MUSIQA VA MATEMATIKA

L. Abdullaev, *O'zbekiston Milliy Universiteti,*
matematika fakulteti talabasi

Maqolada musiqadagi fundamental tushuncha va belgilashlar va musiqa ixlosmandlarini qiziqtiruvchi ba'zi bir savollarga matematik asoslar ko'rsatilgan.

Tayanch so'zlar: *nota, oktava, ohang mayinligi, zarb, klavish.*

In this article, some fundamental musical concepts and mathematical background for some questions that grab attention of majority of music lovers are shown.

Keywords: *note, octave, pitch, beat, key.*

В этой статье показаны некоторые фундаментальные музыкальные концепции и математические основы для некоторых вопросов которые привлекают внимание большинства меломанов..

Ключевые слова: *нота, октава, тон, удар, клавиш.*

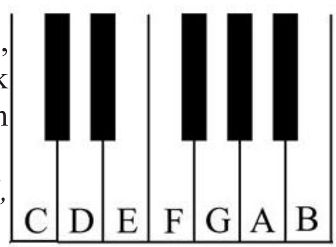
Falsafa fanining asosini tashkil etuvchi bir nechta savollardan biri quyidagicha: "Inson borliqni to'laligicha o'rgana oladimi?". Bu savolning javobi subyektiv, ya'ni barcha o'z dunyoqarashidan kelib chiqqan holda javob beradi. Xususan, mening fikrimcha, borliq cheksiz ko'p tushunchalardan iborat va uni inson to'laligicha o'rgana olmaydi, biroq insoniyatning borliq yoxud, deylik, tabiat haqidagi bilimlari tobora ortib boraveradi. Zero, tabiatning deyarli har bir hodisasi aniq bir matematik-fizik qonuniyatga tayangan holda sodir bo'ladi. Yerning Quyosh atrofida davriy aylanishi, fasllarning davriy almashinishi va boshqalar shular jumlasidandir.

Keling, bu safar siz-u biz hayotimizni undan ayro tasavvur eta olmaydigan bir mo'jizaning tubidagi matematika – musiqaning matematikasi haqida gaplashamiz.

Musiqada matematikaning ilk elementlari musiqa ritmlarida uchrashi tabiiy. Masalan, 1 daqiqada nechta zarb bo‘lishi (bpm) yoki turli davo -miylikka ega notalarning kompozitsiyasi va shu kabi vaziyatlarda, ayniqsa, arifmetik amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish) ko‘p ishlatiladi ([2],[3]).

Bu maqolada musiqa olamida, nafaqat arifmetik amallar, balki matematikaning nisbatan murakkabroq elementlarining ham tadbig‘i bor ekanligi bilan tanishib chiqamiz.

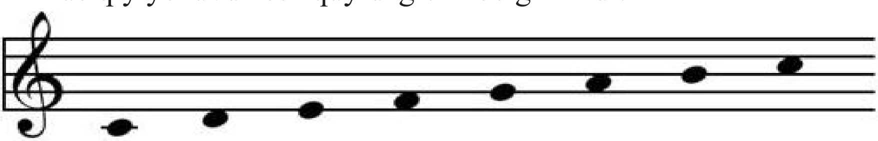
Musiqada quyidagi elementlardan iborat notalar to‘plami mavjudligi



ko‘pchilikka ma’lum. Bular: “Do”, “Re”, “Mi”, “Fa”, “Sol”, “La”, “Si”. Ko‘pchilik g‘arb mamlakatlarida oq klavishlar uchun quyidagicha belgilashdan foydalaniladi:
C = “Do”, D = “Re”, E = “Mi”, F = “Fa”, G = “Sol”, A = “La”, B = “Si”.

Bularni yon tarafda keltirilgan rasmda ham ko‘rishingiz mumkin (7 ta oq va 5 ta qora, jami 12 ta klavishlar).

Musiqiy yozuvda esa quyidagicha belgilanadi:



Nega aynan 12 ta nota borligi borasida tabiiy ravishda savol tug‘iladi. Keling, shu savolga javob izlab ko‘raylik [1].

