y_p'' = Be^{-x} - 2Ce^{-x} + C\,xe^{-x}$$
- Para determinar los **valores específicos** de los coeficientes A, B y C, se sustituye y_p –y sus derivadas– en la ecuación diferencial dada en (*) para obtener la identidad $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 27 - 32\,xe^{-x}$. De ésta, después de operar y reagrupar términos semejantes, se obtiene que:

  $$3A + 8C\,xe^{-x} + (8B - 6C)\, e^{-x} = 27 - 32\,xe^{-x}$$
- Igualando los coeficientes respectivos de cada una de las funciones que aparecen en ambos lados de la identidad anterior, se obtiene un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, dado por:
-

  $$3A = 27\ ,\ \ 8C = -32 \quad \text{y} \quad 8B - 6C = 0$$

Resolviendo, obtenemos que: $A=9$, $B=-3$ y $C=-4$

Por lo que: $y_p = 9 - 3e^{-x} - 4xe^{-x}$.

- Finalmente, la solución general buscada es:

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + 9 - (3+4x)\, e^{-x}$$

<u>NOTA</u> <u>IMPORTANTE</u>: Antes de proceder con el siguiente caso, cabe mencionar que en los dos ejemplos anteriores se ilustra el hecho de que la suma de dos o más soluciones particulares de una ecuación diferencial lineal no homogénea $\phi(D)\, y = F(x)$, es también una solución particular de dicha ecuación.

Con base en este principio, los ejemplos citados pueden enfocarse desde otro punto de vista, y es el de resolver dos problemas más simples.

Para ver en qué consiste este hecho, retomemos la ecuación diferencial del ***Ejemplo 1***, a saber, $y'' - 2y' + y = 3x - 4\,\mathrm{sen}x$, en donde $F(x) = 3x - 4\,\mathrm{sen}x$, que como se indicó, contiene a las funciones $3x$ y $-4\,\mathrm{sen}x$, por lo que se propuso como solución particular a $y_p = Ax + B + C\,\mathrm{sen}x + D\cos x$.

Se puede notar fácilmente que $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, de donde, según la función $F(x)$, se sigue que:

$y_{p_1} = Ax + B$ corresponde al término $3x$ y

$y_{p_2} = C\,\mathrm{sen}x + D\cos x$ corresponde al término $-4\,\mathrm{sen}x$

Por otra parte, se puede verificar que al sustituir:

(i) $y_{p_1} = Ax + B$ en $y'' - 2y' + y = 3x$ se obtiene: $y_{p_1} = 3x + 6$ y

(ii) $y_{p_2} = C\,\mathrm{sen}x + D\cos x$ en $y'' - 2y' + y = -4\,\mathrm{sen}x$ se obtiene: $y_{p_2} = -2\cos x$

Se concluye, entonces, que: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = 3x + 6 - 2\cos x$, lo cual coincide con lo obtenido en el ejemplo en cuestión.

<u>II CASO</u>: Una o varias de las funciones que conforman la propuesta de y_p también forman parte de algún o algunos de los componentes de la solución complementaria y_c.

Como se presentan soluciones repetidas, lo anterior se puede sintetizar diciendo que *"la forma de la solución particular* **está contenida** *en la solución complementaria"*, o sea, $y_p \subset y_c$.

El procedimiento a seguir aquí para solucionar la ecuación $\phi(D)\, y = F(x)$ es **muy similar** al descrito para el caso anterior. La **diferencia fundamental radica** en el hecho de que para hacer la propuesta de la solución particular, se debe considerar

cuántas veces aparece en la solución complementaria, el o los componentes que **también están en la función** $F(x)$ y que, por lo tanto, formarán parte de y_p. En otras palabras, para hacer una **propuesta adecuada** de y_p, se debe seguir un procedimiento análogo al estudiado en la **Sección 2.1**, en lo que respecta a las *"raíces repetidas"*, reales o complejas, de la ecuación auxiliar asociada a la ecuación homogénea.

Ejemplo 3: Halle una solución particular de: $y'' - 4y' + 3y = 27 - 32e^{3x}$. $(*)$

- Del ***Ejemplo 2***, página 25, se sabe que la solución complementaria de la ecuación homogénea $y'' - 4y' + 3y = 0$, es: $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.
- Dado que $F(x) = 27 - 32e^{3x}$, **parece razonable suponer** que una **solución particular podría** ser:

$$y_p = A + Be^{3x} \quad \Rightarrow$$
$$y_p' = 3Be^{3x} \quad \Rightarrow$$
$$y_p'' = 9Be^{3x}$$

  Al sustituir y_p en la ecuación diferencial $(*)$, nos damos cuenta que **NO** la satisface ya que **NO** se obtiene, como es lo esperado, una identidad, sino que nos conduce a $3A + 0 = 27 - 32e^{3x}$, de donde, como $A = 9$, se sigue que $0 = -32e^{3x}$, lo cual es una expresión contradictoria puesto que $-32e^{3x}$ NUNCA ES CERO, o sea, $-32e^{3x} \neq 0$, $\forall x \in IR$.
- Cabe preguntarse, **¿por qué se da la contradicción** $-32e^{3x} = 0$ **?**
  Según lo expuesto en la **NOTA** de la página 26, si $y_{p_1} = A$ y $y_{p_2} = Be^{3x}$, correspondiendo respectivamente a los términos 27 y $-32e^{3x}$ de $F(x)$, podemos notar que $y_{p_2} = Be^{3x}$ **está presente** en la solución complementaria $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, lo que significa que e^{3x} es una solución de la ecuación $y'' - 4y' + 3y = 0$ por lo que cualquier múltiplo de ella, como Be^{3x}, también lo es y, por lo tanto, al sustituirla en la ecuación $y'' - 4y' + 3y = -32e^{3x}$, necesariamente se obtendrá cero; de ahí, la contradicción $-32e^{3x} = 0$. Se concluye, entonces, que la **suposición obvia** hecha para y_p es **incorrecta**.
- **¿Cuál debe ser, entonces, la propuesta correcta para y_p?**
  Para lograr el éxito esperado, como se indicó, nos basaremos en lo estipulado para *"raíces repetidas"* (Sección 2.1) con el fin de utilizar un procedimiento similar al estudiado en aquel momento.

Por consiguiente, dado que y_c **tiene prioridad sobre** y_p, esto nos indica, para este ejemplo, que como e^{3x} aparece por **primera vez** en y_c, entonces a y_{p_2} le corresponde la **segunda posición**, de aquí que la propuesta buscada tiene la forma:

$$y_{p_2} = Bxe^{3x} \quad \Rightarrow$$
$$y'_{p_2} = Be^{3x} + 3Bxe^{3x} \quad \Rightarrow$$
$$y''_{p_2} = 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$

- Luego, para determinar el valor <u>específico</u> del coeficiente B, se sustituye y_{p_2} en la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 3y = -32e^{3x}$, obteniéndose, después de agrupar los términos semejantes, que: $2Be^{3x} = -32e^{3x} \quad \Rightarrow \quad B = -16$. Luego, $y_{p_2} = -16xe^{3x}$, por lo que $y_p = 9 - 16xe^{3x}$.
- Finalmente, obsérvese que la solución general es:

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 9 - 16xe^{3x} = C_1e^x + 9 + (C_2 - 16x)\,e^{3x}.$$

<u>Ejemplo 4</u>: Resuelva la ecuación: $y''' + 2y'' = -8x + 3e^{-2x}$ (*)

- Para la ecuación homogénea $y''' + 2y'' = 0$, se tiene la ecuación auxiliar $m^3 + 2m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2(m+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ (doble) y $m = -2$.

  Luego, la solución complementaria es: $y_c = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}$.
- Puesto que $F(x) = -8x + 3e^{-2x}$, si se sigue un razonamiento similar al utilizado en el ***Ejemplo 3***, la **hipótesis obvia** $y_{p_1} = A + Bx$, para el término $-8x$ de $F(x)$, es **incorrecta** pues, por lógica, nos va a conducir a una contradicción ya que A y Bx están, ambas, presentes en y_c; o sea, corresponden a los múltiplos respectivos de 1 y de x, por lo que también son soluciones de la ecuación homogénea $y''' + 2y'' = 0$.

  Ahora bien, puesto que 1 y x ocupan las **dos primeras posiciones** en y_c, entonces a y_{p_1} le corresponden la **tercera** y **cuarta posición**; de aquí, la

  <u>propuesta</u> <u>correcta</u> es: $\boxed{y_{p_1} = Ax^2 + Bx^3}$

  Por otra parte, observe que, para el término $3e^{-2x}$ de $F(x)$, la **suposición** $y_{p_2} = Ce^{-2x}$ **es también incorrecta** pues e^{-2x} aparece, por **primera vez**, en y_c, por lo que le corresponde la **segunda posición** en y_{p_2}. Por lo tanto, se sigue que la **<u>propuesta</u> <u>correcta</u>** es: $\boxed{y_{p_2} = Cxe^{-2x}}$

Se concluye que la forma buscada para y_p es:

$$
\begin{aligned}
y_p &= Ax^2 + Bx^3 + C\,xe^{-2x} && \Rightarrow \\
y_p' &= 2Ax + 3Bx^2 + Ce^{-2x} - 2C\,xe^{-2x} && \Rightarrow \\
y_p'' &= 2A + 6Bx - 4Ce^{-2x} + 4C\,xe^{-2x} && \Rightarrow \\
y_p''' &= 6B + 12Ce^{-2x} - 8C\,xe^{-2x}
\end{aligned}
$$

- Los valores <u>específicos</u> de los coeficientes A, B y C se obtienen sustituyendo y_p –y sus derivadas– en la ecuación $y''' + 2y'' = -8x + 3e^{-2x}$, de donde después de agrupar los términos semejantes, se tiene:

$$(4A + 6B) + 12Bx + 4Ce^{-2x} = -8x + 3e^{-2x}$$

La identidad anterior nos lleva a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas; a saber:

$$4A + 6B = 0 \;\;,\;\; 12B = -8 \quad \text{y} \quad 4C = 3 \qquad \Rightarrow$$

$$A = 1 \;\;,\;\; B = -2/3 \quad \text{y} \quad C = 3/4$$

Como consecuencia: $y_p = x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}xe^{-2x}$.

- Finalmente, la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}xe^{-2x}$$

<u>Ejercicios 2.2.1</u>:

1. Resuelva las siguientes ecuaciones **relacionadas** con el **I CASO**.

   a. $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$

   b. $y'' + 3y' - 10y = x(6e^{x} - 5)$

   c. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3\cos x$

   d. $4y'' - 4y' + y = 5e^{x}(\operatorname{sen} x - \cos x)$

   e. $y'' - y' - 2y = 4x^2$

   f. $y'' - 5y' + 4y = 8\,e^{-2x}$

   g. $y''' + y'' = e^{x}\cos x$

   h. $y'' + 4y = 3\operatorname{sen}(5x)$

   i. $y'' + 2y' + y = 3x + 2 + 3e^{x} + 2\cos(2x)$

   j. $y'' + 4y' + 5y = 35\,e^{-4x}$; dado que $y(0) = -3,\; y'(0) = 1$

   k. $y'' - 64y = 16$; dado que $y(0) = 1 \;\wedge\; y'(0) = 0$

   l. $y'' - 4y' + 8y = 16\,x^3$; dado que $y(0) = 2 \;\wedge\; y'(0) = 4$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones **relacionadas** con el **II CASO**.
   a. $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12\,e^{3x}$
   b. $4y'' - 4y' + y = 12 + 4\,e^{x/2}$
   c. $y'' + y = 2\operatorname{sen}x + 6\cos x$
   d. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 12\,e^{2x}$
   e. $y'' + 4y' + 4y = 10\,e^{-2x}$
   f. $y''' + y'' = 8 - e^{-x}$
   g. $y'' - y' = -2x + e^{x}$; dado que $y(0) = -5 \;\wedge\; y'(0) = 0$
   h. $y'' + y = 4x + 10\operatorname{sen}x$; dado que $y(\pi) = 0 \;\wedge\; y'(\pi) = 2$
   i. $y'' + y = -4\operatorname{sen}x$; dado que $y(\pi/2) = -1 \;\wedge\; y'(\pi/2) = 0$

3. Si se sabe que la función $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$ es la solución complementaria de la ecuación lineal homogénea $\phi(D)y = 0$, resuelva la ecuación diferencial $\phi(D)y = 3(5\,e^{2x} - 2)$.

4. Determine la solución general de la ecuación diferencial $\phi(D)y = e^{x} - 4\operatorname{sen}x$, sabiendo que la ecuación auxiliar de la respectiva ecuación complementaria (homogénea) es $(m-1)^2 = 0$.

5. **Proponga únicamente** la **forma** de la **solución particular** correspondiente a las ecuaciones diferenciales siguientes:
   a. $y'' + 2y' + y = 2\,e^{-x}\left[\,1 - x\operatorname{sen}(3x)\,\right]$
   b. $y'' - 2y' + 5y = e^{x}\cos(2x) + 3x^2 - 4$
   c. $y'' - 4y' + 3y = 3\,e^{x} - (\,2 + x^3)\,e^{-x}$
   d. $4y'' + 36y = x^2 - 5x\cos(3x)$
   e. $y''' - 2y'' - 3y' = x^2 e^{-x} + 2x^3 e^{3x}$
   f. $y^{(4)} + 4y'' = \operatorname{sen}(2x) - xe^{3x} + 5$

6. Para cada caso, determine la ecuación diferencial que tiene como solución general la función indicada:
   a. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\,e^{-2x} + 2x$
   b. $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)\,e^{x} + 3x^3$
   c. $y = C_1 e^{-3x} + (C_2 + C_3 x)\,e^{x} - 7 + x\,e^{-3x}$
   d. $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \dfrac{1}{2}\,e^{2x}\operatorname{sen}x$
   e. $y = C_1 e^{-x} + e^{2x}\left[C_2\cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + C_3\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,x\right)\right] + xe^{-x} - x^2$
   f. $y = e^{-x}\left[C_1\operatorname{sen}(3x) + C_2\cos(3x)\,\right] + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 + \operatorname{sen}x + x$

2.2.2 Método de Variación de Parámetros

A diferencia del método estudiado en el apartado anterior, esta técnica se aplica para obtener una *solución particular* y_p de una ecuación diferencial lineal de orden *n*, de la forma $\phi(D)\,y = F(x)$, $F(x) \neq 0$, con **coeficientes** tanto **constantes** como **variables** y, **particularmente**, para cuando la función $F(x)$ contiene tipos de funciones tales como: $\ln x$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arctan x$, etc.

