

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICA**



**ECUACIONES DIFERENCIALES  
ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN**

**Prof. Sharay Meneses Rodríguez, M.Sc.**

**2016**

# 1 ASPECTOS GENERALES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

## 1.1 Conceptos Básicos

### Definición 1: (Ecuación Diferencial)

Una ecuación que contiene a una función desconocida y las derivadas de ésta, se llama ecuación diferencial.

### Definición 2: (Ecuación Diferencial Ordinaria)

Si en la ecuación diferencial, sólo existe una variable independiente y las derivadas que aparecen son derivadas ordinarias, la ecuación se denomina *ecuación diferencial ordinaria*. (Ver ejemplos 1 a 4)

### Definición 3: (Ecuación Diferencial Parcial)

Si en la ecuación diferencial hay dos o más variables independientes y las derivadas que aparecen son derivadas parciales, la ecuación se denomina *ecuación diferencial parcial*. (Ver ejemplos 5 y 6)

### Definición 4: (Orden de una ecuación diferencial)

El *orden* de una ecuación diferencial está dado por el orden de la derivada más alta que aparece en dicha ecuación.

### Definición 5: (Grado de una ecuación diferencial)

El *grado* de una ecuación diferencial está dado por el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

### Ejemplo 1

1.  $4y^2 z'' - 3yz' - 2z = 0$  ; Ecuación ordinaria de segundo orden, primer grado.
2.  $5wy' + y = 3w^2$  ; Ecuación ordinaria de primer orden, primer grado.
3.  $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$  ; Ecuación ordinaria de tercer orden, primer grado.
4.  $(y'')^3 + (y')^2 + 3y = x^2$  ; Ecuación ordinaria de segundo orden, tercer grado.
5.  $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x \frac{\partial z}{\partial y}$  ; Ecuación parcial de primer orden, primer grado.
6.  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = x^2 + y$  ; Ecuación parcial de segundo orden, primer grado.

**Ejercicios 1.1.1:** Para cada una de las ecuaciones anteriores, indique cuál es la función desconocida (variable dependiente) y su(s) respectiva(s) variable(s) independiente(s).

**Nota:** Es importante indicar que, en lo sucesivo, este curso considera únicamente el estudio de algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 6:** (Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal)

Una *ecuación diferencial ordinaria lineal de orden  $n$*  es aquella que puede escribirse en la forma:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = F(x) \quad , \quad a_0(x) \neq 0,$$

donde  $F(x)$  y todos los coeficientes  $a_i(x)$  son funciones dadas de  $x$ .

Ahora bien, cuando  $a_i(x)$  es una función constante para todo  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , se trata de una ecuación lineal de *coeficientes constantes*; mientras que, si al menos uno de los  $a_i(x)$  es una función de  $x$ , la ecuación es de *coeficientes variables*.

**Ejemplo 2**

1.  $5y'' + y = 2 \cos(3x)$  ; Ecuación ordinaria lineal de coeficientes constantes.
2.  $x^3 y''' - 2x y' + 3y = 0$  ; Ecuación ordinaria lineal de coeficientes variables.

**NOTA:** Observe que **dos** características de la ecuación diferencial ordinaria lineal son:

- La variable dependiente  $y$ , así como todas sus derivadas, son de primer grado.
- $F$  y todos los coeficientes  $a_i$  dependen solo de la variable independiente  $x$ .

Por lo anterior, se dice que esta ecuación es una función lineal en las variables  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  ; además, se puede escribir en su forma más general como:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

**Ejercicios 1.1.2:** Para cada caso, indique las razones por las cuales las siguientes ecuaciones diferenciales son **NO** lineales.

1.  $y''' + 2e^x y'' + y y' = x^4$
2.  $x y'' + x^2 (y')^3 + y^2 = 0$
3.  $e^{2y} y'' - (\sin y) y' - 2x y = x^3$
4.  $3x y''' - 5y' + e^x y = e^{xy}$

## 1.2 Solución de una Ecuación Diferencial

### Definición 1:

Una *solución* de una ecuación diferencial sobre un intervalo  $I$  es cualquier función  $y = f(x)$  tal que  $f$  y sus derivadas existen en  $I$  y además satisfacen la ecuación.

**NOTA:** La *solución*  $y = f(x)$  se abreviará con la notación  $y = y(x)$

**Ejemplo 1** (*Soluciones explícitas: La función solución queda explícitamente definida en términos de la variable independiente*)

Considere la ecuación:  $y' = -k y$  (\*),  $k$  constante real. **Verifique** que las funciones  $y_1(x) = e^{-kx}$ ,  $y_2(x) = 5e^{-kx}$  y  $y_3(x) = Ce^{-kx}$ ,  $C$  constante, son soluciones en  $\mathbb{R}$  de la ecuación propuesta.

### Solución:

- Si  $y_1(x) = e^{-kx} \Rightarrow y_1'(x) = -k e^{-kx}$ . Sustituyendo en (\*), se tiene que  $y_1' = -k y_1$   
 $\Leftrightarrow -k e^{-kx} = -k e^{-kx}$ , lo cual es una identidad e indica que  $y_1(x)$  satisface la ecuación diferencial dada y, por lo tanto, es solución de esta. Observe que  $y_1(x)$  y  $y_1'(x)$  están, ambas, definidas en  $\mathbb{R}$ .
- En forma similar, si  $y_2(x) = 5e^{-kx} \Rightarrow y_2'(x) = -5k e^{-kx}$  y sustituyendo en (\*), se tiene que  $y_2' = -k y_2 \Leftrightarrow -5k e^{-kx} = -5k e^{-kx}$ ; por lo tanto,  $y_2(x)$  es una solución, en  $\mathbb{R}$ , de la ecuación diferencial dada.
- Finalmente, si  $y_3(x) = Ce^{-kx} \Rightarrow y_3'(x) = -Ck e^{-kx}$ . Así, de (\*) se obtiene que  $y_3' = -k y_3 \Leftrightarrow -Ck e^{-kx} = -Ck e^{-kx}$  y por lo tanto,  $y_3(x)$  es también una solución de la ecuación diferencial dada en  $\mathbb{R}$ .

¿Es la función constante  $y = 0$  otra solución de  $y' = -k y$ ? Justifique su respuesta.

**Ejemplo 2** (*Soluciones implícitas: La función solución queda implícitamente definida por una ecuación que involucra a las variables dependiente e independiente*)

Suponga que la ecuación  $y^3 + 3x + 7 = 6y$ , define a  $y$  como función de  $x$  en forma implícita. Verifique que esta función, así definida, es una solución implícita de la ecuación diferencial  $y'' - 2y(y')^3 = 0$ .

**Solución:**

➤ Si  $y^3 + 3x + 7 = 6y \Rightarrow 3y^2 y' + 3 = 6y' \Rightarrow 3 = 3y'(2 - y^2)$  ; por lo tanto,

$$y' = \frac{1}{2 - y^2}$$

➤ A partir de  $y'$  se obtiene, también en forma implícita, la segunda derivada por lo que:

$$y'' = \frac{2y y'}{(2 - y^2)^2}$$

➤ Al sustituir  $y'$  en  $y''$  obtenemos que  $y'' = \frac{2y}{(2 - y^2)^2} \cdot \frac{1}{2 - y^2} = \frac{2y}{(2 - y^2)^3}$  ; por lo tanto,

$$y'' = \frac{2y}{(2 - y^2)^3}$$

➤ Sustituyendo  $y' \wedge y''$  en  $y'' - 2y(y')^3 = 0$ , tenemos:

$$\frac{2y}{(2 - y^2)^3} - 2y \left( \frac{1}{2 - y^2} \right)^3 = \frac{2y}{(2 - y^2)^3} - \frac{2y}{(2 - y^2)^3} = 0$$

Se concluye, por tanto, que:  $0 = 0$

➤ Como  $0 = 0$  es una identidad, entonces la función  $y$ , definida implícitamente por la ecuación  $y^3 + 3x + 7 = 6y$ , satisface la ecuación diferencial propuesta por lo que esa función es una solución implícita de  $y'' - 2y(y')^3 = 0$ .

**Ejercicios 1.2:**

1. ¿Es la función  $y = \ln x$  una solución de la ecuación  $xy'' + y' = 0$  en el intervalo  $]0, +\infty[$  ?

2. Considere la ecuación:  $x''(t) - 2x'(t) - 15x(t) = 0$ . Determine si las funciones:  $x(t) = e^{5t}$ ,  $x(t) = e^{-3t}$  y  $x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-3t}$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias, son soluciones en  $\mathbb{R}$  de la ecuación dada. ¿Es la función  $x = 0$  otra solución? Justifique su respuesta.

3. Determine si la función definida por la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  es una solución implícita, en el intervalo  $] -1, 1 [$ , de la ecuación diferencial  $yy' = -x$ .

4. Determine si la función  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  es una solución, en  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ , de la ecuación diferencial  $y' + 2xy^2 = 0$ . ¿En qué otros intervalos  $y$  es solución?

5. Para cada caso, determine si la función dada en dos variables, es una solución de la respectiva ecuación diferencial parcial:

(a) **Función:**  $y(x, t) = 4 \sin(2x - 3t)$  . **Ecuación:**  $9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  .

(b) **Función:**  $w(x, y) = e^{3x} \sin(2y)$  . **Ecuación:**  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w$  .

6. Determine si la función definida por la ecuación  $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$  es una solución implícita de la ecuación diferencial  $3xy^2 dy + 3y^3 dx = \frac{2}{x} dx$ .

7. Verifique que la función definida por la ecuación  $2y - y \ln y = x + 2$ ,  $y > 0$ , es una solución implícita de la ecuación diferencial  $yy'' = (y')^3$ .

8. Sean las ecuaciones diferenciales: (a)  $xy' - 2y = 0$  y (b)  $(y')^2 = 9xy$

Verifique que las funciones a trozos (1) y (2) que se presentan a continuación, son soluciones de las ecuaciones (a) y (b), respectivamente.

$$(1) \ y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} ; \quad (2) \ y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

9. Considere las ecuaciones diferenciales: (a)  $x + yy' = 0$  y (b)  $y + xy' = 0$

Verifique que las funciones (1) y (2) dadas a continuación en forma paramétrica, son soluciones de las ecuaciones (a) y (b), respectivamente.

$$(1) \ \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} ; \quad (2) \ \begin{cases} x = e^{\arctan t} \\ y = e^{-\arctan t} \end{cases}$$

**NOTA:** Si  $x$  e  $y$  se definen como funciones continuas en términos del parámetro  $t$ , mediante las ecuaciones paramétricas  $x = f(t) \wedge y = g(t)$ , entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0. \quad (\text{derivación paramétrica})$$

10. Analice y dé respuesta a las situaciones que se plantean a continuación.

(a) ¿Por qué NO tienen solución en  $\mathbb{R}$  las ecuaciones diferenciales  $(y')^4 + y^2 = -1$  y  $(y')^2 + y^2 + 4 = 0$ ?

(b) ¿Por qué la ecuación diferencial  $(y'')^2 + 4y^2 = 0$  tiene solamente una solución real; a saber, la solución trivial  $y = 0$ ?

11. Para cada caso, determine el valor de la constante  $k$  para que la función  $y = e^{kx}$  sea solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a)  $3y' - 2y = 0$ ; (b)  $y'' + 3y' - 4y = 0$ ; (c)  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ .

### 1.3 Solución General, Particular y Singular

#### Definición 1:

**Solución General:** Dada una ecuación diferencial de orden  $n$ , la solución general de esta ecuación es una familia de curvas (funciones) determinada por una expresión que involucra  $n$  parámetros  $(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$  y que satisfacen dicha ecuación.

**Solución Particular:** Una solución particular es la que se obtiene a partir de la solución general, asignándole valores particulares a los  $n$  parámetros.

**Solución Singular:** Es aquella que **NO** puede obtenerse de la solución general dándole valores específicos a los parámetros de dicha familia de soluciones. Por lo general ocurren en ecuaciones diferenciales no lineales y se les conoce como soluciones no usuales o extrañas.

#### Ejemplo 1

Ecuación Diferencial	Solución General	Solución Particular	Solución Singular
1. $y' = 2x$	$y = x^2 + C$	$y = x^2 - 5$ ; $y = x^2$	
2. $xy' + y = 0$	$y = \frac{C}{x}$	$y = \frac{-2}{x}$ ; $y = 0$	
3. $y' - y = 0$	$y = Ce^x$	$y = \sqrt{3}e^x$ ; $y = 0$	
4. $y'' + y = 0$	$y = A\sin x + B\cos x$	$y = 6\sin x - 5\cos x$ $y = 0$	
5. $y'' - y = 0$	$y = Ae^x + Be^{-x}$	$y = e^x - e^{-x}$ ; $y = 0$	
6. $y' = 3y^{2/3}$	$y = (x + C)^3$	$y = (x + 4)^3$	$y = 0$
7. $y' - xy^{1/2} = 0$	$y = \left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2$	$y = \left(\frac{x^2}{4} - 7\right)^2$	$y = 0$
8. $y = xy' + (y')^2$	$y = Cx + C^2$	$y = 3x + 9$ $y = 0$	$y = \frac{-x^2}{4}$
9. $y' = \sqrt{2x - y} + 2$	$y = 2x - \left(\frac{x + C}{2}\right)^2$	$y = 2x - \left(\frac{x + 3}{2}\right)^2$	$y = 2x$
10. $y' = y^2 - 1$	$y = \frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$	$y = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ ; $y = 1$	$y = -1$

## 1.4 Ecuación Diferencial a partir de su Solución General

El problema de hallar la solución general de una ecuación diferencial será tratado en sesiones posteriores.

Sin embargo, un problema más simple es el *problema inverso*; a saber, el de **hallar la ecuación diferencial a partir de su solución general**.

**Ejemplo 1:** Determine la ecuación diferencial cuya solución general está definida por la función  $y = 3x^2 + Ce^{-2x}$ .

**Solución:** Como la solución general contiene un solo parámetro, esto indica que la respectiva ecuación diferencial es de primer orden.

➤ Dado que:  $y = 3x^2 + Ce^{-2x}$  (1)

$\Rightarrow y' = 6x - 2Ce^{-2x}$  (2)

➤ Por otra parte, de (1) se tiene que:  $2y = 6x^2 + 2Ce^{-2x}$  (3)

➤ Así, de la suma de (2) y (3), se obtiene que  $y' + 2y = 6x + 6x^2$ , la cual corresponde a la ecuación diferencial buscada.

**Ejemplo 2:** ¿Cuál es la ecuación diferencial cuya solución general está dada por la función  $y = A \sin(4x) + B \cos(4x) + x$ ?

**Solución:** Como la solución general contiene dos parámetros, esto indica que la ecuación diferencial respectiva es de segundo orden.

➤ Dado que:  $y = A \sin(4x) + B \cos(4x) + x$  (1)

$\Rightarrow y' = 4A \cos(4x) - 4B \sin(4x) + 1 \Rightarrow y'' = -16A \sin(4x) - 16B \cos(4x)$  (2)

➤ Por otra parte, de (1) se tiene que:  $16y = 16A \sin(4x) + 16B \cos(4x) + 16x$  (3)

➤ Así, de la suma de (2) y (3), se obtiene que la ecuación diferencial buscada corresponde a  $y'' + 16y = 16x$ .

**Ejercicios 1.4:** Las siguientes funciones corresponden a la solución general de una determinada ecuación diferencial. Para cada caso, encuentre dicha ecuación.

