KOSHI TENGSIZLIGINING FIZIK MASALALARGA QO‘LLANILISHI

Ma’lumki, deyarli barcha aniq va tabiiy fanlarda matematik apparatdan samarali foydalanish eng optimal yechimga olib boradi. Xususan, fizika va optimizatsiya masalalarida matematikaning o‘rni katta. Ushbu maqolada, biz matematika fanida eng mashhur tengsizliklardan biri sanalgan Koshi tengsizligi (ba’zi manbalarda o‘rta arifmetik va o‘rta geometrik orasidagi bog‘lanish)ning fizikaning ko‘pgina bo‘limlarida tadbig‘ini o‘rganamiz. Undan oldin esa Koshi tengsizlikning o‘zi bilan yaxshiroq tanishib olaylik.

Teorema: ixtiyoriy nomanfiy $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n \in R}$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\frac{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}{\boldsymbol{n}} \geq \sqrt[n]{\boldsymbol{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Tenglik sharti $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo‘lganda bajariladi.[1] Fizik masalalarda 2 ta son uchun Koshi tengsizligi, ayniqsa, ko‘p ishlatiladi, ya’ni nomanfiy *a*,*b*∈*R* uchun:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Tenglik sharti $a = b$ bo‘lganda bajariladi.

Quyida sizni fizikaning bir qancha bo‘limlarida uchraydigan nisbatan murakkabroq masalalarni Koshi tengsizligi bilan yechish namunalari bilan tanishtirib o‘tamiz.

1. Politsiya xodimi jinoyatchiga yetib olishi uchun *S* masofa qolganda, jinoyatchi sezib qoldi va *a* tezlanish bilan qochishni boshladi. Politsiya xodimi qanday minimal o‘zgarmas tezlik bilan harakatlanganda jinoyatchini quvib yeta oladi?

Yechish: ikkala obyekt uchun harakat tenglamalarini tuzamiz.

$$\begin{cases} x_p = vt \\ x_j = S + \frac{at^2}{2} \end{cases}$$

Politsiya xodimi jinoyatchini quvib yetishi uchun $x_p = x_j$ shart bajarilishi zarur.

$$vt = S + \frac{at^2}{2}$$

bu yerdan *v* uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$v = \frac{S}{t} + \frac{at}{2}$$

v ning eng kichik qiymatini topish uchun yuqoridagi ifodaga Koshi tengsizligini qo‘llash kifoya:

$$v = \frac{S}{t} + \frac{at}{2} \geq 2\sqrt{\frac{S}{t} \cdot \frac{at}{2}} = 2\sqrt{\frac{aS}{2}} = \sqrt{2aS}$$

Javob: politsiya xodimi minimal $\sqrt{2aS}$ tezlik bilan harakatlanganda jinoyatchini quvib yeta oladi.

2. Sotuvchida yelkalari har xil uzunliklarga ega bo‘lgan pallali tarozi va tarozi toshlari bor. Xatoning oldini olish maqsadida, sotuvchi sotilayotgan mahsulotni ikkala pallada ham bir martadan o‘lchab ko‘rdi. Xaridor ikki holda o‘lchangan massalarning o‘rta arifmetigini hisoblab to‘lov qildi. Bunda kim zarar ko‘rdi? [2]

Yechish: mahsulotning asl massasi *M* ga, 1-pallada o‘lchangan massa m_1 ga va 2-pallada o‘lchangan massa m_2 ga teng bo‘lsin. U holda, muvozanat tenglamalarini tuzib quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} Mgl_1 = m_1 g l_2 \\ Mgl_2 = m_2 g l_1 \end{cases}$$

bu sistemadan m_1 va m_2 larni quyidagicha ifodalab olamiz:

$$\begin{cases} m_1 = M\frac{l_1}{l_2} \\ m_2 = M\frac{l_2}{l_1} \end{cases}$$

Demak, m_1 va m_2 larning o‘rta arifmetigi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{M}{2} \cdot (\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1})$$

Koshi tengsizligini quyidagi ko‘rinishda qo‘llaymiz ($l_1 \neq l_2$):

$$\frac{\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}}{2} > \sqrt{\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}} = 1$$

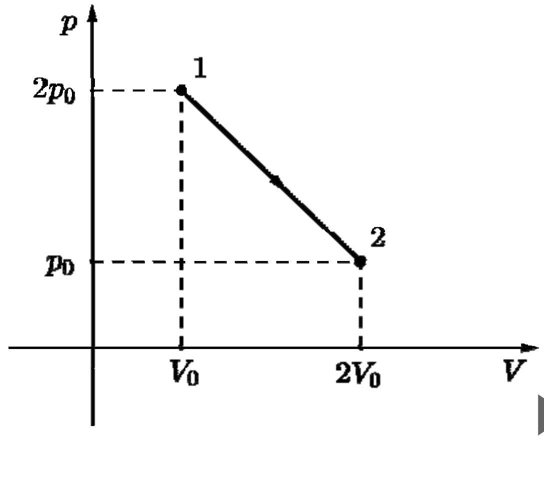
Bundan kelib chiqadiki,

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_1}\right) > M.$$

Demak, xaridor mahsulotning asl miqdoriga nisbatan ko‘proq miqdorga pul to‘lagan va zarar ko‘rgan.

Javob: xaridor zarar ko‘rgan.