A pesar de que el desarrollo del método se basará exclusivamente en las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, la técnica también se usa para ecuaciones con coeficientes variables, las cuales trataremos en el *Ejemplo 2*. Por otra parte, el método puede generalizarse para ecuaciones lineales de orden superior; sin embargo, estos casos no son objeto de estudio en este curso de Ecuaciones Diferenciales[1].

Descripción del Método

1. Sea la ecuación lineal de segundo orden con **coeficientes constantes**:
   $$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = F(x) \quad ; \quad \text{con} \quad a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

2. Llevando la ecuación (1) a su **forma estándar** (o reducida), que se obtiene dividiendo por $a_0 \neq 0$, se tiene:
   $$y'' + P\,y' + Q\,y = G(x) \;\; ; \;\; P \text{ y } Q \text{ constantes, con } G(x) = \frac{F(x)}{a_0} \qquad (2)$$

3. La **ecuación homogénea** (complementaria) asociada a la ecuación (2), que se resuelve según lo estudiado en la Sección 2.1 (página 15), es:
   $$y'' + P\,y' + Q\,y = 0 \qquad (3)$$

4. Si $y_1(x) \wedge y_2(x)$ son soluciones *l.i.* de (3), su solución complementaria está dada por:
   $$y_c = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) \qquad (4)$$

5. La idea básica consiste en ***suponer*** que existe una **solución particular** de la ecuación (2) de la forma:
   $$y_p = U(x)\; y_1(x) + V(x)\; y_2(x) \qquad (5)$$
   Donde $U(x) \wedge V(x)$ son **funciones desconocidas** (por determinar).

[1] Si se desea profundizar en el tema, puede consultar *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, de Spiegel, M. R., Ejercicios B, 3 y 4, pág. 206; o bien, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, de Zill, D. G., pág. 167 (Editorial Thompson).

NOTA: Observe que esta suposición para y_p parte de la forma de y_c, donde las constantes $C_1 \wedge C_2$ se han reemplazado por los ***parámetros variables*** $U(x) \wedge V(x)$ (de ahí el nombre con que se denomina el método en cuestión).

6. Dado lo anterior, ¿cómo determinar estas dos funciones $U(x) \wedge V(x)$ para que y_p sea una solución particular de la ecuación diferencial propuesta, dada **en su forma estándar** ; o sea, de la ecuación (2) ?

   a. Debido a que se **requiere encontrar dos funciones**, esto nos indica que se **necesitan dos ecuaciones**, entonces[2] :

   (i) Para la **primera ecuación**, se parte del supuesto de que las funciones $U(x) \wedge V(x)$ son tales que satisfacen la expresión:

$$\boxed{U'(x)\, y_1(x) + V'(x)\, y_2(x) = 0} \qquad (6)$$

   (ii) La **segunda ecuación** se obtiene al sustituir la **supuesta** forma de la solución particular $y_p = U(x)\, y_1(x) + V(x)\, y_2(x)$, así como todas sus derivadas, en la ecuación diferencial por resolver, dada en su **forma estándar**, $y'' + P\, y' + Q\, y = G(x)$, lo cual nos conduce a la ecuación:

$$\boxed{U'(x)\, y_1'(x) + V'(x)\, y_2'(x) = G(x)} \qquad (7)$$

   b. Para determinar las funciones $U' \wedge V'$, se debe resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, conocidas como las ***ecuaciones principales*** de la ecuación diferencial $y'' + P\, y' + Q\, y = G(x)$. Dicho sistema se forma a partir de las ecuaciones (6) y (7) ; a saber:

$$\begin{cases} y_1(x)\, U'(x) + y_2(x)\, V'(x) = 0 \\ y_1'(x)\, U'(x) + y_2'(x)\, V'(x) = G(x) \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \boxed{G(x) = \frac{F(x)}{a_0}}$$

   Puesto que $y_1 \wedge y_2$ son soluciones $l.i.$, entonces $W(y_1, y_2) \neq 0$; por lo tanto, usando la *Regla de Cramer*[3] para hallar $U' \wedge V'$, se tiene que:

---

[2] El procedimiento formal lo puede encontrar en *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, Zill, D.G., pág. 163 (Editorial Thomson, sexta edición).

[3] Puede consultar el apéndice del texto *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, de Spiegel, M. R., pág. A-1 y A-2. Sin embargo, se pueden utilizar otros mecanismos para solucionar este tipo de sistemas.

$$U'(x) = \frac{W_1}{W} \quad \wedge \quad V'(x) = \frac{W_2}{W} \quad ; \quad \text{donde} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \ ,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ G(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 \cdot G(x) \quad \text{y} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & G(x) \end{vmatrix} = y_1 \cdot G(x)$$

c. Basado en lo anterior, las funciones $U(x) \wedge V(x)$ se determinan por integración, de manera que:

$$U(x) = \int U'(x)\ dx = \int \frac{W_1}{W}\ dx \quad \wedge \quad V(x) = \int V'(x)\ dx = \int \frac{W_2}{W}\ dx$$

d. Finalmente, de (4) y (5), la solución general es: $y = y_c + y_p$

$$\Rightarrow \qquad y = C_1\ y_1(x) + C_2\ y_2(x) + U(x)\ y_1(x) + V(x)\ y_2(x)$$

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación: $2y'' + 8y = 4\csc^2 x$ (coeficientes constantes)

Solución: De acuerdo con el procedimiento descrito anteriormente, tenemos que la forma estándar de la ecuación anterior es: $y'' + 4y = 2\csc^2 x$ (*)

(**Nota:** Observe que como $F(x) = 4\csc^2 x$, entonces $G(x) = 2\csc^2 x$)

(i) Solución complementaria: De la ecuación homogénea de (*), $y'' + 4y = 0$, se tiene que su ecuación auxiliar nos conduce a $m^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow \ m = -2i$ y $m = 2i$ (raíces complejas), por lo que las soluciones particulares respectivas son: $y_1 = \operatorname{sen}(2x)$ y $y_2 = \cos(2x)$.

Luego: $y_c(x) = C_1\ \operatorname{sen}(2x) + C_2\ \cos(2x)$ (*)

(ii) Solución particular: Partiendo de la solución complementaria encontrada, sea: $y_p(x) = \operatorname{sen}(2x)U(x) + \cos(2x)V(x)$, $U(x) \wedge V(x)$ funciones por determinar.

- Para tal efecto, se debe resolver un sistema de ecuaciones para obtener, en primera instancia, las funciones $U'(x) \wedge V'(x)$, el cual está dado por:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2x)\,U'(x) + \cos(2x)\,V'(x) = 0 \\ 2\cos(2x)\,U'(x) - 2\operatorname{sen}(2x)\,V'(x) = 2\csc^2 x \end{cases}$$

- Usando la *Regla de Cramer* para solucionar dicho sistema, tenemos:

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(2x) & \cos(2x) \\ 2\cos(2x) & -2\operatorname{sen}(2x) \end{vmatrix} = -2\left(\operatorname{sen}^2(2x) + \cos^2(2x)\right) \quad \Rightarrow \quad W = -2$$

$$W_1 = -y_2 \cdot G(x) = -2\cos(2x)\csc^2 x \quad \text{y} \quad W_2 = y_1 \cdot G(x) = 2\operatorname{sen}(2x)\csc^2 x$$

- Con base en los wronskianos anteriores, se sigue que:

$$U'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-2\cos(2x)\csc^2 x}{-2} = \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cot^2 x - 1$$

$$V'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{2\operatorname{sen}(2x)\ \csc^2 x}{-2} = \frac{-\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-2\operatorname{sen} x\ \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -2\cot x$$

- Integrando para hallar las funciones $U(x)\ \wedge\ V(x)$, se tiene:

$$U(x) = \int (\cot^2 x - 1)\ dx = \int (\csc^2 x - 2)\ dx = -\cot x - 2x$$

$$V(x) = \int -2\cot x\ dx = -2\ln\left|\operatorname{sen} x\right|$$

- **Por lo tanto:** $y_p(x) = -(\cot x + 2x)\ \operatorname{sen}(2x) - 2\ln\left|\operatorname{sen} x\right|\ \cos(2x)$ (**)

(iii) Solución general $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$: Finalmente, con base en (*) y (**), la solución buscada es:

$$y(x) = C_1\operatorname{sen}(2x) + C_2\cos(2x) - (\cot x + 2x)\ \operatorname{sen}(2x) - 2\ln\left|\operatorname{sen} x\right|\ \cos(2x)$$

Ejemplo 2: Sabiendo que $y_1 = x^2\ \wedge\ y_2 = 2x+1$ son soluciones linealmente independientes de $(x+x^2)\,y'' - (2x+1)\,y' + 2y = 0$, resuelva la ecuación de coeficientes variables: $(x+x^2)\,y'' - (2x+1)\,y' + 2y = -2x(x+1)^2$. (*)

Solución: Por **conveniencia**, cuando se trata de ecuaciones con **coeficientes variables**, podemos **obviar** la respectiva **forma estándar** (coeficiente de y'' igual a uno) y trabajar con la ecuación dada en (*).

Sin embargo, se **debe tener muy presente**, para este caso en particular, que como $a_0(x) = x + x^2$ y $F(x) = -2x(x+1)^2$, entonces $G(x) = \dfrac{-2x(x+1)^2}{x\,(x+1)}$.

(i) Solución complementaria: Dado que las dos soluciones particulares de la ecuación homogénea $(x+x^2)\,y'' - (2x+1)\,y' + 2y = 0$ son proporcionadas; a saber, $y_1 = x^2 \;\wedge\; y_2 = 2x+1$, entonces la solución buscada en esta etapa es inmediata y está dada por: $y_c(x) = C_1 x^2 + C_2\,(2x+1)$ (I)

(ii) Solución particular: De la solución complementaria del punto anterior, sea: $y_p(x) = x^2\,U(x) + (2x+1)\,V(x)$, con $U(x) \;\wedge\; V(x)$ funciones por encontrar.

- Luego, como $G(x) = \dfrac{-2x(x+1)^2}{x\,(x+1)} = -2(x+1)$, el sistema de ecuaciones a resolver para hallar las funciones $U'(x) \;\wedge\; V'(x)$, es:

$$\begin{cases} x^2\,U'(x) + (2x+1)\,V'(x) = 0 \\ 2x\,U'(x) + 2\,V'(x) = -2(x+1) \end{cases}$$

- Usando la *Regla de Cramer* para la solución de este sistema, tenemos:

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 2x^2 - 4x^2 - 2x = -2x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad W = -2x(x+1)$$

$$W_1 = -y_2 \cdot G(x) = 2(2x+1)\,(x+1) \quad \text{y} \quad W_2 = y_1 \cdot G(x) = -2x^2\,(x+1)$$

- De los wronskianos anteriores, se sigue que:

$$U'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{2(2x+1)\,(x+1)}{-2x\,(x+1)} = \frac{-(2x+1)}{x} = -2 - \frac{1}{x}$$

$$V'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{-2x^2(x+1)}{-2x\,(x+1)} = x$$

- Integrando para encontrar las funciones $U(x) \;\wedge\; V(x)$, se obtiene:

$$U(x) = -2x - \ln|x| \qquad \text{y} \qquad V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Por consiguiente: $y_p(x) = -x^3 - x^2 \ln|x| + \dfrac{x^2}{2}$ (II)

(iii) Solución general $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$: De (I) y (II), la solución deseada es:

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2\,(2x+1) - x^3 - x^2 \ln|x| + \frac{x^2}{2}$$

Ejercicios 2.2.2:

1. Resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes:
   a. $y'' + y = \tan^2 x$
   b. $y'' + 4y = 4\sec^2(2x)$
   c. $4y'' + 36y = 4\csc(3x)$
   d. $y'' - 8y' + 16y = 2x^{-3}e^{4x}$
   e. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$
   f. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(e^x + 1)^{-1}$
   g. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
   h. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\csc x$
   i. $y'' - 2y' + y = 2e^x(x^2+1)^{-1}$
   j. $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$

2. Determine la solución general de $y'' + y = 2x - 30e^{3x} + \cot x$, para lo cual:
   a. Use la técnica de *coeficientes indeterminados* (o *aniquiladores*) para hallar una solución particular de la ecuación: $y'' + y = 2x - 30e^{3x}$.

b. Use la técnica de *variación de parámetros* para hallar una solución particular de la ecuación: $y'' + y = \cot x$.

3. Resuelva la ecuación $y'' + 3y' + 2y = 2x - 5 + \operatorname{sen}(e^x)$. (Sugerencia: Use un procedimiento similar al descrito para el ejercicio 2).

4. Resuelva los siguientes problemas, los cuales involucran ecuaciones lineales con **coeficientes variables**.
   a. Considere la ecuación: $xy'' + (x-1)y' - y = 4x^2e^{-x} \quad (x > 0)$ (1)
      i) Si $y_1 = e^{-x}$ es una solución de la respectiva ecuación homogénea, encuentre su segunda solución (y_2), verifique que son linealmente independientes y dé la solución complementaria que le corresponde.
      ii) Determine la solución particular de (1) y dé su solución general.
   b. Si $y_1 = \cos(\ln x) \wedge y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$ son soluciones conocidas, linealmente independientes, de la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0 \ (x > 0)$, halle la solución general de la ecuación: $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$.
   c. Resuelva la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - 2^{-2})y = x^{3/2} \quad (x > 0)$, sabiendo que $y_1 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x \wedge y_2 = x^{-1/2}\cos x$ son las soluciones particulares, linealmente independientes, de la ecuación homogénea respectiva.
   d. Resuelva la ecuación $y'' + x^{-1}y' - x^{-2}y = 2\operatorname{sen} x \ (x > 0)$, sabiendo que $y_1 = x \wedge y_2 = x^{-1}$ son las dos soluciones principales (particulares), linealmente independientes, de la respectiva ecuación homogénea.
   e. Resuelva la ecuación $(1-x)^2y'' + (x - x^2)y' - (1-x)y = 4(x-1)^3e^{-x}$, con $0 < x < 1$, sabiendo que $y_1 = e^x$ es **una** de las dos soluciones principales de la respectiva ecuación homogénea.

