INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

MOVIMIENTO VIBRATORIO

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES

Prof. Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc.

2016

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES

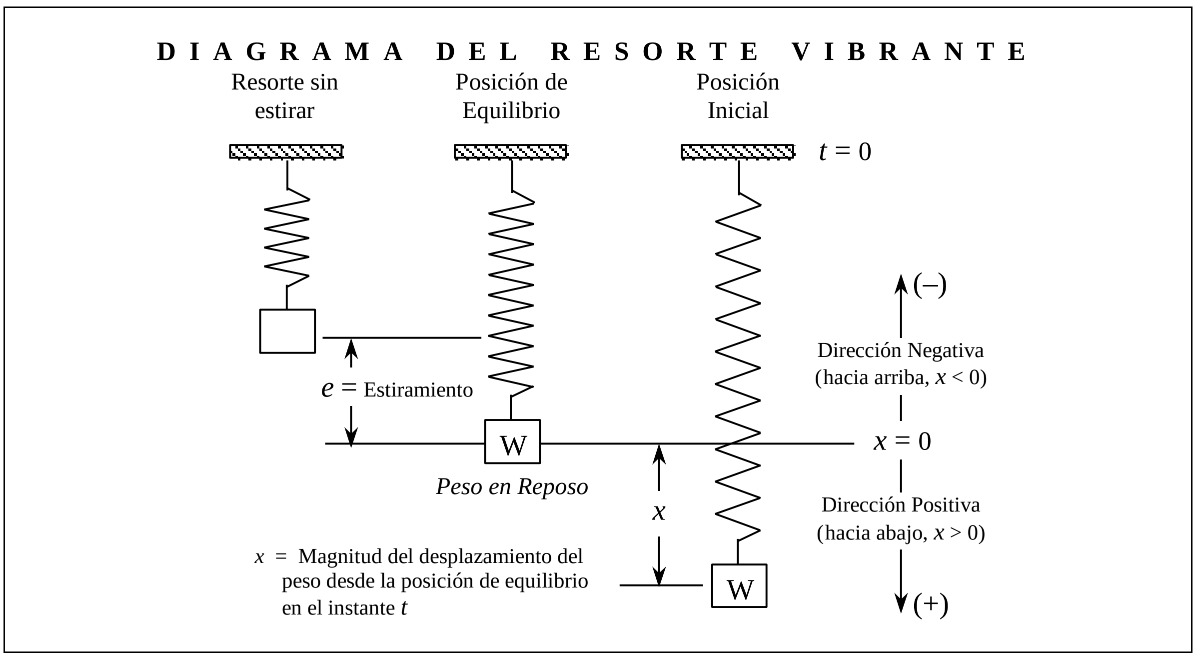
1 MOVIMIENTO VIBRATORIO DE SISTEMAS MECÁNICOS

Para el estudio de diversos fenómenos físicos, se usa como modelo la *ecuación diferencial lineal de segundo orden* ***de coeficientes constantes***, a saber:

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = F(t) \qquad (a_0 \neq 0)$$

Uno de estos fenómenos físicos está relacionado con el *movimiento vibratorio de sistemas mecánicos*; en particular, se estudiará el caso del *resorte vibrante* (de peso despreciable) suspendido verticalmente de un soporte fijo, al cual se le coloca (cuelga) un peso W en su extremo inferior y por lo tanto se produce un alargamiento o estiramiento en el resorte.

Cuando el *peso está en reposo*, se dice que está en su *posición de equilibrio*. Si el peso se hala hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de su posición de equilibrio. Por consiguiente, para estudiar el movimiento del peso (en este y similares casos), se deben conocer las fuerzas que actúan sobre el peso durante su movimiento.



Una de estas fuerzas es la que tiende a regresar o restaurar un peso desplazado a su posición de equilibrio, la cual se denomina *fuerza restauradora*. La ley que gobierna esta fuerza es un caso especial de la ley generalizada de Hooke, la cual se enuncia como sigue:

<u>Ley</u> <u>de</u> <u>Hooke</u>: *La fuerza ejercida por un resorte, tendiente a restaurar el peso W a la posición de equilibrio, es proporcional a la distancia de W a la posición de equilibrio.* (Se abrevia como *"la fuerza es proporcional al alargamiento"*)

1.1 *Movimiento armónico simple o no amortiguado*

En este caso, solo actúa la *fuerza restauradora* F_R en **dirección opuesta** (hacia arriba) a la del movimiento del peso. Por lo tanto, si x **representa** la **posición** o **magnitud** del desplazamiento de *W*, medida **hacia abajo** desde la posición de equilibrio, entonces, por la *Ley de Hooke*, se tiene que: $F_R = -k\,x \;\; (k > 0)$, donde *k* es la constante de proporcionalidad, conocida como *constante del resorte*.

De acuerdo con lo anterior, y usando la *segunda Ley de Newton*, el **modelo que describe este fenómeno** está dado por la ecuación diferencial:

$$\frac{W}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{W}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \;\; ; \;\; \text{con} \;\; x(0) = x_0 \;\wedge\; x'(0) = v_0 .$$

Estas condiciones corresponden a la magnitud del desplazamiento inicial y a la velocidad inicial, respectivamente.

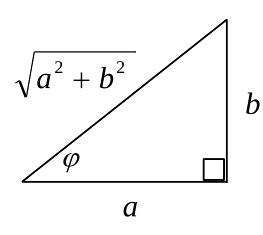
Es importante hacer notar que la solución de la ecuación diferencial indicada nos permite determinar la ecuación del movimiento en función del tiempo. Para tal efecto, se requiere resolver la respectiva ecuación auxiliar (o característica) $\phi(m) = 0$, la cual, **para este tipo de movimiento**, **siempre** nos conduce a las raíces complejas de la forma $m = \pm\,w\,i$. Por lo tanto, la **ecuación de posición** que describe la trayectoria del desplazamiento del peso, en el instante t, es:

$$x(t) = a\,\text{sen}(wt) + b\,\cos(wt) \qquad (*)$$

❖ *Forma del ángulo de fase de la ecuación del movimiento del peso*

Una forma alterna de expresar la ecuación de posición indicada en (*), conocida como la *forma del ángulo de fase* de la ecuación del movimiento, consiste en utilizar la equivalencia:

$$x(t) = a\,\text{sen}(wt) + b\,\cos(wt) = \sqrt{a^2 + b^2}\;\text{sen}\big(wt + \varphi\big)$$



donde $\text{sen}\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \wedge \quad \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

lo cual permite calcular el ángulo φ, cuyo valor depende de las constantes a y b ya que éstas definen el cuadrante del plano real en el que ese ángulo se encuentra.

Por otra parte, dado que la ecuación del movimiento se puede escribir de la forma: $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt+\varphi)$, se tiene que:

- La *amplitud* es: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ (pies o pulgadas). Corresponde al desplazamiento máximo del peso desde su posición de equilibrio. Se da cuando la velocidad es igual a cero.
- El *período* es: $P = \dfrac{2\pi}{w}$ (segundos). Corresponde al tiempo que tarda el desplazamiento en alcanzar un período o ciclo completo.
- La *frecuencia* es: $f = \dfrac{1}{P} = \dfrac{w}{2\pi}$ (ciclos por segundo). Corresponde a la frecuencia de vibración o movimiento. Es el recíproco del período.
- El *ángulo de fase* es: φ (radianes).
  Observe que si φ está en el I o IV cuadrante, entonces $\varphi = \arctan(b/a)$; mientras que, si está en el II o III cuadrante, entonces $\varphi = \pi + \arctan(b/a)$.

Ejemplo 1.1.1: Un objeto cuyo peso es de 3 libras, se coloca en un resorte y lo estira 6 pulgadas. Cuando alcanza la posición de equilibrio, el objeto recibe un golpe hacia abajo el cual le imprime una velocidad inicial de 2 pies/seg. Encuentre la posición y velocidad del objeto después de t segundos de recibir el impacto[1]. Determine la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento del objeto.

- ***Datos:*** En este caso $W = 3$, $g = 32$ y $e = 1/2$ (pues $6\,\mathrm{pulg} = 1/2\,\mathrm{pie}$). Además, como $W = k\,e \Rightarrow 3 = k/2 \Rightarrow k = 6$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Como se trata de un movimiento armónico simple, si $x(t)$ denota la posición del objeto en cualquier instante t, entonces la ecuación que permite resolver este problema es: $\dfrac{W}{g}\,x'' + k\,x = 0$, con las condiciones $x(0) = 0$ y $v(0) = x'(0) = 2$ (magnitud inicial nula pues arranca desde la posición de equilibrio y velocidad inicial positiva pues el objeto se golpea hacia abajo).

  Luego, con base en los datos ya indicados, se debe resolver la ecuación:

  $$\frac{3}{32}\,x'' + 6x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x'' + 64x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad m^2 + 64 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad m = \pm 8i.$$

  Por lo tanto, se tiene que: $x(t) = A\,\mathrm{sen}(8t) + B\cos(8t)$ (1)

[1] En este tipo de problemas, por lo general, las unidades de medida corresponden al sistema PLS (Pie, Libra, Segundo). Recordar que 12 pulg = 1 pie; en particular, 6 pulg = 1/2 pie, 4 pulg = 1/3 pie, etc. (Ver Anexo, página 37)

- ***Cálculo de las constantes A y B:*** Como $x(0)=0$, de (1) se obtiene que $B=0$.
  Así, $x(t) = A\operatorname{sen}(8t)$, de donde $x'(t) = 8A\cos(8t)$ (2)
  Como $x'(0)=2$, de (2) se obtiene que $8A=2 \Rightarrow A=1/4$
- ***Respuesta:*** La posición y velocidad del objeto en función del tiempo están dadas por: $x(t) = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(8t)$ y $v(t) = 2\cos(8t)$, respectivamente.
- ***Amplitud, período y frecuencia del movimiento:*** En este caso, la forma del ángulo de fase coincide con la ecuación del movimiento obtenida; así, como $x(t) = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(8t)$, tenemos que: $w=8$, $a=1/4$, $b=0$ y $\varphi=0$ radianes, de donde se concluye que:

  La **amplitud** es: $A = \dfrac{1}{4}$ pies (desplazamiento máximo del peso desde su posición de equilibrio y ocurre cuando la velocidad es nula).

  El **período** es: $P = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ segundos (tiempo que tarda el desplazamiento en alcanzar un período o ciclo completo).

  La **frecuencia** es: $f = \dfrac{1}{P} = \dfrac{4}{\pi}$ ciclos/seg (frecuencia de vibración o de movimiento).

  Ejercicio 1.1.1: Trace la gráfica que describe la trayectoria del desplazamiento del objeto del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.1.2: Se encontró experimentalmente que un peso de 6 libras estira un resorte 6 pulgadas. Suponga que el peso se hala 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y luego se le da una velocidad inicial hacia abajo de 2 pies/seg. (a) Encuentre la posición y la velocidad del peso como función del tiempo. (b) Determine la posición, velocidad y aceleración del peso cuando ha transcurrido ½ segundo después de haberse soltado. (c) Encuentre la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento.

- ***Datos:*** En este caso $W=6$, $g=32$ y $e=1/2$ (pues $6\,\text{pulg}=1/2\,\text{pie}$). Además, como $W = ke \Rightarrow 6 = k/2 \Rightarrow k=12$.
- ***Ecuación Diferencial:*** Como se trata de un movimiento armónico simple, si $x(t)$ denota la posición del objeto en el instante t, la ecuación para resolver este problema es: $\dfrac{W}{g}x'' + kx = 0$, con las condiciones $x(0)=1/3$ (ya que $4\,\text{pulg}=1/3\,\text{pie}$; posición inicial positiva pues se hala hacia abajo) y $x'(0)=2$ (velocidad inicial positiva pues es en la dirección hacia abajo).

Por lo que, con base en los datos anteriores, se debe resolver la ecuación:
$\frac{6}{32}\,x'' + 12\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + 64\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm 8i$.
Así, $x(t) = A\,\mathrm{sen}(8t) + B\cos(8t)$, de donde $x'(t) = 8A\cos(8t) - 8B\,\mathrm{sen}(8t)$.