1.  $y = Ae^x + Be^{-x} - 4x$

5.  $y = Ax e^{-x} + B e^{-x} + \sin(3x)$

2.  $y = Ax + Bx^3$

6.  $x^2 - Ay^2 = 1$

3.  $y = Ax e^{-x} + B e^{-x} + 2 \sin x$

7.  $y = ax^3 + bx^2 + cx$

4.  $y \ln x = bx$

8.  $y = x + B \sin x$



## 1.5 Problemas de Valor Inicial y de Valor Frontera

**Definición 1:** En un problema de *valor inicial* se busca determinar una solución particular de una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas, especificadas en *un mismo valor* de la variable independiente. A tales condiciones se les denomina *condiciones iniciales*.

**Definición 2:** En un problema de *valor de frontera o límite* se busca determinar una solución particular de una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas, especificadas en *dos o más valores* de la variable independiente. Tales condiciones se llaman *condiciones de frontera*.

### Ejemplo 1 (Problema de valor inicial)

Una partícula  $P$  se mueve a lo largo del *eje*  $x$  de tal manera que su aceleración en cualquier tiempo  $t$  ( $t \geq 0$ ), está dada por  $a = 8 - 18t$ . Encuentre la posición  $x$  de la partícula medida desde el origen en cualquier tiempo  $t$ , asumiendo que inicialmente ( $t = 0$ ) está localizada en  $x = 5$  y está viajando a una velocidad  $v = -2$  (o sea, viaja hacia la izquierda).

### Solución

➤ Debemos recordar que si  $x$  es una *función de posición* de una partícula que se desplaza a lo largo de una línea recta, respecto al tiempo, entonces la velocidad y la aceleración están dadas por:  $x'(t) = v$  y  $x''(t) = a$ .

➤ Con las consideraciones anteriores, este problema se puede plantear como sigue:

$$x''(t) = 8 - 18t, \text{ con } x(0) = 5 \text{ y } x'(0) = v(0) = -2.$$

➤ Integrando  $x''(t) = 8 - 18t$  con respecto a  $t$  se tiene:

$$v(t) = x'(t) = 8t - 9t^2 + C_1. \text{ Como } x'(0) = v(0) = -2 \Rightarrow C_1 = -2.$$

$$\text{Por lo tanto, } v(t) = x'(t) = 8t - 9t^2 - 2$$

➤ Integrando respecto de  $t$  la ecuación anterior se tiene:

$$x(t) = 4t^2 - 3t^3 - 2t + C_2. \text{ Como } x(0) = 5 \Rightarrow C_2 = 5.$$

➤ Así, la ecuación de posición de la partícula es:  $x(t) = 4t^2 - 3t^3 - 2t + 5$

### Ejemplo 2 (Problema de valor frontera)

Una partícula  $P$  se mueve a lo largo del *eje*  $x$  de tal manera que su aceleración en cualquier tiempo  $t \geq 0$  está dada por  $a = 6t + 4$ . Encuentre la posición  $x$  de la partícula en función del tiempo, asumiendo que la partícula está localizada en  $x = -1$ , para  $t = 0$ , y en  $x = 5$ , para  $t = 1$ .

**Solución**

- De acuerdo con su enunciado, si  $x(t)$  es la función de posición de la partícula  $P$ , este problema lo podemos plantear de la siguiente manera:

$$x''(t) = 6t + 4, \text{ con } x(0) = -1 \text{ y } x(1) = 5$$

- Integrando  $x''(t)$  dos veces respecto de  $t$ , se tiene:  $x'(t) = 3t^2 + 4t + C_1$  y  $x(t) = t^3 + 2t^2 + C_1 t + C_2$ . Como  $x(0) = -1 \Rightarrow C_2 = -1$ .

Como  $x(1) = 5 \Rightarrow C_1 = 3$ . Por lo tanto,  $x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t - 1$  es la ecuación de posición buscada.

**Ejercicios 1.5:**

- Una curva en el *plano*  $XY$  tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto  $(x, y)$  de ella es igual a  $3x^2$ . Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto  $(2, 4)$ .
- Si la pendiente de una familia de curvas en cualquier punto  $(x, y)$  del *plano*  $XY$  está dada por:
  - $5 - 6x$ , determine una ecuación para aquel miembro particular de la familia que pasa por el punto  $(-1, -10)$ .
  - $4e^{-2x}$ , halle la ecuación de la curva que pasa por el punto  $(0, 0)$  y dibuje varios miembros de la familia de curvas (funciones).
- Una partícula se mueve a lo largo del *eje*  $x$  de modo tal que su aceleración instantánea está dada en función del tiempo por  $a = 10 - 12t^2$ . Encuentre la posición  $x$  de la partícula si: (a) para  $t = 2$  y  $t = 3$  la partícula está localizada en  $x = 0$  y  $x = -40$  respectivamente; (b) la partícula está inicialmente en  $x = 3$  y tiene una velocidad  $v = -6$ .
- Si la función definida por la ecuación  $y^2 - xy = A$  es una solución implícita de la ecuación diferencial  $y' = y / (2y - x)$ , halle una solución particular que satisfaga la condición  $y(1) = 2$ .
- Sabiendo que  $y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$  es la solución general de la ecuación  $y'' + 4y = 0$ , halle, para cada caso, la solución al problema de valor inicial o frontera, según corresponda:
 

(a) $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$	(d) $y(0) = 1$ y $y(\pi/4) = 2$
(b) $y(\pi/8) = 0$ y $y(\pi/6) = 1$	(e) $y(0) = 1$ y $y'(\pi/2) = 2$
(c) $y(\pi/8) = 0$ y $y'(\pi/8) = \sqrt{2}$	

## 1.6 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de primer orden

Para efectos del teorema que se verá a continuación –el cual aceptaremos sin demostración– y, en términos generales, para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es importante conocer que las mismas pueden ser expresadas en cualquiera de las formas siguientes:  $F(x, y, y') = 0$ ,  $y' = F(x, y)$ , o bien, en la notación de diferenciales,  $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ .

### **Teorema de Existencia y Unicidad** (Problema de Valor Inicial)

Sea la ecuación diferencial de primer orden  $y' = F(x, y)$  y sea  $R$  una región del *plano*  $XY$  que contiene al punto  $P(x_0, y_0)$ . Si la función  $F(x, y)$  satisface simultáneamente las condiciones de:

- a) ser continua en todo punto  $(x, y)$  de la región  $R$
- b) admitir la derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial y}$ , continua en todo punto  $(x, y)$  de la región  $R$

Entonces, existe una y sólo una función solución  $y = \varphi(x)$  en la región  $R$ , que satisface la condición  $y(x_0) = y_0$  (o sea,  $y = y_0$  cuando  $x = x_0$ ).

**Observación:** Las condiciones a) y b) del teorema anterior *son suficientes pero no necesarias*; esto es:

- (i) *Si se cumplen*, podemos inferir que existe solución única para la ecuación diferencial  $y' = F(x, y)$ , en  $y(x_0) = y_0$ , cuando el punto  $P(x_0, y_0)$  está en el interior de la región  $R$ .
- (ii) *Si NO se cumplen*, **NO** se garantiza la existencia o unicidad de una solución en la región  $R$ . En este caso, se pueden presentar tres situaciones diferentes en relación con la ecuación diferencial propuesta, a saber:
  - No tiene solución (ninguna solución)
  - Tiene solo una solución (solución única)
  - Tiene más de una solución

Conviene hacer notar que el *Teorema de Existencia y Unicidad* (TEU) **NO** nos dice, en caso de que el problema de valor inicial  $y' = F(x, y)$  con  $y(x_0) = y_0$  tenga solución, **CÓMO** obtener esa solución. La resolución de ecuaciones ordinarias de primer orden se estudiará a partir de la *Sección 2*, página 12.

**Ejemplo 1:** Sea la ecuación diferencial:  $y' = x y + e^{-y}$

Aquí,  $F(x, y) = x y + e^{-y}$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} = x - e^{-y}$ . Además, se cumple que **ambas** funciones son continuas en  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, la ecuación diferencial dada tiene **solución única en todo punto** del *plano XY*; o sea, en la región  $R = \mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 2:** Consideremos la ecuación diferencial:  $y' = 5 \sqrt[5]{y^4}$

➤ En este caso  $F(x, y) = 5 \sqrt[5]{y^4}$  y  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{4}{\sqrt[5]{y}}$  ( $y \neq 0$ )

➤ Si bien es cierto que  $F(x, y)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$ , esto **no se cumple** para  $\frac{\partial F}{\partial y}$ , la cual **NO es continua si**  $y = 0$ ; es decir, no se satisfacen las condiciones del *Teorema de Existencia y Unicidad* para los puntos ubicados sobre la recta  $y = 0$  (*eje X*). Por lo tanto, no se puede garantizar la existencia o unicidad de una solución en una región que contenga a esos puntos.

➤ Basado en lo anterior, se concluye que **una región** del plano real en la cual **sí se puede garantizar** solución única es:  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0 \}$ .

**Observación importante:** Se puede verificar que la función  $y = (x + C)^5$  es la solución general de la ecuación diferencial propuesta. Además, la función constante  $y = 0$  es también una solución (solución singular) de dicha ecuación por lo que **para cada punto del eje X la solución existe, pero no es única**.

Nótese que el **problema de valor inicial**:  $y' = 5 \sqrt[5]{y^4}$ , con  $y(x_0) = 0$ , **tiene al menos dos soluciones**; a saber,  $y = (x - x_0)^5 \wedge y = 0$ .

**Ejercicios 1.6:** Para los siguientes problemas de valor inicial, use el *TEU* e indique la región del plano real en la cual la ecuación diferencial dada tiene solución única; además, determine si existen soluciones únicas en los puntos indicados.

1.  $y' = \frac{1}{x^2 + y^2}$  ; (a)  $y(0) = 1$   
(b)  $y(0) = 0$

4.  $y' = \frac{1}{x^2 - y^2}$  ; (a)  $y(1) = 2$   
(b)  $y(2) = \pm 2$

2.  $y' = y \csc x$  ; (a)  $y(0) = 1$   
(b)  $y(1) = 0$

5.  $y' = 3\sqrt{xy}$  ; (a)  $y(1) = 0$   
(b)  $y(-1) = -1$

3.  $y' = \frac{x - 2y}{y - 2x}$  ;  $y(1) = 2$

6.  $y' = 2\sqrt{y}$  ;  $y(-1) = 0$

## 2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En esta sección, se estudiarán las principales técnicas para resolver este tipo de ecuaciones, cuya forma puede estar dada como  $F(x, y, y') = 0$  o  $y' = F(x, y)$ . En términos generales, el procedimiento para resolver estas ecuaciones consiste en hallar *la función solución* que contenga *un sólo parámetro*, denominada *solución general*, la cual puede ser expresada como una solución explícita en la forma  $y = f(x, C)$ ; o bien, como una solución implícita en la forma  $G(x, y) = C$  o  $G(x, y, C) = 0$ . Adicionalmente, para un problema de valor inicial  $F(x, y, y') = 0$ ,  $y(x_0) = y_0$ , se busca *una solución particular* para lo cual debemos encontrar el valor del parámetro  $C$  de modo que se satisfaga la condición requerida.

### 2.1 Método de Separación de Variables

Considere una ecuación diferencial de primer orden  $y' = F(x, y)$  la cual, usando diferenciales, puede escribirse como:  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  (\*)

Si la ecuación anterior se puede llevar a la forma:  $f(x) dx + g(y) dy = 0 \Leftrightarrow g(y) dy = -f(x) dx$ , en donde  $f$  y  $g$  son funciones que dependen únicamente de las variables  $x$  e  $y$  respectivamente, entonces se dice que la ecuación (\*) es de *variables separables*.

Esta ecuación puede ser resuelta por integración directa; así, la *solución general* de este tipo de ecuaciones se obtiene como se indica a continuación, donde  $C$  es la constante de integración:

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C \Leftrightarrow \int g(y) dy = -\int f(x) dx + C$$

**NOTA:** Con la integración se obtiene como solución general una familia de curvas de un parámetro, en la cual la función desconocida (variable dependiente) queda, por lo general, expresada de manera implícita.

**Ejemplo 1:** Determine la solución general de la ecuación:  $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 + 1}{3 - 2y}$

**Solución:** Separando las variables, podemos escribir la ecuación dada como:

$$(3 - 2y) dy = (6x^2 + 1) dx \Rightarrow \int (3 - 2y) dy = \int (6x^2 + 1) dx + C$$

$$\Rightarrow 3y - y^2 = 2x^3 + x + C \quad (\text{solución general en forma implícita})$$

**Ejemplo 2:** Resuelva la ecuación:  $x y' - y = 3x^3 y$

**Solución:** Usando diferenciales, la ecuación dada la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 x dy - y dx &= 3x^3 y dx & \Rightarrow & \quad x dy = y (1 + 3x^3) dx & \Rightarrow \\
 \frac{dy}{y} &= \frac{1 + 3x^3}{x} dx & \Rightarrow & \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^2 \right) dx + C & \Rightarrow \\
 \ln |y| &= \ln |x| + x^3 + C & \Rightarrow & \quad \ln \left| \frac{y}{x} \right| = x^3 + C & \Rightarrow & \quad \left| \frac{y}{x} \right| = e^{x^3 + C} \\
 \Rightarrow \frac{y}{x} &= \pm e^C e^{x^3} & \Rightarrow & \quad y = K x e^{x^3} & \text{(solución general en forma explícita)}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3:** Resuelva la ecuación:  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{1-t}{1-s}}$  ; con  $s(1) = 0$

**Solución:** Asumiendo  $1-t \geq 0 \wedge 1-s > 0$ , la ecuación dada se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-s} ds &= \sqrt{1-t} dt & \Rightarrow & \quad \int (1-s)^{\frac{1}{2}} ds = \int (1-t)^{\frac{1}{2}} dt + C & \Rightarrow \\
 -\frac{2}{3} (1-s)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} &= C & \Rightarrow & \quad -\frac{2}{3} \sqrt{(1-s)^3} + \frac{2}{3} \sqrt{(1-t)^3} = C
 \end{aligned}$$

Como  $s=0$  cuando  $t=1$ , sustituyendo se tiene que  $C = -\frac{2}{3}$ ; por lo tanto,

$$-\frac{2}{3} \sqrt{(1-s)^3} + \frac{2}{3} \sqrt{(1-t)^3} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(1-s)^3} - \sqrt{(1-t)^3} = 1$$

**Ejercicios 2.1:** Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

1.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  ;  $y(1) = 3$
2.  $4y y' = x + x y^2$  ;  $y(1) = 0$
3.  $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$  ;  $y(\pi/2) = e$
4.  $e^{-y} (1 + y') = 1$
5.  $2y \cos x dx + \cos^2 x dy = 0$  ;  $y(\pi/4) = \pi/4$
6.  $x^2 y dx + (1 + x^3) dy = 0$
7.  $r d\theta = (\theta^2 + 1) dr$
8.  $(1 + e^x) y y' = e^x$  ;  $y(0) = 1$
9.  $y' = x^2 - 2x^2 y$
10.  $(x^2 + 1)(y^2 + 1) dy = x y dx$

11. Mostrar que  $[F(x) + y G(x y)] dx + x G(x y) dy = 0$  se convierte en una ecuación de variables separables al cambiar la variable dependiente de  $y$  a  $v$  con la transformación  $v = x y$ . Usando este resultado, resuelva la ecuación:

$$[x^2 + y \operatorname{sen}(x y)] dx + x \operatorname{sen}(x y) dy = 0.$$

12. Resuelva la ecuación  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$  y verifique que tiene por soluciones a  $y = (x + C)^3$  y a  $y = 0$ . Además, analice la relación de estas soluciones con el *Teorema de Existencia y Unicidad* y entre cada una de ellas.