3 LA ECUACIÓN DE EULER

Algunas ecuaciones lineales de orden n con *coeficientes variables*, se pueden transformar en ecuaciones lineales con *coeficientes constantes*, haciendo un cambio de variable adecuado. Uno de tales casos es la *Ecuación de Euler*, cuya definición se presenta a continuación.

Definición 1: La Ecuación Diferencial Lineal de Orden n con coeficientes variables, conocida como la *Ecuación de Euler*, tiene la forma:

$$a_0\, x^n y^{(n)} + a_1\, x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}\, x^2 y'' + a_{n-1}\, x\, y' + a_n\, y = F(x) \qquad (a_0 \neq 0)$$

con $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n$ constantes; $y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}$ y F funciones que dependen de x.

Observe que en la ecuación anterior, los respectivos *coeficientes variables* son: $a_0\, x^n,\; a_1\, x^{n-1},\; a_2\, x^{n-2},\; \ldots,\; a_{n-2}\, x^2,\; a_{n-1}\, x,\;\; a_n$, **cuya característica principal** radica en el hecho de que cada potencia de x tiene el **mismo grado** que el **orden** de la diferenciación respectiva.

Como consecuencia de lo anterior, resulta que toda *Ecuación de Euler* se puede transformar en una ecuación lineal con *coeficientes constantes,* haciendo la sustitución $x = e^{z}$, con lo cual, la **<u>variable</u> <u>independiente</u> se cambia** de x a z y, por lo tanto, la función y ; así como todas sus derivadas, también **van a depender** de la nueva variable z.

A continuación, se ilustra el procedimiento antes citado, para lo cual se restringirá su estudio a las ecuaciones de Euler de segundo orden; no obstante, el método se puede generalizar para ecuaciones de orden superior con las características indicadas (ver ejercicios 3.4, página 43).

Procedimiento para resolver la Ecuación de Euler de segundo orden

- Consideremos la *Ecuación de Euler* de segundo orden, dada por:

$$a_0\, x^2 y''(x) + a_1\, x\, y'(x) + a_2\, y(x) = F(x) \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (1)$$

- Sea $x = e^{z}$ (observe que $z = \ln x$ y se asume que $x > 0$), entonces:

(a) $\dfrac{dx}{dz} = e^{z}$, lo cual es equivalente a $\dfrac{dz}{dx} = e^{-z}$

(b) $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dz}{dx/dz} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\, e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = e^{-z}\, y'(z)}$ (2)

(c) $y''(x) = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dy'(x)}{dx} = \dfrac{dy'(x)/dz}{dx/dz} = \dfrac{dy'(x)}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d}{dz}\left[\, y'(z)\, e^{-z} \,\right] e^{-z}$

$$y''(x) = \left(y''(z) e^{-z} - y'(z) e^{-z} \right) e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y''(x) = e^{-2z}\left[\, y''(z) - y'(z) \,\right]} \quad (3)$$

❖ Como consecuencia de lo obtenido en (2) y (3), y dado que $x = e^{z}$, de la ecuación (1) se tiene que:

$$x\, y'(x) = e^{z}\, e^{-z}\, y'(z) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x\, y'(x) = y'(z)} \quad (4)$$

$$x^2 y''(x) = e^{2z}\, e^{-2z}\left[\, y''(z) - y'(z) \,\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 y''(x) = \left[\, y''(z) - y'(z) \,\right]} \quad (5)$$

❖ La sustitución, en la ecuación (1), de las **equivalencias** (4) y (5), nos conduce a una ecuación de **coeficientes constantes** en la **variable *z***, dada por:

$$a_0 \left[\, y''(z) - y'(z) \,\right] + a_1\, y'(z) + a_2\, y(z) = G(z) \quad \Rightarrow \quad (6)$$

$$a_0\, y''(z) + (a_1 - a_0)\, y'(z) + a_2\, y(z) = G(z) \quad (7)$$

❖ **En conclusión**, la transformación de una *Ecuación de Euler de Segundo Orden*, de ***coeficientes variables*** a ***coeficientes constantes***, da como resultado la ecuación obtenida en (6) o en (7) y para resolverla se utilizan las técnicas ya vistas para estos casos; a saber, la de *Coeficientes Indeterminados* o la de *Variación de Parámetros*, para lo cual, según la ecuación resultante, se recomienda valorar cuál método es el más apropiado.
Conviene indicar que la ecuación (7) se puede trabajar en **forma abreviada** como $a_0\, y'' + (a_1 - a_0)\, y' + a_2\, y = G(z)$, **siempre y cuando** se tenga claro que la función y, y todas sus derivadas, **dependen** de la variable z y por lo tanto su respectiva solución general **debe** expresarse en términos de esta variable; a saber, $y(z) = y_C(z) + y_p(z) = C_1\, y_1(z) + C_2\, y_2(z) + y_p(z)$.

❖ Finalmente, con base en lo anterior, se determina la solución general de la ecuación (1) –*Ecuación de Euler*– que en **forma abreviada** se puede escribir como $a_0\, x^2 y'' + a_1\, x\, y' + a_2\, y = F(x)$. Dicha solución **debe** estar expresada en términos de la variable x; o sea, $y(x) = y_C(x) + y_p(x)$, para lo cual se utiliza el hecho de que $x = e^{z} \;\Leftrightarrow\; z = \ln x \;\; (x > 0)$.

Ejemplo 1: Resuelva la ecuación $x^2 y'' + 5x y' + 4y = 16x^2 - 8\ln x$. (*)

Solución: Sea $x = e^z \iff z = \ln x \ (x > 0)$

(i) De acuerdo con el procedimiento descrito anteriormente y según lo obtenido en (6), página 38, la transformación de (*) en una ecuación de **coeficientes constantes**, **en términos de la variable** $\boldsymbol{z}$**,** está dada por:

$$y'' - y' + 5y' + 4y = 16\, e^{2z} - 8z \quad \Rightarrow \quad y'' + 4y' + 4y = 16\, e^{2z} - 8z \qquad (**)$$

(ii) Resolviendo (**), se tiene:

- Solución complementaria $y_c(z)$: Dado que la ecuación homogénea es $y'' + 4y' + 4y = 0$, entonces la respectiva ecuación auxiliar nos conduce a $m^2 + 4m + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2$ (raíz real doble)

  Por lo que: $y_c(z) = C_1\, e^{-2z} + C_2\, z\, e^{-2z} = (C_1 + C_2\, z)\, e^{-2z}$

- Solución particular $y_p(z)$: Como $G(z) = 16\, e^{2z} - 8z \not\subset y_c$, haciendo uso de la técnica de coeficientes indeterminados, sea:

  $$y_p = A\, e^{2z} + Bz + C \quad \Rightarrow \quad y'_p = 2A\, e^{2z} + B \quad \Rightarrow \quad y''_p = 4A\, e^{2z}$$

  Sustituyendo y''_p , $y'_p \wedge y_p$ en (**) y después de realizar las operaciones correspondientes, obtenemos:

  $$16 e^{2z} - 8z = 16 A e^{2z} + 4Bz + 4B + 4C \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = -2,\ C = 2$$

  Por lo tanto: $y_p(z) = e^{2z} - 2z + 2$

- Solución general $y(z) = y_c(z) + y_p(z)$: Con base en todo lo anterior, la solución de (**) es: $y(z) = e^{-2z}\,(C_1 + C_2\, z) + e^{2z} - 2z + 2$

(iii) Finalmente, dado que $x = e^z \iff z = \ln x$, la solución de la ecuación de Euler propuesta, o sea de (*), es:

$$y(x) = x^{-2}\,(C_1 + C_2 \ln x) + x^2 - 2\ln x + 2$$

Ejemplo 2: Resuelva la ecuación $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 5 + 4\,x^{-3}$. (*)

Solución: Sea $x = e^z \;\Leftrightarrow\; z = \ln x \;\; (x > 0)$

(i) Como en el ejemplo anterior, usando el formato obtenido en (6), página 38, la ecuación (*) se transforma en una de **coeficientes constantes**, **en función de la variable z**, como sigue:

$$3(y'' - y') + 11y' - 3y = 5 + 4e^{-3z} \quad \Rightarrow \quad 3y'' + 8y' - 3y = 5 + 4e^{-3z} \qquad (**)$$

(ii) Resolviendo (**), se tiene:

- Solución complementaria $y_c(z)$: En este caso, la ecuación homogénea es $3y'' + 8y' - 3y = 0$, entonces la respectiva ecuación auxiliar nos lleva a $3m^2 + 8m - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3m-1)(m+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -3$ y $m = 1/3$.

  Así se tiene que: $y_c(z) = C_1\, e^{-3z} + C_2\, e^{z/3}$

- Solución particular $y_p(z)$: En este ejemplo, con claridad, se observa que $G(z) = 5 + 4\,e^{-3z} \subset y_c$ (por el término e^{-3z}) ; por lo tanto, usando coeficientes indeterminados, sea: $y_p = A + B\,z\,e^{-3z} \quad \Rightarrow$
  $y'_p = Be^{-3z} - 3B\,z\,e^{-3z} \quad \Rightarrow \quad y''_p = -6B\,e^{-3z} + 9B\,z\,e^{-3z}$

  Al sustituir y''_p, $y'_p \wedge y_p$ en (**) y operando según corresponda, se obtiene:
  $5 + 4e^{-3z} = -10Be^{-3z} - 3A \quad \Rightarrow \quad A = -5/3$ y $B = -2/5$

  Por lo que: $y_p(z) = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{5}\, z\, e^{-3z}$

- Solución general $y(z) = y_c(z) + y_p(z)$: Con base en todo lo anterior, la solución de (**) es: $y(z) = C_1\, e^{-3z} + C_2\, e^{z/3} - \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{5}\, z\, e^{-3z}$

(iii) Finalmente, como $x = e^z \;\Leftrightarrow\; z = \ln x$, la solución de la ecuación de Euler, o sea de (*), es:

$$y(x) = C_1\, x^{-3} + C_2\, x^{1/3} - \frac{5}{3} - \frac{2}{5}\, x^{-3} \ln x$$

Ejemplo 3: Resuelva la ecuación $x^2 y'' + x y' + y = \cot(\ln x)$ (*)

Solución: Sea $x = e^z \Leftrightarrow z = \ln x \ (x > 0)$

(i) La ecuación propuesta, transformada a una de **coeficientes constantes en función de la variable** z, es:

$$y'' - y' + y' + y = \cot z \qquad \Rightarrow \qquad y'' + y = \cot z \qquad (**)$$

(ii) Resolviendo (**), se tiene:

- Solución complementaria $y_c(z)$: La ecuación homogénea es $y'' + y = 0$, entonces la respectiva ecuación auxiliar nos lleva a $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = -i$ y $m = i$ (raíces complejas). Como las soluciones particulares son: $y_1 = \cos z$ y $y_2 = \operatorname{sen} z \qquad \Rightarrow \qquad y_c(z) = C_1 \cos z + C_2 \operatorname{sen} z$.

- Solución particular $y_p(z)$: En este caso, se requiere usar la **técnica de variación de parámetros**, ya que $G(z) = \cot z$. Por lo tanto, la solución particular tiene la forma: $y_p(z) = \cos z \, U(z) + \operatorname{sen} z \, V(z)$.

  Con el fin de determinar las funciones $U(z) \wedge V(z)$, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos z \ U'(z) + \operatorname{sen} z \ V'(z) = 0 \\ -\operatorname{sen} z \ U'(z) + \cos z \ V'(z) = \cot z \end{cases}$$

  Con base en la *Regla de Cramer*, se tiene:

$$W = \begin{vmatrix} \cos z & \operatorname{sen} z \\ -\operatorname{sen} z & \cos z \end{vmatrix} = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \qquad \Rightarrow \qquad W = 1$$

$$W_1 = -y_2 \cdot G(z) = -\operatorname{sen} z \cdot \cot z \qquad \Rightarrow \qquad W_1 = -\cos z$$

$$W_2 = y_1 \cdot G(z) = \cos z \cdot \cot z = \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen} z} \qquad \Rightarrow \qquad W_2 = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}$$

  De los wronskianos obtenidos anteriormente, se sigue que:

(a) $U'(z) = \dfrac{W_1}{W} = -\cos z \qquad \Rightarrow \qquad U(z) = \int -\cos z \, dz = -\operatorname{sen} z$

(b) $V'(z) = \dfrac{W_2}{W} = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z} = \csc z - \operatorname{sen} z \qquad \Rightarrow$

$$V(z) = \int (\csc z - \operatorname{sen} z)\, dz = \ln\left|\csc z - \cot z\right| + \cos z$$

Luego: $y_p(z) = -\cos z \operatorname{sen} z + \cos z \operatorname{sen} z + \ln\left|\csc z - \cot z\right| \operatorname{sen} z \qquad \Rightarrow$

$$y_p(z) = \ln\left|\csc z - \cot z\right| \operatorname{sen} z$$

- Solución general $y(z) = y_c(z) + y_p(z)$: Con base en todo lo anterior, la solución de (**) es: $y(z) = C_1 \cos z + C_2 \operatorname{sen} z + \ln\left|\csc z - \cot z\right| \operatorname{sen} z$

(iii) Finalmente, dado que $x = e^z \iff z = \ln x$, entonces la solución de la ecuación de Euler propuesta; o sea de (*), es:

$$y(x) = C_1 \cos(\ln x) + \left[C_2 + \ln\left|\csc(\ln x) - \cot(\ln x)\right| \right] \operatorname{sen}(\ln x)$$

Ejercicios 3.1: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler.