- ***Cálculo de las constantes A y B:***
Como $x(0) = 1/3 \quad \Rightarrow \quad A\,\mathrm{sen}(0) + B\cos(0) = 1/3 \quad \Rightarrow \quad B = 1/3$
Como $x'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 8A\cos(0) - 8B\,\mathrm{sen}(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1/4$

- ***Respuesta parte (a):*** La posición y velocidad del peso en función del tiempo están dadas por: $x(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(8t) + \frac{1}{3}\cos(8t)$ y

$$v(t) = 2\cos(8t) - \frac{8}{3}\,\mathrm{sen}(8t)$$

- ***Respuesta parte (b):*** Cálculo de $x(1/2)$, $x'(1/2)$ y $x''(1/2)$

$x(1/2) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4) + \frac{1}{3}\cos(4) \cong -0.4071$ pies

$x'(1/2) = 2\cos(4) - \frac{8}{3}\,\mathrm{sen}(4) \quad \Rightarrow \quad v(1/2) = x'(1/2) \cong 0.7109$ pies/seg

$x''(t) = -16\,\mathrm{sen}(8t) - \frac{64}{3}\cos(8t) \quad \Rightarrow \quad a(1/2) = x''(1/2) \cong 26.05$ pies/seg^2

Por lo tanto, cuando ha transcurrido ½ segundo, el peso se encuentra a 0.4071 pies por encima de la posición de equilibrio y se dirige hacia abajo, con una velocidad de 0.7109 pies/seg y una aceleración de 26.05 pies/seg^2.

- ***Respuesta parte (c):*** Amplitud, período y frecuencia del movimiento.
Para este ejemplo, dado que: $w = 8$, $a = 1/4$, $b = 1/3$ y $\varphi = 0.9273$ radianes– este ángulo se encuentra en el I cuadrante, de modo que $\varphi = \arctan(4/3)$–, se tiene que la **forma del ángulo de fase** de la ecuación del movimiento del peso está dada por: $x(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(8t) + \frac{1}{3}\cos(8t) = \frac{5}{12}\,\mathrm{sen}(8t + 0.9273)$
Por lo tanto (independientemente de la forma en que se exprese la ecuación de posición), se concluye que:
La **amplitud** es: $A = \frac{5}{12}$ pies, el **período** es: $P = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ segundos y la **frecuencia** es: $f = \frac{1}{P} = \frac{4}{\pi}$ ciclos/seg.

Ejercicio 1.1.2: Utilizando la forma alterna de escribir $x(t)$, trace la gráfica que describe la trayectoria del movimiento del peso.

1.2 *Movimiento con amortiguamiento*

El caso descrito anteriormente no es muy real puesto que no son consideradas otras fuerzas (como la fricción o la resistencia del aire) que actúan para llevar el sistema a su posición de equilibrio.

Una mejor aproximación de la situación real se obtiene asumiendo que, además de la *fuerza restauradora* F_R, actúa una *fuerza amortiguadora* F_A, que también **se opone** (dirección negativa) a la del movimiento, la cual se supone que es proporcional a la velocidad instantánea del peso W en el resorte.

Por lo tanto, si $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, entonces, por la *Ley de Hooke*, se concluye que: $F_A = -\beta v = -\beta \dfrac{dx}{dt} \quad (\beta > 0)$, donde β es la constante de proporcionalidad, conocida como *constante de amortiguamiento*.

Con base en lo anterior y la *segunda Ley de Newton*, el **modelo que describe este fenómeno**, sujeto a las condiciones $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, correspondientes a la magnitud del desplazamiento inicial y a la velocidad inicial, respectivamente, está dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} - kx \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

NOTA: En todo fenómeno físico que describe un movimiento vibratorio amortiguado, cuyo modelo está dado por la ecuación diferencial anterior y para la cual $\phi(m) = 0$ es su respectiva **ecuación auxiliar** (característica), entonces se dice que, sí ésta tiene:

1. **Dos raíces reales diferentes**, el sistema está ***sobreamortiguado***. (Aquí se tiene que $F_A > F_R$ por lo que no permite el movimiento oscilatorio; o sea, el peso W tiene tanto amortiguamiento que sólo retorna gradualmente a la posición de equilibrio sin pasar por ésta).

2. **Dos raíces reales iguales**, el sistema está ***críticamente amortiguado***. (En este caso, el amortiguamiento es tal que cualquier disminución en éste produce oscilaciones).

3. **Dos raíces complejas**, el sistema está ***subamortiguado o amortiguado***, también conocido como ***movimiento oscilatorio***.

Ejemplo 1.2.1: Un cuerpo que pesa 8 libras estira un resorte 2 pies. Suponga que una fuerza de amortiguamiento, numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea del cuerpo, actúa sobre el sistema y que el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial dirigida hacia arriba de 3 pies/seg. Determine la posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante.

- ***Datos:*** En este caso $W=8$, $g=32$ y $e=2$. Además, como $W=k\,e \Rightarrow 8=2k \Rightarrow k=4$. Por otra parte, con base en la información, la fuerza amortiguadora es $\beta v=2v$, por lo que $\beta=2$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Como se trata de un movimiento amortiguado, si $x(t)$ denota la posición del cuerpo en cualquier tiempo, entonces la ecuación respectiva es: $\dfrac{W}{g}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\beta\dfrac{dx}{dt}+k\,x=0$, con las condiciones $x(0)=0$ (magnitud nula pues arranca desde la posición de equilibrio) y $x'(0)=-3$ (velocidad negativa pues es en la dirección hacia arriba).

  Por lo tanto, con base en los datos anteriores, se debe resolver la ecuación:
  $$\frac{8}{32}x''+2x'+4x=0 \;\Leftrightarrow\; x''+8x'+16x=0 \;\Leftrightarrow\; m^2+8m+16=0 \;\Leftrightarrow$$
  $$(m+4)^2=0 \;\Leftrightarrow\; m=-4 \text{ (raíz doble).}$$

  Luego, se tiene que: $x(t)=Ae^{-4t}+Bte^{-4t}=e^{-4t}(A+Bt)$

- ***Cálculo de las constantes A y B:***

  Como $x(0)=0 \Rightarrow e^0(A+B\cdot 0)=0 \Rightarrow A=0$

  Así, $x(t)=Bte^{-4t}$, de donde $x'(t)=Be^{-4t}-4Bte^{-4t}=Be^{-4t}(1-4t)$

  Como $x'(0)=-3 \Rightarrow Be^0(1-4\cdot 0)=-3 \Rightarrow B=-3$

- ***Respuesta:*** La posición y velocidad del cuerpo en cualquier instante vienen dadas por: $x(t)=-3te^{-4t}$ y $v(t)=3e^{-4t}(4t-1)$, respectivamente.

Ejemplo 1.2.2: Un cuerpo que pesa 8 libras se cuelga en un resorte de tal forma que éste se alarga 8 pies. El cuerpo se pone en movimiento dándole un desplazamiento inicial de 2 pies en la dirección hacia arriba y con una velocidad inicial de 2 pies/seg, también en la dirección hacia arriba. Determine la ecuación del movimiento del cuerpo si se sabe que la fuerza de resistencia del medio es igual la velocidad instantánea del cuerpo.

- ***Datos:*** Aquí, $W=8$, $g=32$ y $e=8$. Como $W=k\,e \Rightarrow 8=8k \Rightarrow k=1$. Por otra parte, la fuerza amortiguadora es $\beta v=v$, por lo que $\beta=1$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Como se trata de un movimiento amortiguado, la ecuación respectiva es: $\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$, con las condiciones $x(0)=x'(0)=-2$ (posición y velocidad iniciales negativas, pues están en la dirección hacia arriba).

  Por lo tanto, con base en los datos anteriores, se debe resolver la ecuación: $\frac{8}{32}x''+x'+x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x''+4x'+4x=0 \quad\Leftrightarrow\quad m^2+4m+4=0 \quad\Leftrightarrow$ $(m+2)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=-2$ (raíz doble).

  Luego, se tiene que $x(t)=Ae^{-2t}+Bte^{-2t}=e^{-2t}(A+Bt)$.

- ***Cálculo de las constantes A y B:***

  Como $x(0)=-2 \quad\Rightarrow\quad A=-2 \quad\Rightarrow\quad x(t)=e^{-2t}(-2+Bt)$

  Por tanto, $x'(t)=e^{-2t}(4+B-2Bt)$ y como $x'(0)=-2 \quad\Rightarrow\quad B=-6$

- ***Respuesta:*** La ecuación del movimiento (posición) del cuerpo viene dada por:

$$x(t)=-2e^{-2t}-6te^{-2t}=-2e^{-2t}(1+3t).$$

1.3 *Movimiento forzado con amortiguación*

En este caso, además de la *fuerza restauradora* y la *fuerza amortiguadora*, se considera una *fuerza externa* $F(t)$, que varía con el tiempo, como por ejemplo cuando al peso se le da un pequeño empuje cada vez que alcanza la posición más baja.

Por lo tanto, según lo descrito en el caso anterior, el **modelo que describe este fenómeno** está dado por la siguiente ecuación diferencial, la cual está sujeta a las condiciones iniciales: $x(0)=x_0$ y . $x'(0)=v_0$.

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-\beta\frac{dx}{dt}-kx+F(t) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

Cabe hacer la observación de que también se podría presentar un ***movimiento forzado NO amortiguado***. En estos casos, como se tendría que $\beta=0$, la ecuación diferencial que corresponde es: $\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F(t)$.

Ejemplo* *1.3.1: Al sujetar un peso de 32 libras a un resorte, éste se estira 2 pies y luego queda en reposo, en la posición de equilibrio. A partir de $t=0$, una fuerza igual a $8\,\mathrm{sen}(4t)$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento y la velocidad del peso, si el medio que rodea al sistema opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

- ***Datos:*** En este caso $W=32$, $g=32$ y $e=2$. Además, como $W=k\,e \Rightarrow 32=2k \Rightarrow k=16$. Por otra parte, la fuerza amortiguadora es $\beta v=8v$, por lo que $\beta=8$, y la fuerza externa que actúa en el sistema es $F(t)=8\,\mathrm{sen}(4t)$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Para este movimiento amortiguado con fuerza externa, la ecuación que le corresponde es: $\dfrac{W}{g}\,\dfrac{d^2x}{dt^2}+\beta\,\dfrac{dx}{dt}+k\,x=F(t)$, con las condiciones $x(0)=x'(0)=0$ (no hay desplazamiento ni velocidad iniciales).
  Por lo tanto, con base en los datos anteriores, la ecuación por resolver es: $x''+8x'+16x=8\,\mathrm{sen}(4t)$.

  a. Solución de la ecuación homogénea: $x''+8x'+16x=0$. Dado que la respectiva ecuación auxiliar tiene por soluciones a $m=-4$ (raíz doble), la solución complementaria buscada es: $x_c(t)=e^{-4t}\,(C_1+C_2\,t)$.

  b. Utilizando coeficientes indeterminados, se tiene que la solución particular de $x''+8x'+16x=8\,\mathrm{sen}(4t)$, tiene la forma $x_p(t)=A\,\mathrm{sen}(4t)+B\cos(4t)$.

     Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene: $x_p(t)=\dfrac{-1}{4}\cos(4t)$.

  Luego, de (a) y (b) se concluye que: $x(t)=e^{-4t}\,(C_1+C_2\,t)-\dfrac{1}{4}\cos(4t)$.

- ***Cálculo de las constantes C_1 y C_2:***

  Dado que $x'(t)=C_2\,e^{-4t}-4e^{-4t}\,(C_1+C_2\,t)+\mathrm{sen}(4t)$ y además, utilizando el hecho de que $x(0)=x'(0)=0$, se obtiene que $C_1=1/4$ y $C_2=1$.