## 2.2 Método de Transformación de Variables

Existen algunas ecuaciones diferenciales de variables NO separables las cuales, mediante un cambio adecuado de variables, se pueden transformar en ecuaciones de variables separables.

### 2.2.1 La Ecuación Homogénea

**A. Funciones Homogéneas:** Se dice que  $f(x, y)$  es una función homogénea de grado  $n$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , si cumple la propiedad de que:  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ .

En tales casos, la función  $f(x, y)$  puede expresarse de dos formas; a saber:

- (i)  $f(x, y) = x^n f(1, y/x)$ , donde  $f(1, y/x)$  es homogénea de grado cero.
- (ii)  $f(x, y) = y^n f(x/y, 1)$ , donde  $f(x/y, 1)$  es homogénea de grado cero.

**Ejemplo 1:** Considere la función:  $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 5y^3$ .

Como  $f(tx, ty) = (tx)^3 - 3(tx)^2(ty) + 5(ty)^3 = t^3(x^3 - 3x^2y + 5y^3) = t^3 f(x, y)$ , se concluye que la función propuesta es homogénea, de grado 3 (tres). Por lo tanto, se puede llevar a la forma:

$$f(x, y) = x^3 f(1, y/x) \quad \vee \quad f(x, y) = y^3 f(x/y, 1); \text{ a saber:}$$

$$f(x, y) = x^3 [1 - 3(y/x) + 5(y/x)^3] \quad \vee \quad f(x, y) = y^3 [(x/y)^3 - 3(x/y)^2 + 5]$$

**Ejercicios 2.2.1.A:** Analice la homogeneidad de las funciones siguientes:

1.  $f(x, y) = \ln x^2 - 2 \ln y$
2.  $f(x, y) = x^4 - 2y^3$
3.  $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$
4.  $f(x, y) = \sqrt[5]{x^3 - y^3}$

**B. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas:** Se dice que la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es homogénea sí y solo sí las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son homogéneas y del **mismo grado ambas**.

La definición anterior indica que la ecuación  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  se puede expresar como  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ; o bien, como  $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ , las cuales son, por tanto, ecuaciones homogéneas de grado cero.

**Ejemplo 2:** La ecuación  $(x^2 + y^2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$  es homogénea de grado dos ya que tanto  $M(x, y) = x^2 + y^2$  como  $N(x, y) = x^2 - xy$  son funciones homogéneas, **ambas de grado dos**. Ahora bien, la ecuación dada es equivalente a:

$$(x^2 - xy) dy = -(x^2 + y^2) dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + (y/x)^2}{(y/x) - 1}$$

y se puede verificar que esta última ecuación es de grado cero. (Ver el ejercicio 11 de la página 17)

Con base en lo anterior, **por ejemplo**, la *ecuación homogénea*  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  se puede

cambiar a una de variables separables por medio de la transformación:  $v = \frac{y}{x}$  o  $y = vx$ .

En este caso, se cambia la variable dependiente de  $y$  a  $v$ , manteniendo la misma variable independiente  $x$ . En efecto:

Si  $y = vx$  entonces  $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ ; así, la ecuación  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  se transforma en:

$$v + x \frac{dv}{dx} = f(v) \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

$\Rightarrow \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$ , ecuación en la cual las variables ya están separadas.



**Ejemplo 3:** Resuelva la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+2y)}{2x+y}$

**Solución:** Se puede observar con facilidad, que la ecuación dada es homogénea ya que las funciones  $-(x+2y)$   $\wedge$   $(2x+y)$  son ambas homogéneas de grado uno. Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(1+2y/x)}{x(2+y/x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+2y/x)}{2+y/x}$$

Haciendo la sustitución  $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx$ , nos conduce a:

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{-(1+2v)}{2+v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+v} - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{-(v^2+4v+1)}{2+v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2+v}{v^2+4v+1} dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |v^2+4v+1| = -\ln |x| + C$$

$$\Rightarrow \ln |x^2(v^2+4v+1)| = 2C \Rightarrow x^2(v^2+4v+1) = K \quad (K = \pm e^{2C})$$

Finalmente, sustituyendo  $v$  por  $\frac{y}{x}$  se tiene:

$$x^2 \left( \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 1 \right) = K \Leftrightarrow y^2 + 4xy + x^2 = K$$

**Ejemplo 4:** Resuelva la ecuación diferencial:  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{y}\right)$  (\*)

**Solución:** Dado que (\*) tiene la forma  $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ , entonces se trata de una ecuación

homogénea de grado cero. En este caso, la sustitución que corresponde es:  $u = \frac{x}{y} \Leftrightarrow$

$x = uy \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$ . Luego, (\*) nos conduce a:

$$u + y \frac{du}{dy} = u - \operatorname{sen}^2 u \Rightarrow y \frac{du}{dy} = -\operatorname{sen}^2 u \Rightarrow \frac{-du}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\int -\operatorname{csc}^2 u \, du = \int \frac{dy}{y} + C \Rightarrow \cot u = \ln |y| + C$$

Finalmente, como  $u = \frac{x}{y}$ , se obtiene:  $\cot(x/y) = \ln |y| + C$

**Ejercicios 2.2.1.B:** Verifique que las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas y resuélvalas.

1.  $(x^2 - y^2) dx - 2xy dy = 0$

7.  $(x^2 + xy + 3y^2) dx = (x^2 + 2xy) dy$

2.  $y dx = (2x + 3y) dy$

8.  $y' = y/x + \cos^2(y/x) ; y(1) = \pi/4$

3.  $(y^2 + xy) dx + x^2 dy = 0$

9.  $(x^3 + y^3) dx = xy^2 dy ; y(1) = 0$

4.  $x' = x/y + \sec^2(x/y)$

10.  $x dx + (y - 2x) dy = 0$

5.  $(2\sqrt{xy} - y) dx - x dy = 0$

11.  $(x^2 + y^2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$

6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^3 + xy^2}{xy^2}$

12.  $y \frac{dx}{dy} = x + 4y e^{-2x/y}$

## 2.2.2 Transformaciones Especiales

En algunos casos, se pueden hacer cambios de variable apropiados que permiten transformar una ecuación de la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  (que no es necesariamente homogénea) en otra de variables separables, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 1:** Resuelva la ecuación:  $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y-3x}$  (\*)

**Solución:** La presencia de la raíz cúbica en (\*) nos sugiere cambiar la variable dependiente, por ejemplo de  $y$  a  $z$ , de modo tal que dicha raíz pueda evitarse.

➤ En este caso, si  $y - 3x = z^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - 3 = 3z^2 \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 + 3z^2 \frac{dz}{dx}$

➤ Sustituyendo en (\*) obtenemos:

$$3 + 3z^2 \frac{dz}{dx} = 3z \Rightarrow z^2 \frac{dz}{dx} = z - 1 \Rightarrow \frac{z^2}{z-1} dz = dx$$

$$\Rightarrow \int \left( z + 1 + \frac{1}{z-1} \right) dz = \int dx + K \Rightarrow \frac{z^2}{2} + z + \ln|z-1| = x + K$$

➤ Finalmente, como  $z = \sqrt[3]{y-3x}$ , se concluye que:

$$\sqrt[3]{(y-3x)^2} + 2\sqrt[3]{y-3x} + 2\ln|\sqrt[3]{y-3x} - 1| = 2x + C \quad (C=2K)$$

**Ejercicios 2.2.2:** Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

1.  $y' = \sqrt{2x + 3y}$

2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^4}{4xy}$

(Sugerencia: haga  $y = ux$ )

3.  $y' = 2(y/x) + x \tan(y/x^2)$

(Sugerencia: haga  $y = vx^2$ )

4.  $(2x + 2y - 1) + y'(x + y - 2) = 0$

(Sugerencia: haga  $u = x + y$ )

5.  $y' = \frac{x^2 y^2 + 1}{2x^2}$

(Sugerencia: haga  $u = xy$ )

6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x + 1}$

(Sugerencia: haga  $u = \frac{y-1}{x+1}$ )

7.  $y' = y(x + \ln y)$

(Sugerencia: haga  $z = x + \ln y$ )

8.  $(2\sqrt{xy} - y) dx - x dy = 0$

(Sugerencia: haga  $u^2 = xy$ )

9. Considere la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$  ;  $b \neq 0$ .

a. Demuestre que esta ecuación se puede transformar a una de variables separables mediante la sustitución  $z = ax + by + c$ .

b. Usando el resultado anterior, resuelva las ecuaciones:

1.  $y' = \sin^2(x - y + 1)$

3.  $y' = \tan^2(x + y)$

2.  $y' = 2xy - x^2 - y^2$

4.  $y' = -2 + \cot(2x + y - 1)$

10. Para cada caso, usando el TEU<sup>1</sup>, determine la región del plano real en la cual se puede garantizar que la ecuación dada tiene solución única. Además, determine: (a) la solución general de dicha ecuación; (b) una solución particular que cumpla la condición inicial indicada (justifique su respuesta).

i.  $y' = \sqrt{y+x} - 1$  ;  $y(-1)=1$

ii.  $y' = \sqrt{2x-y} + 2$  ;  $y(2)=1$

11. Para cada caso, usando el TEU, determine la región del plano real en la cual se puede garantizar que la ecuación diferencial dada tiene solución única. Además: (a) determine la solución general de dicha ecuación; (b) verifique que la función indicada es una solución singular (justifique su respuesta).

i.  $y' = 3\sqrt[3]{y-x} + 1$  ;  $y=x$

ii.  $2y' = 2\sqrt{y+3x} - 6$  ;  $y=-3x$

<sup>1</sup> Teorema de Existencia y Unicidad (TEU), Sección 1.6, página 10. De los Ejercicios 1.6, página 11, resuelva el 5 y 6 siguiendo el procedimiento del presente ejercicio.

## 2.3 Ecuaciones Diferenciales Exactas

### Definición 1:

La ecuación diferencial de primer orden  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  se dice que es *exacta* si y sólo si existe una función  $U(x, y)$  tal que el diferencial total de  $U$ , denotado por  $dU(x, y)$ , sea igual a  $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ ; es decir:

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

En estos casos, como  $dU(x, y) = 0$ , la solución de la ecuación propuesta, que se obtiene por integración, viene dada en forma implícita por  $U(x, y) = C$ .

### Teorema 2.3 (Prueba de Exactitud)

La ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es exacta  $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

#### Demostración:

(a) En el sentido de “izquierda” a “derecha”, o sea: “ $\Rightarrow$ ”

❖ Supongamos que  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es exacta. **Se tiene que demostrar que**  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ; o sea,  $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ .

❖ Si  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  es exacta, **existe** una función  $U(x, y)$  tal que:

$$dU(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$$

❖ Derivando con respecto a  $y$  la primera de estas ecuaciones y con respecto a  $x$  la segunda, se tiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = M_y(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = N_x(x, y)$$

$$\text{Como } \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

**QED**

(b) En el sentido de “derecha” a “izquierda”, o sea: “ $\Leftarrow$ ”

❖ Supongamos que  $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ . **Hay que demostrar que existe una función  $U$**  tal que  $\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ ; o sea,  **$U$  debe satisfacer simultáneamente dos condiciones**, a saber:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y).$$

❖ Consideremos la función  $U$  definida por:  $U(x, y) = \int M(x, y) dx + f(y)$ , para la cual se cumple que  $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$ . Por lo tanto, **basta con demostrar que existe una función  $f(y)$**  tal que  $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$ .

❖ Pero:  $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int M(x, y) dx + f(y) \right] = N(x, y) \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + f'(y) = N(x, y) \Leftrightarrow f'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

❖ Para que esta **última igualdad sea verdadera**, basta con que la expresión  $N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$  **dependa únicamente de  $y$** ; o sea, que la derivada parcial respecto a  $x$  de esa expresión, sea igual a cero. En efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = N_x(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right]$$

$$= N_x(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right] = N_x(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} M(x, y)$$

$$= N_x(x, y) - M_y(x, y) = 0 \quad (\text{ya que } M_y(x, y) = N_x(x, y))$$

❖ Así, como  $f'(y)$  depende solo de  $y$ , entonces  $f(y) = \int f'(y) dy$ ; por lo tanto, existe una función  $U$  tal que  $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$  y  $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$ .

**QED**

**Ejemplo 1:** Resuelva la ecuación  $(y^2 - \operatorname{sen} x) dx + (2xy + \sec^2 y) dy = 0$

**Solución:** En este caso:  $M(x, y) = y^2 - \operatorname{sen} x$  y  $N(x, y) = 2xy + \sec^2 y$ . Además, la ecuación dada es exacta puesto que  $M_y(x, y) = 2y$  y  $N_x(x, y) = 2y$ . Por tanto, su solución implícita está dada por  $U(x, y) = C$ , donde la función  $U(x, y)$  es tal que  $U_x = M(x, y)$  y  $U_y = N(x, y)$ .

- Ahora bien, si  $U_x = M(x, y) \Rightarrow U(x, y) = \int M(x, y) dx + f(y) \Rightarrow$   
 $U(x, y) = \int (y^2 - \operatorname{sen} x) dx + f(y) \Rightarrow U(x, y) = xy^2 + \cos x + f(y) \quad (*)$
- De (\*) y como  $U_y = N(x, y) \Rightarrow 2xy + f'(y) = 2xy + \sec^2 y \Rightarrow$   
 $f'(y) = \sec^2 y \Rightarrow f(y) = \tan y \Rightarrow U(x, y) = xy^2 + \cos y + \tan y$
- Finalmente, la solución general de la ecuación es:  $xy^2 + \cos y + \tan y = C$ .

**Ejemplo 2:** Resuelva la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 + y^3}{5 - 3xy^2}$ ; con  $y(1) = 1$

**Solución:** La ecuación se expresa como:  $(6x^2 + y^3) dx - (5 - 3xy^2) dy = 0$

- En este caso:  $M(x, y) = 6x^2 + y^3$  y  $N(x, y) = 3xy^2 - 5$ . Además, la ecuación es exacta ya que:  $M_y(x, y) = 3y^2$  y  $N_x(x, y) = 3y^2$ . Así, su solución implícita es  $U(x, y) = C$ , donde la función  $U(x, y)$  debe cumplir, simultáneamente, las condiciones:  $U_x = M(x, y)$  y  $U_y = N(x, y)$ .
- Por lo tanto, si  $U_y = N(x, y) \Rightarrow U(x, y) = \int N(x, y) dy + f(x) \Rightarrow$   
 $U(x, y) = \int (3xy^2 - 5) dy + f(x) \Rightarrow U(x, y) = xy^3 - 5y + f(x) \quad (*)$
- De (\*) y como  $U_x(x, y) = M(x, y) \Rightarrow y^3 + f'(x) = 6x^2 + y^3 \Rightarrow$   
 $f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f(x) = 2x^3 \Rightarrow U(x, y) = xy^3 - 5y + 2x^3$
- Así, la solución general de la ecuación es:  $xy^3 - 5y + 2x^3 = C \quad (**)$
- Por otra parte, como  $y(1) = 1$ , sustituyendo en (\*\*) se tiene que  $C = -2$ , por lo que la **solución particular** buscada es:  $xy^3 - 5y + 2x^3 = -2$ .