1. $4x^2 y'' + y = 0$; $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$
2. $x^2 y'' - 6y = 12x$
3. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$
4. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 6\ln^2 x - (10/3)$
5. $2x^2 y'' + y = 5\operatorname{sen}(\ln x)$
6. $x^2 y'' + xy' + y = \tan(\ln x)$
7. $x^2 y'' + xy' - y = 2x^2 \cos x$
8. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = -2\ln x^2$
9. $x^2 y'' + xy' - 9y = x^3 + 6$
10. $x^2 y'' + xy' + y = x^2 + x + 1$
11. $x^2 y'' + xy' + 4y = 4\sec(\ln x^2)$
12. $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 35x^3 (\ln x)^{3/2}$
13. $3x^2 y'' + 11xy' - 3y = 8 - \ln x^3$ dado que $y(1) = 1 \ \wedge \ y'(1) = 4/3$.
14. $(x-1)^2 y'' - 2(x-1)y' - 4y = 4\ln(x-1) - 3x$, haciendo: $x - 1 = e^z$.
15. $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 4x + 3$, haciendo la sustitución: $x + 2 = e^z$.
16. $(3x+2)^2 y'' - (3x+2)y' + 3y = F(x)$, usando la sustitución: $3x+2 = e^z$, si:

    a. $F(x) = \ln(3x+2)$

    b. $F(x) = 2(3x+2) - 3\ln(3x+2)$

17. $(5x-4)^2 y'' - 15(5x-4)\,y' + 100\,y = 5x$, haciendo: $5x-4 = e^z$.
18. $(2x-3)^2 y'' - 4(2x-3)\,y' + 8\,y = 4(2x-3)^2$, haciendo: $2x-3 = e^z$.
19. $4x^2 y'' + 4x\,y' - y = 3x^k + 1 + \ln x$ para:

   a. toda $k \in IR - \{0\}$ tal que $k \neq \pm \frac{1}{2}$ b. $k = \frac{1}{2}$ c. $k = \frac{-1}{2}$

Ejercicios 3.2: Verifique que las siguientes ecuaciones diferenciales se **transforman** en ecuaciones de Euler y resuélvalas.

a. $x\,\dfrac{d^2}{dx^2}(2x\,y) + 5y = 10\ln x - 3x^{-1}$ b. $x\,\dfrac{d^2}{dx^2}(x\,y) + 2\,\dfrac{d}{dx}(x\,y) - 6\,y = 15\,x^{-4}$

Ejercicios 3.3: Haciendo uso de la sustitución $x = \operatorname{arcsen} z$, aplique la técnica de Euler para resolver la ecuación $y'' + (\tan x)\;y' + (\cos^2 x)\;y = F(x)$, cuando:

a. $F(x) = \cos^2 x$ c. $F(x) = e^{\operatorname{sen} x}\,\cos^2 x$

b. $F(x) = \cos^4 x$ d. $F(x) = e^{\operatorname{sen} x}\,\cos^4 x$

Ejercicios 3.4: **Generalice** la técnica de Euler para resolver las siguientes ecuaciones de tercer orden.

Sugerencia: Verifique que $y'''(x) = e^{-3z}\left[\, y'''(z) - 3y''(z) + 2y'(z)\,\right]$

a. $x^3 y''' - 6\,y = 0$ d. $x^3 y''' - 2x^2 y'' - 2x\,y' + 8\,y = 0$

b. $x^3 y''' + 3x^2 y'' = 1 + x$ e. $x^3 y''' + x\,y' - y = -6\,x \ln x^4$

c. $x^3 y''' - 2x\,y' = 5\ln x$ f. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x\,y' - 6\,y = 2\ln x^3 - 35$

OBSERVACIÓN FINAL: Las ecuaciones de *Euler* pueden también trabajarse usando la notación de operadores. Así, por ejemplo, dado que:

(a) $x\,y'(x) = y'(z) \quad \Rightarrow \quad x\,y'(x) = D\,y(z)$

(b) $x^2 y''(x) = \left[\, y''(z) - y'(z)\,\right] \quad \Rightarrow \quad x^2 y''(x) = (D^2 - D)\,y(z) = D(D-1)\,y(z)$

Por lo tanto, para la ecuación de *Euler* $a_0\, x^2 y''(x) + a_1\, x\, y'(x) + a_2\, y(x) = F(x)$, se tiene que su respectiva ecuación de coeficientes constantes en z, en la notación de operadores, está dada por: $a_0\, D(D-1)\,y(z) + a_1\, D\,y(z) + a_2\, y(z) = G(z)$.

Ahora bien, teniendo presente que tanto y como todas sus derivadas dependen de la variable z, dicha ecuación puede expresarse, en su forma abreviada, como: $\left(a_0\, D(D-1) + a_1\, D + a_2\right)\, y = G(z)$.

Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, ¿cuál es la forma abreviada, en la notación de operadores y en la variable z, de la ecuación de *Euler* de tercer orden $a_0\, x^3 y'''(x) + a_1\, x^2 y''(x) + a_2\, x\, y'(x) + a_3\, y(x) = F(x)$?

A N E X O A

COEFICIENTES INDETERMINADOS – ANIQUILADORES

SOLUCIÓN PARTICULAR

En este **ANEXO**, se desarrolla la **otra técnica** –diferente a la estudiada en la *Sección 2.2, Apartado 2.2.1*– para resolver una ecuación diferencial lineal de orden *n*, con **coeficientes constantes**, haciendo uso del método de los *coeficientes indeterminados* y el *operador aniquilador*.

El procedimiento que se tratará aquí, resulta bastante útil para determinar, con toda certeza, la **forma correcta** de una *solución particular* para la ecuación $\phi(D)\,y = F(x)$, **específicamente** para cuando $y_p \subset y_c$, asunto discutido en el **II CASO** de la sección antes citada.

A.1 *El Operador Aniquilador*

Se sabe que, para la ecuación diferencial lineal de orden *n*, $\phi(D)\,y = F(x)$, el operador diferencial está dado por:

$$\phi(D) = a_0\,D^n + a_1\,D^{n-1} + a_2\,D^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\,D^2 + a_{n-1}\,D + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

Cuando **todos los coeficientes** a_i **son constantes**, el operador $\phi(D)$ puede considerarse como un polinomio en D, de hecho:

- $\phi(D)$ puede ser factorizado en $I\!R$
- Los factores de $\phi(D)$ pueden conmutarse

Ejemplo A.1.1

El operador: $D^2 + D$ se puede factorizar como: $D(D+1)$

El operador: $D^2 - 4$ se factoriza como: $(D-2)(D+2)$ o $(D+2)(D-2)$

El operador: $D^2 + 5D + 6$ se factoriza como: $(D+2)(D+3)$ o $(D+3)(D+2)$

El operador: $D^2 + 4D + 4$ se factoriza como: $(D+2)^2$ o $(D+2)(D+2)$

Los operadores: $D^2 + 1$ y $D^2 + D + 2$ **NO** se pueden factorizar en $I\!R$, en ambos casos, se tiene que $\Delta < 0$.

Definición A.1: Se dice que el operador $\phi(D)$ aniquila a la función $F(x)$, si se obtiene que $\phi(D)F(x)=0$. En tal caso, a $\phi(D)$ se le denomina el *operador aniquilador*, o simplemente el *aniquilador*, de la función $F(x)$, y se abrevia como sigue:

$$\boxed{\phi(D) \text{ aniquila a } F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(D)F(x)=0}$$

Ejemplo A.1.2

a. El operador que **aniquila** a la función $F(x)=3x-5$ es $\phi(D)=D^2$ ya que: $D^2F(x)=D^2(3x-5)=D(3)=0$.

b. El operador $\phi(D)=D-3$ es el **aniquilador** de la función $F(x)=e^{3x}$ puesto que $(D-3)F(x)=(D-3)\,e^{3x}=(De^{3x})-3e^{3x}=3e^{3x}-3e^{3x}=0$.

Ejercicios A.1:

1. Sea $F(x)=2x^2+5x-1$. ¿Cuál de los siguientes operadores aniquila a la función dada?
   (a) D ; (b) D^2 ; (c) D^3

2. De los siguientes operadores, el que aniquila a la función $F(x)=e^{-2x}$ es:
   (a) D ; (b) $D+2$; (c) $D-2$

3. ¿Cuál operador aniquila a $F(x)=xe^x$ y cuál a la función $G(x)=e^x-2xe^x$?
   (a) $(D-1)^2$; (b) $D-1$; (c) $(D+1)^2$

4. Determine el aniquilador de $F(x)=3\operatorname{sen}(2x)$ y el de $G(x)=-2\cos(2x)$.
   (a) D^2 ; (b) D^2+4 ; (c) D^2-4

5. Halle el aniquilador de $F(x)=x\cos x$ y el de $G(x)=2x\operatorname{sen}x-3\cos x$.
   (a) D^2+1 ; (b) $(D^2-1)^2$; (c) $(D^2+1)^2$

6. Encuentre el aniquilador común de $F(x)=e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$ y $G(x)=x\,e^{2x}\cos(3x)$.
   (a) $D^2-4D+13$; (b) $(D^2+4D+13)^2$; (c) $(D^2-4D+13)^2$

NOTA: Se puede observar que las funciones que se aniquilan por medio de un operador $\phi(D)$, son simplemente aquellas que se pueden obtener de la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea asociada a $\phi(D)\,y=F(x)$; o sea, de las soluciones de $\phi(D)\,y=0$.

A.2 *¿Cómo obtener un Operador Aniquilador para $F(x)$?*

A.2.1 Sí las raíces de $\phi(m)=0$ son reales, diferentes y(o) repetidas

- Si $m=a$ es una raíz real, entonces la solución principal tiene la forma e^{ax}; además, $(m-a)$ es uno de los factores de la ecuación auxiliar $\phi(m)=0$ y por lo tanto, el operador $(D-a)$ es el aniquilador de la función e^{ax}.
- Por otra parte, si $m=a$ es *de multiplicidad "n"*, entonces se tiene que:

> El operador $(D-a)^n$ aniquila a cada una de las funciones:
> $$e^{ax} \ ; \ xe^{ax} \ ; \ x^2e^{ax} \ ; \ x^3e^{ax} \ ; \ \ldots \ ; \ x^{n-1}e^{ax}$$
> así como cualquier combinación lineal de estas funciones

- El operador $(D-a)^n$ aniquila a toda combinación lineal cuya potencia mayor de x sea $n-1$; a saber:

$$(D-a)^n\left[C_1e^{ax}+C_2xe^{ax}+C_3x^2e^{ax}+C_4x^3e^{ax}+\ldots+C_nx^{n-1}e^{ax}\right]=0$$

<u>Observaciones</u>:

1. Cuando se busca un aniquilador diferencial para una función, se desea el operador de menor orden que ejecute dicha tarea.

2. Si el operador D_1 aniquila a $F(x)$ (pero no a $G(x)$) y si el operador D_2 aniquila a $G(x)$ (pero no a $F(x)$), entonces el producto de los operadores D_1D_2 aniquila a cualquier combinación lineal de F y G; a saber, $C_1F(x)+C_2G(x)$.

Ejemplo A.2.1

a. En el *Ejemplo A.1.2* (b), se verificó que el operador $\phi(D)=D-3$ **aniquila** a la función $F(x)=e^{3x}$.

b. Consideremos la función $F(x)=2e^{3x}-7x^4e^{3x}-xe^{-3x}$. Se observa que $D_1=D-3$, $D_2=(D-3)^5$ y $D_3=(D+3)^2$ son los operadores que **aniquilan**, respectivamente, a las funciones $F_1(x)=2e^{3x}$, $F_2(x)=7x^4e^{3x}$ y $F_3(x)=xe^{-3x}$. De acuerdo con las observaciones anteriores, como D_1 está contenido en D_2, se concluye que $(D-3)^5(D+3)^2$ es el **aniquilador** de $F(x)$.

Ejercicios A.2.1: Halle un aniquilador para cada una de las siguientes funciones:

1. $F(x) = 3e^{-5x} + 2e^{5x} - 4e^{x}$
2. $F(x) = e^{-6x} - e^{2x}(7 + x^2 + 4x^3)$
3. $F(x) = 3e^{-2x} - 5xe^{x} - 2x^3e^{x}$
4. $F(x) = xe^{-x}(2-3x) + xe^{4x}$

A.2.2 Similar al caso anterior, particularmente para $a = 0$

- Si $m = 0$ es la raíz, entonces la solución principal tiene la forma $e^{0x} = 1$; además, m es uno de los factores de la ecuación auxiliar $\phi(m) = 0$ por lo que D es el operador aniquilador de la función $e^{0x} = 1$.
- Por otra parte, si $m = 0$ es *de multiplicidad "n"*, entonces se tiene que:

> El operador D^n aniquila a cada una de las funciones:
>
> $1 \;;\; x \;;\; x^2 \;;\; x^3 \;;\; x^4 \;;\; x^5 \;;\; \ldots \;;\; x^{n-1}$
>
> así como cualquier combinación lineal de estas funciones

- De igual manera, el operador D^n aniquila cualquier polinomio cuya potencia mayor de x sea $n-1$; a saber:

$$D^n \left\lfloor C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + \ldots + C_n x^{n-1} \right\rfloor = 0$$

Ejemplo A.2.2

a. Del *Ejemplo A.1.2* (a), se demostró que el operador **aniquilador** de la función $F(x) = 3x - 5$, es $\phi(D) = D^2$.

b. La función polinomial $F(x) = 5x^4 - 2x^2 + 4x - 1$ es **aniquilada** por el operador $\phi(D) = D^5$.

Ejercicios A.2.2: Halle un aniquilador para cada una de las siguientes funciones:

1. $F(x) = 10 - 2x - 3x^2 + x^3$
2. $F(x) = 4x^6 + 5x^4 - x^2 + 8$
3. $F(x) = (1 - 5x^2)e^{-2x} + x^2 - 3$
4. $F(x) = 1 - 2x - xe^{-x} + 3e^{7x}$

A.2.3 Sí las raíces de $\phi(m)=0$ son complejas, diferentes o repetidas

- Aquí, las raíces tienen la forma: $a+bi$ y $a-bi$ y las **soluciones principales** están dadas por: $e^{ax}\cos(bx)$ y $e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$, a y b constantes reales.

- Dado lo anterior, la ecuación auxiliar $\phi(m)=0$ tiene la forma cuadrática:
  $\left[m-(a+bi)\right]\left[m-(a-bi)\right]=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[(m-a)-bi\right]\left[(m-a)+bi\right]=0$
  $\Leftrightarrow \quad (m-a)^2-(bi)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2-2am+(a^2+b^2)=0$ (*)

- Obsérvese que lo obtenido en (*) corresponde a la **ecuación auxiliar** de la **ecuación homogénea**, dada por: $\left[D^2-2aD+(a^2+b^2)\right]y=0$.