- ***Respuesta:*** Las ecuaciones respectivas de posición y velocidad del peso son:

$$x(t)=e^{-4t}\left(\frac{1}{4}+t\right)-\frac{1}{4}\cos(4t) \qquad \text{y} \qquad v(t)=-4t\,e^{-4t}+\mathrm{sen}(4t)$$

Ejemplo 1.3.2: Se tiene un resorte que se alarga 6 pulgadas bajo la acción de un peso de 3 libras. Suponga que se interrumpe su estado de reposo al tirar el peso hacia abajo hasta desplazarlo 3 pulgadas y luego se suelta. Determine la ecuación del movimiento si además actúa sobre el resorte una fuerza externa igual a $(1.5)\,\text{sen}(6t)$ y no hay fuerza amortiguadora.

- ***Datos:*** En este caso $W = 3$, $g = 32$ y $e = 1/2$ (porque $6\,\text{pulg} = 1/2\,\text{pie}$). Además, como $W = k\,e \Rightarrow 3 = k/2 \Rightarrow k = 6$. Por otra parte, como no hay fuerza amortiguadora, entonces $\beta = 0$; además, la fuerza externa que actúa sobre el sistema está dada por $F(t) = (1.5)\,\text{sen}(6t)$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Para este problema, como hay ausencia de fuerza amortiguadora, la ecuación que corresponde es: $\dfrac{W}{g}\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\,x = F(t)$, con las condiciones $x(0) = 1/4$ (ya que $3\,\text{pulg} = 1/4\,\text{pie}$, y posición inicial positiva pues el peso se hala hacia abajo) y $x'(0) = 0$ (no hay velocidad inicial).
  Por lo tanto, con base en los datos anteriores, la ecuación por resolver es $\dfrac{3}{32}\,x'' + 6\,x = (1.5)\,\text{sen}(6t)$, la cual es equivalente a $x'' + 64x = 16\,\text{sen}(6t)$.

  a. Solución de la ecuación homogénea: $x'' + 64x = 0$. Dado que la respectiva ecuación auxiliar tiene por solución a $m = \pm 8i$, la solución complementaria es: $x_c(t) = C_1\cos(8t) + C_2\,\text{sen}(8t)$.

  b. Por otra parte, utilizando coeficientes indeterminados, la solución particular de $x'' + 64x = 16\,\text{sen}(6t)$ tiene la forma: $x_p(t) = A\,\text{sen}(6t) + B\cos(6t)$.

     Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene: $x_p(t) = \dfrac{4}{7}\,\text{sen}(6t)$.

  Luego, de (a) y (b) se tiene: $x(t) = C_1\cos(8t) + C_2\,\text{sen}(8t) + \dfrac{4}{7}\,\text{sen}(6t)$.

- ***Cálculo de las constantes C₁ y C₂:*** Como $x(0) = 1/4 \Rightarrow C_1 = 1/4 \Rightarrow$
  $x(t) = \dfrac{1}{4}\cos(8t) + C_2\,\text{sen}(8t) + \dfrac{4}{7}\,\text{sen}(6t)$, de donde, obtenemos que:

  $x'(t) = -2\,\text{sen}(8t) + 8C_2\cos(8t) + \dfrac{24}{7}\cos(6t)$. Como $x'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -3/7$.

- ***Respuesta:*** La ecuación del movimiento del peso viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos(8t) - \frac{3}{7}\,\text{sen}(8t) + \frac{4}{7}\,\text{sen}(6t)$$

Ejemplo 1.3.3: Suponga que una fuerza externa dada por $3\cos(8t)$, se aplica al resorte del **ejemplo anterior**. Describa el movimiento que resulta (posición y velocidad) si se asume que inicialmente el peso está en la posición de equilibrio y que su velocidad inicial es cero. (*Caso de resonancia mecánica*)

- ***Datos:*** Como se refiere al **ejemplo anterior**, $W = 3$, $g = 32$, $e = 1/2$, $k = 6$ y $\beta = 0$. Por otra parte, la fuerza externa está dada por $F(t) = 3\cos(8t)$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Para este problema, la ecuación que corresponde resolver es: $\frac{3}{32}x'' + 6x = 3\cos(8t)$, equivalente a $x'' + 64x = 32\cos(8t)$, con $x(0) = x'(0) = 0$ (posición inicial y velocidad inicial nulas).

  a. Del ejercicio anterior, se tiene que la solución complementaria de la ecuación homogénea $x'' + 64x = 0$ es: $x_c(t) = C_1\cos(8t) + C_2\operatorname{sen}(8t)$.

  b. Utilizando coeficientes indeterminados, y dado que $F(t) \subset x_c(t)$, se tiene que una solución particular de $x'' + 64x = 32\cos(8t)$ tiene la forma: $x_p(t) = t\left[A\operatorname{sen}(8t) + B\cos(8t)\right]$.

     Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene: $x_p(t) = 2t\operatorname{sen}(8t)$.

  Así, de (a) y (b) tenemos que:

  $$x(t) = C_1\cos(8t) + C_2\operatorname{sen}(8t) + 2t\operatorname{sen}(8t) \text{ y por consiguiente,}$$

  $$x'(t) = -8C_1\operatorname{sen}(8t) + 8C_2\cos(8t) + 2\operatorname{sen}(8t) + 16t\cos(8t).$$

- ***Cálculo de las constantes C_1 y C_2:***

  Como $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Por otra parte, como $x'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

- ***Respuesta:*** Finalmente, las respectivas ecuaciones de posición y velocidad del peso vienen dadas por: $x(t) = 2t\operatorname{sen}(8t)$ y $v(t) = 2\operatorname{sen}(8t) + 16t\cos(8t)$.

  NOTA: En este ejemplo, el amortiguamiento fue ignorado y ocurre lo que se denomina ***resonancia mecánica*** ya que la frecuencia de la fuerza externa aplicada al sistema, tiende a ser igual a la frecuencia natural (fuerza restauradora) del sistema no amortiguado.

Ejercicios 1: Plantee y resuelva los siguientes problemas.

1. Un peso de 9 libras estira un resorte 3 pulg. El peso anterior se sustituye por uno de 24 libras y luego de alcanzar su posición de equilibrio se hala 2 pulgadas hacia abajo y se la da una velocidad hacia arriba de 24 pulg/seg. Suponiendo que no existe fuerza de amortiguamiento, ni fuerza externa alguna que actúe sobre el sistema:
   a. Determine la posición y velocidad del peso en el tiempo t.
   b. Exprese la ecuación de posición en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt+\varphi)$ y halle la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento.
   c. Trace la gráfica que describe la trayectoria del objeto.

2. Un objeto, cuyo peso es de 8 libras, se suspende de un resorte el cual se estira 24 pulgadas. Una vez que el objeto llega a su posición de equilibrio es desplazado 1 pie hacia arriba, donde recibe un golpe que le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 4 pies/seg. Asumiendo que no existe fuerza de amortiguamiento ni fuerzas externas que afecten el sistema:
   a. Encuentre la ecuación de movimiento y la velocidad del objeto.
   b. ¿Cada cuántos segundos pasa el objeto por la posición de equilibrio?
   c. Exprese la ecuación de posición en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt+\varphi)$ y halle la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento.
   d. Trace la gráfica que describe de la trayectoria del objeto.

3. Un cuerpo que pesa 10 libras sujeto a un resorte lo alarga 2 pies. El cuerpo se sujeta a un mecanismo de amortiguación que ofrece una resistencia numéricamente igual a 2.5 veces la velocidad instantánea. Si el cuerpo se suelta desde el reposo con una velocidad dirigida hacia arriba de 5 pies/seg, determine la posición del cuerpo como función del tiempo.

4. Un peso de 3 libras en un resorte lo estira 6 pulgadas. El peso está bajo la influencia de una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 1.5 veces la velocidad instantánea. Halle la posición y velocidad del peso en el tiempo t, si el peso se hala 6 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

5. Las características de un resorte son tales que se alarga 3 pulgadas bajo la acción de un peso de 30 libras. Si el peso anterior se cambia por otro de 64 libras y se suspende del resorte, determine la ecuación del movimiento del peso sabiendo que la resistencia del medio es numéricamente igual a 8 veces la velocidad del peso e inicialmente comienza a moverse hacia abajo con una velocidad de 10 pies/seg.

6. Un resorte vertical con constante de 64 lb/pie, tiene suspendido un peso de 128 libras. Si el peso se hala 6 pulgadas hacia abajo y se suelta aplicándole simultáneamente una fuerza externa $F(t) = 32\,\mathrm{sen}(2t)$, y suponiendo que no hay fuerza amortiguadora, hallar la posición del peso en cualquier instante.

7. Un resorte vertical, con constante de 64 libras/pie, tiene suspendido un peso de 128 libras. El peso se hala 6 pulgadas hacia abajo y se suelta aplicándole simultáneamente una fuerza externa $F(t) = 32\ \mathrm{sen}(4t)$. Suponiendo que no hay fuerza amortiguadora, encuentre la posición y velocidad del peso en cualquier instante.

8. Se tiene un resorte que se alarga 6 pulgadas bajo la acción de un peso de 3 libras. Suponga que se interrumpe su estado de reposo al tirar el peso hacia abajo hasta desplazarlo 3 pulgadas y luego se suelta. Determine la ecuación del movimiento si además actúa sobre el resorte una fuerza externa $F(t) = (1.5)\ \mathrm{sen}(8t)$, y no hay fuerza amortiguadora.

9. Un resorte se estira 10 cm por una fuerza de 500 dinas. Una masa de 2 gr está suspendida del resorte y se le permite que llegue al equilibrio. Luego se le aplica una fuerza dada en dinas por $F(t) = 200\ \mathrm{sen}(5t)$. Asumiendo que hay una fuerza amortiguadora dada numéricamente en dinas por $20v$, donde v es la velocidad instantánea en cm/seg, encuentre la posición y la velocidad de la masa: (a) en cualquier tiempo; (b) después de un tiempo largo.

10. Un peso de 13 libras en un resorte lo estira 4 pulgadas. Al resorte se le suspende un objeto, cuyo peso es de 96 libras, el cual, una vez que llega a su posición de equilibrio, es desplazado 24 pulgadas hacia arriba y se le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 12 pulg/seg.
    Sabiendo que la resistencia del medio (en libras) es igual a 12 veces la velocidad instantánea (en pies/seg) del objeto y que no existen fuerzas externas que afecten el sistema, determine la posición y la velocidad del objeto en cualquier instante.

11. Un peso de 16 libras se coloca en un resorte el cual se estira 2 pies. Suponga que el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial dirigida hacia abajo de 2 pies/seg. Si se asume que el peso está bajo la influencia de una fuerza de amortiguamiento numéricamente (en libras) igual a 4 veces la velocidad instantánea (en pies/seg), entonces:
    a. Establezca una ecuación diferencial y condiciones asociadas que permitan determinar la posición del peso en el instante t.
    b. Encuentre la solución al problema indicado en el punto anterior.
    c. Determine la velocidad del peso en cualquier tiempo t.
    d. Determine el desplazamiento máximo del peso a partir de la posición de equilibrio.

12. Un resorte vertical, con constante de 8 lb/pie, tiene suspendido un peso de 64 libras. Suponga que se aplica una fuerza externa dada por $F(t) = 16\ \cos(4t)$ y que al peso, inicialmente en la posición de equilibrio, se le da una velocidad inicial hacia arriba de 10 pies/seg. Asumiendo que la fuerza amortiguadora es despreciable, determine la posición y velocidad del peso en cualquier tiempo.

13. A un resorte que mide inicialmente 5 pies, se le cuelga un peso de 12 libras y cuando llega a su posición de equilibrio, el resorte mide 7 pies de largo. A partir de este momento, se suelta el peso desde una posición que se encuentra a un pie por debajo de la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia arriba de 4 pies/seg.
    a. Determine la posición y la velocidad del peso en cualquier tiempo.
    b. Exprese la ecuación de posición en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt + \varphi)$ y determine la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento del peso.
    c. Determine la velocidad del peso cuando $t = \frac{3\pi}{16}$ segundos.