**Ejercicios 2.3**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

$$1. \quad y' = \frac{x - y}{x + y}$$

$$2. \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \operatorname{sen} \theta}{2r \cos \theta - 1}$$

$$3. \quad y' = \frac{y^2 - y e^x}{e^x - 2xy}$$

$$4. \quad y' = \frac{2x - \operatorname{sen} y}{x \cos y} \quad ; \quad y(2) = 0$$

$$5. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y \cos x}{\operatorname{sen} x + y}$$

$$6. \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x \sec^2 y}{\operatorname{sen}(2x) - \tan y} \quad ; \quad y(\pi) = \frac{\pi}{4}$$

$$7. \quad (x^3 + x y^2) dx + (x^2 y + y^3) dy = 0$$

$$8. \quad \left( x^2 + \frac{y}{x} \right) dx + (\ln x + 2y) dy = 0 \quad ; \quad y(1) = \frac{-1}{3}$$

$$9. \quad [\operatorname{sen}(xy) + xy \cos(xy)] dx + [x^2 \cos(xy)] dy = 0$$

$$10. \quad (x^2 + 2y e^{2x}) y' + 2xy + 2y^2 e^{2x} = 0 \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$11. \quad \left( \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x - \frac{2}{y} \right) dy = 0$$

$$12. \quad \left( \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x} \right) dx + \left( x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

$$13. \quad (y e^{xy} \cos(2x) - 2 e^{xy} \operatorname{sen}(2x) + 2x) dx + (x e^{xy} \cos(2x) - 3) dy = 0$$

## 2.4 Ecuaciones Diferenciales hechas Exactas Utilizando un Factor Integrante

En los siguientes tres ejemplos se considerarán casos en los cuales, dada una ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  **NO exacta**, ésta se puede transformar en una ecuación exacta al multiplicarla por una función  $F(x, y)$ , la cual puede depender de ambas variables o de solo una de ellas.

A aquellas funciones que permiten cambiar la condición de una ecuación diferencial de **NO** exacta a otra equivalente que **SÍ** es exacta, se les denomina *factores integrantes*, lo cual se define a continuación.

### Definición 1: (Factor Integrante)

Sea la ecuación diferencial no exacta  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ . Si existe una función  $F(x, y)$  tal que la ecuación  $F(x, y) [M(x, y) dx + N(x, y) dy] = 0$  es exacta, entonces la función  $F(x, y)$  se llama *factor integrante*.

Es decir:

$$F(x, y) \text{ es un factor integrante} \Leftrightarrow [F(x, y) \cdot M(x, y)]_y = [F(x, y) \cdot N(x, y)]_x$$

**Ejemplo 1:** Sea la ecuación:  $(y^2 + 2x^2) dx + xy dy = 0$  (E<sub>1</sub>)

➤ Para esta ecuación se tiene que:  $M(x, y) = y^2 + 2x^2$  y  $N(x, y) = xy$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = 2y \quad y \quad N_x(x, y) = y \quad \Rightarrow M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$$

$\Rightarrow$  la ecuación propuesta NO es exacta

➤ Sin embargo, si multiplicamos la ecuación E<sub>1</sub> por la función  $F(x) = x$ , obtenemos una ecuación equivalente, a saber:

$$(xy^2 + 2x^3) dx + x^2y dy = 0 \quad (E_2)$$

➤ De la ecuación anterior se tiene que:  $M(x, y) = xy^2 + 2x^3$  y  $N(x, y) = x^2y$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = 2xy \quad y \quad N_x(x, y) = 2xy \quad \Rightarrow M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

$\Rightarrow$  la ecuación E<sub>2</sub> **es exacta**, por lo que puede ser resuelta usando los procedimientos correspondientes para este tipo de ecuaciones.

➤ **Ejercicio 1:** Verifique que la solución general de E<sub>2</sub> es  $x^2y^2 + x^4 = C$ .



**Ejemplo 2:** Considere la ecuación:  $y \, dx + (4x - y^2) \, dy = 0$   $(E_3)$

➤ Para esta ecuación se tiene que:  $M(x, y) = y$  y  $N(x, y) = 4x - y^2$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = 1 \quad y \quad N_x(x, y) = 4 \quad \Rightarrow M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$$

$\Rightarrow$  la ecuación propuesta **NO es exacta**

➤ Si multiplicamos la ecuación  $E_3$  por la función  $F(y) = y^3$ , obtenemos la ecuación equivalente:  $y^4 \, dx + (4xy^3 - y^5) \, dy = 0$   $(E_4)$

➤ De la ecuación anterior se tiene que:  $M(x, y) = y^4$  y  $N(x, y) = 4xy^3 - y^5$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = 4y^3 \quad y \quad N_x(x, y) = 4y^3 \quad \Rightarrow M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

$\Rightarrow$  la ecuación  $E_4$  **es exacta**

➤ **Ejercicio 2:** Verifique que la solución de la ecuación  $E_4$  es  $6xy^4 - y^6 = C$ .

**Ejemplo 3:** Considere la ecuación:  $(x - y) \, dx + (x + y) \, dy = 0$   $(E_5)$

➤ Para esta ecuación se tiene:  $M(x, y) = x - y$  y  $N(x, y) = x + y$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = -1 \quad y \quad N_x(x, y) = 1 \quad \Rightarrow M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$$

$\Rightarrow$  la ecuación propuesta **NO es exacta**

➤ Si multiplicamos la ecuación propuesta por la función  $F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ , se obtiene la

$$\text{ecuación equivalente: } \frac{x - y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} \, dy = 0 \quad (E_6)$$

➤ Para esta última ecuación se tiene que:

$$M(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} \quad y \quad N(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$M_y(x, y) = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = N_x(x, y) \quad \text{¡ Verifíquelo !}$$

➤ Por lo anterior, la ecuación  $E_6$  **es exacta**. **Ejercicio 3:** Compruebe que la solución general de esta ecuación es:  $\ln(x^2 + y^2) - 2 \arctan(x/y) = C$ .

**Observación:** Es importante hacer notar que no siempre es fácil determinar la función  $F(x, y)$  que transforma la ecuación dada no exacta en otra ecuación que sí lo es. En esta sección se estudiarán únicamente los casos para los cuales dicha función depende sólo de una variable, a saber:  $F(x)$  o  $F(y)$ .

### 2.4.1 Factores Integrantes que dependen de una sola variable

Considere la ecuación no exacta:  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ . Suponga que existe un factor integrante  $F$  que depende únicamente de una variable. A continuación, se ilustra el procedimiento para determinar dicho factor.

**Primer Caso:**  $F$  depende únicamente de la variable  $x$ ; es decir  $F = F(x)$ .

❖ En este caso,  $F(x) \cdot M(x, y) dx + F(x) \cdot N(x, y) dy = 0$  es exacta por lo que debe cumplirse que:

$$[F(x) \cdot M(x, y)]_y = [F(x) \cdot N(x, y)]_x \quad \Leftrightarrow$$

$$F(x) \cdot M_y(x, y) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot N(x, y) + F(x) \cdot N_x(x, y) \quad \Leftrightarrow$$

$$F(x) \cdot [M_y(x, y) - N_x(x, y)] = \frac{dF(x)}{dx} \cdot N(x, y) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} dx = \frac{dF(x)}{F(x)}$$

❖ Si en esta última igualdad, el cociente de la izquierda es una función que depende únicamente de  $x$ , es decir, si  $\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = h(x)$ , entonces es posible

determinar  $F(x)$ . En tal caso, si:  $h(x) dx = \frac{dF(x)}{F(x)} \Rightarrow$

$$\int h(x) dx = \int \frac{dF(x)}{F(x)} \Rightarrow \int h(x) dx = \ln|F(x)| \Rightarrow F(x) = e^{\int h(x) dx}$$

**RESUMIENDO:**

$$\text{Sí } h(x) = \frac{M_y - N_x}{N}, \text{ entonces el factor integrante es } F(x) = e^{\int h(x) dx}$$

**Ejemplo 4:** Resuelva la ecuación:  $(y^3 + 2e^x y) dx + (e^x + 3y^2) dy = 0$  (1)

**Solución:** Para este caso se tiene que:

$$\triangleright M(x, y) = y^3 + 2e^x y \quad y \quad N(x, y) = e^x + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad M_y(x, y) = 3y^2 + 2e^x \quad y$$

$$N_x(x, y) = e^x \quad \Rightarrow \quad M_y(x, y) \neq N_x(x, y) \quad \Rightarrow \quad \text{la ecuación NO es exacta}$$

$$\triangleright \text{Puesto que: } h(x) = \frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3y^2 + 2e^x - e^x}{e^x + 3y^2} = \frac{3y^2 + e^x}{e^x + 3y^2} = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = e^{\int h(x) dx} = e^{\int 1 dx} = e^x \quad \text{es el *factor integrante* buscado}$$

$\triangleright$  Multiplicando (1) por este factor integrante, se obtiene la ecuación:

$$(e^x y^3 + 2e^{2x} y) dx + (e^{2x} + 3e^x y^2) dy = 0 \quad (2)$$

$$\triangleright \text{De (2) se tiene que: } M(x, y) = e^x y^3 + 2e^{2x} y \quad y \quad N(x, y) = e^{2x} + 3e^x y^2$$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = 3e^x y^2 + 2e^{2x} = N_x(x, y) \quad \Rightarrow \quad \text{la ecuación *es exacta*}$$

$$\triangleright \text{Luego, sea } U(x, y) = \int N(x, y) dy + f(x) = \int (e^{2x} + 3e^x y^2) dy + f(x)$$

$$\Rightarrow U(x, y) = e^{2x} y + e^x y^3 + f(x) \quad (3)$$

$$\triangleright \text{Como } U_x(x, y) = M(x, y) \quad \Rightarrow \quad 2e^{2x} y + e^x y^3 + f'(x) = e^x y^3 + 2e^{2x} y$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = K \quad (4)$$

$$\triangleright \text{De (3) y (4)} \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = e^{2x} y + e^x y^3 + K$$

$\triangleright$  Finalmente, la solución general de la ecuación (1) es:  $e^{2x} y + e^x y^3 = C$

**Segundo Caso:**  $F$  depende únicamente de la variable  $y$ ; es decir  $F = F(y)$ .

❖ Siguiendo un procedimiento similar al anterior, en este caso se tiene que  $F(y) \cdot M(x, y) dx + F(y) \cdot N(x, y) dy = 0$  es exacta y por lo tanto debe cumplirse que:

$$[F(y) \cdot M(x, y)]_y = [F(y) \cdot N(x, y)]_x \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dF(y)}{dy} \cdot M(x, y) + F(y) \cdot M_y(x, y) = F(y) \cdot N_x(x, y) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dF(y)}{dy} \cdot M(x, y) = F(y) \cdot [N_x(x, y) - M_y(x, y)] \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dF(y)}{F(y)} = \frac{N_x(x, y) - M_y(x, y)}{M(x, y)} dy$$

❖ Por lo tanto, si  $\frac{N_x(x, y) - M_y(x, y)}{M(x, y)} = g(y)$ ; es decir, si el cociente de la derecha corresponde a una función que depende únicamente de  $y$ , entonces se puede determinar  $F(y)$  como sigue. Dado que  $g(y) dy = \frac{dF(y)}{F(y)} \Rightarrow$

$$\int g(y) dy = \int \frac{dF(y)}{F(y)} \Rightarrow \int g(y) dy = \ln |F(y)| \Rightarrow F(y) = e^{\int g(y) dy}$$

### RESUMIENDO:

$$\text{Sí } g(y) = \frac{N_x - M_y}{M}, \text{ entonces el factor integrante es } F(y) = e^{\int g(y) dy}$$

**Ejemplo 5:** Resuelva la ecuación:  $(y^2 \cos x - y) dx + (x + y^2) dy = 0$  (1)

**Solución:** Para este caso se tiene que:

$$\triangleright M(x, y) = y^2 \cos x - y \quad y \quad N(x, y) = x + y^2 \Rightarrow M_y(x, y) = 2y \cos x - 1$$

$$y \quad N_x(x, y) = 1 \Rightarrow M_y(x, y) \neq N_x(x, y) \Rightarrow \text{la ecuación NO es exacta}$$

$$\triangleright \text{Como: } g(y) = \frac{N_x(x, y) - M_y(x, y)}{M(x, y)} = \frac{2 - 2y \cos x}{y^2 \cos x - y} = \frac{-2(y \cos x - 1)}{y(y \cos x - 1)} = \frac{-2}{y}$$

$$\text{Así, el factor integrante es: } F(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2}$$

➤ Multiplicando (1) por este factor integrante, se obtiene la ecuación:

$$(\cos x - y^{-1}) dx + (x y^{-2} + 1) dy = 0 \quad (2)$$

➤ De (2) se tiene que:  $M(x, y) = \cos x - y^{-1}$  y  $N(x, y) = x y^{-2} + 1$

$$\Rightarrow M_y(x, y) = y^{-2} = N_x(x, y) \Rightarrow \text{la ecuación es exacta}$$

➤ Luego, sea  $U(x, y) = \int M(x, y) dx + f(y) = \int (\cos x - y^{-1}) dx + f(y)$

$$\Rightarrow U(x, y) = \operatorname{sen} x - x y^{-1} + f(y) \quad (3)$$

➤ Como  $U_y(x, y) = N(x, y) \Rightarrow x y^{-2} + f'(y) = x y^{-2} + 1$

$$\Rightarrow f'(y) = 1 \Rightarrow f(y) = y \quad (4)$$

➤ De (3) y (4)  $\Rightarrow U(x, y) = \operatorname{sen} x - x y^{-1} + y$

➤ Finalmente, la solución general de la ecuación (1) es:  $\operatorname{sen} x - x y^{-1} + y = C \Leftrightarrow$

$$y \operatorname{sen} x - x + y^2 = C y$$

#### Ejercicios 2.4: **Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.**

1.  $y dx + (3 + 3x - y) dy = 0$

6.  $(x - y) dx - dy = 0$  ;  $y(0) = 2$

2.  $(x + y^2) dx - 2y x dy = 0$

7.  $(x + x^3 \operatorname{sen}(2y)) dy - 2y dx = 0$

3.  $y dx + (2x - y e^y) dy = 0$

8.  $(2y \operatorname{sen} x - \cos^3 x) dx + \cos x dy = 0$

4.  $(x^2 y + y^3) dy = x dx$

9.  $(x^2 - y^2) dy = 2x y dx$  ;  $y(2) = 1$

5.  $3y^2 \cot x + \operatorname{sen} x \cos x = 2y y'$

10.  $(3x y + y^2) dx + (x^2 + x y) dy = 0$

11. Resolver la ecuación  $y^2 dx + (x y - x^3) dy = 0$ , buscando un factor integrante de la forma  $x^m y^n$ ,  $m$  y  $n$  constantes apropiadas.

12. Si  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$  y  $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$ , **verifique** que  $\frac{1}{[M(x, y)]^2 + [N(x, y)]^2}$  es un factor

integrante de la ecuación diferencial  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ .

## 2.5 La Ecuación Lineal de Primer Orden

En términos generales, la ecuación diferencial lineal de primer orden se expresa como:  $a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$ , con  $a_0(x) \neq 0$ . Si se divide por el coeficiente de la primera derivada, se tiene que  $y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$ , lo cual nos conduce a la definición siguiente.

**Definición 1:** Una *ecuación diferencial lineal de primer orden* es la que se puede escribir en la forma:  $y' + P(x)y = Q(x)$ ; donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones continuas en la variable  $x$  en una región  $R$ .