Tasavvur qiling, sizning qo‘lingizda xuddi gitara yoki skripka asboblarida uchraydigan, ma’lum bir taranglikka va *L* uzunlikka ega tor (ip) bor. Uni chertsangiz bir ohang (nota) eshitasiz. Tabiiy ravishda boshqacha sado chiqarish maqsadida torning uzunligini qisqartirib chertib ko‘rasiz. Agar boshlang‘ich torning *L/2* (teng yarim) qismini kesib tashlab chertsangiz, oldingi notadan faqat mayinligi bilan farq qiladigan mayinroq notani eshitasiz. Bu ikki notalar musiqiy tilda bir "oktava"ga farq qiladi deyiladi, ya'ni agar birinchi notani *C* bilan belgilasak, u holda ikkinchi nota ham *C* bo'ladi va ular asosli ravishda "bir xil notalar" deyiladi.

Endilikda, agar siz boshlang'ich torning *L/3* qismini kesib tashlab chertsangiz, rostdan ham eng avvalgi notadan farq qiladigan yangi notani eshitasiz (chunki endi ularning farqi bir oktava bo'lmaydi). Aynan shu holda, musiqiy tilda aytganda, "beshinchi yuqorilikdagi" ([2] ga qarang) ohang hosil bo'ladi va u taxminan yuqoridagi belgilashga ko'ra *C* va *G* notalar oralig'iga tushadi.

Ba'zi bir yuqoridagidek, kichik tajribalardan so'ng asosiy savolga o'tamiz. Nima uchun aynan 12 ta notali tovushlar qatori ishlatiladi? Siz kerakli moslamalar yordamida boshlang'ich torning chastotasini 1 birlik qilib tanlashingiz mumkin, so'ng oldingidek qayta-qayta torning 1/3 qismini kesish natijasida chastotasi 3^{β} chastotali tebranishli notalar hosil qila boshlaysiz (bu yerda $\beta = \{0,1,2,3,\ldots\}$). Keyingi vazifamiz, nechta qadamdan keyin yana boshlang'ich notadan bir oktavaga farq qiladigan nota hosil bo'lishini hisoblashdan iborat. Bunda biz 1-kichik tajribamizga (takroriy ravishda torni teng ikkiga bo'lganda bir oktavaga farq qiladigan notalar hosil bo'lishini ko'rgan edik) tayangan holda natija [1;2) oraliqqa tushguncha hosil bo'layotgan tebranish chastotalarini 2 ning darajalariga bo'lib boramiz. U holda quyidagi ketma ketlikni hosil qilamiz:

$$\frac{3^0}{2^0},\frac{3^7}{2^{11}},\frac{3^2}{2^3},\frac{3^9}{2^{14}},\frac{3^4}{2^6},\frac{3^{11}}{2^{14}},\frac{3^6}{2^9},\frac{3^1}{2^1},\frac{3^8}{2^{12}},\frac{3^3}{2^4},\frac{3^{10}}{2^{15}},\frac{3^5}{2^7}. \quad (*)$$

Boshlang'ich notadan bir oktavaga farq qiladigan notani topish uchun qachon yuqoridagi ketma ketlik hadlarini to'xtatish kerakligi, qachon 2 ning 0 dan boshqa darajasi 3 ning 0 bo'lmagan darajasiga teng bo'lishini hisoblash bilan barobardir. Ammo, bu imkonsiz ekanligi ravshan.

Chunki, $\frac{\ln 3}{\ln 2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+...}}}}}}$ tenglama butun sonlar-

da yagona $(\alpha;\beta)=(0;0)$ yechimga ega.

Isbotlash uchun teskarisidan faraz qilaylik. Demak, hozircha (0;0) dan farqli butun yechim mavjud deb hisoblaymiz. Tenglamaning ikkala tarafini logarifmlash yordamida quyidagi natijani olamiz:

$\alpha\cdot\ln 2=\beta\cdot\ln 3$ yoki $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\ln 3}{\ln 2}$

Farazimizga ko‘ra chap taraf ratsional son, ammo, o‘ng tarafda irratsional son. Bu esa o‘z-o‘zidan farazimiz xato ekanligini ko‘rsatadi.

3^{β} irratsional bo‘lgani uchun, bu sonni notalar taqsimotida qo‘llash imkonsizdir. Biroq uning taqribiy qiymati bilan ishlash deyarli muammo tug‘dirmaydi. Demak, hozirgi vazifamiz bu sonning taqribiy qiymatini (yoki unga yaqin bo‘lgan ratsional sonni) topishdan iborat.

