---

tags: 电磁场与电磁波 categories: 学习 mathjax: true title: 电磁场与电磁波学习笔记(7) pdf: true date: 2025-05-20 10:01:24

均匀平面电磁波

等相位面为平面的波称为平面波，等相位面与等幅面重合的平面波被称为均匀平面波。

无耗媒质中的均匀平面电磁波

根据无耗媒质的波动方程

$$
\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0
$$
$$
\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0
$$

其中, $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$,对于无耗媒质而言 , ε, μ 均为实数。

假设电磁波只沿着z方向传播，且电场强度只与z有关与xy无关，则

$$
\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} = 0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} = 0
$$

波动方程简化为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x + k^2 E_x = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_y + k^2 E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_z + k^2 E_z = 0$$

则方程的解为

$$E_x(z) = E_{x0}^{-}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}kz} + E_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

y,z方向同理

将方程的解写成矢量形式，则有

$$E(z) = E_0^{-}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}kz} + E_0^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

其中，$E_0^{-} = a_x E_{x0}^{-} + a_y E_{y0}^{-} + a_z E_{z0}^{-}$ 和 $E_0^{+} = a_x E_{x0}^{+} + a_y E_{y0}^{+} + a_z E_{z0}^{+}$分别为复振幅矢量，或称复振幅。该复振幅矢量为与空间和时间无关的常矢量。

根据

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = 0$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{aA}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{a}$$

可以得到E(z)与az点乘积始终为0，则电场在波传播方向无分量,因此有

$$\begin{aligned} E(z) &= a_x E_x(z) + a_y E_y(z) \\ &= (a_x E_{x0} + a_y E_{y0})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \\ &= E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \end{aligned}$$

接着，由麦克斯韦方程组

$$H(z) = \frac{j}{\omega\mu}\nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}) \times E_0$$

$$= \frac{k}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} a_z \times E_0$$

$$= \frac{1}{\eta}(a_z E_{x0} - a_x E_{y0})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\eta=\frac{\omega\mu}{k}=\frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

为媒质的本征阻抗，对无耗媒质来说，本征阻抗为实数，同理，H在z方向也无分量，从表达式和散度方程均可得到

结论

(1) 在理想介质中, 沿+Z方向传播的均匀平面波, 电场强度 $\vec{E}$ 与磁场强度 $\vec{H}$ 相互垂直, 且同相位。

(2) $\vec{E}$、$\vec{H}$ 位于与传播方向垂直的平面内, $\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{a}_z$ 相互正交, 符合右手螺旋关系。

(3) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 模值差 η 倍。

均匀电磁波的能量与功率

$$w_{\mathrm{eav}}=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(E\cdot D^{*})=\frac{1}{4}\varepsilon\mid E_0\mid^2$$
$$w_{\mathrm{mav}}=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(B\cdot H^{*})=\frac{1}{4}\mu\mid H_0\mid^2$$
$$\varepsilon\mid E_0\mid^2=\mu\mid H_0\mid^2$$

其中

$$\eta=\frac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{H}\right|}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\longrightarrow\quad \varepsilon E_m^2=\mu H_m^2$$

平均波印延矢量

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\mathrm{av}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E\times H^{*}]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E\times(\frac{1}{\eta}n\times E)^{*}]\\&=\frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}[n(E\cdot E^{*})-E^{*}(E\cdot n)]\\&=\frac{1}{2\eta}\mid E\mid^2 n\\&=\frac{1}{2\eta}\mid E_0\mid^2 n\end{aligned}$$

平均坡印廷矢量也可由磁场强度表示

$$S_{\mathrm{av}}=\frac{\eta}{2}\mid H\mid^{2}n=\frac{\eta}{2}\mid H_{0}\mid^{2}n$$

有耗媒质中的均匀平面电磁波

假设在无界空间充满了均匀，线性且各向同性的有耗媒质，则无源区的波动方程中的电磁特性参数含有复数

$$k_{\mathrm{f}}^{2}=\omega^{2}\mu\epsilon_{\mathrm{e}}$$

$$=\omega^{2}\mu(\epsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega})$$

$$=\omega\mu(\omega\epsilon-\mathrm{j}\sigma)$$

$$\nabla^{2}\mathbf{E}+k_{\mathrm{f}}^{2}\mathbf{E}=0$$

$$\nabla^{2}\mathbf{H}+k_{\mathrm{f}}^{2}\mathbf{H}=0$$

这里kf为复数

$$k_{\mathrm{f}}=\beta-\mathrm{j}\alpha$$

$$\beta^{2}-\alpha^{2}-\mathrm{j}2\beta\alpha=\omega\mu(\omega\varepsilon-\mathrm{j}\sigma)$$

$$\beta^{2}-\alpha^{2}=\omega^{2}\mu\varepsilon$$

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\{\frac{1}{2}[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^{2}}-1]\}^{1/2}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\{\frac{1}{2}[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^{2}}+1]\}^{1/2}$$

$$\alpha,\beta\text{ 为正实数,分别称为衰减常数和相位常数}$$

沿着z轴的均匀平面电磁波

根据前面推出的kf有

$$E(z) = E_0 e^{-j(\beta - ja)z}$$
$$= E_0 e^{-az} e^{-j\beta z}$$

一些结论和定义

(1)均匀平面电磁波电场的振幅为$E_0 e^{-az}$,表明电场强度振幅随着z的增大以指数的规律减小，e^{-az}被称为衰减因子，α被称为衰减常数，单位Np/m(奈培/米)。1 Np/m 的意思是电磁波向前传播 1 m 距离其振幅下降为原来的$\frac{1}{e}$,相当于功率下降20 lg e=8.69 dB/m。