14. Un peso de 3 libras en un resorte lo estira 6 pulgadas. Asumiendo una fuerza amortiguadora en libras numéricamente igual a βv, donde v es la velocidad instantánea en pies/seg y $\beta > 0$, demuestre que el movimiento es:
    a. Críticamente amortiguado si $\beta = 1.5$.
    b. Sobre amortiguado si $\beta > 1.5$.
    c. Oscilatorio (subamortiguado) si $\beta < 1.5$.

15. Un cuerpo, de 4 libras de peso, se sujeta a un resorte cuya constante es de 2 libras/pie. El medio ofrece una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a la velocidad instantánea (v en pies/seg). Si el cuerpo se suelta desde un punto situado a un pie sobre el nivel de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 8 pies/seg, entonces:
    a. Determine la posición y velocidad del cuerpo en función del tiempo.
    b. ¿Cuántas veces pasa el cuerpo por la posición de equilibrio y en qué instantes?

16. Una bola de acero que pesa 3 libras, se suspende de un resorte por lo cual éste se alarga 6 pulgadas de su longitud natural. La bola se pone en movimiento cuando se encuentra a 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y se le da una velocidad inicial de 2 pies/seg hacia abajo. Si el medio ofrece una resistencia despreciable y si no hay fuerzas externas:
    a. Determine el movimiento de la bola y exprese el resultado en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt + \varphi)$.
    b. Encuentre la velocidad de la bola en función del tiempo.

17. Un peso de 2 libras estira un resorte 6 pulgadas. Si una fuerza amortiguadora numéricamente igual a la velocidad instantánea actúa sobre el peso, determine la posición y la velocidad del mismo, en cualquier instante, si se hala 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia arriba de 8 pulg/seg.

18. Un cuerpo que pesa 18 libras sujeto a un resorte lo alarga 2 pies. Luego de alcanzar la posición de equilibrio, se hala 3 pulgadas hacia abajo y se le da una velocidad hacia arriba de 5 pies/seg. Si además actúa sobre el resorte una fuerza externa dada por $F(t) = (4.5)\cos(wt)$ y suponiendo que no hay fuerza amortiguadora, entonces:
    a. Establezca la ecuación diferencial y condiciones asociadas que describen el movimiento del cuerpo.
    b. Encuentre la respectiva solución complementaria.
    c. Indique el valor que debe tener w para que el movimiento sea un caso de resonancia mecánica.
    d. Dada la condición del punto (c), halle la solución particular respectiva.
    e. Determine la posición y velocidad del cuerpo en función del tiempo.

19. Un objeto suspendido de un resorte describe un movimiento no amortiguado, el cual tampoco es sometido a fuerza externa alguna, dado por la ecuación diferencial: $x'' + 100x = 0$, con $x(0) = -1/2$ pie y $x'(0) = -5$ pies/seg, donde $x(t)$ denota la posición del objeto al cabo de t segundos.
    a. Determine la posición y velocidad del objeto en función del tiempo.
    b. A los 2 segundos, ¿cuál es la posición del objeto respecto de la posición de equilibrio y hacia dónde se dirige y con qué velocidad? Justifique.
    c. Determine la amplitud, el período, la frecuencia y el ángulo de fase del movimiento del objeto y exprese la ecuación de posición de la forma: $x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt + \varphi)$.

20. Un peso de 6 libras está unido a un resorte de constante k libras/pie. El peso se hala 4 pulgadas por encima de su posición de equilibrio y se le da una velocidad de 4 pies/seg hacia abajo. Si la resistencia que ofrece el medio es de $3v$, donde v es la velocidad instantánea del peso (en pies/seg), entonces:
    a. Plantee la ecuación diferencial y condiciones iniciales que modelan el problema.
    b. Determine un valor para la constante k de manera que el movimiento resultante sea críticamente amortiguado.
    c. Asumiendo que $k = 15$, determine la ecuación del movimiento del peso.
    d. Dado el supuesto del punto (c), ¿cuál es la ecuación de la velocidad en función del tiempo?

21. Un peso de 64 libras está suspendido de un resorte con constante de 50 lb/pie. Asumiendo una fuerza amortiguadora en libras numéricamente igual a βv, donde v es la velocidad instantánea en pies/seg y $\beta > 0$, demuestre que el movimiento es oscilatorio (subamortiguado) si $\beta < 20$.

22. Un peso de 32 libras en un resorte lo estira 8 pies. El peso es desplazado 12 pulgadas por encima de la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 4 pies/seg. Si al peso se le aplica una fuerza externa dada por $F(t) = 3\cos(4t)$ y asumiendo que la fuerza de amortiguamiento es despreciable:

    a. Determine la posición y la velocidad del peso en cualquier instante.

    b. Bajo el supuesto de que se produce el fenómeno de la resonancia mecánica, ¿qué frecuencia, o forma, debe tener la fuerza externa?

23. Un peso de 10 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso anterior se reemplaza por uno de 8 libras y si el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea, entonces:

    a. Obtenga la ecuación del movimiento y de la velocidad si el peso se suelta desde un punto que está 1/2 pie bajo la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 1 pie/seg.

    b. Determine los tiempos en que el peso pasa por el punto de equilibrio en dirección hacia abajo.

24. A un resorte se le suspende un peso de 16 libras y lo estira 4 pies. Si al sistema se le aplica una fuerza externa dada por la función $(8.5)\,\mathrm{sen}\,t$ y si la resistencia que el mecanismo opone al movimiento del peso es numérica-mente igual a 3 veces la velocidad instantánea (en pies/seg.), determine la ecuación del movimiento en cualquier tiempo, sabiendo que el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial, dirigida hacia abajo, de 5 pies/seg.

25. Un resorte cuya constante es de 18 lb/pie, sostiene un objeto con un peso de 64 libras. Al inicio se ha estirado el resorte hasta 1 pie por debajo de la posición de equilibrio y se le da un impulso hacia abajo de 2 pies/seg. Si se desprecia la fuerza amortiguadora y sabiendo que sobre el sistema actúa una fuerza externa de magnitud igual a $-26e^{-2t}$, entonces:

    a. Determine la posición del objeto y su velocidad en cualquier tiempo.

    b. ¿Qué pasa con la posición y la velocidad después de un tiempo largo?

2 MOVIMIENTO VIBRATORIO Y LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección, se ilustra el uso de la *transformada de Laplace* para resolver problemas del resorte vibrante en los cuales puede intervenir una fuerza externa dada por la *función Delta de Dirac*. Adicionalmente, se pueden presentar otras fuerzas externas que, en algunos casos, involucran funciones expresadas en términos de la *función escalón unitario* (Heaviside).

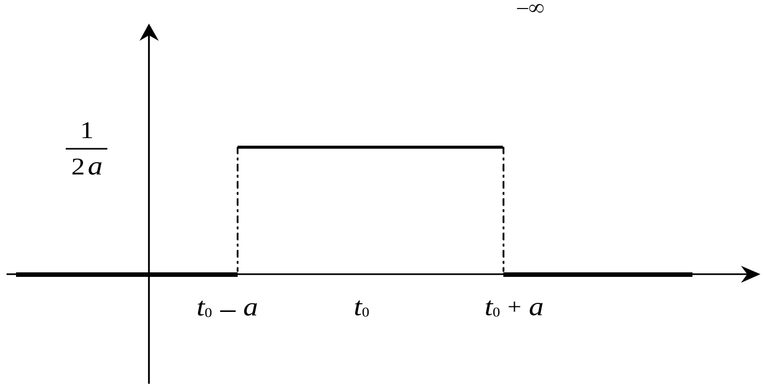
Como se trata de un ***movimiento vibratorio forzado***, se aplica todo lo descrito en la ***Sección 1.3***, página 8, con la única diferencia de que, en algunos casos, podría actuar **más de una fuerza externa**.

2.1 *La función Delta de Dirac*

Definición 2.1.1: La *función impulso unitario*, denotada por $\delta_a(t-t_0)$, se define como:

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t \le t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a} & \text{si} \quad t_0 - a < t < t_0 + a \\ 0 & \text{si} \quad t \ge t_0 + a \end{cases}$$

con $t_0 \ge 0$, $a > 0$, y cumple la propiedad de que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t-t_0)\, dt = 1$.



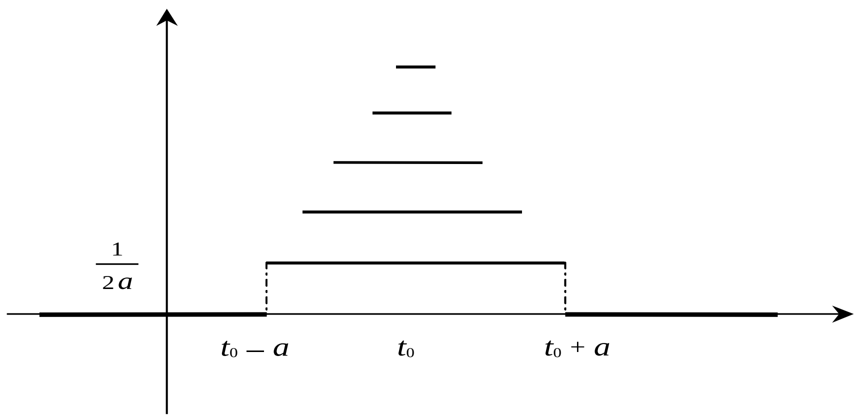
Obsérvese que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t-t_0)\, dt = \int_{t_0-a}^{t_0+a} \frac{1}{2a}\, dt = \frac{t}{2a}\Bigg|_{t_0-a}^{t_0+a} = \frac{t_0 + a - t_0 + a}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$$

Definición 2.1.2: La *función Delta de Dirac*, denotada por $\delta(t-t_0)$, con $t_0 \geq 0$, se define como: $\delta(t-t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t-t_0)$ y además, cumple las propiedades:

a. $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad t = t_0 \\ 0 & \text{si} \quad t \neq t_0 \end{cases}$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1$



Teorema 2.1: ***Transformada de la función Delta de Dirac***

Dicha transformada está dada por: $L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$.

Demostración

- La *función impulso unitario*, en términos de la *función escalón unitario*, o *función de Heaviside*, se expresa como:

$$\delta_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\left[U\big(t-(t_0-a)\big) - U\big(t-(t_0+a)\big)\right]$$

- Calculando la transformada de la función anterior, se obtiene que:

$$L\{\delta_a(t-t_0)\} = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s}\right] = e^{-st_0}\left[\frac{e^{as} - e^{-as}}{2as}\right]$$

- Luego, la transformada de la *función Delta de Dirac* está dada por:

$$L\{\delta(t-t_0)\} = L\left\{\lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0)\right\} = \lim_{a\to 0} L\{\delta_a(t-t_0)\} \quad \Rightarrow$$

$$L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0} \lim_{a\to 0}\left[\frac{e^{as} - e^{-as}}{2as}\right] = e^{-st_0} \lim_{a\to 0}\left[\frac{s e^{as} + s e^{-as}}{2s}\right] = e^{-st_0}$$

- Finalmente, se concluye que: $L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$ *Q.E.D.*

<u>NOTA</u>: Un **caso particular** se da cuando $t_0 = 0$; en cuyo caso: $\boxed{L\{\delta(t)\} = 1}$

<u>Ejemplo</u> <u>2.1.1</u>: Resolver la ecuación $y' + y = t\,\delta(t-\pi)$, con $y(0) = 0$.

- Usando la transformada de Laplace, se tiene: $L\{y' + y\} = L\{t\,\delta(t-\pi)\}$

$$\Rightarrow \qquad sY(s) - y(0) + Y(s) = -\frac{d}{ds}\left[e^{-\pi s}\right] = \pi e^{-\pi s}\ ; \quad \text{como} \quad y(0) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$(s+1)Y(s) = \pi e^{-\pi s} \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = \frac{\pi\, e^{-\pi s}}{s+1}$$

- Dado que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y(t) = \pi L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s+1}\right\}$ $\quad\Rightarrow$

$$y(t) = \pi U(t-\pi)\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}_{t-\pi} = \pi U(t-\pi)\left[e^{-t}\right]_{t-\pi}$$

Finalmente, se obtiene que: $y(t) = \pi\, U(t-\pi)\, e^{-(t-\pi)}$.