### Solución de la ecuación lineal de primer orden

❖ Se puede verificar que la ecuación lineal  $y' + P(x)y = Q(x)$  **no es exacta** y que el factor integrante es:  $F(x) = e^{\int P(x) dx}$ . (Ver *Ejercicio 12*, página 30)

❖ Multiplicando la ecuación  $y' + P(x)y = Q(x)$  por el factor integrante se tiene:

$$y' e^{\int P(x) dx} + e^{\int P(x) dx} P(x)y = Q(x) e^{\int P(x) dx} \quad (*)$$

❖ Se puede observar (o verificar) que el **término de la izquierda** de la ecuación anterior corresponde a la derivada, respecto de  $x$ , del producto de la variable dependiente  $y$  por el factor integrante  $e^{\int P(x) dx}$ . Es decir:

$$\frac{d}{dx} \left[ y e^{\int P(x) dx} \right] = y' e^{\int P(x) dx} + e^{\int P(x) dx} P(x)y \quad (**)$$

❖ De (\*) y (\*\*) obtenemos que:  $\frac{d}{dx} \left[ y e^{\int P(x) dx} \right] = Q(x) e^{\int P(x) dx}$

❖ Integrando respecto de  $x$  se tiene:  $y e^{\int P(x) dx} = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \Rightarrow$

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] \text{ es la } \textit{solución general} \text{ buscada.}$$

**NOTA:** Si  $Q(x) = 0$ ; la fórmula anterior es válida y en este caso se tiene que la solución general de la ecuación  $y' + P(x)y = 0$  es  $y = C e^{-\int P(x) dx}$ .

**Ejemplo 1:** Resuelva la ecuación:  $x dy = (x \operatorname{sen} x - y) dx \quad (x > 0)$

**Solución:**

- Si  $x dy = (x \operatorname{sen} x - y) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x - \frac{y}{x} \Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = \operatorname{sen} x$
- Multiplicando por el factor integrante:  $F(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$   
 $\Rightarrow x y' + y = x \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{d}{dx} [y x] = x \operatorname{sen} x \Rightarrow y x = \int x \operatorname{sen} x dx + C$
- Realizando una integración por partes, obtenemos:  $y x = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$   
 $\Rightarrow y = -\cos x + x^{-1} \operatorname{sen} x + C x^{-1} \quad (\text{solución general})$

**Ejemplo 2:** Resuelva la ecuación lineal en la variable  $x$  dada por:

$$(x + 10 y^2) dy + 2 y dx = 0 \quad (y > 0)$$

**Solución:** La ecuación anterior es equivalente a:

- $\frac{x}{2 y} + 5 y + \frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow x' + \frac{1}{2 y} x = -5 y$
- Multiplicando por el factor integrante:  $F(y) = e^{\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y^{1/2}} = y^{1/2}$   
 $\Rightarrow y^{1/2} x' + \frac{1}{2} y^{-1/2} x = -5 y^{3/2} \Rightarrow \frac{d}{dy} [y^{1/2} x] = -5 y^{3/2}$   
 $\Rightarrow y^{1/2} x = -2 y^{5/2} + C \Rightarrow x = -2 y^2 + C y^{-1/2} \quad (\text{solución general})$

**Ejercicios 2.5:** Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

1.  $y' + 2 y = e^{-x}$
2.  $y' + y \operatorname{ctg} x = \cos x$
3.  $x y' - 4 y = x^6 e^x$
4.  $\cos x y' + y \operatorname{sen} x = 1$
5.  $y^2 x' + x y = 2 y^2 + 1$
6.  $y' = 2 y + x (e^{3x} - e^{2x}) ; y(0) = 2$
7.  $y' - 2 x y = x ; y(0) = 1$
8.  $x y' - 2 y = x^3 \operatorname{sen}(3x)$
9.  $x' - x \cos y = \operatorname{sen}(2y)$
10.  $(1 + x^2) dy + (x y + x^3 + x) dx = 0$
11. Muestre que la ecuación  $y' + P(x) = Q(x) e^{-y}$  puede transformarse en una ecuación lineal con la sustitución  $w = e^y$ . Resuelva  $x y' + 3 = 4 x e^{-y}, y(2) = 0$ .
12. Verifique que la ecuación lineal  $y' + P(x) y = Q(x)$ , expresada en la forma  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , no es exacta y determine su factor integrante.
13. Repita el ejercicio anterior, considerando la ecuación lineal  $x' + P(y) x = Q(y)$ .

## 2.6 La Ecuación de Bernoulli

**Definición 1:** Una ecuación diferencial de Bernoulli es aquella que se puede escribir en la forma:  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ , con  $n \neq 0$  y  $n \neq 1$ , donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones continuas en la variable  $x$  en una región  $R$ .

### Solución de la ecuación de Bernoulli

❖ Multiplicando  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$  por  $y^{-n} \Rightarrow y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

❖ Haciendo el cambio de variable  $z = y^{1-n}$  se tiene que:

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow \frac{z'}{1-n} = y^{-n}y'$$

❖ Realizando las sustituciones correspondientes se obtiene:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x) \Rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

❖ Esta última ecuación es lineal con respecto a la variable  $Z$ , por lo que se resuelve usando el procedimiento visto para este tipo de ecuaciones.

**Ejemplo 1:** Resuelva la ecuación:  $xy' + y = y^2 \ln x$  ( $x > 0$ )

**Solución:**  $xy' + y = y^2 \ln x \Rightarrow xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x$  (1)

➤ Sea  $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y' \Rightarrow -z' = y^{-2}y'$

➤ Sustituyendo en (1) se tiene:  $-xz' + z = \ln x \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$  (2)

➤ Multiplicando (2) por el factor integrante:  $F(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ z \frac{1}{x} \right] = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x} = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx + C \quad (\text{integrando por partes})$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Rightarrow z = \ln x + 1 + Cx$$

➤ Como  $z = y^{-1} \Rightarrow y^{-1} = \ln x + 1 + Cx \Rightarrow y = (\ln x + 1 + Cx)^{-1}$

**NOTA:** Observe que  $y = 0$  es una solución singular de la ecuación propuesta.



**Ejemplo 2:** Resuelva la ecuación de Bernoulli en la variable  $x$  dada por:

$$2y^3x' - y^2x = -3x^{-1} \quad (y > 0)$$

**Solución:** En este caso, la ecuación es equivalente a:  $2y^3xx' - y^2x^2 = -3$  (1)

➤ Sea  $z = x^2 \Rightarrow z' = 2xx'$

➤ Sustituyendo en (1) se tiene:  $y^3z' - y^2z = -3 \Rightarrow z' - \frac{z}{y} = -3y^{-3}$  (2)

➤ Multiplicando (2) por el factor integrante:  $F(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = y^{-1}$

$$\Rightarrow y^{-1}z' - y^{-2}z = -3y^{-4} \Rightarrow \frac{d}{dy} [zy^{-1}] = -3y^{-4}$$

$$\Rightarrow zy^{-1} = -\int 3y^{-4} dy + C \Rightarrow zy^{-1} = y^{-3} + C \Rightarrow z = y^{-2} + Cy$$

➤ Como  $z = x^2 \Rightarrow x^2 = y^{-2} + Cy \Rightarrow x = \pm \sqrt{y^{-2} + Cy}$

**Ejercicios 2.6:** Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

1.  $y' - y = x y^2$

6.  $x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2)$

2.  $3xy' - 2y = x^3 y^{-2}$

7.  $2(x+1)y' + 2y = -(x+1)^3 y^2$

3.  $(1+x^2)y' - xy = x y^2$

8.  $xy(1+xy^2)y' = 1$  ;  $x(0)=1$

4.  $xy' - (1+x)y = x y^2$

9.  $3(1+x^2)dy = 2xy(y^3-1)dx$

5.  $2xy' = y - x^2 y^{-2}$  ;  $y(1)=1$

10.  $y^2 dx + (xy - x^3) dy = 0$

11. Sea la ecuación diferencial:  $xy' + 3 = 4x e^{-y}$  (\*)

a) Verifique que (\*) se transforma en una ecuación de Bernoulli haciendo la sustitución  $u = e^{-y}$ .

b) Con base en el punto a), determine una solución de (\*) para  $y(2)=0$ .

12. Considere la ecuación de Bernoulli dada en su forma más general por:

$$K f'(y) y' + P(x) f(y) = Q(x) \quad , \text{ con } K \text{ constante.}$$

a) Hacer un cambio de variable para convertirla en una ecuación lineal.

b) Usando el resultado del punto anterior, resuelva las ecuaciones diferenciales:

(i)  $y' + 1 = 4 e^{-y} \sin x$     y    (ii)  $x^2 y' - 3x \tan y = 4 \sec y$ .

## 2.7 La Ecuación de Clairaut

**Definición 1:** Una ecuación diferencial de primer orden que se puede escribir en la forma  $y = x y' + f(y')$ , se llama ecuación de Clairaut, asumiendo que  $f(y')$  es una función diferenciable respecto a  $y'$ .

### Solución de la ecuación de Clairaut

La *solución general* de la ecuación de Clairaut está dada por  $y = Cx + f(C)$ ; además, esta ecuación tiene la *solución singular* dada en forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = -f'(v) \\ y = -v f'(v) + f(v) \end{cases}$$

### Demostración

❖ Sea  $y' = v$ . Sustituyendo en la ecuación de Clairaut  $y = x y' + f(y')$ , se tiene que:

$$y = x v + f(v) (*)$$

❖ De (\*), derivando con respecto a  $x$  se tiene:  $y' = v + x v' + f'(v) v' \Rightarrow$

$$v = v + x v' + f'(v) v' \quad (\text{pues } y' = v) \Rightarrow v' [x + f'(v)] = 0$$

❖ De esta última ecuación se desprenden dos casos, a saber:

$$(1) \quad v' = 0 \Rightarrow v = C \Rightarrow y = Cx + f(C) \quad (\text{Solución general})$$

$$(2) \quad x + f'(v) = 0 \Rightarrow x = -f'(v). \quad \text{Sustituyendo en } (*), \text{ se obtiene que } y = -f'(v) v + f(v), \text{ con lo cual se concluye que:}$$

$$\begin{cases} x = -f'(v) \\ y = -f'(v) v + f(v) \end{cases} \quad (\text{Solución singular})$$

**NOTA:** En la mayoría de los casos, esta *solución singular* se puede expresar en términos de las variables  $x$  e  $y$ .

**Ejemplo 1:** Resuelva la ecuación:  $y = x y' + \frac{1}{2 y'}$

**Solución:** Como  $y' = v = C \Rightarrow$  la *solución general* es  $y = Cx + \frac{1}{2C}$

$$\text{➤ Además, } y' = v \Rightarrow f(y') = f(v) = \frac{1}{2v} \Rightarrow f'(v) = \frac{-1}{2v^2};$$

$$\text{por lo que la } \textit{solución singular} \text{ es: } x = \frac{1}{2v^2} \wedge y = \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v} = \frac{1}{v},$$

la cual puede expresarse como  $y^2 = 2x$ .

En el ejemplo 1 se aplicó, en forma directa, el resultado anterior; sin embargo, se recomienda utilizar el procedimiento descrito en la demostración, como se ilustra a continuación.

**Ejemplo 2:** Resuelva la ecuación:  $y = x y' + 1 + 4(y')^2$  (\*)

**Solución:** Sea  $y' = v$ . Al sustituir en (\*) obtenemos que:  $y = x v + 1 + 4v^2$

➤ Derivando con respecto a  $x$  la ecuación anterior, se tiene:  $y' = v + x v' + 8v v'$

➤ Como  $y' = v \Rightarrow v = v + x v' + 8v v' \Rightarrow 0 = v'(x + 8v)$

➤ De esta última ecuación se desprenden dos casos, a saber:

$$(i) \quad v' = 0 \Rightarrow v = C \Rightarrow y = Cx + 1 + 4C^2 \quad (\text{Solución general})$$

$$(ii) \quad x + 8v = 0 \Rightarrow x = -8v \Rightarrow y = -8v^2 + 1 + 4v^2 = 1 - 4v^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8v \\ y = 1 - 4v^2 \end{cases} \quad (\text{Solución singular})$$

➤ Además, la solución singular se puede expresar como:  $16y = 16 - x^2$

**Ejercicios 2.7:** Resuelva las siguientes ecuaciones.

$$1. \quad y = x y' + (y')^{-2}$$

$$5. \quad y = (x + 4) y' + (y')^2$$

$$2. \quad y = x y' + \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$6. \quad x y' - y = e^{y'}$$

$$3. \quad y = x y' - (y')^3$$

$$7. \quad y = x y' + 1 - \ln(y')$$

$$4. \quad y - x y' = \ln(y')$$

$$8. \quad y = x y' + \tan(y')$$

9. Muestre que la ecuación  $y = y' \tan x - (y' \sec x)^2$  puede reducirse a la ecuación de Clairaut con la transformación  $z = \sec x$ . Con base en lo anterior, encuentre la solución general de la ecuación propuesta.

10. Considere la ecuación diferencial  $y = \left( \frac{y'}{\sec^2 x} \right) \tan x + \left( 1 - \frac{y'}{\sec^2 x} \right)^2$

Usando la sustitución  $v = \frac{y'}{\sec^2 x}$  y la técnica de Clairaut, demuestre que las soluciones son:

$$(a) \quad y = C \tan x + (1 - C)^2$$

$$(b) \quad y = \tan x - \frac{\tan^2 x}{4}$$

### 3 ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR QUE PUEDEN RESOLVERSE CON CIERTA FACILIDAD

Existen ecuaciones de orden superior al primero que pueden ser reducidas a ecuaciones de primer orden, las cuales pueden ser resueltas por los métodos ya estudiados.

#### 3.1 Ecuaciones Inmediatamente Integrables

Existen ecuaciones diferenciales que se pueden resolver por integración directa, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 1:** Resolver la ecuación  $y''' = \frac{2}{x^3}$  ; si  $y(1) = y'(1) = 1$  y  $y''(1) = -1$

**Solución:** Dado que  $y''' = \frac{2}{x^3}$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-1}{x^2} + C_1 . \quad \text{Como } y''(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 ; \quad \therefore y'' = \frac{-1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x} + C_2 . \quad \text{Como } y'(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 ; \quad \therefore y' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y = \ln x + C_3 . \quad \text{Como } y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 1 ; \quad \therefore y = \ln x + 1$$

#### 3.2 Ecuaciones de Variable Ausente

En esta sección trataremos el método que se usa para resolver ecuaciones diferenciales de la forma  $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$  , en las cuales:

- NO** aparece la variable dependiente  $y$  ni las derivadas de ésta, hasta la de orden  $k-1$  inclusive; o sea,  $y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}$  . En estos casos se hace el cambio  $y^{(k)} = v$  , y se trata de resolver la ecuación resultante; o bien,
- NO** aparece la variable independiente  $x$  . En estos casos, la sustitución  $y' = v$  , permite reducir el orden de la ecuación en una unidad.

