---

tags: 电磁场与电磁波 categories: 学习 mathjax: true title: 电磁场与电磁波学习笔记(4) date: 2025-03-28 13:17:53 pdf: true

由于数学公式不能成功渲染，阅读体验较差，在此建议阅读PDF版本

{% pdf https://lazysqrt2.life/pdf/电动力学学习笔记(4).pdf %}

恒等磁场

安培定律

假设真空中存在两个通有恒定电流的回路C1C2,安培通过实验总结出，两回路之间的作用力如下

$$F_{C_1C_2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

式中，$R_{12} = |\boldsymbol{R}_{12}| = |\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1| = [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$; $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m(亨/米),称为真空磁导率。

经过一次微分，我们可以得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{C_1\to 2}=\frac{\mu_0}{4\pi}I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\oint_{C_1}\frac{(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

可以看做整个回路C1对电流元I2的作用力

经过两次微分，我们可以将上式变化为两个单独的电流元之间的相互作用力

$$\mathrm{d}F_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_2\times(I_1\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

值得一提的是，电流回路间的相互作用力满足牛顿第三定律 ,即$F_{C_1C_2}=F_{C_2C_1}$,但两个电流元间的相互作用力一般不满足牛顿第三定律，因为孤立的电流元是不存在的。

毕奥萨伐尔定律

电流或磁铁在其周围空间要激发磁场，而磁场对处于场内的电流或磁铁有力的作用。为此可定义磁感应强度 B 这个物理量来表征磁场特性。我们可以注意到上式子中C1对I2的力中右端积分号内的量与$I_2\mathrm{d}l_2$无关，只与回路C_1的电流元分布及场点位置r_2有关，因此，我们可以从此引入磁感应强度的定义，初步将其定义为

$$\mathrm{d}\,F_2=I_2\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{B}$$

进而有

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{I_1\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

去掉下标后得到，磁感应强度的定义式，即毕奥萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$$

上述分析是对于线电流而说，对于体电流和面电流，只需要将其电流元同样用微元表示后积分即可，以体电流举例

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J(r')\times R}{R^3}\mathrm{d}V'$$

将电流看做电荷定向移动而形成的，我们可以得到Idl = dq/dt * dl = dq*v

所以有

$$F = qv \times B$$

虽然是从道题中的运动电荷推导出来的，但仍具有普遍的意义，F代表电荷以速度v在磁场中所受的力，称为洛伦兹力

恒等磁场的基本方程

上式两端同时对场点坐标(x, y, z)取散度，并注意到式中的体积分是对源点坐标进行的，所以等式右端的散度符号可移人到积分号内

$$\nabla \cdot B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot [\frac{J(r') \times R}{R^3}] \, \mathrm{d}v'$$

$$利用恒等式\nabla \frac{1}{R} = -\frac{R}{R^3} \text{ 和} \nabla \times (\phi A) = \nabla \phi \times A + \phi \nabla \times A, 则有$$

注：上述的第二个恒等式，其中的ϕ是一个标量函数，而A是一个矢量函数

则有

$$J(r') \times \frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla \frac{1}{R} \times J(r') = \nabla \times \frac{J(r')}{R} - \frac{1}{R} \nabla \times J(r')$$

由于J是一个标量函数，所以其旋度必然为0，则上式可化为

$$\nabla \cdot B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot [\nabla \times \frac{J(r')}{R}] \, \mathrm{d}v'$$

又因为旋度场散度必然为0，可得

$$\nabla \cdot B(r) = 0$$

这就是磁场的高斯定律的微分形式。它表明磁场是一种没有通量源的场，不存在与自由电荷相对应的自由磁荷。

成热打铁，我们对上式使用高斯散度定理，将其转化为通量的积分

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}v \equiv 0$$

所以我们可以得到，磁感应强度对于任何闭合曲面的通量为零，所以磁感应线是无头无尾的闭合曲线。

真空中恒等磁场的旋度与安培环路定律

仍然从上述定义式出发，以体电流为例，我们研究磁感应强度的旋度，继承父类的方法，我们从上述推导的中间一步出发。

$$B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\times\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int_{V'}\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'$$

再对两边同时取旋度

$$\nabla\times B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_{V'}\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'$$

虽然已经感觉不妙，但是还是要接着写，由神奇的恒等式$\nabla\times\nabla\times F=\nabla(\nabla\cdot F)-\nabla^2F$我们可以得到

$$\nabla\times B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\nabla\cdot\int_{V'}\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'\right)-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\int_{V'}\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'$$

根据矢量恒等式$\nabla\bullet(\phi F)=\nabla\phi\cdot F+\phi\cdot F$,并注意到 $J(r')$ 与∇无关，则

$$\nabla\times B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_{V'}\nabla\frac{1}{R}\cdot J(r')\,\mathrm{d}v'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}J(r')\,\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}v'$$

利用恒等式$\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}$和$\nabla'\cdot(\phi\mathbf{A})=\nabla'\phi\cdot A+\phi\nabla'\cdot A$,上式右端第一项可改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\frac{1}{R}\cdot J(r')\,\mathrm{d}v'&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\frac{1}{R}\cdot J(r')\,\mathrm{d}v'\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot\frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{R}\nabla'\cdot J(r')\,\mathrm{d}v'\end{aligned}$$

到此我们观察靠后的式子，由于磁场是恒定的，所以电流强度应该是稳定的，则对其求散应该为0。

我们再来观察第一项，利用高斯公式，可将其化为面积分 $-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{J(r')}{R}\cdot\mathrm{d}s'$

由于电流只分布在积分区域内，所以闭合曲面S的通量为零，所以我们可以推出上式左边恒等于0。

我们将话题回到上上式

利用恒等式$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(r-r')$以及$\delta$函数的挑选性质，式右端第二项为 $\mu_0J(r)$,故上上式变为

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

这就是真空中环路定律的微分形式。说明磁场是一个有旋场，任一点的磁感应强度的旋度只与该点的电流密度矢量有关。

在此我们贴心的提供了神奇恒等式的证明

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times F) &= \nabla \times \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)^T \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Q \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) R \end{pmatrix} \\
&= \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F
\end{aligned}$$

介质的磁化

介质中的磁场是由自由电流产生的磁场和磁化电流产生的磁场叠加而成的场。在计算磁场时如果考虑了介质的磁化电流，那么介质所占的空间可视为真空。

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\mathrm{m}})$

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\nabla \times \mathbf{M}$

$\nabla \times (\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}) = \mathbf{J}$

定义磁场强度矢量

$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ 其单位为 A/m，则式(4.5.8)变为 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

上式称为介质中安培环路定律的微分形式。同样可以说明介值中任一点的磁场强度的旋度等于该点的自由电流体密度。

将上式两边取面积分，运用斯托克斯公式，可得

$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_s \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{I}$

下面是相关物理量的一些关系

实验指出，除铁磁性物质外，其他线性各向同性介质的M与H间呈线性关系

$$M = X_{\mathrm{m}} H$$

式中，X_{m}称为介质磁化率，是一个无量纲的纯数。

$$B = \mu_0(1 + X_m)H = \mu_0 \mu_r H = \mu H$$

式中

$$\mu_{\mathrm{r}} = (1 + X_{\mathrm{m}})$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$