- Observe que: $y(t) = \begin{cases} 0 & ;\ 0 \le t < \pi \\ \pi e^{-(t-\pi)} & ;\ t \ge \pi \end{cases}$

<u>Ejemplo</u> <u>2.1.2</u>: Resolver la ecuación $y'' + y = 4\delta(t-2\pi)$, con $y(0) = y'(0) = 0$.

- Usando la transformada de Laplace, se tiene: $L\{y'' + y\} = 4\ L\{\delta(t-2\pi)\}$

$$\Rightarrow \qquad s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = 4e^{-2\pi s};\quad \text{como} \quad y(0) = y'(0) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$(s^2+1)\,Y(s) = 4e^{-2\pi s} \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

- Dado que $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y(t) = 4\ L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right\}$ $\quad\Rightarrow$

$$y(t) = 4\,U(t-2\pi)\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}_{t-2\pi} = 4\,U(t-2\pi)\ \text{sen}(t-2\pi)$$

Finalmente, se obtiene que: $y(t) = 4\,U(t-2\pi)\,\text{sen}t$.

- Observe que: $y(t) = \begin{cases} 0 & ; \; 0 \le t < 2\pi \\ 4\text{sen}t & ; \; t \ge 2\pi \end{cases}$

Ejercicio 2.1: Resuelva la ecuación del *ejemplo 2.1.2*, con $y(0)=1$ y $y'(0)=0$.

2.2 *Movimiento forzado no amortiguado*

Ejemplo 2.2.1: Un resorte de constante 4, es estirado por un peso de 128 libras. En el instante $t=0$, el peso está en la posición de equilibrio, en reposo y además, recibe un golpe súbito desde abajo que le imparte instantáneamente 3 unidades de momentum lineal al sistema. Cuando $t=\pi$, una fuerza de magnitud $\cos(t-\pi)$ comienza a actuar verticalmente sobre el sistema. Encontrar la ecuación del movimiento del peso como función del tiempo.

- ***Datos:*** En este caso $W=128$, $g=32$, $k=4$ y $\beta=0$ (pues no hay fuerza amortiguadora). Además, el sistema es sometido a dos fuerzas externas, una a partir de $t=0$ y está dada por $F_1(t) = -3\delta(t)$, la cual es negativa ya que al peso se le da un golpe hacia arriba por lo que va en dirección contraria a la del movimiento. La segunda fuerza, que empieza a actuar cuando $t=\pi$, viene dada por $F_2(t) = \cos(t-\pi)\,U(t-\pi)$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Como se trata de un movimiento forzado sin amortiguamiento, la ecuación respectiva es: $\dfrac{W}{g}\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\,x = F(t)$, donde $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, con las condiciones $x(0)=0$ y $x'(0)=0$ (magnitud y velocidad iniciales nulas pues arranca desde la posición de equilibrio).

  Por lo tanto, con base en los datos anteriores, la ecuación por resolver es:

  $4x'' + 4x = \cos(t-\pi)\,U(t-\pi) - 3\delta(t)$. Aplicando la transformada de Laplace para encontrar la solución de esta ecuación, se tiene:

  $$L\{4x'' + 4x\} = L\{\cos(t-\pi)\,U(t-\pi)\} - 3L\{\delta(t)\} \qquad \Rightarrow$$

$$4s^2 X(s) - 4s\,x(0) - 4x'(0) + 4X(s) \;=\; e^{-\pi s}\,L\{\cos t\} - 3 \;=\; \frac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+1} - 3$$

Agrupando, factorizando y utilizando el hecho de que $x(0)=0$ y $x'(0)=0$, se obtiene que:

$$4\,(s^2+1)\,X(s) \;=\; \frac{s\,e^{-\pi s}}{s^2+1} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad X(s) \;=\; \frac{1}{4}\left[\frac{s\,e^{-\pi s}}{(s^2+1)^2} - \frac{3}{s^2+1}\right]$$

Dado que $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$ $\Rightarrow$

$$x(t) \;=\; \frac{1}{4}\,L^{-1}\left\{\frac{s\,e^{-\pi s}}{(s^2+1)^2}\right\} - \frac{3}{4}\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) \;=\; \frac{1}{8}\,U(t-\pi)\,L^{-1}\left\{\frac{2\,s}{(s^2+1)^2}\right\}_{t-\pi} - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,t \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) \;=\; \frac{1}{8}\,U(t-\pi)\,\big[t\ \mathrm{sen}\,t\big]_{t-\pi} - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,t$$

- ***Respuesta:*** Finalmente, la ecuación del movimiento del peso viene dada por:

$$x(t) \;=\; \frac{1}{8}\,(t-\pi)\,\mathrm{sen}(t-\pi)\;U(t-\pi) - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,t$$

Ejemplo 2.2.2: Un objeto de masa unitaria está sujeto a un resorte de constante 4. En el instante $t=0$, el objeto se hala 5 pies por debajo de la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia arriba de 2 pies/seg para que empiece a moverse libremente. En $t=2\pi$ segundos, es golpeado hacia abajo por un martillo que le produce 12 unidades de impulso lineal al sistema. Suponiendo que no hay amortiguamiento, determinar la ecuación del movimiento del objeto.

- ***Datos:*** En este caso se tiene que $m=1$, $k=4$ y $\beta=0$ (no hay fuerza amortiguadora). Además, la fuerza externa, que actúa a partir de $t=2\pi$ segundos, está dada por $F(t)=12\,\delta(t-2\pi)$ y es positiva pues el golpe que recibe el objeto va en la dirección del movimiento.

➢ ***Ecuación Diferencial:*** Para este problema, la ecuación que corresponde tiene la forma: $\frac{W}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2}+k\,x=F(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0)=5$ (magnitud positiva pues el objeto se hala hacia abajo) y $x'(0)=-2$ (velocidad negativa pues es en la dirección hacia arriba).

Por lo tanto, con base en los datos anteriores, la ecuación por resolver es: $x''+4x=12\,\delta(t-2\pi)$. Aplicando la transformada de Laplace para poder encontrar la solución de esta ecuación, se tiene:

$$L\left\{x''+4x\right\}=L\left\{12\ \delta(t-2\pi)\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$s^2X(s)-s\,x(0)-x'(0)+4\,X(s)=12\ e^{-2\pi s}$$

Agrupando, factorizando y utilizando el hecho de que $x(0)=5$ y $x'(0)=-2$, se obtiene que:

$$(s^2+4)\,X(s)=12\ e^{-2\pi s}+5s-2 \qquad \Leftrightarrow \qquad X(s)=\frac{12\ e^{-2\pi s}}{s^2+4}+\frac{5s-2}{s^2+4}$$

Dado que $x(t)=L^{-1}\left\{X(s)\right\} \qquad \Rightarrow$

$$x(t)=L^{-1}\left\{\frac{12\ e^{-2\pi s}}{s^2+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{5\ s}{s^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$x(t)=6\ U(t-2\pi)\ L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}_{t-2\pi}+5\cos(2t)-\operatorname{sen}(2t) \qquad \Rightarrow$$

$$x(t)=6\,U(t-2\pi)\left[\operatorname{sen}(2t)\right]_{t-2\pi}+5\cos(2t)-\operatorname{sen}(2t)$$

➢ ***Respuesta:*** Finalmente, la ecuación que describe el movimiento del objeto viene dada por:

$$x(t)=6\,U(t-2\pi)\operatorname{sen}(2t-4\pi)+5\cos(2t)-\operatorname{sen}(2t)$$

2.3 *Movimiento forzado amortiguado*

Ejemplo 2.3.1: Un resorte cuya constante de restitución es 1, es estirado por un peso de 32 libras. El peso es sometido a una fuerza de amortiguamiento igual a 2 veces la velocidad instantánea y a una fuerza externa dada por $F(t) = e^{-t}$. Además, en $t = 0$, el peso está en reposo y a 2 pies por debajo de la posición de equilibrio. Cuando $t = 3$, el peso recibe un golpe súbito hacia abajo el cual le imparte instantáneamente 4 unidades de momento lineal al sistema. Determine la ecuación del movimiento del cuerpo en cualquier instante.

- ***Datos:*** En este caso $W = 32$, $g = 32$ y $k = 1$. La fuerza amortiguadora es $\beta v = 2v$, por lo que $\beta = 2$. Por otra parte, el sistema es sometido a dos fuerzas externas, una está dada por $F_1(t) = e^{-t}$; la otra, que empieza a actuar cuando $t = 3$, viene dada por $F_2(t) = 4\delta(t-3)$, y es positiva pues el golpe que recibe el peso va en la dirección del movimiento.

- ***Ecuación Diferencial:*** Como se trata de un movimiento amortiguado con fuerza externa, la ecuación respectiva es: $\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$, donde $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, con las condiciones $x(0) = 2$ (posición inicial positiva pues es en la dirección hacia abajo) y $x'(0) = 0$ (no hay velocidad inicial).

  Por lo tanto, con base en los datos anteriores, la ecuación por resolver es:

  $x'' + 2x' + x = e^{-t} + 4\delta(t-3)$. Aplicando la transformada de Laplace para encontrar la solución de esta ecuación, tenemos:

  $$L\{x'' + 2x' + x\} = L\{e^{-t} + 4\delta(t-3)\} \qquad \Rightarrow$$

  $$s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0) + 2s\,X(s) - 2x(0) + X(s) = \frac{1}{s+1} + 4e^{-3s}$$

  Agrupando, factorizando y utilizando el hecho de que $x(0) = 2$ y $x'(0) = 0$, obtenemos:

$$(s+1)^2\ X(s) = 2s + 4 + \frac{1}{s+1} + 4e^{-3s} \qquad \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{2s+4}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{4e^{-3s}}{(s+1)^2}.$$ Como $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$ $\Rightarrow$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{2(s+1)+2}{(s+1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{4e^{-3s}}{(s+1)^2}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\} + 4U(t-3)\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}_{t-3}$$

- ***Respuesta:*** Finalmente, la ecuación del movimiento del peso viene dada por:

$$x(t) = e^{-t}(2+2t) + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + 4(t-3)\,e^{-(t-3)}\,U(t-3)$$

Ejemplo 2.3.2: Una masa unitaria está sujeta a un resorte, cuya constante de restitución es de 9 lb/pie, y es sometida a una fuerza amortiguadora igual a 6 veces la velocidad instantánea. En $t=0$, la masa está a 2 pies por encima de la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 6 pies/seg. En $t=2$, la masa recibe un golpe súbito desde arriba que le produce una unidad de impulso lineal al sistema y, además, se activa una fuerza externa de magnitud $F(t)=3t-5$. Establezca la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describen el desplazamiento de la masa y resuélvala.

- ***Datos:*** En este caso se tiene que $m=1$, $k=9$ y $\beta=6$. Además, a partir del instante $t=2$, actúan dos fuerzas externas las cuales están dadas por $F_1(t) = \delta(t-2)$ (positiva ya que el golpe que recibe la masa va en la dirección del movimiento) y $F_2(t) = (3t-5)\,U(t-2)$.

- ***Ecuación Diferencial:*** Para este problema, la ecuación que corresponde tiene la forma: $\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$, donde $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0)=-2$ (magnitud negativa pues es en la dirección hacia arriba) y $x'(0)=6$ (velocidad positiva pues es en la dirección hacia abajo).