Irratsional sonlarning aproksimatsiyalari uchun eng yaxshi usul bu kasrlar zanjiridir:

$$x=\alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+....}}}$$

Bu yerda a_i *(i={1,2,3,...}* lar butun sonlar, x esa aproksimatsiyalanishi kerak bo‘lgan son.

Bizning holimizda a_i lar quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

Kasrimizni qancha ko‘proq davom ettirsak, taqribiy qiymat shunchalik aniqroq bo‘ladi. Masalan $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ uchun quyidagicha taxminiy hisoblashlarni amalga oshirish mumkin:

i indeks 2 gacha borganda: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2}.$

i indeks 3 gacha borganda: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\frac{8}{5}.$

i indeks 4 gacha borganda: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{19}{12}.$

i indeks 5 gacha borganda: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}}}=\frac{84}{53}.$

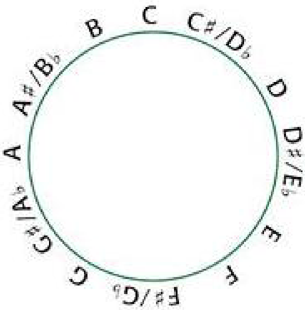
(va hokazo…)

Yuqorida hosil qilingan qiymatlardan ixtiyoriy birini $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ ga taqriban teng deb olib notalar taqsimotini amalga oshirish mumkin. Shuni ta'kidalash joizki, maxrajdagi son bevosita notalar sonini anglatadi. Masalanni olsak 12 qadamdan keyin biz eng boshlang'ich notamizga ohangining mayinligi jihatdan taqriban teng bo'lgan notani hosil qilamiz (ya'ni 1 oktavada 12 ta nota bo'ladi). Yoki o'sish tartibida yozilgan quyidagi ketma-ketlik ham shuni tasdiqlaydi:

$$\frac{3^0}{2^0},\frac{3^7}{2^{11}},\frac{3^2}{2^3},\frac{3^9}{2^{14}},\frac{3^4}{2^6},\frac{3^{11}}{2^{14}},\frac{3^6}{2^9},\frac{3^1}{2^1},\frac{3^8}{2^{12}},\frac{3^3}{2^4},\frac{3^{10}}{2^{15}},\frac{3^5}{2^7}. \quad (*)$$

(*) dagi eng katta handing qiymati taqriban 1,89 ga teng va agar bundan ham kattaroq had qo'shmoqchi bo'lsak u [1;2) oraliqdan chiqib ketadi va ikkinchi oktavaga o'tilganini bildiradi.

Bu esa, nihoyat, 1 oktavada nega aynan 12 ta nota bor degan savolga javob bo'ladi. Eng qizig'i shundaki, aynan shu yuqoridagi hisoblashlardan kelib chiqadiki 53 ta notali oktava bilan ham risoladagidek musiqa yaratish mumkin ekan! Biroq muammo shundaki, bunday oktava musiqachi uchun va musiqiy asboblarni ishlab chiqarishda talay muammolarni tug'diradi. Shuning uchun eng optimal tanlov sifatida oktava 12 ta notadan iborat qilib tanlanadi va ular $C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, B$ [panjara ($\#$) li belgilanish qora klavishlar uchun ishlatiladi] harflari orqali belgilanadi.



Ularni diagramma ko‘rinishida yon tarafda turgan chizma kabi tasvirlash ham mumkin. Ya’ni har 12 ta notadan keyin, yana boshlang‘ich notaga qaytib kelinadi (xuddi soat ko‘rsatkichlariga o‘xshab)

Ko‘rib turganingizdek ba’zida (#)belgisi o‘rniga ♭ belgisi ham chizmada ko‘rsatilganidek ishlatilishi mumkin.

Bu maqolada 1 oktavadagi notalar soni nega aynan 12 ekanligining matematik asosi haqida iloji boricha batafsilroq ma’lumot berishga harakat qildik. Agar bundan siz o‘zingiz uchun biror kerakli va qiziqarli ma’lumot olgan bo‘lsangiz, biz mamnun bo‘lamiz.

Adabiyotlar

1. Clader E. Why twelve tones? The mathematics of musical tuning. Math. Intelligencer 2018.
2. David W. Mathematics and Music. AMS 2009
3. Leon H. The Math Behind the Music. Cambridge University Press 2007