**Ejemplo 1:** Resuelva la ecuación  $x y'' - y' = x$  (Variable Ausente:  $y$ )

**Solución:** Sea  $y' = v \Rightarrow y'' = v'$ . Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$x v' - v = x \Rightarrow v' - \frac{v}{x} = 1$$

La ecuación anterior es lineal en la variable  $v$  y su factor integrante está dado por:

$$F(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = x^{-1} \Rightarrow x^{-1} v' - x^{-2} v = x^{-1} \Rightarrow \frac{d}{dx} [v x^{-1}] = x^{-1}$$

$$\Rightarrow v x^{-1} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Rightarrow v x^{-1} = \ln x + C_1 \Rightarrow v = x \ln x + C_1 x$$

$$\Rightarrow y' = x \ln x + C_1 x \Rightarrow y = \int (x \ln x + C_1 x) dx \quad (\text{integrando por partes})$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 \quad (\text{solución general})$$

**Ejemplo 2:** Resuelva la ecuación  $y'' + 6y(y')^3 = 0$  (Variable Ausente:  $x$ )

**Solución:** Sea  $y' = v \Rightarrow y'' = v'$ . Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$v' + 6y v^3 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -6y v^3 \quad (*)$$

Observe que esta última ecuación involucra tres variables  $(x, y, v)$ ; sin embargo, como

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v \quad (**)$$

Sustituyendo (\*\*) en (\*) se tiene:  $v \frac{dv}{dy} = -6y v^3$  (variables separables)

$$\Rightarrow v^{-2} dv = -6y dy \Rightarrow \int v^{-2} dv = -\int 6y dy \Rightarrow \frac{-1}{v} = -3y^2 + C_1$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{dy} = -3y^2 + C_1 \Rightarrow -\int dx + C_2 = \int (-3y^2 + C_1) dy$$

$$\Rightarrow -x + C_2 = -y^3 + C_1 y \Rightarrow x - y^3 + C_1 y = C_2 \quad (\text{solución general})$$

**Ejercicios 3:** Resuelva las siguientes ecuaciones.

1.  $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$

2.  $x^3 y''' = 1 + \sqrt{x}$

3.  $x y'' - 3 y' = 4x^2$

4.  $x y''' + y'' = 1$

5.  $y'' y' = 1$

6.  $y'' + y = 0$

7.  $y'' + (y')^2 = -1$

8.  $y y'' = y' + (y')^2$

9.  $y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$

10.  $y y'' = (y')^2$  ;  $y(0) = 3$  ,  $y'(0) = 2$

11.  $y y'' = (y')^3$  ;  $y(1) = y'(1) = 1$

12.  $y'' = 2x (y')^2$

(a)  $y(0) = 1/2$  y  $y'(0) = -1/4$

(b)  $y(0) = 1/2$  y  $y'(0) = 1/4$

13. Para cada uno de los siguientes casos, demuestre que la sustitución  $u = y'$  conduce a una **ecuación de Bernoulli** y resuelva así la ecuación respectiva:

(a)  $x y'' = y' + (y')^3$

(b)  $x y'' = y' + x (y')^2$

14. Considere el problema de valores iniciales:  $2y y'' = (y')^2 - y^2$  (\*), donde  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 1$ . Verifique que la sustitución  $u = y'$  transforma a (\*) en una **ecuación no exacta** y resuelva así el problema planteado.

## PRÁCTICA GENERAL

### I. Solución de una ecuación diferencial.

**A.** Sabiendo que las relaciones (o ecuaciones) de la Columna A definen a  $y$  como función implícita de  $x$ , **compruebe** que cada una de éstas **es solución implícita** de la correspondiente ecuación diferencial de la Columna B.

#### Columna A

1.  $\sin x + y \ln y = C y$

2.  $C y^2 = x y + C$

3.  $\ln(xy) - y e^y = C$

4.  $(y - C)^2 = C x$

5.  $(1 - x) y^2 = x^3$

#### Columna B

$y' = \frac{y \cos x}{\sin x - y}$

$y' = \frac{y^3 - y}{x y^2 + x}$

$y' = \frac{y}{x y^2 e^y + x y e^y - x}$

$4x(y')^2 + 2x y' = y$

$2x^3 y' = y(y^2 + 3x^2)$

**B.** **Compruebe** que cada una de las expresiones de la Columna A es **solución** de la respectiva ecuación diferencial de la Columna B. (Nota: Usar el Teorema Fundamental del Cálculo)

#### Columna A

1.  $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + C e^x$

2.  $y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

3.  $y = x \int \frac{e^x}{x} dx + C x$

4.  $y = e^{x^2} \int_1^x e^{-t^2} dt$

5.  $y^2 = x \int_0^x e^{t^2} dt$

#### Columna B

$y' - y = e^{x+x^2}$

$x y' = y + x \sin x$

$x y' - y = x e^x$

$y' = 1 + 2x y$

$2x y y' = y^2 + x^2 e^{x^2}$

### II. Encontrar la ecuación diferencial dada su solución.

Sabiendo que las siguientes funciones (relaciones o ecuaciones) corresponden a la **solución general** de una determinada ecuación diferencial, **encuentre** la **ecuación diferencial respectiva**.

1.  $y = A e^{2x} + B e^x + C$

2.  $y = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$

3.  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

4.  $y = A e^{2x} + B e^{-x} + 3$

5.  $y = A x + B x^2$

6.  $y = a x^2 + a^2$

7.  $y = a(x - b)^2$

8.  $C y^2 = x + y$

9.  $y^2 = 4b(2b + x)$

10.  $(x - a)^2 + y^2 = 4$

### III. Resuelva las siguientes ecuaciones:

#### A. Variables Separables

1.  $4x \, dy - y \, dx = x^2 \, dy$

2.  $y' = \ln(x^y)$

3.  $y' = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1$

4.  $y' = \frac{xy + y}{xy + x}$

#### B. Ecuaciones homogéneas

1.  $(xy - 2x^2) \, dy = (5x^2 + 2y^2) \, dx$

2.  $y' = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$

3.  $(x^2 e^{-y/x} + y^2) \, dx = xy \, dy$

4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$

5. Si en la ecuación  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^5 + 3x^2 y^2}{2x^3 y - 2y^3}$  se hace el cambio de variable  $x = u^4$ ,  $y = v^p$ , determine el valor de  $p$  para que la ecuación anterior sea homogénea.

#### C. Ecuaciones exactas

1.  $(ye^x + 5x^4 \ln y) \, dx + (x^5 y^{-1} + e^x) \, dy = 0$

2.  $(e^{x-y} + x) \, dx = (e^{x-y} + y) \, dy$

3.  $\frac{y \, dx - x \, dy}{(x+y)^2} + \frac{1}{y} \, dy = 0$

4.  $(2r \operatorname{sen} t) \, dr + (2t + r^2 \cos t) \, dt = 0$

5.  $y(x^2 + y^2) \, dy + x(y^2 - x^2) \, dx = 0$

6.  $\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) \, dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) \, dy = 0$

7. Determine una función  $M(x, y)$  para que la ecuación  $M(x, y) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0$  sea exacta. Resuelva dicha ecuación.

#### D. Ecuaciones reducibles a exactas por factor integrante

1.  $(\sec x + y \tan x) \, dx + dy = 0$

2.  $(e^{2x} + y - 1) \, dx - dy = 0$

3.  $(xy^2 + y) \, dx - x \, dy = 0$

4.  $(3x^2 y + 2xy + y^3) \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = 0$

5.  $(x + \cos y) \, dx = (2x \operatorname{sen} y) \, dy$

6.  $(x \cos y - \operatorname{sen}^2 y) \, dy = (\operatorname{sen} y) \, dx$ ,  $y(3\pi/2) = -\pi/2$

#### E. Ecuaciones Lineales

1.  $y' + \frac{4}{x} y = 4x$

2.  $(\operatorname{sen} x) y' + (\cos x) y = 0$

3.  $x^2 \frac{dy}{dx} + 3xy = e^x$

4.  $xy' - 3y = x^5$

#### F. Ecuación de Bernoulli

1.  $\frac{dy}{dx} - y = 2y^2 e^x$

2.  $xy' + 2y = -x^{10} y^5$ ,  $y(-1) = 2$

3.  $x \frac{dy}{dx} - y = \frac{x^2}{y^2}$

4.  $y' + y = (xy)^2$



**G. Ecuación de Clairaut**

1.  $y = x y' - 6 \sqrt{y'}$
2.  $y = x y' + 3 + 4(y')^2$
3.  $y = x y' + \cos^2 y'$
4.  $y = x y' - \frac{4}{y'}$

**H. Ecuación de Variable Ausente**

1.  $(x-1)y'' - y' = 0$
2.  $y'' = e^y \cdot y'$
3.  $x y'' + y' = 4x$
4.  $2y y'' - (y')^2 = 1$

**IV. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:**

1. (a) Determine la región del plano  $XY$  de manera que el problema de valor inicial:

$$y' = \frac{1}{y + x^2}, \quad y(x_0) = y_0, \text{ admita solución única.}$$

- (b) Garantiza el Teorema de Existencia Unicidad una solución única para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial? Justifique su respuesta.

- i.  $y' = \frac{1}{y + x^2}, \quad y(-2) = 4$

- ii.  $y' = \frac{1}{y + x^2}, \quad y(-2) = -4$

2. Considere el problema de valor inicial:  $y' = x + \sqrt{xy - 6}, \quad y(x_0) = y_0.$

- a. Determine la región  $R$  del plano  $XY$  para la cual el problema tenga una solución única que pase por el punto  $(x_0, y_0)$  de la región  $R$ .

- b. Para la ecuación diferencial propuesta, verifique si se puede asegurar la existencia y unicidad de una solución para cada uno de los siguientes casos:

- i.  $y(3) = 2$

- ii.  $y(-2) = -5$

3. Considere el problema de valor inicial:  $y' = \sqrt{x-y} + \ln y, \quad y(x_0) = y_0.$

- a. Determine la región  $R$  del plano  $XY$  para la cual el problema tenga una solución única que pase por el punto  $(x_0, y_0)$  de la región  $R$ .

- b. Garantiza el Teorema de Existencia Unicidad una solución única para el caso en que  $y(2) = 2$ ? Justifique su respuesta.

4. Sea  $y' = \sqrt{9 - y^2} \quad (1)$

- a. Determine la región del plano  $XY$  sobre la cual se pueda garantizar que (1) tiene solución única.

- b. Determine la solución general de (1).

- c. Verifique que  $y = 3$  es una solución singular de (1).

5. Sea  $y' = \sqrt{y - \sin x} + \cos x$  (1)
- Determine la región del plano  $XY$  sobre la cual (1) tiene solución única.
  - Mediante un cambio de variable adecuado, determine la solución general de (1).
  - Verifique que  $y = \sin x$  es una solución singular de (1).
6. a. Determine la región en  $IR^2$  donde el problema de valor inicial:  $y' = \sqrt[3]{y-4}$ , con  $y(x_0) = y_0$ , tiene solución única.
- b. Resuelva la ecuación diferencial  $y' = \sqrt[3]{y-4}$ .
- c. Encuentre una solución al problema de valor inicial:  $y' = \sqrt[3]{y-4}$ ,  $y(1) = 5$ .
- d. Justifique por qué  $y = 4$  es una solución singular de  $y' = \sqrt[3]{y-4}$ .
7. Considere la ecuación diferencial:  $x^2 y'' + 2x y' = 1$ ,  $x > 0$
- Obtenga la solución general de la ecuación anterior.
  - Halle la solución particular que satisface las condiciones  $y'(1) = 0$  y  $y(1) = 0$ .

## V. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $2y^3 x dy - (x^4 + y^4) dx = 0$
- $6xy dx + (4y + 9x^2) dy = 0$
- $(2x + 3y) dx + (y - x) dy = 0$
- $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0$
- $(1 - x^2 y) dx + x^2 (y - x) dy = 0$
- $y^3 y'' = 2y'$ ;  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$
- $y' + (\tan x) y = \cos^2 x$ ,  $y(0) = 1$
- $dy = (y - 4x)^2 dx$ . Sug.: hacer  $v = y - 4x$
- $(y \ln y - 2xy) dx + (x + y) dy = 0$
- $(y^2 \cos x) dx + (4 + 5y \sin x) dy = 0$
- $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) y' = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$
- $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}{2xy e^{(x/y)^2}}$
- $xy' + 2y = -y^2 x^4 \sin x$
- $y(1 + 2e^{x/y}) dx + 2e^{x/y} (y - x) dy = 0$
- $y' = \sin^2(y - x)$
- $y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0$
- $y = x y' + \sin(y')$
- $xy' - 3y = x^5 y^{1/3}$
- $(x - 2) y' = y + 2(x - 2)^3$
- $(2xy^3 + y^2) dx = (xy + y^3 \ln y) dy$
- $(x + y) dx + x \ln x dy = 0$
- $y' + y = x \sqrt{y}$
- $y' = \sqrt{x + y}$
- $(y + 1) y'' = (y')^2$
- $(y^2 - y) dx + x dy = 0$
- $y' + \frac{y}{x-2} = 5(x-2) y^{1/2}$
- $y^2 y'' - y' = 0$ ;  $y(0) = y'(0) = 1$
- $y' = 2xy - x$

29.  $y \ln y \, dx + (x - \ln y) \, dy = 0$

31.  $y^2 \, dx + x y \, dy = 0$

30.  $y'' = 2y y' ; y(1) = 0 , y'(1) = 4$

32.  $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x + 3}$

33.  $(-x y \sin x + 2y \cos x) \, dx + 2x \cos x \, dy = 0$ . Factor integrante:  $\mu(x, y) = x y$

34.  $(1 + x^2 y^2) y + (x y - 1)^2 x y' = 0$ . Sugerencia: hacer  $t = x y$

35.  $x \, dx + y \, dy + x(x \, dy - y \, dx) = 0$ . Factor integrante:  $\mu(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

36.  $(2 + 2x^2 y^{1/2}) y \, dx + (x^2 y^{1/2} + 2) x \, dy = 0$ . Sugerencia: hacer  $z = x^2 y^{1/2}$

## VI. Ejercicios varios:

- Considere la ecuación diferencial  $(y^3 + y) \, dx + x(y^2 - 1) \ln x \, dy = 0$  (\*)  
 a. Verifique que (\*) no es exacta.  
 b. Verifique que  $h(x, y) = \frac{1}{x y^2}$  es un factor integrante de (\*).  
 c. Determine la solución general de (\*).
- Resuelva la ecuación  $(2x y) y' + 3y^2 = x$ , haciendo el cambio de variable  $z = x y^2 + 1$ .
- Si  $h(x, y) = x^m y^n$  es un factor integrante de  $(2x^3 y + 2y^4) \, dx - (x^4 + 4x y^3) \, dy = 0$ , determine los valores de  $m$  y  $n$  para que la ecuación dada sea exacta y resuélvala.
- Resolver  $\frac{dy}{dx} = 1 - (x - y)^2$ , con  $y(0) = 1$ . (Sugerencia: hacer  $u = x - y$ )
- Verifique que el cambio de variable  $z = \ln y$  transforma la ecuación diferencial  $y' + P(x) y = Q(x) y \ln y$  en una ecuación lineal de primer orden. Usando este resultado, resuelva la ecuación  $y' - 2x y = \frac{y}{x} \ln y$ .
- Dada la ecuación diferencial  $y^2 \, dx + (1 + x y) \, dy = 0$  (1)  
 a. Verifique que no es exacta  
 b. Verifique que  $\mu(x, y) = e^{xy}$  es un factor integrante para (1)  
 c. Obtenga la solución general de (1)
- Encuentre una función  $h(y)$  tal que la ecuación diferencial  $h(y) \, dx + (x y + x h(y)) \, dy = 0$  sea exacta.
- Resuelva  $4x^2 y'' + 8x y' + y = 0$ , haciendo, inicialmente, el cambio de variable  $y = x^m$ .

9. Mostrar que la ecuación diferencial  $y F(xy) dx + x G(xy) dy = 0$  se convierte en una ecuación de variables separables con la transformación  $u = xy$ . Usando este resultado, resuelva las siguientes ecuaciones:

- $y(1 + 2xy) dx + x(1 - xy) dy = 0$
- $(xy^2 + y) dx + (x + x^2y + x^3y^2) dy = 0$
- $(1 - xy + x^2y^2) dx + (x^3y - x^2) dy = 0$

10. Determine los valores de  $p$  y  $q$  para que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$(5x^{p+2}y^{q+1} - 6x^p y^{q+4}) dx + (4x^{p+3}y^q - 14x^{p+1}y^{q+3}) dy = 0$$

11. Considere la ecuación diferencial  $(\sin x - x \cos x) dx + 2 \left( \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} \sin x \right) dy = 0$  (1)

- Verifique que la ecuación diferencial anterior no es exacta.
- Verifique que  $h(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$  es un factor integrante de (1).
- Determine la solución general de (1).

12. Haciendo la transformación  $w = xy$ , encuentre la solución general de la ecuación diferencial:  $y \cot(xy) dx + [3y^2 + x \cot(xy)] dy = 0$ .