3. 1 mol ideal gaz 1-holatdan 2-holatga o‘tdi. Gazning jarayondagi maksimal temperaturasi qanday bo‘ladi? [2]



Yechish: chizmadan ravshanki, 1→2 chiziqli jarayon. Shuning uchun p ning V ga bog'lanish funksiyasini $p = kV + b\ (*)$ ko'rinishda izlaymiz. Shartga ko'ra

$$\begin{cases} 2p_0 = kV_0 + b, (1 - holat) \\ p_0 = 2kV_0 + b, (2 - holat) \end{cases}$$

ushbu chiziqli tenglamalar sistemadan k va b ni topish imkoniga egamiz:

$$k = -\frac{p_0}{V_0}, b = 3p_0$$

Demak, izlanayotgan tenglama quyidagi ko'rinishga ega ekan:

$$p = -\frac{p_0}{V_0}V + 3p_0$$

Tenglamaning ikkala tarafini V ga ko'paytiramiz:

$$pV = \left(-\frac{p_0}{V_0}V + 3p_0\right)V = \frac{p_0}{V_0}(3V_0 - V)V$$

pV=v*RT* (v=1) tenglikdan

$$RT = \frac{p_0}{V_0}(3V_0 - V)V \Leftrightarrow T = \frac{p_0}{RV_0}(3V_0 - V)V$$

Ma'lumki, Koshi tengsizligidan

$$\sqrt{(3V_0 - V)V} \le \frac{(3V_0 - V) + V}{2} = \frac{3V_0}{2}$$

kelib chiqadi. Bundan

$$T = \frac{p_0}{RV_0}(3V_0 - V)V \le \frac{p_0}{RV_0}\left(\frac{3V_0}{2}\right)^2 = \frac{9p_0V_0}{4R}$$

Javob: $\frac{9p_0V_0}{4R}$

4. Elementlar batareyasi R qarshilikka ulanganda I_R tok beradi. Qisqa tutashuv toki I_r ga teng bo'lsa, ushbu batareya berishi mumkin bo'lgan foydali quvvatning maksimal qiymatini toping. [3]

Yechish: elementlar ichki qarshiligi r bo'lsin. U holda to'liq zanjir uchun Om qonuni va qisqa tutashuv toki formulasiga ko'ra

$$\begin{cases} I_R = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \\ I_r = \frac{E}{r} \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Sistemaning 2-tenglamasini birinchisiga bo'lib

$$\frac{R}{r} + 1 = \frac{I_r}{I_R} \Leftrightarrow r = \frac{I_R R}{I_r - I_R}$$

ni olamiz. r ning topilgan qiymatini sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib $\mathcal{E} = \frac{I_r I_R R}{I_r - I_R}$ ni topamz.

Joul-Lens qonuniga ko'ra

$$P = {I_R}^2 R = (\frac{\mathcal{E}}{R+r})^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Koshi tengsizligiga ko'ra esa $R + r \ge 2\sqrt{Rr}$. Bundan

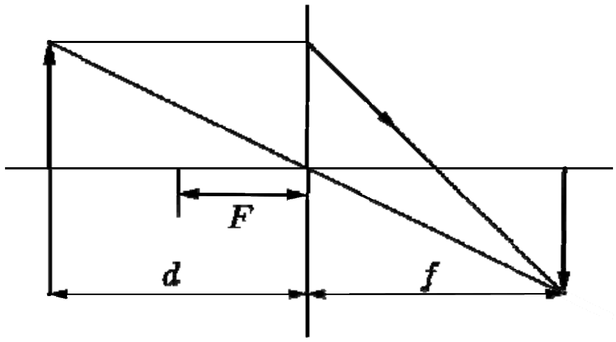
$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} \le \frac{\mathcal{E}^2 R}{\left(2\sqrt{Rr}\right)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{4Rr} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{1}{4r} \cdot (\frac{I_r I_R R}{I_r - I_R})^2$$

Koshi tengsizligida tenglik sharti R=r da bajalishidan xulosa qilish mumkinki, tashqi qarshilik ichki qarshilikka teng bo'lgandagina batareyadan maksimal quvvat ajralib chiqadi. Demak, javobni shu munosabatdan foydalanib soddalashtirsak bo'ladi:

$$\frac{1}{4r} \cdot \left(\frac{I_r I_R R}{I_r - I_R}\right)^2 = \frac{R}{4} \cdot (\frac{I_r I_R}{I_r - I_R})^2$$

Javob: $\frac{R}{4} \cdot (\frac{I_r I_R}{I_r - I_R})^2$

5. Fokusi *F* ga teng bo'lgan yupqa yig'uvchi linza buyumning haqiqiy tasvirini hosil qilmoqda. Buyum va uning tasviri orasidagi minimal masofa qanday? [2]



Yechish: buyumdan linzagacha bo'lgan masofa d va linzadan tasvirgacha bo'lgan masofa f bo'lsin. Buyum va uning tasviri orasidagi masofa uchun $l = d + f$ belgilash olaylik (*). Linza formulasiga ko'ra

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

(*) dan

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{l - d} = \frac{1}{F} \Leftrightarrow \frac{1}{d(l-d)} = \frac{1}{F} \Leftrightarrow Fl = dl - d^2$$

bundan $\Leftrightarrow l = \frac{d^2}{d-F}$ ni olamiz.

$$l = \frac{d^2 - F^2 + F^2}{d - F} = \frac{(d-F)(d+F) + F^2}{d - F} = d + F + \frac{F^2}{d - F}$$
$$= 2F + (d - F) + \frac{F^2}{d - F}$$

l ning minimal qiymatini topish uchun yuqoridagi ifodaning eng kichik qiymatini topish yetarli. Buning uchun Koshi tengsizligini ikkinchi va uchunchi qo'shiluvchilar uchun qo'llaymiz

$$l = 2F + (d - F) + \frac{F^2}{d - F} \ge 2F + 2\sqrt{(d - F) \cdot \frac{F^2}{d - F}}$$
$$= 2F + 2F = 4F$$

Javob: $4F$

Suhrob TELYAYEV,
Laziz ABDULLAYEV