Así, con base en los datos anteriores, la ecuación que se debe resolver es: $x'' + 6x' + 9x = \delta(t-2) + (3t-5)\,U(t-2)$. Aplicando la transformada de Laplace para resolver esta ecuación, se tiene:

$$L\left\{x'' + 6x' + 9x\right\} = L\left\{\delta(t-2)\right\} + L\left\{\left[3(t-2)+1\right]U(t-2)\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0) + 6s\,X(s) - 6x(0) + 9X(s) = e^{-2s} + e^{-2s}\,L\left\{3t+1\right\}$$

Agrupando y dado que $x(0) = -2$ y $x'(0) = 6$, se obtiene que:

$$(s^2+6s+9)\,X(s) = -2s - 6 + e^{-2s} + e^{-2s}\left[\frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}\right] \qquad \Leftrightarrow$$

$$(s+3)^2\,X(s) = -2(s+3) + e^{-2s} + e^{-2s}\left[\frac{3+s}{s^2}\right] \qquad \Leftrightarrow$$

$$X(s) = \frac{-2}{s+3} + \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2(s+3)}$$

Puesto que $x(t) = L^{-1}\left\{X(s)\right\} \quad \Rightarrow$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{-2}{s+3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2(s+3)}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) = -2\,e^{-3t} + U(t-2)\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}_{t-2} + U(t-2)\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+3)}\right\}_{t-2} \qquad \Rightarrow$$

$$x(t) = -2\,e^{-3t} + U(t-2)\left[\left[t\,e^{-3t}\right]_{t-2} + L^{-1}\left\{\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+3}\right\}_{t-2}\right] \qquad (*)$$

Resolviendo las fracciones parciales de (*), los respectivos valores de las constantes son $A = 1/3$, $B = -1/9$ y $C = 1/9$. Por lo tanto, se tiene que:

$$L^{-1}\left\{\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+3}\right\} = At + B + C\,e^{-3t} = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{e^{-3t}}{9}$$

➢ ***Respuesta:*** Haciendo las sustituciones y evaluaciones respectivas en (*), la ecuación que describe el desplazamiento del cuerpo viene dada por:

$$x(t) = -2\, e^{-3t} + U(t-2)\left[\, (t-2)\, e^{-3(t-2)} + \frac{t-2}{3} - \frac{1}{9} + \frac{e^{-3(t-2)}}{9} \,\right]$$

Ejercicios 2: Plantee y resuelva los problemas siguientes.

1. Un resorte de constante 1 lb/pie, es estirado por un peso de 32 libras. En el momento $t=0$, el peso recibe un golpe súbito hacia abajo que le imparte instantáneamente 3 unidades de momento lineal al sistema. En $t=2\pi$ segundos, se activa una fuerza de magnitud $-\mathrm{sen}(t-2\pi)$ que se aplica al sistema. Hallar la ecuación del movimiento del peso.
2. Una masa unitaria está acoplada a un resorte de constante $k=9$. Cuando la masa está en posición de equilibrio, se le da un golpe súbito desde abajo que le imparte instantáneamente 2 unidades de impulso lineal al sistema. En $t=3$ segundos, se activa una fuerza externa dada por $F(t)=e^{-(t-3)}$. Encuentre la posición de la masa como función del tiempo.
3. Un peso de 14 libras, suspendido de un resorte, lo estira 6 pulgadas. En el instante $t=0$, el peso se hala 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. En $t=\pi$ segundos, es golpeado desde arriba por un martillo que le produce una unidad de impulso lineal al sistema. Suponiendo que no hay amortiguamiento, (a) establezca la ecuación diferencial y las condiciones que describen el movimiento, (b) encuentre la posición del peso en cualquier tiempo.
4. Un resorte, de constante 2, es estirado por un peso de 64 libras. En el instante $t=0$, el peso está en la posición de equilibrio y en reposo. En el instante $t=1$, el peso recibe un golpe súbito hacia arriba que le imparte instantáneamente una unidad de momento lineal al sistema. En el instante $t=2\pi$, se activa una fuerza de magnitud $\cos(t-2\pi)$ que se aplica al sistema. Hallar la ecuación del movimiento del peso.
5. Un peso de masa unitaria está unido a un resorte cuya constante es 4. Cuando el peso está en su posición de equilibrio y se encuentra en reposo, recibe un golpe súbito desde arriba, que le imparte instantáneamente una unidad de momento lineal al sistema. En el tiempo $t=\pi/2$, una fuerza externa de magnitud $-\mathrm{sen}(t-\pi/2)$, comienza a actuar verticalmente sobre el sistema. Encuentre la ecuación del movimiento del peso.
6. Suponga que un cuerpo de 32 libras estira un resorte 2 pies y que el peso se suelta desde la posición de equilibrio a partir del reposo. Determine la ecuación del movimiento del cuerpo si al sistema se le aplica una fuerza externa $F(t)=\mathrm{sen}\,t$, la cual actúa para $0 \le t \le 2\pi$ y después es suprimida.

7. Un cuerpo que pesa 32 libras, sujeto a un resorte cuya constante es 1, se alarga 4 pies bajo la posición de equilibrio y se suelta. En el tiempo $t = 2\pi$, el peso recibe un golpe seco desde arriba el cual le imparte instantáneamente una unidad de momento lineal al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento del sistema.
8. Un resorte, de constante 25, es estirado por un peso de 32 libras y sometido a una fuerza de amortiguamiento igual a 10 veces la velocidad instantánea. En $t = 0$, el peso se encuentra a 3 pies bajo la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad inicial hacia arriba de 15 pies/seg. En $t = 1$, el peso recibe un golpe súbito hacia abajo el cual le imparte una unidad instantánea de momentum lineal al sistema. Además, en $t = 2$, al sistema se le aplica una fuerza externa dada por $F(t) = e^{-5(t-2)}$. Determine la ecuación diferencial que describe el movimiento del peso en cualquier instante y resuélvala.
9. Un resorte, de constante 1, es estirado por un peso de 32 libras y sometido a una fuerza de amortiguamiento igual a 2 veces la velocidad instantánea. En $t = 0$, el peso se encuentra a 3 pies bajo la posición de equilibrio y en reposo; en ese mismo instante recibe un golpe súbito hacia arriba el cual le imparte instantáneamente 3 unidades de momentum lineal al sistema. Además, en $t = 4$, se activa una fuerza de magnitud igual a 8 unidades. Determine la ecuación diferencial y condiciones iniciales que describe el movimiento del peso en cualquier instante y resuelva dicha ecuación.
10. Una masa M suspendida en equilibrio en el extremo de un resorte, recibe un golpe súbito desde abajo que le imparte instantáneamente dos unidades de momento lineal al sistema. En el instante $t = a$, la masa es sometida a una fuerza externa de magnitud igual a 5 unidades. Sabiendo que la constante del resorte es igual a $M k^2$, con $k \neq M$, encontrar la ecuación del movimiento de la masa M.
11. Un cuerpo de 32 libras de peso estira un resorte 8 pies. Estando el cuerpo en la posición de equilibrio y en reposo, recibe un golpe seco hacia arriba que le imparte instantáneamente 3 unidades de impulso lineal al sistema. Por otra parte, una fuerza externa dada por la función $e^{2\pi-2t}$, se activa en el instante $t = \pi$ segundos. Si sobre el sistema actúa una fuerza de amortiguamiento igual a 4 veces la velocidad instantánea, encuentre la ecuación de posición del peso en cualquier instante.
12. Un peso de masa unitaria está sujeto al extremo de un resorte cuya constante es uno. En el instante $t = \pi$, el peso recibe un golpe seco desde arriba que le imparte instantáneamente 3 unidades de momento lineal al sistema. Si la resistencia que el mecanismo opone al movimiento del peso es igual al doble de la velocidad instantánea (en pies/seg.), determine la ecuación de posición del peso en cualquier tiempo, sabiendo que el mismo se suelta desde un punto que está a un pie por encima de la posición de equilibrio.

13. Un resorte de constante 2 es estirado por un peso de 64 libras. En el instante $t=0$, el peso está en la posición de equilibrio y en reposo. En el instante $t=2$, el peso recibe un golpe súbito hacia abajo que le imparte instantáneamente una unidad de momento lineal al sistema. En el instante $t=3\pi$, se aplica al sistema una fuerza de magnitud igual a $-\operatorname{sen}(t-3\pi)$. Determine la ecuación de posición del peso en cualquier instante.

14. Un peso de 16 libras se suspende de un resorte y lo estira 8 pies. En el instante $t=0$, el peso se hala 4 pies por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. Una vez iniciado el movimiento, cuando han transcurrido $\frac{\pi}{2}$ segundos, el peso recibe un golpe súbito hacia arriba que le imparte 5 unidades instantáneas de momento lineal al sistema. Suponiendo que no existe fuerza de amortiguamiento que afecte el sistema:
    a. Establezca la ecuación diferencial que describe el movimiento del peso y las respectivas condiciones iniciales.
    b. Encuentre la ecuación de posición del peso en cualquier instante.

15. Un objeto de 16 libras de peso se coloca en un resorte y lo estira 8 pies. Cuando el objeto alcanza la posición de equilibrio, se hala un pie hacia abajo y se le imprime una velocidad inicial hacia arriba de 2 pies/seg. Cuando ha transcurrido un segundo, se activa una fuerza externa de magnitud e^{2-2t}. Si la resistencia que el mecanismo opone al movimiento del objeto es igual a 2 veces la velocidad instantánea (en pies/seg) y si, adicionalmente, en el instante $t=\pi$ segundos el objeto recibe un golpe seco desde abajo que le imparte instantáneamente 5 unidades de impulso lineal al sistema, determine la ecuación de posición del objeto en cualquier instante.

16. Un peso de 14 libras suspendido de un resorte lo estira 6 pulgadas. En el momento $t=0$, el peso se hala 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. En el instante $t=\pi$ segundos es golpeado desde arriba por un martillo que le produce una unidad de impulso lineal al sistema. Suponiendo que no hay amortiguamiento:
    a. Establezca la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que describen el movimiento.
    b. Encuentre la ecuación de posición del peso en cualquier tiempo.

17. Un peso de masa unitaria está sujeto al extremo de un resorte cuya constante es uno. Cuando el peso se encuentra en reposo, se aplica al sistema una fuerza externa dada por la función e^{-t}. Si la resistencia que el mecanismo opone al movimiento del peso es igual al doble de la velocidad instantánea (en pies/seg.) y si, adicionalmente, en el instante $t=1$ el peso recibe un golpe seco desde abajo que le imparte instantáneamente 3 unidades de momentum lineal al sistema, determine:
    a. La ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimiento del peso.
    b. La posición del peso en cualquier tiempo.

18. Un resorte de constante igual a 1 lb/pie, es estirado por un peso de 32 libras. En el instante $t=0$, el peso se encuentra en reposo y recibe un golpe súbito desde arriba que le imparte instantáneamente 5 unidades de momento lineal al sistema. En el instante $t=\pi$ segundos, se activa una fuerza de magnitud igual a $-4\cos(t-\pi)$ que se aplica al sistema. Suponiendo que no existe fuerza de amortiguamiento, ¿cuál es la ecuación de posición del peso en cualquier instante?

19. Un objeto, cuya masa es de una libra, está sujeto a un resorte de constante 4, y no hay amortiguamiento. En el instante $t=0$, el objeto está en reposo y a 3 pies por encima de la posición de equilibrio y se suelta para que empiece a moverse libremente. En el instante $t=2\pi$, es golpeado desde arriba por un martillo que le produce 8 unidades de impulso lineal al sistema. Determine la ecuación del movimiento.

20. Un objeto de 16 libras de peso estira un resorte 2 pies. Cuando el objeto alcanza la posición de equilibrio, se hala 3 pies hacia arriba y se le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 12 pies/seg. Al cabo de 3 segundos, el objeto recibe un golpe seco desde arriba que le imparte instantáneamente 5 unidades de impulso lineal al sistema. Si sobre el sistema actúa una fuerza de amortiguamiento igual a 4 veces la velocidad instantánea, halle la ecuación de posición del objeto en cualquier instante.

21. Un peso de 64 libras estira un resorte 8 pies. Estando el peso en la posición de equilibrio y en reposo, recibe un golpe súbito desde arriba que le imparte instantáneamente 6 unidades de impulso lineal al sistema. Por otra parte, en el instante $t=3\pi$ segundos, se activa una fuerza externa de magnitud $8\operatorname{sen}(2t-6\pi)$. ¿Cuál es la ecuación de posición del peso en función del tiempo si se sabe que sobre el sistema no actúa fuerza de amortiguamiento alguna?