13. Sea la ecuación diferencial:  $\left( \sin x + \frac{3xy}{2} \right) dx + \frac{Q(x, y)}{x} dy = 0$  (\*)

Determine una función  $Q(x, y)$  sabiendo que la función  $f(x, y) = xy$  es un factor integrante de (\*).

14. Considere la ecuación diferencial:  $y^2 \cos x dx - (1 + 3y \sin x) dy = 0$ . (\*\*)

- Verifique que (\*\*) se transforma en una ecuación lineal de primer orden, haciendo la sustitución:  $w = \sin x$ .
- Resuelva la ecuación obtenida en el punto (a) y escriba la solución general de la ecuación propuesta en (\*\*).

15. Considere la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By^m}{Cx y^{m-1} + D y^{2m-1}}$ , con  $A, B, C$  y  $D$

constantes reales, tales que  $A \neq C$  si  $B = D$  ó  $B \neq D$  si  $A = C$ .

- Verifique que la ecuación anterior se transforma en una ecuación homogénea haciendo el cambio de variable  $z = y^m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .
- Convierta la ecuación obtenida en el punto (a) en una ecuación de variables separables.

## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

### Ejercicios 1.1.1, página 1 (Conceptos Básicos)

1. Variable dependiente:  $z$ . Variable independiente:  $y$ .
2. Variable dependiente:  $y$ . Variable independiente:  $w$ .
3. Variable dependiente:  $y$ . Variable independiente:  $x$ .
4. Variable dependiente:  $y$ . Variable independiente:  $x$ .
5. Variable dependiente:  $z$ . Variables independientes:  $x \wedge y$ .
6. Variable dependiente:  $w$ . Variables independientes:  $x \wedge y$ .

### Ejercicios 1.1.2, página 2 (Conceptos Básicos)

1. El coeficiente de  $y'$  NO es función de  $x$ .
2. El grado de  $y'$  y de  $y$  son diferentes de uno.
3. Los coeficientes de  $y'' \wedge y'$  NO son funciones de  $x$ .
4. La función  $e^{xy}$  depende de  $x \wedge y$ .

### Ejercicios 1.2, página 4 (Solución de una Ecuación Diferencial)

1. Sí.
2. Todas las funciones indicadas son soluciones de la ecuación diferencial. Además, la función  $x=0$  es también otra solución.
3. Sí.
4. Sí. En los intervalos:  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 1[$ ,  $]1, +\infty[$
5. (a) y (b) Sí
6. Sí.
11. (a)  $y = e^{2x/3}$ ; (b)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-4x}$ ; (c)  $y = e^x$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $y = e^{3x}$

### Ejercicios 1.4, página 7 (Ecuación Diferencial de su Solución General)

1.  $y'' - y = 4x$
2.  $3xy' - 3y = x^2 y''$
3.  $y'' + 2y' + y = 4 \cos x$
4.  $(\ln x - 1)y = y'x \ln x$
5.  $y'' + 2y' + y = 6 \cos(3x) - 8 \sin(3x)$
6.  $y'(x^2 - 1) = xy$
7.  $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$
8.  $y' = 1 + (y - x) \cot x$

### Ejercicios 1.5, página 9 (Problemas de Valor Inicial y de Frontera)

1.  $y = x^3 - 4$
2. (a)  $y = 5x - 3x^2 - 2$ ; (b)  $y = -2e^{-2x} + 2$
3. (a)  $x(t) = 5t^2 - t^4 - 4$ ; (b)  $x(t) = 5t^2 - t^4 - 6t + 3$

4.  $y^2 - xy = 2$
5. (a)  $y = \frac{\text{sen}(2x)}{2}$
- (b)  $y = \frac{2\text{sen}(2x)}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2\cos(2x)}{\sqrt{3} - 1} \quad (A = -B)$
- (c)  $y = \frac{\text{sen}(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \quad (A = -B)$
- (d)  $y = \cos(2x) + 2\text{sen}(2x)$
- (e)  $y = \cos(2x) - \text{sen}(2x) \quad (A = -B)$

### **Ejercicios 1.6, página 11 (Teorema de Existencia y Unicidad)**

**NOTA:** Para cada caso, se indica la región  $R$  del plano real donde se puede garantizar que la ecuación diferencial admite solución única.

1.  $R = \mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \}$
- (a) Para  $y(0) = 1$ , SÍ existe solución única.
- (b) Para  $y(0) = 0$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga al punto  $(0,0)$ .
2.  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$
- (a) Para  $y(0) = 1$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga al punto  $(0,1)$ .
- (b) Para  $y(1) = 0$ , SÍ existe solución única.
3.  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 2x \}$
- En  $y(1) = 2$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga a los puntos que están sobre la recta  $y = 2x$ ; en particular, para el punto  $(1,2)$ .
4.  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq \pm x \}$
- (a) Para  $y(1) = 2$ , SÍ existe solución única.
- (b) Para  $y(2) = \pm 2$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga a los puntos que están sobre las rectas  $y = x \wedge y = -x$ ; en particular, para los puntos  $(2,2) \wedge (2,-2)$ .

$$5. \quad R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0 \right\}$$

(a) Para  $y(1) = 0$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga a los puntos que están sobre la recta  $y = 0$ ; en particular, para el punto  $(1, 0)$ .

(b) Para  $y(-1) = -1$ , SÍ existe solución única.

$$6. \quad R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \right\}$$

En  $y(-1) = 0$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga a los puntos que están sobre la recta  $y = 0$ ; en particular, para el punto  $(-1, 0)$ .

### **Ejercicios 2.1, página 13 (Ecuación de Variables Separables)**

$$1. \quad xy = 3$$

$$6. \quad 3 \ln |y| + \ln |1 + x^3| = C$$

$$2. \quad 4 \ln(1 + y^2) = x^2 - 1$$

$$7. \quad \arctan \theta = \ln |r| + C$$

$$3. \quad \ln(y) = \csc x - \cot x$$

$$8. \quad y^2 - 2 \ln(1 + e^x) = 1 - \ln 4$$

$$4. \quad y = -\ln |1 - Ce^x|$$

$$9. \quad 3 \ln |1 - 2y| = -2x^3 + C$$

$$5. \quad \sqrt{y} (\sec x + \tan x) = C \quad (*)$$

$$10. \quad y^2 + 2 \ln |y| = \ln(x^2 + 1) + C$$

$$(*) \text{ donde } C = \sqrt{\pi} (\sqrt{2} + 1)/2$$

$$11. \quad x^3 - 3 \cos(xy) = 3C$$

### **Ejercicios 2.2.1.A, página 14 (Función Homogénea)**

1. Homogénea, grado cero.

3. Homogénea, grado dos.

2. **NO** homogénea.

4. Homogénea, grado tres quintos.

### **Ejercicios 2.2.1.B, página 17 (Ecuación Homogénea)**

$$1. \quad x^3 - 3xy^2 = C$$

$$7. \quad 3 \ln |x| = \ln(y^2 + x^2) + \arctan(y/x) + C$$

$$2. \quad x + 3y = Cy^2$$

$$8. \quad \tan(y/x) = \ln |x| + 1$$

$$3. \quad \ln |2x + y| - \ln |y| = 2 \ln |x| + 2C$$

$$9. \quad y^3 = 3x^3 \ln |x|$$

$$4. \quad (2x/y) + \sin(2x/y) = 4 \ln |y| + 4C$$

$$10. \quad (x - y) \ln |x - y| = y + C(x - y)$$

$$5. \quad \sqrt{xy} = x + C$$

$$11. \quad y - 2x \ln |y + x| + x \ln |x| = Cx$$

$$6. \quad y - x \arctan(y/x) = x \ln |x| + Cx$$

$$12. \quad e^{2x/y} = 8 \ln |y| + 2C$$

**Ejercicios 2.2.2, página 18 (Transformación de Variables)**

1.  $6\sqrt{2x+2y} - 4\ln|3\sqrt{2x+3y} + 2| = 9x + C$

2.  $2y^2 = \frac{-1}{2}x^4 + Cx^2$

3.  $y = x^2 \arcsen(Cx)$

6.  $y - 1 = (x + 1) \ln|x + 1| + C(x + 1)$

4.  $3\ln|x + y + 1| = y + 2x + C$

7.  $\ln|x + 1 + \ln y| = x + C$

5.  $xy + 1 = -2(\ln|x| + C)^{-1}$

8.  $\sqrt{xy} = x + C$

9. (a)  $\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$  (ecuación de variables separables)

(b) 1.  $\tan(x - y + 1) = x + C$

3.  $2y + \sin(2x + 2y) = 2x + C$

2.  $\arctan(x - y) = x + C$

4.  $\ln|\sec(2x + y - 1)| = x + C$

10. i. Región:  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > -x\}$

Solución general:  $y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2 - x$ . Solución particular:  $C = 1$ .

Observe que  $y = -x$  es una solución singular.

ii. Región:  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 2x\}$

Sol. general:  $y = 2x - \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$ . Sol. particular:  $C = -2 - 2\sqrt{3}$

Observe que  $y = 2x$  es una solución singular.

11. i. Región:  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x\}$

Solución general:  $y = (2x + C)^{3/2} + x$

 $y = x$  SÍ es solución (satisface la ecuación diferencial). Es una solución singular pues no se puede obtener de la solución general asignando valores específicos al parámetro  $C$ .

ii. Región:  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > -3x\}$

Solución general:  $y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2 - 3x$

 $y = -3x$  SÍ es solución (satisface la ecuación diferencial). Es una solución singular pues no se puede obtener de la solución general asignando valores específicos al parámetro  $C$ .



**NOTA:** En esta parte, se incluye la respuesta a los ejercicios indicados en el “Pie de Página” de esta sección (página 18).

**Ejercicio 5, página 11.**

Problema de valor inicial:  $y' = 3\sqrt{xy}$  ; (a)  $y(1) = 0$  , (b)  $y(-1) = -1$

Región:  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0 \}$

**Primer caso:**  $x > 0 \wedge y > 0$  , (a)  $y(1) = 0$

Solución general:  $y = (x^{3/2} + C)^2$ . Solución particular:  $y = (x^{3/2} - 1)^2$ .

Observe que  $y = 0$  es una solución singular y por tanto SÍ existe solución para  $y(1) = 0$ .

**Segundo caso:**  $x < 0 \wedge y < 0$  , (b)  $y(-1) = -1$

Solución general:  $y = -[(-x)^{3/2} + C]^2$ . Solución particular:  $y = x^3$ .

**Ejercicio 6, página 11.**

Problema de valor inicial:  $y' = 2\sqrt{y}$  ,  $y(-1) = 0$

Región:  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \}$

Solución general:  $y = (x + C)^2$ . Solución particular:  $y = (x + 1)^2$ .

Observe que  $y = 0$  es una solución singular y por tanto SÍ existe solución para  $y(-1) = 0$ .

**Ejercicios 2.3, página 22**

**(Ecuación Exacta)**

1.  $2xy - x^2 + y^2 = C$  (\*)

6.  $\cos(2x) + 2x \tan y = 1 + 2\pi$

2.  $r - r^2 \cos \theta = C$

7.  $(x^2 + y^2)^2 = C$

3.  $xy^2 - ye^x = C$

8.  $x^3 + 3y \ln|x| + 3y^2 = 4/3$

4.  $x^2 - x \sin y = 4$

9.  $x \sin(xy) = C$

5.  $x^2 - 2y \sin x - y^2 = C$

10.  $x^2y + y^2e^{2x} = 1$

11.  $y \left( \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln|x| \right) - 2\ln|y| = C$

12.  $x \sin y - y \cos x + \ln|xy| = C$

13.  $e^{xy} \cos(2x) - 3y + x^2 = C$

(\*) La ecuación diferencial propuesta es homogénea

**Ejercicios 2.4, página 28****(Ecuación no Exacta, Factor Integrante)**

1.  $4x y^3 + 4y^3 - y^4 = C$

3.  $x y^2 - e^y (y^2 - 2y + 2) = C$

2.  $x \ln|x| - y^2 = Cx$

4.  $x^2 + y^2 + 1 = C e^{y^2}$

5.  $y^2 \csc^3 x + \csc x = C$

8.  $y \sec^2 x - x = C$

6.  $e^x (x - y - 1) = -3$

9.  $x^2 + y^2 = 5y$  (\*)

7.  $2y - x^2 \cos(2y) = 2Cx^2$

10.  $2x^3 y + x^2 y^2 = C$  (\*)

11. Factor integrante:  $F(x, y) = x^{-3} y^{-4}$  ( $m = -3$ ,  $n = -4$ )

Solución general:  $2x^2 - 3y = C x^2 y^3$  (\*\*)

(\*) La ecuación diferencial propuesta es homogénea

(\*\*) La ecuación diferencial propuesta es de Bernoulli en "x" (ver ejercicio 10, página 32)

**Ejercicios 2.5, página 30****(Ecuación Lineal de Primer Orden)**

1.  $y = e^{-x} + C e^{-2x}$

7.  $2y = 3e^{x^2} - 1$

2.  $2y = \operatorname{sen} x + C \csc x$

8.  $3y + x^2 \cos(3x) = Cx^2$

3.  $y = e^x (x^5 - x^4) + Cx^4$

9.  $x = -2 \operatorname{sen} y - 2 + C e^{\operatorname{sen} y}$  (\*)

4.  $y = \operatorname{sen} x + C \cos x$

10.  $3y = -(x^2 + 1) + 3C(x^2 + 1)^{-1/2}$

5.  $x = y + y^{-1} \ln|y| + C y^{-1}$  (\*)

11.  $y = \ln|x - 8x^{-3}|$

6.  $2y = 2e^{3x}(x-1) - x^2 e^{2x} + 6e^{2x}$

(\*) La ecuación diferencial propuesta es lineal en la variable "x"

**Ejercicios 2.6, página 32****(Ecuación de Bernoulli)**

1.  $y = (1 - x + C e^{-x})^{-1}$

6.  $x y^{-1} = 1 + C x e^{x^2}$

2.  $y = (x^3 + C x^2)^{1/3}$

7.  $4y^{-1} = (x+1)^3 + 4C(x+1)$

3.  $y^{-1} = -1 + C(1+x^2)^{-1/2}$

8.  $x^{-1} = 2 - y^2 - e^{-y^2/2}$  (\*)

4.  $y = (x^{-1} - 1 + C x^{-1} e^{-x})^{-1}$

9.  $y = [1 + C(1+x^2)]^{-1/3}$

5.  $y^3 = -3x^2 + 4x^{3/2}$

10.  $3x^{-2} = 2y^{-1} + 3C y^2$  (\*)

11. (a) Ec. de Bernoulli:  $\frac{du}{dx} - \frac{3u}{x} = -4u^2$  (b) S. Particular:  $x^3 e^y = x^4 - 8$

12. (b): (i)  $y = \ln|2(\operatorname{sen} x - \cos x) + C e^{-x}|$ ; (ii)  $y = \operatorname{arcsen}(C x^3 - x^{-1})$

(\*) La ecuación diferencial propuesta es de Bernoulli en la variable "x"