(2)当电磁波人射到有耗媒质时，将振幅衰减到初值的$\frac{1}{e}$倍时电磁波所传播的距离δ定义为穿透深度，即

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

(3)指数 e^{-ix}被称为相位因子，β表示电磁波传播单位距离所产生的相移量，被称为相位常数，单位是 rad/m。

(4)电场时域表达式为

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \mathrm{Re}[\,(a_x E_{x0} + a_y E_{y0}\,)\, e^{-az}\, e^{i(at - \beta z)}\,] \\ &= e^{-az}\mathrm{Re}[(a_x \mid E_{x0} \mid e^{i\phi_{x0}} + a_y \mid E_{y0} \mid e^{i\phi_{y0}})\, e^{i(at-\beta z)}] \\ &= e^{-az}\mathrm{Re}[a_x \mid E_{x0} \mid e^{i(\omega t - \beta z + \phi_{x0})} + a_y \mid E_{y0} \mid e^{j(\omega t - \beta z + \phi_{y0})}] \\ &= a_x E_{xm} e^{-az} \cos(\omega t - \beta z + \phi_{x0}) + a_y E_{ym} e^{-az} \cos(\omega t - \beta z + \phi_{y0}) \end{aligned}$$

可以看到相速度和波长的分母从k变成β

按照和上面一样的方法从麦克斯韦方程组推出磁场强度，但是本征阻抗变为复数

$$\eta_f = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_e}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\omega\varepsilon - j\sigma}}$$

形式较为复杂，下面是化简后的结果

$$\eta_f = \mid \eta_f \mid e^{j\theta}$$

$$|\eta_i| = \frac{\sqrt{\mu}}{\left[\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2\right]^{1/4}}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

综上，可以得出以下结论：

(1) $E(z), H(z), a_z$ 三者之间相互垂直，且满足右手螺旋法则。

(2)在同一空间点上，电场强度和磁场强度存在固定的相位差

$$a_z \times \mathbf{E}(z) = \eta_{\mathrm{f}} \mathbf{H}(z) = |\eta_{\mathrm{f}}| \mathbf{H}(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

存在相位差则会出现E和H的相对位置会在某些地方发生调换，则波印延矢量会在有些地方指向波的反方向，出现功率回授的现象。

(3)若相位差为pai/2 则沿传播方向没有功率传输，电磁场在空间来回震荡，能量逐渐变为热量被损耗

(4)电磁波的相速度与频率有关，所以有耗媒质为色散媒质

均匀平面电磁波在良介质和良导体中的传播

这里直接给出结论，其实就是通过通过损耗角正切进行放缩

1.良介质

$$\alpha \approx \frac{\omega\varepsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}, \beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$

$$\eta_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_e}} = \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\sqrt{1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}\right)^{-1} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + \mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$$

2.良导体（重点，必记）

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\eta_{\mathrm{f}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_e}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{-\mathrm{j}\frac{\sigma}{w}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

可以看出良导体复数阻抗的相角为45度，即磁场落后电场相位45度

电磁波的穿透深度为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

均匀平面电磁波的极化

在实际生活中，极化概念十分重要，对于接收天线来说，常根据电磁波的极化选择和安装天线才能使接收效率达到最高。通常以电场强度矢量在某个固定空间点的末端随时间变化而划过的轨迹形状来定义电磁波的极化类型。

取原点分析较为便捷

$$E(0,t) = a_x E_{xm}\cos(\omega t + \phi_{x0}) + a_y E_{ym}\cos(\omega t + \phi_{y0})$$

幅度和相位决定了轨迹的形状

1.线极化

(1)当 $E_x(t) = 0$ 时，电场强度在 y 轴上 $(-E_{\mathrm{ym}}, E_{\mathrm{ym}})$ 之间做往复运动

(2)当 $E_{\mathrm{y}}(t) = 0$时，电场强度在x轴上$(-E_x\mathrm{m}, E_x\mathrm{m})$之间做往复运动

(3) 当 $\phi_{x0} = \phi_{z0}$, 即 $E_x(t), E_y(t)$ 同相时, 合成场的轨迹为一条线段, 与 x 轴夹角正切值即为幅度的比值

(4)当$\phi_{x0} - \phi_{y0} = \pi$,即$E_x(t)$,$E_y(t)$反相时,合成场的轨迹为一条线段,与$x$轴的夹角的正切值即为幅度的比值的负数

2.圆极化

$$(1)\text{当} E_{x\mathrm{m}} = E_{y\mathrm{m}}, \text{相位 } \phi_{x0} - \phi_{y0} = \frac{\pi}{2}\text{时}$$

$$(2)\text{当 } E_{x\mathrm{m}} = E_{y\mathrm{m}}, \text{相位 } \phi_{x0} - \phi_{y0} = -\frac{\pi}{2}\text{ 时}$$

3.椭圆极化

不为圆极化和线极化则为椭圆极化

4.左旋右旋判断

简单总结，视线沿传播方向看x,y平面，相位超前向着相位落后的转，拇指指向波的传播方向，如果符合左手螺旋则左旋，右手螺旋则右旋