22. Un peso de masa unitaria está unido a un resorte cuya constante es igual a uno. Una vez en su posición de equilibrio, se estira 6 pulgadas y luego se suelta. Simultáneamente se le aplica una fuerza externa de magnitud $32\cos t$. Si en el instante $t=2\pi$ segundos dicha fuerza externa es suspendida, ¿cuál es la posición del peso cuando han transcurrido 3π segundos?

23. Un objeto de 16 libras de peso, se coloca en un resorte y lo estira 8 pies. Cuando el objeto alcanza la posición de equilibrio, se hala un pie hacia abajo y se le imprime una velocidad inicial hacia arriba de 2 pies/seg para que empiece a moverse libremente. Cuando ha transcurrido un segundo, una fuerza de magnitud $f(t)=\frac{2t-1}{2}$ comienza a actuar sobre el sistema. Además, cuando $t=5$ segundos, el objeto recibe un golpe súbito desde arriba que le imparte instantáneamente 3 unidades de momento lineal al sistema. Determine la ecuación del movimiento si se sabe que la fuerza de resistencia del medio es igual a 2 veces la velocidad instantánea del objeto.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicios 1, página 12

Movimiento vibratorio no amortiguado y amortiguado y movimiento vibratorio forzado con o sin amortiguamiento

1. (a) Posición del peso: $x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{sen}(4\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}\cos(4\sqrt{3}t)$.

   Velocidad del peso: $v(t) = -2\cos(4\sqrt{3}t) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}(4\sqrt{3}t)$.

   (b) Posición: $x(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(4\sqrt{3}\,t + 2.6179)$. Nota: El valor de a y b indican que el $\cos\varphi < 0$ y el $\mathrm{sen}\varphi > 0$, respectivamente, por lo que el ángulo de fase se encuentra en el II cuadrante; así, $\varphi = \pi + \arctan\left(-1/\sqrt{3}\right)$.

   Amplitud: $A = \frac{1}{3}$ pie. Frecuencia: $f = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ ciclos/seg.

   Período: $P = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$ seg.

2. (a) Posición del objeto: $x(t) = \mathrm{sen}(4t) - \cos(4t)$.
   Velocidad del objeto: $v(t) = 4\cos(4t) + 4\,\mathrm{sen}(4t)$.

   (b) El objeto pasa por la posición de equilibrio cada $\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$ segundos $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. (Nota: Se debe resolver la ecuación $x(t) = 0$)

   (c) Posición: $x(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$. Nota: El valor de a y b indican que el $\cos\varphi > 0$ y el $\mathrm{sen}\varphi < 0$, respectivamente, por lo que el ángulo de fase se encuentra en el IV cuadrante; por lo tanto, $\varphi = \arctan(-1)$.

   Amplitud: $A = \sqrt{2}$ pies. Frecuencia: $f = \frac{2}{\pi}$ ciclos/seg.

   Período: $P = \frac{\pi}{2}$ seg.

3. Posición del cuerpo: $x(t) = -5\,t\,e^{-4t}$.

4. Posición: $x(t) = e^{-8t}\left(\frac{1}{2} + 4t\right)$. Velocidad: $v(t) = -32\,t\,e^{-8t}$.

5. Posición del peso: $x(t) = \dfrac{5}{\sqrt{14}}\, e^{-2t}\, \operatorname{sen}(2\sqrt{14}\, t)$.

6. Posición del peso: $x(t) = \dfrac{-1}{3} \operatorname{sen}(4t) + \dfrac{1}{2} \cos(4t) + \dfrac{2}{3} \operatorname{sen}(2t)$.

7. Posición del peso: $x(t) = \dfrac{1}{4} \operatorname{sen}(4t) + \dfrac{1}{2} \cos(4t) - t \cos(4t)$.

   Velocidad del peso: $v(t) = -2 \operatorname{sen}(4t) + 4t \operatorname{sen}(4t)$.

   NOTA: Este es un caso de ***resonancia mecánica***.

8. Posición del peso: $x(t) = \dfrac{1}{8} \operatorname{sen}(8t) + \dfrac{1}{4} \cos(8t) - t \cos(8t)$.

   NOTA: Este es un caso de ***resonancia mecánica***.

9. (a) Posición de la masa: $x(t) = e^{-5t}(2 + 10t) - 2\cos(5t)$.

   Velocidad de la masa: $v(t) = -10\, e^{-5t}(6 + 5t) + 10 \operatorname{sen}(5t)$.

   (b) Después de un largo tiempo, la posición y velocidad de la masa están dadas por: $x(t) = -2\cos(5t)$ y $v(t) = -10\operatorname{sen}(5t)$, respectivamente.

10. Posición del peso: $x(t) = -e^{-2t}\left[2\cos(3t) + \operatorname{sen}(3t)\right]$.

    Velocidad del peso: $v(t) = e^{-2t}\left[\cos(3t) + 8 \operatorname{sen}(3t)\right]$.

11. (a) Ecuación Diferencial: $x'' + 8x' + 16x = 0$; con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 2$.

    (b) Posición del peso: $x(t) = 2\, t\, e^{-4t}$.

    (c) Velocidad del peso: $v(t) = 2\, e^{-4t}(1 - 4t)$.

    (d) El desplazamiento máximo del peso, que se da cuando han transcurrido 0.25 segundos, es de $\dfrac{1}{2e}$ pies. (Nota: Resolver la ecuación: $x'(t) = 0$)

12. Posición del peso: $x(t) = \dfrac{2}{3} \cos(2t) - 5 \operatorname{sen}(2t) - \dfrac{2}{3} \cos(4t)$.

    Velocidad del peso: $v(t) = \dfrac{-4}{3} \operatorname{sen}(2t) - 10 \cos(2t) + \dfrac{8}{3} \operatorname{sen}(4t)$.

13. (a) Posición del peso: $x(t) = \cos(4t) - \operatorname{sen}(4t)$.

    Velocidad del peso: $v(t) = -4\left[\operatorname{sen}(4t) + \cos(4t)\right]$.

(b) $x(t) = \sqrt{2}\ \text{sen}\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right)$. Nota: El valor de a y b indican que el $\cos\varphi < 0$ y el $\text{sen}\varphi > 0$, respectivamente, por lo que el ángulo de fase se encuentra en el II cuadrante; así, $\varphi = \pi + \arctan(-1)$.

Amplitud: $A = \sqrt{2}$ pies   Frecuencia: $f = \frac{2}{\pi}$ ciclos/seg

Período: $P = \frac{\pi}{2}$ seg   (c) $v\left(\frac{3\pi}{16}\right) = 0$

14. Como la ecuación diferencial es $\frac{3}{32}x'' + \beta x' + 6x = 0$, se tiene que $\frac{3}{32}m^2 + \beta m + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \beta^2 - \frac{9}{4}$; por lo tanto, el movimiento es:

(a) críticamente amortiguado sii $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 1.5$

(b) sobre amortiguado sii $\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 > \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 1.5$

(c) oscilatorio (subamortiguado) sii $\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 < \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \beta < 1.5$

15. (a) Posición del cuerpo: $x(t) = e^{-4t}\left[4t - 1\right]$.

Velocidad del cuerpo: $v(t) = 8e^{-4t}\left[1 - 2t\right]$.

(b) El cuerpo pasa solo una vez por la posición de equilibrio, lo cual ocurre al cabo de 0.25 segundos.

16. (a) Ecuación del movimiento de la bola: $x(t) = \frac{1}{4}\left[\text{sen}(8t) - \cos(8t)\right] \quad \Rightarrow$

$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{sen}\left(8t - \frac{\pi}{4}\right)$. Nota: El valor de a y b indican que el $\cos\varphi > 0$ y el $\text{sen}\varphi < 0$, respectivamente, por lo que el ángulo de fase se encuentra en el IV cuadrante; por tanto, $\varphi = \arctan(-1)$.

(b) Velocidad de la bola: $v(t) = 2\left[\cos(8t) + \text{sen}(8t)\right]$.

17. Posición: $x(t) = e^{-8t}\left(\frac{1}{3} + 2t\right)$.   Velocidad: $v(t) = -2e^{-8t}\left(\frac{1}{3} + 8t\right)$.

18. (a) ED: $x'' + 16x = 8\cos(wt)$; con $x(0) = 1/4$ pie y $x'(0) = -5$ pies/seg.

(b) Solución complementaria: $x_c(t) = C_1\,\text{sen}(4t) + C_2\cos(4t)$.

(c) Se da resonancia mecánica sii $w = 4$. En este caso, $F(t) = 8\cos(4t)$.

(d) S.Particular: $x_p(t) = t\left[A\operatorname{sen}(4t) + B\cos(4t)\right] \quad \Leftrightarrow \quad x_p(t) = t\operatorname{sen}(4t)$.

(e) Posición del cuerpo: $x(t) = \frac{1}{4}\left[\cos(4t) - 5\operatorname{sen}(4t)\right] + t\operatorname{sen}(4t)$.

Velocidad del cuerpo: $v(t) = (4t-5)\cos(4t)$

19. (a) Posición del objeto: $x(t) = \frac{-1}{2}\left[\operatorname{sen}(10t) + \cos(10t)\right]$.

Velocidad del objeto: $v(t) = 5\left[\operatorname{sen}(10t) - \cos(10t)\right]$

(b) Como $x(2) = -0.6605$ y $v(2) = 2.5243$, se tiene que a los 2 segundos, el objeto se encuentra a 0.6605 pies por encima de la posición de equilibrio y se dirige hacia abajo a una velocidad de 2.5243 pies/seg.

(c) Amplitud: $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pies Frecuencia: $f = \frac{5}{\pi}$ ciclos/seg

Período: $P = \frac{\pi}{5}$ seg Angulo de fase: $\varphi = 5\pi/4$ radianes

Posición: $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(10t + \frac{5\pi}{4}\right)$. Nota: El valor de a y b indican que el $\operatorname{sen}\varphi$ y el $\cos\varphi$ son ambos negativos por lo que el ángulo de fase se encuentra en el III cuadrante; por lo tanto, $\varphi = \pi + \arctan(1)$.

20. (a) Ecuación diferencial: $\frac{3}{16}x'' + 3x' + kx = 0$.

Condiciones iniciales: $x(0) = -1/3$ pie y $x'(0) = v(0) = 4$ pies/seg.

(b) Dado que $\frac{3}{16}m^2 + 3m + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9 - \frac{3k}{4}$; por lo tanto, el movimiento es críticamente amortiguado sii $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 12$.

(c) Posición del peso: $x(t) = \frac{1}{3}e^{-8t}\left[\operatorname{sen}(4t) - \cos(4t)\right]$ (para $k = 15$).

(d) Velocidad del peso: $v(t) = \frac{4}{3}e^{-8t}\left[3\cos(4t) - \operatorname{sen}(4t)\right]$ (para $k = 15$).

21. Como la ecuación diferencial es $2x'' + \beta x' + 50x = 0$, se tiene que $2m^2 + \beta m + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \beta^2 - 400 \ (\beta > 0)$; por lo tanto, el movimiento es oscilatorio (subamortiguado) sii $\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 < 400 \quad \Leftrightarrow \quad \beta < 20$.

22. (a) Posición del peso: $x(t) = 2\operatorname{sen}(2t) - \frac{3}{4}\cos(2t) - \frac{1}{4}\cos(4t)$.

Velocidad del peso: $v(t) = 4\cos(2t) + \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(4t)$.

(b) Para que se produzca el fenómeno de la resonancia mecánica, la fuerza externa debe ser de la forma: $F(t) = A\cos(2t) \ \vee \ F(t) = A\operatorname{sen}(2t)$.

23. (a) Posición del peso: $x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}\left[\operatorname{sen}(4t) + \cos(4t)\right]$.

Velocidad del peso: $v(t) = e^{-2t}\left[\cos(4t) - 3\operatorname{sen}(4t)\right]$.