**Ejercicios 2.7, página 34 (Ecuación de Clairaut)**

1. SG:  $y = Cx + C^{-2}$ . S. Singular:  $x = 2v^{-3}$ ,  $y = 3v^{-2} \Rightarrow 4y^3 = 27x^2$
2. SG:  $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$   
SS:  $x = \frac{-v}{\sqrt{1 + v^2}}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$
3. SG:  $y = Cx - C^3$ . S. Singular:  $x = 3v^2$ ,  $y = 2v^3 \Rightarrow 27y^2 = 4x^3$
4. SG:  $y = Cx + \ln C$ . SS:  $x = -1/v$ ,  $y = -1 + \ln v \Rightarrow y = -1 - \ln|-x|$
5. SG:  $y = C(x + 4) + C^2$ . SS:  $x = -2v - 4$ ,  $y = -v^2 \Rightarrow 4y = -(x + 4)^2$
6. SG:  $y = Cx - e^C$ . SS:  $x = e^v$ ,  $y = e^v(v - 1) \Rightarrow y = x(\ln x - 1)$
7. SG:  $y = Cx + 1 - \ln C$ . SS:  $x = 1/v$ ,  $y = 2 - \ln v \Rightarrow y = 2 + \ln x$
8. SG:  $y = Cx + \tan C$ . Sol. singular:  $x = -\sec^2 v$ ,  $y = -v \sec^2 v + \tan v$
9. Ecuación de Clairaut (en función de la variable  $Z$ ):  $y = z y' - (y')^2$   
Solución general:  $y = C \sin x - C^2$ . Solución singular:  $4y = \sin^2 x$

**Ejercicios 3, página 37 (Ecuación de Variable Ausente)**

1.  $y = \frac{-1}{2} x \ln^2 x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$
2.  $y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{8}{3} \sqrt{x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$
3.  $y = \frac{-4}{3} x^3 + \frac{1}{4} C_1 x^4 + C_2$
4.  $y = \frac{1}{2} x^2 + C_1 x \ln x + (C_2 - C_1) x + C_3$
5.  $y = \pm \frac{1}{3} (2x + 2C_1)^{3/2} + C_2$
6.  $\ln|\ln y - 1| = x - 2$
7.  $y = \ln|\cos(C_1 - x)| + C_2$
8.  $C_1 y = C_2 e^{C_1 x} + 1$
9.  $y = -\sin(x + C_1) + C_2 x + C_3$
10. Solución general:  $y = C_2 e^{C_1 x}$ . Solución particular:  $y = 3e^{2x/3}$
11. Sol. general:  $y - y \ln y - C_1 y = x - C_2$ . Sol. particular:  $2y - y \ln y = x + 1$
12. (a)  $2y = 1 - \arctan(x/2)$  (b)  $4y - 2 = \ln|2 + x| - \ln|2 - x|$
13. (a)  $y = \pm \sqrt{C_1 - x^2} + C_2$  (b)  $y = C_2 - \ln|C_1 - x^2|$
14. Ec. no exacta:  $(2u y) du + (y^2 - u^2) dy = 0$ . Sol. Particular:  $y = 1 \pm \sin x$ .

## RESPUESTAS DE LA PRÁCTICA GENERAL

### II. Ecuación diferencial dada su solución general, página 38

1.  $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
2.  $y'' + 9y = 0$
3.  $y'' + y' - 2y = 0$
4.  $y'' - y' - 2y = -6$
5.  $x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0$
6.  $(y')^2 + 2x^3 y' - 4x^2 y = 0$
7.  $2y y'' - (y')^2 = 0$
8.  $(2x + y) y' = y$
9.  $2y (y')^2 + 2x y' - y = 0$
10.  $y^2 (y')^2 + y^2 = 4$

### III. Resolución de ecuaciones diferenciales, página 39

#### A. Variables separables

1.  $(4-x)y^4 = Cx$
2.  $\ln|y| = x \ln|x| - x + C$
3.  $\arctan y = \frac{1}{3} x^3 + x + C$
4.  $y e^y = Cx e^x$

#### B. Ecuaciones homogéneas

1.  $\ln \left| (y/x)^2 + 2(y/x) + 5 \right| - 3 \arctan \left( \frac{y+x}{2x} \right) = 2 \ln|x| + C$
2.  $2\sqrt{x/y} = \ln|y| + C$
3.  $(y-x)e^{y/x} = x \ln|x| + Cx$
4.  $\arcsen(y/x) = \ln|x| + C$
5. Es homogénea sii  $p=6$ .

#### C. Ecuaciones exactas

1.  $y e^x + x^5 \ln y = C$
2.  $2e^{x-y} + x^2 - y^2 = C$
3.  $\ln|y| + \frac{x}{x+y} = C$  o bien,
5.  $2x^2 y^2 - x^4 + y^4 = C$
6.  $y \ln x + x \ln y = C$
7. Función:  $M(x, y) = 2xy$

$$\ln|y| - \frac{y}{x+y} = C$$

$$\text{Sol. General: } 3x^2 y - y^3 = C$$

4.  $r^2 \text{sent} + t^2 = C$

#### D. Ecuaciones reducibles a exactas por factor integrante

1.  $\tan x + y \sec x = C$
2.  $e^x - y e^{-x} + e^{-x} = C$
3.  $x^2 y + 2x = 2Cy$
4.  $e^{3x}(3x^2 y^2 + y^3) = C$
5.  $(6 \cos y + 2x)\sqrt{x} = C$
6.  $x \csc y + y = -2\pi$

**E. Ecuaciones lineales**

1.  $y = \frac{2}{3} x^2 + C x^{-4}$

3.  $y = e^x (x^{-2} - x^{-3}) + C x^{-3}$

2.  $y = C \csc x$

4.  $y = \frac{1}{2} x^5 + C x^3$

**F. Ecuación de Bernoulli**

1.  $y = (C e^{-x} - e^x)^{-1}$

3.  $y = (C x^3 - 3x^2)^{1/3}$

2.  $y^{-4} = 2x^{10} - \frac{31}{16} x^8$

4.  $y = (x^2 + 2x + 2 + C e^x)^{-1}$

**G. Ecuación de Clairaut**

1. SG:  $y = Cx - 6\sqrt{C}$ . S. Singular:  $x = \frac{3}{\sqrt{v}}$ ,  $y = -3\sqrt{v} \Rightarrow xy = -9$

2. SG:  $y = Cx + 3 + 4C^2$ . SS:  $x = -8v$ ,  $y = 3 - 4v^2 \Rightarrow 16y + x^2 = 48$

3. SG:  $y = Cx + \cos^2 C$ . SS:  $x = \sin(2v)$ ,  $y = v \sin(2v) + \frac{1 + \cos(2v)}{2}$ ; por lo tanto, se tiene que  $2y = 1 + x \arcsen x + \sqrt{1 - x^2}$ .

4. SG:  $y = Cx - 4C^{-1}$ . SS:  $x = -4/v^2$ ,  $y = -8/v \Rightarrow y^2 + 16x = 0$

**H. Ecuación de variable ausente**

1.  $2y = C_1(x-1)^2 + 2C_2$

3.  $y = x^2 + C_1 \ln x + C_2$

2.  $\ln |1 + C_1 e^{-y}| = -C_1 x - C_1 C_2$

4.  $2\sqrt{C_1 y - 1} = \pm C_1 x + C_1 C_2$

**IV. Problemas de valor inicial, página 40**

1. (a)  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x^2 \}$

(b) Para  $y(-2) = 4$ , SÍ existe solución única. Para  $y(-2) = -4$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga al punto  $(-2, -4)$ .

2. (a)  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 6 \}$

(b) Para  $y(3) = 2$ , NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga al punto  $(3, 2)$ . Para  $y(-2) = -5$ , SÍ existe solución única.

3. (a)  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x \wedge y > 0 \}$

(b) En  $y(2) = 2$  NO se puede garantizar la existencia y/o unicidad de una solución en una región que contenga al punto  $(2, 2)$ .

4. (a)  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -3 < y < 3 \}$   
 (b) Solución General:  $y = 3 \operatorname{sen}(x + C)$   
 (c) La función  $y = 3$  es solución ya que satisface la ecuación diferencial; además, es una solución singular pues no se puede obtener a partir de la solución general respectiva.
5. (a)  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > \operatorname{sen} x \}$   
 (b) Solución General:  $y = \left( \frac{x + C}{2} \right)^2 + \operatorname{sen} x$   
 (c) La función  $y = \operatorname{sen} x$  es solución ya que satisface la ecuación diferencial; además, es una solución singular pues no se puede obtener a partir de la solución general respectiva.
6. (a)  $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 4 \}$   
 (b) Solución General:  $y = 4 + \left[ \frac{2(x + C)}{3} \right]^{3/2}$   
 (c) Solución Particular:  $y = 4 + \left[ \frac{2}{3} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right]^{3/2}$   
 (d) La función  $y = 4$  es solución ya que satisface la ecuación diferencial; además, es una solución singular pues no se puede obtener a partir de la solución general respectiva.
7. (a) Solución General:  $y = \ln x - \frac{C_1}{x} + C_2$   
 (b) Solución Particular:  $y = \ln x + \frac{1}{x} - 1$

## V. Solución de ecuaciones diferenciales, página 41

- |   |  |
|---|--|
| 1. $x^4 - y^4 = Cx^2$   | 9. $x \ln y - x^2 + y = C$                                 |
| 2. $3x^2y^3 + y^4 = C$  | 10. $y^5 \operatorname{sen} x + y^4 = C$                   |
| 3. $4 \arctan\left(\frac{y+x}{x}\right) - \ln  y^2 + 2xy + 2x^2  = C$ | 11. $-\cos(y/x) = \ln x + C$                               |
| 4. $y^2 + x^2 = C(y + x)$   | 12. $1 + e^{(x/y)^2} = Cy$                                 |
| 5. $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$  | 13. $y = x^{-2}(\operatorname{sen} x - x \cos x + C)^{-1}$ |
| 6. $y^3 = 1 - 3x$   | 14. $2y e^{x/y} + x = C$                                   |
| 7. $y = \cos x (1 + \operatorname{sen} x)$                            | 15. $\tan(y - x) = C - x$                                  |
| 8. $y - 4x - 2 = C e^{4x} (y - 4x + 2)$                               | 16. $x e^{2y} - \ln y = C$                                 |

17. SG:  $y = Cx + \operatorname{sen} C$

SS:  $x = \cos v$  ;  $y = v \cos v + \operatorname{sen} v$

Por lo tanto:  $y = x \arccos x + \sqrt{1-x^2}$

18.  $y = \left[ \frac{1}{6} x^6 + Cx^2 \right]^{3/2}$

19.  $y = (x-2)^3 + C(x-2)$

20.  $x^2 + xy^{-1} - y \ln y + y = C$

21.  $x + y \ln x = C$

22.  $y^{1/2} = 2x - 4 + Ce^{-x/2}$

23.  $2\sqrt{x+y} - 2 \ln \left| 1 + \sqrt{x+y} \right| = x + C$

24.  $y = C_2 e^{C_1 x} - 1$

25.  $y = Cx(1-y)$

26.  $y^{1/2} = 2(x-2)^2 + C(x-2)^{-1/2}$

27.  $2y + \ln |2y-1| = 4x + 2$

28.  $y = \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$

29.  $2x \ln y - \ln^2 y = C$

30.  $y = 2 \tan(2x-2)$

31.  $xy = C$

32.  $(y-2x+3)^{2/3} = \frac{2}{3}(x+C)$

33.  $x^2 y^2 \cos x = C$

34.  $2 \ln |x| + C = 2 \ln |xy| + (xy)^{-1} - xy$

35.  $y - 1 = C(x^2 + y^2)^{1/2}$

36.  $xy(x^2 y^{1/2} + 3) = C$

## VI. Ejercicios varios, página 42

1. (c) Solución General:  $(y^2 + 1) \ln x = Cy$

2. Solución General:  $4x^3 y^2 = x^4 + 4C$

3. La ecuación es exacta si  $m=-2$  y  $n=-2$ ; por lo tanto, el factor integrante es  $h(x,y) = x^{-2}y^{-2}$ . La solución general es:  $x^3 - 2y^3 = Cxy$ .

4. SG:  $\frac{1}{y-x} = x + C$ . SP:  $\frac{1}{y-x} = x + 1 \Leftrightarrow 1 = (x+1)(y-x)$ .

5. Ecuación Lineal:  $z' - Q(x)z = -P(x)$ . La solución general de la ecuación propuesta es:  $\ln y = 2x^2 + Cx$ .

6. (c) Solución General:  $y e^{xy} = C$

7. La ecuación es exacta si:  $h(y) = Ce^y - (y+1)$ ; o bien, si  $h(y) = -(y+1)$ .

8. Solución General:  $y = (C_1 + C_2 \ln x) x^{-1/2}$

9. Ecuación de variables separables:  $\frac{G(u) du}{u [G(u) - F(u)]} = \frac{dx}{x}$

(a) Solución General:  $3 \ln |x| + C = \ln |xy| + \frac{1}{xy}$

(b) Solución General:  $\ln |y| - \frac{1}{2x^2y^2} - \frac{1}{xy} = C$

(c) Solución General:  $xy - \frac{x^2y^2}{2} = \ln |x| + C$

10. La ecuación es exacta si  $p=2$  y  $q=3$ .

11. (c) Solución General:  $2xy - y^2 \operatorname{sen} x = Cx$

12. Solución General:  $\ln |\operatorname{sen}(xy)| = C - y^3$

13. La función buscada es:  $Q(x, y) = (\operatorname{sen} x - x \cos x) y^{-1} + x^3$ .

14. (a) Ecuación Lineal:  $y^2 w' - 3yw = 1$

(b) Solución General:  $1 + 4y \operatorname{sen} x = 4Cy^4$

15. (a) Ecuación Homogénea:  $\frac{m [A + B(z/x)]}{C + D(z/x)} = \frac{dz}{dx}$

(b) Ecuación de Variables Separables:  $\frac{(C + Du) du}{m(A + Bu) - u(C + Du)} = \frac{dx}{x}$



## TABLA DE ALGUNAS INTEGRALES BÁSICAS\*

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$2. \int e^{au} du = \frac{e^{au}}{a}, \quad a \neq 0$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

$$4. \int \ln u du = u \ln u - u$$

$$5. \int \operatorname{sen} u du = -\cos u$$

$$6. \int \cos u du = \operatorname{sen} u$$

$$7. \int \tan u du = -\ln|\cos u| = \ln|\sec u|$$

$$8. \int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u|$$

$$9. \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u|$$

$$10. \int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u|$$

$$11. \int \sec u \tan u du = \sec u$$

$$12. \int \csc u \cot u du = -\csc u$$

$$13. \int \operatorname{sen}^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$$

$$14. \int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$$

$$15. \int \tan^2 u du = \tan u - u$$

$$16. \int \cot^2 u du = -\cot u - u$$

$$17. \int \sec^2 u du = \tan u$$

$$18. \int \csc^2 u du = -\cot u$$

$$19. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$20. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$21. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|$$

$$22. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$$

$$23. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|$$

$$24. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$$

$$25. \int e^{au} \operatorname{sen} bu du = \frac{e^{au} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$$

$$26. \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au} (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu)}{a^2 + b^2}$$

\* Se omite la constante de integración.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ayres, Frank Jr. ***Ecuaciones Diferenciales***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1970 y 1991.
- Bronson, Richard. ***Ecuaciones Diferenciales Modernas***. McGraw Hill-Serie Schaum, México, 1976.
- Edwards, C.H. Jr y Penny, D. E. ***Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones***. Editorial Editorial Prentice-Hall, México, 1986.
- Kiseliov, A., Krasnov, M. Y Makarenko, G. ***Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias***. Editorial Mir, Moscú, 1979.
- Marcus, Daniel A. ***Ecuaciones Diferenciales***. Editorial CECSA, México, 1998.
- Spiegel, Murray. ***Ecuaciones Diferenciales Aplicadas***. Editorial Prentice-Hall, México, 1983.
- Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones***. Editorial Grupo Iberoamérica, México, 1997.
- Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, sexta edición, México, 1997.
- Zill, Dennis G. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado***. Editorial Thompson, séptima edición, México, 2002.