- Por lo tanto, el **operador** $D^2-2aD+(a^2+b^2)$ **aniquila** tanto a la función $e^{ax}\cos(bx)$, como a la función $e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$, y a cualquier combinación lineal entre ellas, a saber, $C_1e^{ax}\cos(bx)+C_2e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$.

- **En general**, sí las raíces $a\pm bi$ son de *multiplicidad "n"*, entonces:

> El operador $\left[D^2-2aD+(a^2+b^2)\right]^n$ aniquila cada una de las funciones:
> $e^{ax}\cos(bx)$; $xe^{ax}\cos(bx)$; $x^2e^{ax}\cos(bx)$; … ; $x^{n-1}e^{ax}\cos(bx)$
> $e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$; $xe^{ax}\operatorname{sen}(bx)$; $x^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$; … ; $x^{n-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$
> así como cualquier combinación lineal de estas funciones

Ejemplo A.2.3

a. Considere la función $F(x)=5e^{-x}\operatorname{sen}(4x)$. Como $a=-1$ y $b=4$, se tiene que $D^2+2D+17$ es el operador **aniquilador** de la función dada.

b. Sea la función $F(x)=3e^{x}\cos(2x)-xe^{x}\cos(2x)$. Observe que los operadores D^2-2D+5 y $(D^2-2D+5)^2$ **aniquilan**, respectivamente, a las funciones $3e^{x}\cos(2x)$ y $xe^{x}\cos(2x)$. Además, como $D^2-2D+5 \subset (D^2-2D+5)^2$, se concluye que el **aniquilador** de la función propuesta es $(D^2-2D+5)^2$.

Ejercicios A.2.3: Halle un aniquilador para cada una de las siguientes funciones:

1. $F(x)=e^{2x}\operatorname{sen}x+2xe^{2x}\cos x-4e^{2x}$
2. $F(x)=e^{x}\left(3x^2-\operatorname{sen}(5x)+7-x\cos(5x)\right)$
3. $F(x)=x^2e^{-x}\cos(4x)-e^{4x}(x-5)$
4. $F(x)=x^3+e^{-3x}(1-x\operatorname{sen}x)-e^{8x}$

A.2.4 Similar al caso anterior, particularmente para $a = 0$

- Si $a = 0$, las raíces son bi y $-bi$, por lo que las **soluciones principales** están dadas por: $\cos(bx)$ y $\operatorname{sen}(bx)$, b constante real.

- Por lo tanto, el **operador** $D^2 + b^2$ **aniquila** no solo a la función $\cos(bx)$, sino que también a la función $\operatorname{sen}(bx)$, así como a cualquier combinación lineal entre ellas; o sea, a la función $C_1 \cos(bx) + C_2 \operatorname{sen}(bx)$.

- En términos generales, si las raíces $\pm bi$ son de *multiplicidad "n"*, entonces:

> El operador $\left[D^2 + b^2\right]^n$ aniquila a cada una de las funciones:
>
> $\cos(bx)$; $x\cos(bx)$; $x^2 \cos(bx)$; … ; $x^{n-1}\cos(bx)$
>
> $\operatorname{sen}(bx)$; $x\operatorname{sen}(bx)$; $x^2 \operatorname{sen}(bx)$; … ; $x^{n-1}\operatorname{sen}(bx)$
>
> así como cualquier combinación lineal de estas funciones

Ejemplo A.2.4

a. Consideremos la función $F(x) = x^2\cos(4x) - 7x$. Puesto que $a = 0$ y $b = 4$, el **aniquilador** de $x^2\cos(4x)$ es $(D^2 + 16)^3$. Como D^2 **aniquila** a $7x$, tenemos que $D^2(D^2 + 16)^3$ es el **aniquilador** buscado.

b. Para la función $F(x) = 2xe^{-x} + 4\operatorname{sen}(7x) - 3x^5$, se tiene que el operador que la **aniquila** está dado por $D^6(D+1)^2(D^2 + 49)$, debido a que $(D+1)^2$, $D^2 + 49$ y D^6 son los **aniquiladores** respectivos de las funciones que la conforman; a saber, de $2xe^{-x}$, $4\operatorname{sen}(7x)$ y $3x^5$.

Ejercicios A.2.4: Halle un aniquilador para cada una de las siguientes funciones:

1. $F(x) = x\left(3x^2 - \cos(5x) + 6 - x\operatorname{sen}(2x)\right)$
2. $F(x) = e^{-x}(3 - x + \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\,x\right)$
3. $F(x) = 2x^3 + xe^{3x}\operatorname{sen}(3x) - 6e^{-5x}$
4. $F(x) = 5x\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,x\right) - 3\cos\left(\sqrt{2}\,x\right)$

A.3 *Coeficientes Indeterminados y el Operador Aniquilador*

Otra forma de resolver la ecuación diferencial de coeficientes constantes $\phi(D)\,y = F(x)$ es haciendo uso de un operador que **aniquile** la función $F(x)$. Supongamos que dicho **aniquilador** es D_1; en tal caso, se debe cumplir que $D_1 F(x) = 0$, por lo que al aplicárselo a ambos lados de la ecuación original $\phi(D)\,y = F(x)$, esta operación nos conduce a: $D_1\phi(D)\,y = D_1 F(x) = 0$; o sea que, $D_1\phi(D)\,y = 0$. Resolviendo esta última ecuación, la cual es de mayor orden que la original, se puede descubrir la **forma correcta** de una solución particular y_p para la ecuación propuesta.

El procedimiento para resolver la ecuación diferencial $\phi(D)\,y = F(x)$, se puede resumir como sigue:

a. Encuentre la solución complementaria y_c para la ecuación homogénea asociada $\phi(D)\,y = 0$.
b. Aplique, a ambos lados de la ecuación $\phi(D)\,y = F(x)$, el operador diferencial D_1 que **aniquile** a la función $F(x)$.
c. Encuentre la solución general de la nueva ecuación homogénea $D_1\phi(D)\,y = 0$, cuyo orden es mayor al de la original.
d. Elimine, de la solución del paso (c), todos aquellos términos que están duplicados en la solución complementaria y_c, obtenida en (a). Con los términos restantes, **determine la estructura básica de y_p**, la cual será la forma de una solución particular para $\phi(D)\,y = F(x)$.
e. Sustituya y_p y sus derivadas en la ecuación original $\phi(D)\,y = F(x)$. De esta identidad, iguale los coeficientes –según corresponda– de las diferentes funciones que aparecen en ambos lados y resuelva el sistema de ecuaciones resultante para hallar los valores de los coeficientes indeterminados de y_p.
f. Con las soluciones obtenidas en (a) y en (e), escriba la solución general correspondiente: $y = y_c + y_p$.

Ejemplo A.3: Resuelva la ecuación $y''' - 3y'' + 3y' - y = x + 12e^x$. (1)

- De la ecuación homogénea $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, la ecuación auxiliar nos lleva a: $m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad (m^3 - 1) - 3m(m-1) = 0 \quad\Rightarrow$ $(m-1)(m^2 - 2m + 1) = 0 \quad\Rightarrow\quad (m-1)^3 = 0 \quad\Rightarrow\quad m = 1$ (triple).

  Por lo tanto, la solución complementaria es: $y_c = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$.

- Basado en lo anterior, obsérvese que (1) puede expresarse en la notación de operadores como: $(D-1)^3 y = x + 12e^x$ (2). Puesto que $F(x) = x + 12e^x$, se sigue que su **aniquilador** es $D^2(D-1)$; es decir, $D^2(D-1)F(x) = 0$. (**Nota:** Observe que $F(x) \subset y_c$, por el término $12e^x$)
- Aplicando a ambos lados de (2) el aniquilador indicado, tenemos:
$$D^2(D-1)(D-1)^3 y = D^2(D-1)(x+12e^x) \quad \Rightarrow \quad D^2(D-1)^4 y = 0 \qquad (3)$$
- Dado que $m^2(m-1)^4 = 0 \ \Rightarrow \ m=0$ y $m=1$ (de multiplicidad dos y cuatro, respectivamente), entonces la **solución general** de (3) está dada por:
$$y = \underbrace{C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 x^2e^x}_{y_c} + \underbrace{C_4 x^3e^x + C_5 + C_6 x}_{\text{forma de } y_p} \qquad (4)$$
- De (4) se sigue que una **solución particular** para $(D-1)^3 y = x + 12e^x$ es:
$$y_p = A\,x^3e^x + B + C\,x \qquad \Rightarrow$$
$$y_p' = 3Ax^2e^x + Ax^3e^x + C \qquad \Rightarrow$$
$$y_p'' = 6Axe^x + 6Ax^2e^x + Ax^3e^x \qquad \Rightarrow$$
$$y_p''' = 6Ae^x + 18Axe^x + 9Ax^2e^x + Ax^3e^x$$
- El valor <u>específico</u> de los coeficientes *A*, *B* y *C* se obtiene sustituyendo y_p –y sus derivadas– en la ecuación $y''' - 3y'' + 3y' - y = x + 12e^x$. Así, después de operar y de reagrupar los términos semejantes, se llega a:
$$6A\,e^x + (3C-B) - C\,x = 12\,e^x + x$$
La identidad anterior nos conduce a resolver el sistema:
$$6A = 12 \ , \quad 3C - B = 0 \quad \text{y} \quad -C = 1 \qquad \Rightarrow$$
$$A = 2 \ , \quad C = -1 \quad \text{y} \quad B = -3$$
Como consecuencia: $y_p = 2x^3e^x - 3 - x$.
- Finalmente, la solución general de la ecuación $(D-1)^3 y = x + 12e^x$ es:
$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x + C_3 x^2e^x + 2x^3e^x - 3 - x$$

<u>Ejercicios A.3</u>: Aplicando la técnica del *"operador aniquilador"*, resuelva, de los *Ejercicios 2.2.1*, el 2, 3, 4, 5 y 6, <u>página</u> <u>30</u>. (*Sección 2.2*, *Apartado 2.2.1*)

PRÁCTICA GENERAL

I. **Resuelva las siguientes ecuaciones complementarias u homogéneas:**

1. $(D^2-3D+4)\,y=0$
2. $4y''+4y'+y=0$
3. $y^{(5)}-y^{(4)}-2y'''+2y''+y'-y=0$
4. $(D^4-9D^2+20)\,y=0$
5. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
6. $(D^2+2D+3)\,y=0$

II. **Utilizando el método de *"coeficientes indeterminados"* o de *"aniquiladores"*, determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales**:

1. $y''-y'-2y=4x^2$
2. $(D^3-6D^2+11D-6)\,y=(12x-25)\,e^{-x}$
3. $y''+y'-2y=2x-40\cos(2x)$
4. $(D^2-2D+1)\,y=10e^{-2x}\operatorname{sen}x$
5. $y''+3y'+y=1+3x+x^2$
6. $(D^3-D)\,y=4e^{-x}+3e^{2x}$
7. $y'''-3y'-2y=27x\,e^{-x}$
8. $(D^2+8)\,y=5x+2e^{-x}$

III. **Utilizando el método de *"variación de parámetros"*, halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:**

1. $4y''+36y=\csc(3x)$
2. $(D^3+2D^2-D-2)\,y=e^x$
3. $(D^2-2D+1)\,y=e^x\,x^{-1}$
4. $y''-2y'+2y=e^x\sec x$
5. $(D^2+1)\,y=\sec x$
6. $(D^2-6D+9)\,y=e^{3x}\,x^{-2}$

IV. **Resuelva las siguientes ecuaciones de *Euler*:**

1. $(x^2D^2+xD-9)\,y=\ln^2 x$
2. $(2x^2D^2+xD-1)\,y=\ln x+5$
3. $9x^2y''+15xy'+5y=-26\cos(\ln x)$
4. $x^2y''-4xy'+6y=3x^{-1}+x^2$
5. $(4x^2D^2+xD-1)\,y=10x$
6. $x^2y''-xy'+y=6x$
7. $(2x+3)^2y''+(2x+3)\,y'-2y=24x^2$, haciendo la sustitución $2x+3=e^z$.
8. $(2x+1)^2y''-3(2x+1)\,y'+4y=6(2x+1)^{-1}-8\ln(2x+1)$, donde $2x+1=e^z$

V. **Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:**

1. $(D^4+3D^3-8D^2-12D+16)\,y=0$
2. $(2x^2D^2+5xD+1)\,y=7x^3+2\,x^{-1}$
3. $y''+2y'+5y=e^{-x}\left[2x+\operatorname{sen}x\right]$
4. $y''+4y=12\operatorname{sen}^2x;\quad y(\pi)=y'(\pi)=0$
5. $x^2y''+5xy'+4y=8\,x^2+3\ln^2 x$
6. $(D^2+5D+6)\,y=10\,(1-x)\,e^{-2x}$
7. $y''-y'-2y=e^{3x};\quad y(0)=3,\ y'(0)=1$
8. $y''-5y'+6y=(12x-7)\,e^{-x};\quad y(0)=y'(0)=0$
9. $y''+y'-2y=20\cos x$
10. $y''+4y=4\sec(2x)$
11. $y'''+y''=9e^{3x}-4x$
12. $x^2y''+7xy'+5y=4(x-1)$
13. $y'''+4y''=18\,e^{-3x}$
14. $(D^2+9)\,y=24\operatorname{sen}(3x)$
15. $2x^2y''+3xy'-y=\ln x+18x^2$
16. $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$

VI. Ejercicios varios:

1. a. Utilizando *"coeficientes indeterminados"* o *"aniquiladores"*, determine una solución particular de la ecuación $y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3$.

   b. Utilizando *"variación de parámetros"*, determine una solución particular de la ecuación $y'' + 2y' + y = x^{-1}e^{-x}$.

   c. Resuelva la ecuación $y'' + 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^{-x}$.