(b) El peso pasa por el punto de equilibrio, en dirección hacia abajo, cada $\frac{-\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ segundos $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

24. Posición del peso: $x(t) = \frac{1}{5}\left[21e^{-2t} - 15e^{-4t} + 7\operatorname{sen}t - 6\cos t\right]$

25. (a) Posición del objeto: $x(t) = 2\cos(3t) - e^{-2t}$.

Velocidad del objeto: $v(t) = -6\operatorname{sen}(3t) + 2e^{-2t}$.

(b) Después de un largo tiempo se tiene que:

$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 2\cos(3t) \ \wedge \ \lim_{t\to+\infty} v(t) = -6\operatorname{sen}(3t)$.

Ejercicio 2.1, página 20 (Delta de Dirac)

Solución de la ecuación diferencial: $y(t) = \cos t + 4\,U(t-2\pi)\operatorname{sen}t$. Obsérvese que:

$$y(t) = \begin{cases} \cos t & ; \quad 0 \le t < 2\pi \\ \cos t + 4\operatorname{sen}t & ; \quad t \ge 2\pi \end{cases}$$

Ejercicios 2, página 26

Movimiento vibratorio forzado, con o sin amortiguamiento, y la Transformada de Laplace.

1. La ecuación del movimiento del peso está dada por:

$$x(t) = \frac{-1}{2}U(t-2\pi)\left[\operatorname{sen}(t-2\pi) - (t-2\pi)\cos(t-2\pi)\right] + 3\operatorname{sen}t$$

2. La posición de la masa está dada por la ecuación:

$$x(t) = \frac{1}{10}U(t-3)\left[e^{-(t-3)} - \cos(3t-9) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t-9)\right] - \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3t)$$

3. (a) Ecuación diferencial: $x'' + 64x = \frac{16}{7}\,\delta(t-\pi)$; $x(0) = \frac{1}{4}$ y $x'(0) = 0$

   (b) Posición del peso: $x(t) = 3\cos(8t) + \frac{2}{7}\,\text{sen}(8t - 8\pi)\,U(t-\pi)$

4. La ecuación del movimiento del peso está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{4}\,(t-2\pi)\,\text{sen}(t-2\pi)\,U(t-2\pi) - \frac{1}{2}\,\text{sen}(t-1)\,U(t-1)$$

5. La ecuación del movimiento del peso está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t) - U(t-\pi/2)\left[\frac{1}{3}\,\text{sen}(t-\pi/2) - \frac{1}{6}\,\text{sen}(2t-\pi)\right]$$

6. La ecuación del movimiento del cuerpo está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{60}\,\text{sen}(4t)\left[U(t-2\pi) - 1\right] + \frac{1}{15}\,\text{sen}t\,\left[1 - U(t-2\pi)\right]$$

7. La ecuación del movimiento del sistema está dada por:

$$x(t) = 4\cos t + U(t-2\pi)\,\text{sen}(t-2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = 4\cos t + U(t-2\pi)\,\text{sen}t$$

8. Ecuación diferencial: $x'' + 10x' + 25x = \delta(t-1) + U(t-2)\,e^{-5(t-2)}$, sujeta a las condiciones iniciales: $x(0) = 3$ y $x'(0) = -15$.
   La ecuación del movimiento del peso está dada por:

$$x(t) = 3e^{-5t} + (t-1)\,e^{-5(t-1)}\,U(t-1) + \frac{1}{2}\,(t-2)^2\,e^{-5(t-2)}\,U(t-2)$$

9. Ecuación diferencial: $x'' + 2x' + x = 8\,U(t-4) - 3\delta(t)$, cuyas condiciones iniciales son: $x(0) = 3$ y $x'(0) = 0$.

   La ecuación del movimiento del peso está dada por:

$$x(t) = 3e^{-t} + 8\,U(t-4)\left[1 - e^{-(t-4)}\,(t-3)\right]$$

10. La ecuación del movimiento de la masa M está dada por:

$$x(t) = \frac{5}{M k^2}\,U(t-a)\left[1 - \cos(kt - ka)\right] - \frac{2}{Mk}\,\text{sen}(kt)$$

11. La <u>ecuación</u> <u>de</u> <u>posición</u> del peso está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,U(t-\pi)\left[\,(t-\pi)^2\; e^{-2(t-\pi)}\,\right] - \; 3t\,e^{-2t}$$

12. La <u>ecuación</u> <u>de</u> <u>posición</u> del peso está dada por:

$$x(t) = 3\,(t-\pi)\; e^{-(t-\pi)}\; U(t-\pi) - (t+1)\; e^{-t}$$

13. La <u>ecuación</u> <u>de</u> <u>posición</u> del peso está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2}\,U(t-2)\,\operatorname{sen}(t-2) - \frac{1}{4}\,U(t-3\pi)\left[\operatorname{sen}(t-3\pi) - (t-3\pi)\cos(t-3\pi)\right]$$

14. (a) <u>Ecuación</u> <u>diferencial</u>: $x'' + 4x = -10\,\delta(t-\pi/2)$; $x(0) = 4$ y $x'(0) = 0$

(b) <u>Posición</u> del peso: $x(t) = 4\cos(2t) - 5\,\operatorname{sen}(2t-\pi)\,U(t-\pi/2)$

15. La <u>ecuación</u> <u>de</u> <u>posición</u> del objeto está dada por:

$$x(t) = e^{-2t} + (t-1)^2\,e^{-2(t-1)}\;U(t-1) - 10(t-\pi)\;e^{-2(t-\pi)}\;U(t-\pi)$$

16. (a) <u>Ecuación</u> <u>diferencial</u>: $x'' + 64x = \frac{16}{7}\,\delta(t-\pi)$; $x(0) = 1/4$ y $x'(0) = 0$

(b) <u>Posición</u> del peso: $x(t) = \frac{2}{7}\,U(t-\pi)\,\operatorname{sen}(8t-8\pi) + \frac{1}{4}\cos(8t)$

17. (a) <u>Ecuación</u> <u>diferencial</u>: $x'' + 2x' + x = e^{-t} - 3\,\delta(t-1)$; $x(0) = x'(0) = 0$

(b) <u>Posición</u> del peso: $x(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,e^{-t} - 3\,(t-1)\;e^{-(t-1)}\;U(t-1)$

18. La <u>ecuación</u> <u>de</u> <u>posición</u> del peso está dada por:

$$x(t) = 5\,\operatorname{sen}t - 2\,(t-\pi)\,\operatorname{sen}(t-\pi)\,U(t-\pi)$$

19. La <u>ecuación</u> <u>del</u> <u>movimiento</u> del objeto está dada por:

$$x(t) = 4\,U(t-2\pi)\,\operatorname{sen}(2t-4\pi) - 3\cos(2t)$$

20. La <u>ecuación</u> <u>de</u> <u>posición</u> del objeto está dada por:

$$x(t) = 10(t-3)\;e^{-4(t-3)}\;U(t-3) - 3e^{-4t}$$

21. La ecuación del posición del peso está dada por:

$$x(t) = 3\operatorname{sen}(2t) + U(t-3\pi)\left[\operatorname{sen}(2t-6\pi) - 2(t-3\pi)\cos(2t-6\pi)\right]$$

22. La ecuación del posición del peso está dada por:

$$x(t) = \frac{\cos t}{2} + 16\,t\,\operatorname{sen} t - 16(t-2\pi)\operatorname{sen}(t-2\pi)\,U(t-2\pi) \quad \Rightarrow \quad x(3\pi) = \frac{-1}{2}$$

23. La ecuación del movimiento del objeto está dada por:

$$x(t) = e^{-2t} + \frac{1}{4}U(t-1)\left[2(t-1) - 1 + e^{-2(t-1)}\right] + 6(t-5)\,e^{-2(t-5)}\,U(t-5)$$

ANEXO: Sistema de Unidades

Sistema →	Centímetro - Gramo - Segundo CGS	Pie - Libra - Segundo PLS	Metro - Kilogramo - Segundo MKS
Fuerza	dina (din)	libra (lb)	newton (N)
Distancia	centímetro (cm)	pie (ft)	metro (m)
Masa	gramo (g o gr)	geolibra (slug)	kilogramo (kg)
Tiempo	segundo (s o seg)	segundo (seg)	segundo (seg)
Aceleración	cm/s^2	$pies/s^2$	m/s^2
Gravedad	$g \approx 980\ cm/s^2$	$g \approx 32\ pies/s^2$	$g \approx 9.8\ m/s^2$

$$F = m\,a = m\,\frac{dv}{dt} \qquad \text{o} \qquad F = \frac{W}{g}\,\frac{dv}{dt}$$

Nota:
1 N = 10^5 din = 0.2247 lb
1 slug = lb peso/g = $W/32$

TABLA DE ALGUNAS INTEGRALES BÁSICAS*

1. $\int u^n \, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$

2. $\int e^{au} \, du = \dfrac{e^{au}}{a}$, $a \neq 0$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u|$

4. $\int \ln u \, du = u \ln u - u$

5. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u$

6. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u$

7. $\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$

8. $\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u|$

9. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u|$

10. $\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u|$

11. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u$

12. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u$

13. $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

14. $\int \cos^2 u \, du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4}$

15. $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u$

16. $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u$

17. $\int \sec^2 u \, du = \tan u$

18. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u$

19. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{u}{a}\right)$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \arctan\left(\dfrac{u}{a}\right)$

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right|$

22. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{u-a}{u+a} \right|$

23. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right|$

24. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{a+u}{a-u} \right|$

25. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \dfrac{e^{au} \, (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

26. $\int e^{au} \cos bu \, du = \dfrac{e^{au} \, (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu)}{a^2 + b^2}$

* Se omite la constante de integración.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

N°	$L\{f(t)\} = F(s)$	N°	$L\{f(t)\} = F(s)$
1.	$L\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s>0$	4.	$L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s>a$
2.	$L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, $s>0$	5.	$L\{t\,e^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$, $s>a$
3.	$L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $n=1,2,3,\ldots$; $s>0$ $L\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$; $n>-1$; $s>0$	6.	$L\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s>a$
7.	$L\{\operatorname{sen}(kt)\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, $s>0$	10.	$L\{\cos(kt)\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$, $s>0$
8.	$L\{e^{at}\operatorname{sen}(kt)\} = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$, $s>a$	11.	$L\{e^{at}\cos(kt)\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$, $s>a$
9.	$L\{t\operatorname{sen}(kt)\} = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$, $s>0$	12.	$L\{t\cos(kt)\} = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$, $s>0$
13.	$L\{\operatorname{senh}(kt)\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$, $s>\lvert k\rvert$	14.	$L\{\cosh(kt)\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$, $s>\lvert k\rvert$
15.	$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$	16.	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
17.	$L\{f(t-a)\,U(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $a\geq 0$	18.	$L\{U(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$ $L\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$
19.	$L\left\{\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du\right\} = F(s)\,G(s)$	20.	$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
21.	$L\{y'(t)\} = sY(s)-y(0)$; $Y(s)=L\{y(t)\}$ $L\{y''(t)\} = s^2Y(s)-s\,y(0)-y'(0)$ $L\{y^{(n)}(t)\} = s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$	22.	$L\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$ $f(t)$ función periódica, de período T
	$2\operatorname{sen}A\cos B = \operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)$ $2\cos A\operatorname{sen}B = \operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B)$		$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ $2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

Elaborada por Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc. Profesora del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, Frank Jr. ***Ecuaciones Diferenciales***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1970 y 1991.

Bronson, Richard. ***Ecuaciones Diferenciales Modernas***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1976.

Edwards, C.H. Jr y Penny, D. E. ***Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones***. Editorial Editorial Prentice-Hall, México, 1986.

Kiseliov, A., Krasnov, M. Y Makarenko, G. ***Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***. Editorial Mir, Moscú, 1979.

Marcus, Daniel A. ***Ecuaciones Diferenciales***. Editorial CECSA, México, 1998.

Spiegel, Murray. ***Ecuaciones Diferenciales Aplicadas***. Editorial Prentice-Hall, México, 1983.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones***. Editorial Grupo Iberoamérica, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sexta edición, México, 1997.

Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sétima edición, México, 2002.

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES

CONTENIDOS **PÁGINA**