2. Considere la ecuación diferencial: $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, y' + \dfrac{2}{1+x^2}\, y = 0$ (*)

   a. Verifique que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación (*).
   b. Obtenga otra solución de la ecuación (*), linealmente independiente de $y_1(x)$, y escriba la respectiva solución general o complementaria.
   c. Obtenga una solución particular de: $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, y' + \dfrac{2}{1+x^2}\, y = 1 + x^2$ (**)
   d. Escriba la solución general de la ecuación (**).

3. Para cada una de las ecuaciones siguientes, se da una solución particular $y_1(x)$ Determine la otra solución $y_2(x)$, de tal forma que $y_1 \wedge y_2$ sean linealmente independientes, y escriba la solución general de la respectiva ecuación diferencial.

   a. $x\,y'' + y' = 0$ $\qquad y_1(x) = \ln x$
   b. $(1 - 2x - x^2)\,y'' + 2(1+x)\,y' - 2y = 0$ $\qquad y_1(x) = x + 1$
   c. $(1 + 2x)\,y'' + 4x\,y' - 4y = 0$ $\qquad y_1(x) = e^{-2x}$
   d. $y'' - 3(\tan x)\,y' = 0$ $\qquad y_1(x) = 1$
   e. $x\,y'' - (x+2)\,y' + 2y = 0$ $\qquad y_1(x) = e^{x}$
   f. $x^2(4x+3)\,y'' - 4x^2 y' - 6y = 0$ $\qquad y_1(x) = x^2$
   g. $x\,y'' - (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = 0$ $\qquad y_1(x) = e^{x}$
   h. $(x^3+1)\,y'' - 3x^2 y' + 3x\,y = 0$ $\qquad y_1(x) = x$

4. Resuelva la ecuación $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$ sabiendo que $y_1(x) = \cos(1/x)$ es una de sus soluciones. Con base en lo anterior, determine la solución general de la ecuación no homogénea $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = x^{-2}$.

5. Resuelva la ecuación $x^2 y'' + x\,y' - y = 2 + \ln x^k + 3x^k \; (k \neq 0)$ para toda $k \in IR$ tal que $|k| \neq 1$. ¿Qué sucede cuando $k = -1 \vee k = 1$?

6. Considere la ecuación diferencial lineal: $(1-x^2)\,y''+2\,x\,y'-2\,y=0$
   a. Verifique que $y_1(x)=-x$ es una solución de la ecuación anterior.
   b. Obtenga otra solución de la ecuación diferencial propuesta, que sea linealmente independiente de $y_1(x)$, y escriba la solución complementaria respectiva.
   c. Resuelva la ecuación diferencial: $(1-x^2)\,y''+2\,x\,y'-2\,y=(1-x^2)$.

7. Considere la ecuación diferencial lineal: $(3x^2+5x)\,y''-(6x+5)\,y'+6\,y=0$
   a. Verifique que $y_1(x)=x^2$ es una solución de la ecuación anterior.
   b. Encuentre la segunda solución $y_2(x)$ y verifique que ésta es linealmente independiente con $y_1(x)$; además, escriba la solución general respectiva.
   c. Halle una solución para $y(-1)=0 \;\wedge\; y'(0)=3$.

8. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea: $e^{-2x}y''-e^{-2x}y'+y=0$
   a. Si $y_1(x)=\operatorname{sen}(e^{x})$ es una solución de la ecuación anterior, obtenga la segunda solución $y_2(x)$ y verifique que éstas son linealmente independientes entre sí.
   b. Resuelva la ecuación diferencial no homogénea: $e^{-2x}y''-e^{-2x}y'+y=3e^{x}$.

9. Considere una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes dada por: $a\,y''+b\,y'+c\,y=12\,x-4-5\,e^{3x}$ $(*)$
   a. Si se sabe que $m=2$ y $m=3$ son las soluciones de la ecuación característica o auxiliar $\phi(m)=0$, ¿cuál es la forma de la ecuación $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$?
   b. Usando el punto anterior, encuentre la solución general de la ecuación $(*)$.

10. Determine la ecuación diferencial cuya solución general está dada por la función:
    a. $y=C_1\,e^{x/3}+C_2\,e^{-x/3}+C_3\,e^{-4x}+\dfrac{x}{9}+\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$
    b. $y=A+B\,x+C\,\cos(2x)+D\,\operatorname{sen}(2x)+\dfrac{e^{2x}}{16}-\dfrac{x^4}{24}$

11. Sabiendo que $y_1(x)=x\cos x \;\wedge\; y_2(x)=x\operatorname{sen}x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $x^2y''-2\,x\,y'+(x^2+2)\,y=0$; determine la solución general de la ecuación diferencial $x^2y''-2\,x\,y'+(x^2+2)\,y=x^4-x^3$.

12. Halle la solución general de la ecuación $(3x+2)^2\,y''-(3x+2)\,y'+3y=5(3x+2)^2-4$, para lo cual, realice la sustitución $3x+2=e^{z}$.

13. Verifique que $y_1(x)=x \;\wedge\; y_2(x)=x\,e^{x}$ son soluciones, linealmente independientes, de la ecuación homogénea: $x^2y''-x(x+2)\,y'+(x+2)\,y=0$. Determine la solución general de la ecuación diferencial: $x^2y''-x(x+2)\,y'+(x+2)\,y=2\,x^3$.

14. Sea la ecuación diferencial: $x\,y'' - (1+3x)\,y' + 3\,y = 0$ $(*)$
    a. Determine el valor de m si se sabe que $y_1(x) = e^{m\,x}$ es una solución de $(*)$.
    b. Con base en el punto anterior, obtenga la segunda solución $y_2(x)$ y verifique que $y_1 \wedge y_2$ son linealmente independientes entre sí.
    c. Determine la solución general de la ecuación $x\,y'' - (1+3x)\,y' + 3\,y = 0$.

15. Resuelva la ecuación $9x^2 y'' + 9x\,y' - y = 2x^k + \ln x$ para toda $k \in IR - \{0\}$ tal que $k \neq \pm 1/3$. **Proponga únicamente** la **forma** de la solución particular de la ecuación propuesta para cuando $k = \pm 1/3$.

16. Sabiendo que $y_1(x) = e^{x} \wedge y_2(x) = x+1$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $x\,y'' - (x+1)\,y' + y = 0$; determine la solución general de la ecuación diferencial $x\,y'' - (x+1)\,y' + y = x^2 e^{2x}$.

17. Verifique que $y_1 = \cos^2 x$ y $y_2 = 3\cos(2x) + 3$ son soluciones **linealmente depen-dientes** de la ecuación homogénea $\left(\cos^2 x\right) y'' + \left(2\operatorname{sen} x \cos x\right) y' + 2\,y = 0$. Resuelva la ecuación diferencial: $\left(\cos^2 x\right) y'' + \left(2\operatorname{sen} x \cos x\right) y' + 2\,y = \cos^3 x$.

18. Considere una ecuación diferencial lineal homogénea, de coeficientes constantes, de la forma $\phi(D)\,y = 0$, con $\phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-2} D^2 + a_{n-1} D + a_n$.
    a. Sabiendo que los ceros de la respectiva ecuación característica (o auxiliar) son: $m = \pm\, i$, $m = 0$ (triple), $m = 2$ y $m = -2$, calcule el valor de los coeficientes $a_0\,,\, a_1\,,\, \ldots\,,\, a_{n-2}\,,\, a_{n-1}\,,\, a_n$.
    b. Con base en la parte (a), si se tiene que $\phi(D)\,y = x + x e^{2x} + 3\cos x$, **proponga la forma** que tendría la *"solución particular"* de la ecuación anterior.

19. Una ecuación diferencial lineal homogénea, con coeficientes constantes, puede ser denotada por: $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$.
    a. Si la correspondiente ecuación auxiliar (característica) tiene como soluciones a: $m = 1$, $m = -2$ (doble) y $m = \pm 3i$, determine el valor de los coeficientes $a_n\,,\, a_{n-1}\,,\, \ldots\,,\, a_2\,,\, a_1\,,\, a_0$.
    b. Si $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 5e^{x} + x e^{-2x} \operatorname{sen}(3x)$. **Indique solamente la forma** que debe tener la *"solución general"* de la ecuación anterior.

20. Sea $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ una ecuación diferencial lineal, con coeficientes constantes, cuya ecuación auxiliar es: $m^2 (m+1)^3 (m^2 + 5) = 0$.
    a. Determine el valor de los coeficientes $a_n\,,\, a_{n-1}\,,\, \ldots\,,\, a_2\,,\, a_1\,,\, a_0$.
    b. Sabiendo que $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 6e^{-x} + x\cos\left(\sqrt{5}\,x\right)$, **proponga la forma** que tendría la *"solución particular"* de la ecuación anterior.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios 1.8, página 11 (Soluciones de una ED y el Wronskiano)

4. a. **SI**. Se puede verificar que $y_1 \wedge y_2$ son soluciones de la ecuación dada; además, como $W\left(e^{-x}\cos 2x\,,\ e^{-x}\operatorname{sen} 2x\right) = 2\,e^{-2x} \neq 0$, son ***l.i.***

   b. Como $W\left(e^{-x}, e^{x}, 5e^{-x}\right) = 0$, entonces $y_1,\ y_2 \wedge y_3$ son soluciones ***l.d.***, por lo que $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + 5C_3 e^{-x} = A\,e^{-x} + B\,e^{x}$ es una solución más, pero **NO** puede ser la solución general de una ecuación diferencial lineal de tercer orden.
   Como $W\left(e^{x}, e^{-x}, xe^{-x}\right) = -4\,e^{-x} \neq 0$, entonces $y_1,\ y_2 \wedge y_3$ son soluciones ***l.i.***; por lo tanto, la función $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3\,x e^{-x}$ **es la solución general buscada**.

   c. **SI**. Se puede verificar que $y_1,\ y_2,\ y_3 \wedge y_4$ son soluciones de la ecua-ción dada; además, como $W(1\,,\ x\,,\ \operatorname{sen} x\,,\ \cos x) = -1 \neq 0$, son ***l.i.***

   d. La función $y_c = C_1 x^3 + C_2 x^4$ es la solución complementaria de la ecua-ción homogénea asociada $x^2 y'' - 6\,x\,y' + 12\,y = 0$, pues se puede verifi-car que $y_1 = x^3 \ \wedge\ y_2 = x^4$ son soluciones de dicha ecuación; además, son ***l.i.*** ya que $W(\,x^3, x^4\,) = x^6 \neq 0$.
   Por otra parte, se puede verificar que la función $y_p = 2\ln x + 1$ es una solución particular de $x^2 y'' - 6\,x\,y' + 12\,y = 24\ln x - 2$.
   Se concluye, por tanto, que la función dada **SI** corresponde a la solución general de la ecuación diferencial propuesta.

Ejercicios 1.9, página 14 (Segunda Solución de una ED de Orden 2)

Nota: Se proporciona la solución general, de la cual se deduce $y_2(x)$.

2. a. $y = C_1 e^{-3x} + C_2\,x e^{-3x}$

   b. $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-5x}$

   c. $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)$

   d. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-2}$

   e. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$

   f. $y = C_1\,x^2 \cos(\ln x) + C_2\,x^2 \operatorname{sen}(\ln x)$

   g. $y = C_1 \operatorname{sen} x \big/ \sqrt{x} - C_2 \cos x \big/ \sqrt{x}$ o $y = A \operatorname{sen} x \big/ \sqrt{x} + B \cos x \big/ \sqrt{x}$

   h. $y = C_1 + \frac{1}{2}\,C_2 \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$; o bien, $y = A + B\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

i. $y = C_1 \sqrt{x}\ \ln x + C_2 \sqrt{x}$

j. $y = C_1 e^{2x} - \frac{1}{4} C_2 (2x+1)$; o bien, $y = Ae^{2x} + B(2x+1)$

***Ejercicios 2.1.1*, página 18** **(Ecuación Lineal Homogénea de Orden 2)**

1. $y = C_1 e^{-2x/3} + C_2 e^{2x/3}$
2. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x/2}$
3. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$
4. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x}$
5. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}$
6. $y = e^{3x/2}\left[C_1 \operatorname{sen}(x/2) + C_2 \cos(x/2)\right]$
7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$
8. $y = C_1 + C_2 e^{-5x/2}$
9. $y = C_1 \operatorname{sen}(3x/4) + C_2 \cos(3x/4)$
10. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{x/3}$

***Ejercicios 2.1.2*, página 20** **(E L Homogénea de Orden Superior)**

1. a. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-x/2}$

   b. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{x}$

   c. $y = Ae^{-x} + Be^{x} + C\cos(2x) + D\operatorname{sen}(2x)$

   d. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

   e. $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\, e^{x/2}$

   f. $y = Ae^{5x} + B\operatorname{sen}(3x) + C\cos(3x)$

   g. $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x/3}$

   h. $y = Ae^{x} + (B + Cx + Dx^2)e^{-x}$

   i. $y = Ae^{x/3} + e^{3x}(B\cos x + C\operatorname{sen} x)$

   j. $y = Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{-2x} + De^{3x}$

   k. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\, e^{x}$

   l. $y = (A + Bx)\, e^{-2x} + e^{2x}\left(C\operatorname{sen}(2x) + D\cos(2x)\right)$

2. La ecuación lineal es de **orden nueve** y su solución general está dada por:
$$y = A + Bx + Cx^2 + De^{-3x} + Ee^{2x} + e^{-x}\left[(F + Gx)\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) + (H + Ix)\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,x\right)\right]$$

3. Si una ecuación lineal homogénea de tercer orden tiene una solución dada por $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x}$, entonces $y_1 = 1$, $y_2 = x \wedge y_3 = e^{3x}$ son soluciones de dicha ecuación. Ahora bien, como $W\left(1, x, e^{3x}\right) = 9\, e^{3x} \neq 0$, las soluciones indicadas son ***l.i.***; por lo tanto, la función proporcionada **<u>ES</u>** la solución general de tal ecuación diferencial, la cual tiene la forma: $y''' - 3y'' = 0$.

4. Como $W\left(1, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\right) = 0$, entonces $y_1 = 1$, $y_2 = \operatorname{sen}^2 x \wedge y_3 = \cos^2 x$ son soluciones ***l.d.***; por lo tanto, la función proporcionada **<u>NO</u>** corresponde a la solución general de la supuesta ecuación diferencial.

5. Las ecuaciones diferenciales lineales correspondientes son:
   a. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$
   b. $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$
   c. $y^{(4)} - y''' + 9y'' - 9y' = 0$
   d. $y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 8y' + 8y = 0$

6. Valor de los coeficientes: $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, $a_2 = 36 \;\wedge\; a_3 = -20$
   Ecuación diferencial: $(2D^3 + 7D^2 + 36D - 20)\,y = 0$

7. Valor de las constantes: $a = 0$, $b = 7$, $c = -18 \;\wedge\; d = 10$
   Ecuación diferencial: $y^{(4)} + 7y'' - 18y' + 10y = 0$

Ejercicios 2.2.1, página 29 (Coeficientes Indeterminados)

1. Relacionadas con el I CASO**.**

a. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - e^{2x}\left[2x + \frac{4}{3}\right]$

b. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}\left[6x + 5\right]e^{x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{20}$

c. $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-x} + \frac{1}{2}\left[3\,\mathrm{sen}\,x - \cos x\right]$

d. $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{x/2} - \frac{1}{5}e^{x}\left[7\,\mathrm{sen}\,x + \cos x\right]$

e. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$

f. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + \frac{4}{9}e^{-2x}$

g. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{10}e^{x}\left[2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x\right]$

h. $y = C_1\cos(2x) + C_2\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{1}{7}\,\mathrm{sen}(5x)$

i. $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-x} + 3x - 4 + \frac{3}{4}e^{x} + \frac{2}{25}\left[4\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x)\right]$

j. $y = e^{-2x}\left[9\,\mathrm{sen}\,x - 10\cos x\right] + 7e^{-4x}$

k. $y = \frac{5}{8}e^{-8x} + \frac{5}{8}e^{8x} - \frac{1}{4}$

l. $y = \frac{1}{4}e^{2x}\left[8\cos(2x) - 3\,\mathrm{sen}(2x)\right] + 2x^3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x$

. Relacionadas con el **II CASO**.

a. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x} - 6x^2 e^{3x} + \frac{2}{9}\left[3 + 4x + 3x^2 \right]$

b. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{x/2} + \frac{1}{2}\, x^2 e^{x/2} + 12$

c. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x\left[3\operatorname{sen} x - \cos x\right]$

d. $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x)\, e^{2x} + \frac{3}{2}\, x^2 e^{2x}$

e. $y = (C_1 + C_2 x + 5x^2)\, e^{-2x}$

f. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + 4x^2 - xe^{-x}$

g. $y = x^2 + 2x - 2 + (x-3)\, e^x$

h. $y = 7 \operatorname{sen} x + 9\pi \cos x + 4x - 5x \cos x$

i. $y = 2x\cos x - \operatorname{sen} x - \pi \cos x$

3. Como $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$ es la solución de $\phi(D)y = 0$, entonces se tiene que $\phi(D)y = y'' + y' - 6y$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación $y'' + y' - 6y = 15\, e^{2x} - 6$ es: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x} + 1$.

4. La solución general de la ecuación $y'' - 2y' + y = e^x - 4\operatorname{sen} x$ está dada por la función $y = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}\, x^2 \right) - 2\cos x$.

5. La forma correspondiente de la solución particular es:

a. $y_p = A\, x^2 e^{-x} + \left[(B + Cx) \operatorname{sen}(3x) + (D + Ex) \cos(3x) \right] e^{-x}$

b. $y_p = A\, x^2 + Bx + C + x\, e^x \left[D\cos(2x) + E \operatorname{sen}(2x) \right]$

c. $y_p = A\, x\, e^x + \left(Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \right) e^{-x}$

d. $y_p = Ax^2 + Bx + C + (Dx^2 + Ex)\cos(3x) + (Fx^2 + Gx)\operatorname{sen}(3x)$

e. $y_p = \left(Ax + Bx^2 + Cx^3 \right) e^{-x} + \left(Dx + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4 \right) e^{3x}$

f. $y_p = x\left(A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x) \right) + \left(Cx + D \right) e^{3x} + Ex^2$

6. Las ecuaciones diferenciales lineales correspondientes son:
   a. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 16x + 24$
   b. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 18x - 36$
   c. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 16\,e^{-3x} - 21$
   d. $y'' - 2y' = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}x - \cos x\right) e^{2x}$
   e. $y''' - 3y'' + 3y' + 7y = 12\,e^{-x} - 7x^2 - 6x + 6$
   f. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 10y''' = 2\operatorname{sen}x - 9\cos x$

Ejercicios 2.2.2, página 36 (Variación de Parámetros)

1. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales propuestas son:

a. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x - 2 + \operatorname{sen}x\,\ln|\sec x + \tan x|$
b. $y = C_1\cos(2x) + C_2\operatorname{sen}(2x) - 1 + \operatorname{sen}(2x)\,\ln|\sec(2x) + \tan(2x)|$
c. $y = C_1\cos(3x) + C_2\operatorname{sen}(3x) - \frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x)\,\ln|\operatorname{sen}(3x)|$
d. $y = e^{4x}\left(C_1 + C_2\,x + x^{-1}\right)$
e. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^x + \frac{1}{2}\left[(x^2-1)\arctan x + x - x\ln(1+x^2)\right]e^x$
f. $y = \left[A + \ln(e^x+1)\right]e^x + \left[B - 1 + \ln(e^x+1)\right]e^{2x}$
g. $y = e^{-x}(C_1 + C_2\,x) + x^2\,e^{-x}\left[\frac{\ln|x|}{2} - \frac{3}{4}\right]$
h. $y = e^{-x}\left[C_1\operatorname{sen}x + C_2\cos x - x\cos x + \operatorname{sen}x\,\ln|\operatorname{sen}x|\right]$
i. $y = e^x\left[C_1 + C_2\,x - \ln(x^2+1) + 2x\arctan x\right]$
j. $y = e^{-2x}\left[C_1 + C_2\,x - \ln|x| - 1\right] = e^{-2x}\left[A + Bx - \ln|x|\right]$

2. La solución complementaria de $y'' + y = 0$ es: $y_c = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x$
   a. La solución particular de $y'' + y = 2x - 30\,e^{3x}$ es: $y_{p_1} = 2x - 3\,e^{3x}$
   b. La solución particular de $y'' + y = \cot x$ es: $y_{p_2} = \operatorname{sen}x\,\ln|\csc x - \cot x|$

   Por lo tanto, la solución general buscada es: $y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2}$

3. Solución complementaria de $y'' + 3y' + 2y = 0$: $y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
   Solución particular de $y'' + 3y' + 2y = 2x - 5$: $y_{p_1} = x - 4$
   Solución particular de $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$: $y_{p_2} = -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$
   Solución general buscada: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x - 4 - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$

4. Las soluciones buscadas son:

a. $y = C_1 e^{-x} + C_2 (x-1) + 2(2-x^2)\, e^{-x}$

b. $y = \cos(\ln x)\left[C_1 + \ln\left|\cos(\ln x)\right|\right] + \operatorname{sen}(\ln x)\left[C_2 + \ln x\right]$

c. $y = x^{-1/2}\left[C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + 1\right]$

d. $y = C_1\, x + C_2\, x^{-1} - 2\operatorname{sen} x - 2\, x^{-1}\cos x$

e. $y = C_1 e^{x} + C_2\, x + (2x-1)\, e^{-x}$

***Ejercicios 3.1*, página 42** **(Ecuación de Euler)**

1. $y = \sqrt{x}\,\left[1 - \left(\ln x/2\right)\right]$

2. $y = C_1 x^{-2} + C_2 x^3 - 2x$

3. $y = x^2(C_1 + C_2 \ln x) + x + \dfrac{1}{6}\, x^2 \ln^3 x$

4. $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \ln^2 x + \dfrac{5}{3}\ln x + \dfrac{1}{2}$

5. $y = \sqrt{x}\,\left[C_1 \operatorname{sen}(\ln x/2) + C_2 \cos(\ln x/2)\right] - \operatorname{sen}(\ln x) + 2\cos(\ln x)$

6. $y = \left(C_1 - \ln\left|\sec(\ln x) + \tan(\ln x)\right|\right)\cos(\ln x) + C_2\, \operatorname{sen}(\ln x)$

7. $y = C_1\, x^{-1} + C_2\, x + 2x^{-1}\operatorname{sen} x - 2\cos x$

8. $y = C_1\, x^{-1} + C_2\, x^{-2} - 2\ln x + 3$

9. $y = C_1\, x^{-3} + C_2\, x^3 + \dfrac{1}{6}\, x^3 \ln x - \dfrac{2}{3}$

10. $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x) + \dfrac{1}{5}\, x^2 + \dfrac{1}{2}\, x + 1$

11. $y = \left(C_1 + \ln\left|\cos(2\ln x)\right|\right)\cos(2\ln x) + \left(C_2 + 2\ln x\right)\operatorname{sen}(2\ln x)$

12. $y = C_1\, x^3 + C_2\, x^3 \ln x + 4\, x^3 (\ln x)^{7/2} = x^3\left(C_1 + C_2 \ln x + 4\,(\ln x)^{7/2}\right)$

13. Sol. General: $y = C_1\, x^{1/3} + C_2\, x^{-3} + \ln x$ Sol. Particular: $y = x^{1/3} + \ln x$

14. $y = C_1 (x-1)^{-1} + C_2 (x-1)^4 - \ln(x-1) + 1 + \dfrac{x}{2}$

15. $y = \left[C_1 + C_2 \ln(x+2) + 2\ln^2(x+2) \right](x+2) - 5$

16. (a) $y = C_1(3x+2) + C_2(3x+2)^{1/3} + \dfrac{1}{3}\ln(3x+2) + \dfrac{4}{3}$

(b) $y = C_1(3x+2) + C_2(3x+2)^{1/3} + \dfrac{1}{3}(3x+2)\ln(3x+2) - \ln(3x+2) - 4$

17. $y = \left[C_1 + C_2 \ln(5x-4) \right](5x-4)^2 + \dfrac{5x-3}{25}$

18. $y = \left[C_1 + C_2 (2x-3) \right](2x-3) + (2x-3)^2 \ln(2x-3)$

19. (a) $y = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-1/2} + \dfrac{3x^k}{4k^2-1} - 1 - \ln x$

(b) $y = \left(C_1 + \dfrac{3}{4}\ln x \right) x^{1/2} + C_2 x^{-1/2} - 1 - \ln x$

(c) $y = C_1 x^{1/2} + \left(C_2 - \dfrac{3}{4}\ln x \right) x^{-1/2} - 1 - \ln x$

Ejercicios 3.2, **página 43** **(Ecuación de Euler)**

a. $y = x^{-1/2}\left[C_1 \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\ln x}{2}\right) + C_2 \cos\left(\dfrac{3\ln x}{2}\right) \right] + 2\ln x - \dfrac{3}{5}x^{-1} - \dfrac{4}{5}$

b. $y = C_1 x + C_2 x^{-4} - 3x^{-4}\ln x$

Ejercicios 3.3, **página 43** **(Ecuación de Euler)**

a. $y = C_1 \cos(\operatorname{sen} x) + C_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + 1$

b. $y = C_1 \cos(\operatorname{sen} x) + C_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + 3 - \operatorname{sen}^2 x$

c. $y = C_1 \cos(\operatorname{sen} x) + C_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + \dfrac{1}{2} e^{\operatorname{sen} x}$

d. $y = C_1 \cos(\operatorname{sen} x) + C_2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - e^{\operatorname{sen} x}\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \right]$

Ejercicios 3.4, **página 43** **(Ecuación de Euler)**

a. $y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\sqrt{2}\ln x) + C_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln x)$

b. $y = C_1 + C_2 x^{-1} + C_3 x + \ln x \left(\dfrac{x}{2} - 1 \right)$

c. $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3 - \frac{5}{18}\left(\ln^2 x + \ln^3 x\right)$

d. $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 + C_3 x^4$

e. $y = x\left(C_1 + C_2 \ln x + C_3 \ln^2 x - \ln^4 x\right)$

f. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + 4 - \ln x$

Ejercicios A.1, página 45 **(El Operador Aniquilador)**

1. (c)
2. (b)
3. (a) aniquila a ambas funciones
4. (b) aniquila a ambas funciones
5. (c) aniquila a ambas funciones
6. (c) aniquila a ambas funciones

Ejercicios A.2.1, página 47 **(Aniquilador–Raíces Reales)**

1. $(D+5)(D-5)(D-1)$
2. $(D+6)(D-2)^4$
3. $(D+2)(D-1)^4$
4. $(D+1)^3(D-4)^2$

Ejercicios A.2.2, página 47 **(Aniquilador–Reales, Caso Particular)**

1. D^4
2. D^7
3. $D^3(D+2)^3$
4. $D^2(D+1)^2(D-7)$

Ejercicios A.2.3, página 48 **(Aniquilador–Raíces Complejas)**

1. $(D^2-4D+5)^2(D-2)$
2. $(D^2-2D+26)^2(D-1)^3$
3. $(D^2+2D+17)^3(D-4)^2$
4. $D^4(D^2+6D+10)^2(D+3)(D-8)$

Ejercicios A.2.4, página 49 **(Aniquilador–Complejas, Caso Particular)**

1. $D^4(D^2+25)^2(D^2+4)^3$
2. $(D+1)^2(D^2-2D+2)\,(D^2+5)$
3. $D^4(D^2-6D+18)^2(D+5)$
4. $(D^2+2)^2$

Ejercicios A.3, página 51 **(Coeficientes Indeterminados–Aniquilador)**

Ver las respuestas de los ejercicios 2, 3, 4, 5 y 6, en las páginas 59 y 60.

RESPUESTAS DE LA PRÁCTICA GENERAL

I. Ecuaciones complementarias u homogéneas, página 52

1. $y = \left[C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{7}\,x/2\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{7}\,x/2\right)\right] e^{3x/2}$
2. $y = \left[C_1 + C_2\,x\right] e^{-x/2}$
3. $y = \left[C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2\right] e^{x} + \left[C_4 + C_5\,x\right] e^{-x}$
4. $y = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{2x} + C_3\,e^{-\sqrt{5}\,x} + C_4\,e^{\sqrt{5}\,x}$
5. $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} + C_3\,e^{3x}$
6. $y = \left[\,C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{2}\,x\right)\,\right] e^{-x}$

II. Coeficientes indeterminados o aniquiladores, página 52

1. $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$
2. $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} + C_3\,e^{3x} + \left(\dfrac{1-x}{2}\right) e^{-x}$
3. $y = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{x} - x - \dfrac{1}{2} + 6\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x)$
4. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{x} + \left[\,\dfrac{4}{5}\operatorname{sen} x + \dfrac{3}{5}\cos x\,\right] e^{-2x}$
5. $y = C_1\,e^{-2.618\,x} + C_2\,e^{-0.382\,x} + x^2 - 3x + 8$
6. $y = C_1 + (C_2 + 2x)\,e^{-x} + C_3\,e^{x} + \dfrac{1}{2}\,e^{2x}$
7. $y = C_1\,e^{2x} + (C_2 + C_3\,x)\,e^{-x} - \dfrac{3}{2}\,(x^2 + x^3)\,e^{-x}$
8. $y = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{8}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{8}\,x\right) + \dfrac{5}{8}\,x + \dfrac{2}{9}\,e^{-x}$

III. Variación de parámetros, página 52

1. $y = \left(C_1 - \dfrac{\ln\left|\operatorname{sen}(3x)\right|}{36}\right)\operatorname{sen}(3x) + \left(C_2 - \dfrac{x}{12}\right)\cos(3x)$
2. $y = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{-x} + C_3\,e^{x} + \left(\dfrac{x}{6} - \dfrac{5}{36}\right) e^{x}$
3. $y = \left[C_1 + C_2\,x - x + x\ln|x|\right] e^{x}$

4. $y = \left[\, \left(C_1 + x \right) \operatorname{sen} x + \left(C_2 + \ln\left| \cos x \right| \right) \cos x \,\right] e^{x}$
5. $y = \left(C_1 + x \right) \operatorname{sen} x + \left(C_2 + \ln\left| \cos x \right| \right) \cos x$
6. $y = \left[C_1 + C_2\, x - \ln\left| x \right| - 1 \right] e^{3x}$

IV. Ecuaciones de Euler, página 52

1. $y = C_1\, x^{-3} + C_2\, x^3 - \dfrac{1}{9} \left[\ln^2 x + \dfrac{2}{9} \right]$
2. $y = C_1\, x^{-1/2} + C_2\, x - 4 - \ln x$
3. $y = x^{-1/3} \left[\, C_1 \cos\left(\dfrac{2 \ln x}{3} \right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2 \ln x}{3} \right) \right] + 2\cos(\ln x) - 3\operatorname{sen}(\ln x)$
4. $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^3 + \dfrac{1}{4}\, x^{-1} - x^2 \ln x$
5. $y = C_1\, x^{-1/4} + C_2\, x + 2\, x \ln x$
6. $y = x \left(C_1 + C_2 \ln x + 3 \ln^2 x \right)$
7. $y = C_1\, (2x+3)^{-1/2} + C_2\, (2x+3) + \dfrac{3}{5}\, (2x+3)^2 + 6\, (2x+3)\, \ln(2x+3) - 27$
8. $y = C_1\, (2x+1)^{1/2} + C_2\, (2x+1)^2 + \dfrac{1}{3}\, (2x+1)^{-1} - 2\, \ln(2x+1) - 5$

V. Solución de ecuaciones (varias técnicas), página 52

1. $y = C_1\, e^{-4x} + C_2\, e^{-2x} + C_3\, e^{x} + C_4\, e^{2x}$
2. $y = C_1\, x^{-1/2} + C_2\, x^{-1} + \dfrac{1}{4}\, x^3 - 2\, x^{-1} \ln x$
3. $y = \left[C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x) + \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{3} \right] e^{-x}$
4. SG: $y = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x) + \dfrac{3}{2} \left[\, 1 - x \operatorname{sen}(2x) \right]$

   SP: $y = \dfrac{3}{2} \left[\, 1 - \cos(2x) + (\pi - x) \operatorname{sen}(2x) \right]$
5. $y = (C_1 + C_2 \ln x)\, x^{-2} + \dfrac{1}{2}\, x^2 + \dfrac{3}{4} \ln^2 x - \dfrac{3}{2} \ln x + \dfrac{9}{8}$
6. $y = C_1\, e^{-3x} + \left(C_2 - 5x^2 + 20\, x \right) e^{-2x}$
7. SG: $y = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{2x} + \dfrac{1}{4}\, e^{3x}$ SP: $y = \dfrac{7}{4}\, e^{-x} + e^{2x} + \dfrac{1}{4}\, e^{3x}$

8. SG: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x\, e^{-x}$ SP: $y = e^{2x} - e^{3x} + x\, e^{-x}$
9. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - 6\cos x + 2\,\mathrm{sen}\, x$
10. $y = \left(C_1 + 2x \right) \mathrm{sen}(2x) + \left(C_2 + \ln|\cos(2x)| \right) \cos(2x)$
11. $y = C_1 + C_2\, x + C_3\, e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x} - \frac{1}{3} x^3$
12. $y = C_1 x^{-5} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{3} x - \frac{4}{5}$
13. $y = C_1 + C_2\, x + C_3\, e^{-4x} + 2\, e^{-3x}$
14. $y = C_1 \mathrm{sen}(3x) + \left(C_2 - 4x \right) \cos(3x)$
15. $y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{1/2} + 2x^2 - \ln x - 1$
16. $y = \left[C_1 + C_2\, x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right] e^{-x}$

VI. Ejercicios varios, página 53

1. (a) $y_p = 4x^2 - 16x + 21$; donde $y_c = \left(C_1 + C_2\, x \right) e^{-x}$
   (b) $y_p = \left(x \ln|x| - x \right) e^{-x}$; donde $y_c = \left(C_1 + C_2\, x \right) e^{-x}$
   (c) $y = \left(C_1 + C_2\, x + x \ln|x| - x \right) e^{-x} + 4x^2 - 16x + 21$
2. (b) $y_2(x) = x^2 - 1$; $y = y_c = C_1\, x + C_2 (x^2 - 1)$ (Nota: $W = x^2 + 1$)
   (c) $y_p = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6}$ (d) $y = C_1\, x + C_2 (x^2 - 1) + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6}$

NOTA: A continuación, se da la solución general, de la cual se deduce $y_2(x)$.

3. (a) $y = C_1 \ln x - C_2$ o bien $y = A \ln x + B$
   (b) $y = C_1 (x+1) - C_2 (x^2 + x + 2) \approx y = A(x+1) + B(x^2 + x + 2)$
   (c) $y = C_1 e^{-2x} + C_2\, x$
   (d) $y = A + B \left[\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \right]$ (Nota: $A = C_1$ y $B = C_2 / 2$)
   (e) $y = C_1 e^{x} - C_2 (x^2 + 2x + 2) \approx y = Ae^{x} + B(x^2 + 2x + 2)$
   (f) $y = C_1 x^2 - C_2 (x^{-1} + 2) \approx y = Ax^2 + B(x^{-1} + 2)$
   (g) $y = \left(A + Bx^2 \right) e^{x}$ (Nota: $A = C_1$ y $B = C_2 / 2$)
   (h) $y = A\, x + B(x^3 - 2)$ (Nota: $A = C_1$ y $B = C_2 / 2$)

4. Solución Complementaria: $y_c = C_1 \cos(1/x) - C_2 \,\mathrm{sen}(1/x)$
   SP: $y_p = x^{-2} - 2$ SG: $y = C_1 \cos(1/x) - C_2\, \mathrm{sen}(1/x) + x^{-2} - 2$

5. $y = C_1\, x^{-1} + C_2\, x + \dfrac{3x^k}{k^2-1} - k\, \ln x - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |k| \neq 1$

Si $k=-1 \quad \Rightarrow \quad y_p(z) \subset y_c(z) \quad \Rightarrow \quad y_p(z) = Az\,e^{-z} + Bz + C$

Si $k=1 \quad \Rightarrow \quad y_p(z) \subset y_c(z) \quad \Rightarrow \quad y_p(z) = Az\,e^{z} + Bz + C$

6. (b) $y_2(x) = x^2 + 1$; $y_c = -C_1\, x + C_2\,(x^2+1)$ (Nota: $W = 1 - x^2$)

(c) $y_p = -x^2 - x\, \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + \dfrac{1+x^2}{2}\, \ln\left(1+x^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad y = y_c + y_p$

7. (b) Solución General: $y = C_1\, x^2 - C_2\left(3x + \dfrac{5}{2}\right)$ (Nota: $W = 3x^2 + 5x$)

(c) Solución Particular: $y = \dfrac{1}{2}\, x^2 + 3x + \dfrac{5}{2}$

8. (a) $y_c = C_1 \operatorname{sen}\left(e^x\right) + C_2 \cos\left(e^x\right)$ (Nota: $W = e^x$)

(b) $y = C_1 \operatorname{sen}\left(e^x\right) + C_2 \cos\left(e^x\right) + 3e^x$

9. (a) ED: $y'' - 5y' + 6y = 0$

(b) SG: $y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{3x} - 5x e^{3x} + 2x + 1$

10. (a) ED: $9y''' + 36y'' - y' - 4y = \dfrac{2}{3}\, \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right) - 8\, \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) - \dfrac{4x+1}{9}$

(b) ED: $y^{(4)} + 4y'' = 2e^{2x} - 2x^2 - 1$

11. Solución Complementaria: $y_c = C_1\, x\, \cos x + C_2\, x\, \operatorname{sen} x$

Solución Particular: $y_p = x^2 - x$

Solución General: $y = C_1\, x\, \cos x + C_2\, x\, \operatorname{sen} x + x^2 - x$

12. $y = C_1\,(3x+2) + C_2\,(3x+2)^{1/3} + \dfrac{1}{3}\,(3x+2)^2 - \dfrac{4}{3}$

13. $y = C_1\, x + C_2\, x e^x - 2x(x+1)$

14. (a) $y_1(x) = e^{3x}$ $(m=3)$ (b) $y_2(x) = -\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}\right)$, $\left(W = x e^{3x}\right)$

(c) $y = C_1\, e^{3x} - C_2\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}\right)$ o bien $y = Ae^{3x} + B(3x+1)$

15. $y = C_1\, x^{-1/3} + C_2\, x^{1/3} - \ln x + \dfrac{2\,x^k}{9\,k^2 - 1} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\,k\,| \neq \dfrac{1}{3}$

Si $k = -1/3 \quad \Rightarrow \quad y_p(z) \subset y_c(z) \quad \Rightarrow \quad y_p(z) = A\,z\,e^{-z/3} + B\,z + C$

Si $k = 1/3 \quad \Rightarrow \quad y_p(z) \subset y_c(z) \quad \Rightarrow \quad y_p(z) = A\,z\,e^{z/3} + B\,z + C$

16. $y = C_1\, e^{x} + C_2\,(x+1) + \left(\dfrac{x-1}{2}\right) e^{2x}$

17. $y = C_1\,\cos^2 x + C_2\,\operatorname{sen} x\,\cos x + \cos x$

18. (a) Ec. Homogénea: $\left(D^7 - 3D^5 - 4D^3\right) y = 0$; por lo que: $a_0 = 1$, $a_2 = -3$, $a_4 = -4$ y $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$.

(b) $y_p = A x^3 + B x^4 + \left(C\,x + D\,x^2\right) e^{2x} + x\,(E \cos x + F \operatorname{sen} x)$

19. (a) Ec. Homogénea: $\left(D^5 + 3D^4 + 9D^3 + 23D^2 - 36\right) y = 0$; así, $a_5 = 1$, $a_4 = 3$, $a_3 = 9$, $a_2 = 23$, $a_1 = 0$ y $a_0 = -36$.

(b) $y_c = C_1\, e^{x} + \left(C_2 + C_3\, x\right) e^{-2x} + C_4 \operatorname{sen}(3x) + C_5 \cos(3x)$

$y_p = A\,x\,e^{x} + \left[(B\,x + C)\operatorname{sen}(3x) + (D\,x + E)\cos(3x)\right] e^{-2x}$

Por lo tanto, $y = y_c + y_p$

20. (a) Ec. Homogénea: $\left(D^7 + 3D^6 + 8D^5 + 16D^4 + 15D^3 + 5D^2\right) y = 0$; por lo que: $a_7 = 1$, $a_6 = 3$, $a_5 = 8$, $a_4 = 16$, $a_3 = 15$, $a_2 = 5$ y $a_1 = a_0 = 0$.

(b) $y_p = A x^3 e^{-x} + \left[(B\,x + C\,x^2)\cos\left(\sqrt{5}\,x\right) + (D\,x + E\,x^2)\operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\,x\right)\right]$

TABLA DE ALGUNAS INTEGRALES BÁSICAS*

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\ ,\ n \neq -1$

2. $\displaystyle\int e^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a}\ ,\ a \neq 0$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u|$

4. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$

6. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u$

7. $\displaystyle\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$

8. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u|$

9. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u|$

10. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u|$

11. $\displaystyle\int \sec u\tan u\,du = \sec u$

12. $\displaystyle\int \csc u\cot u\,du = -\csc u$

13. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

14. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

15. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u$

16. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u$

17. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u$

18. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right)$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)$

21. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right|$

22. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$

23. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|$

24. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$

25. $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}\,(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu)}{a^2+b^2}$

26. $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}\,(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu)}{a^2+b^2}$

* Se omite la constante de integración.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank Jr. ***Ecuaciones Diferenciales***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1970 y 1991.

Bronson, Richard. ***Ecuaciones Diferenciales Modernas***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1976.

Edwards, C.H. Jr y Penny, D. E. ***Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones***. Editorial Editorial Prentice-Hall, México, 1986.

Kiseliov, A., Krasnov, M. Y Makarenko, G. ***Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***. Editorial Mir, Moscú, 1979.

Marcus, Daniel A. ***Ecuaciones Diferenciales***. Editorial CECSA, México, 1998.

Spiegel, Murray. ***Ecuaciones Diferenciales Aplicadas***. Editorial Prentice-Hall, México, 1983.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones***. Editorial Grupo Iberoamérica, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sexta edición, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sétima edición, México, 2002.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

CONTENIDOS **PÁGINA**