---

tags: 电磁场与电磁波 categories: 学习 mathjax: true title: 电磁场与电磁波学习笔记(4) date: 2025-03-28 13:17:53

恒等磁场

安培定律

假设真空中存在两个通有恒定电流的回路C1C2,安培通过实验总结出，两回路之间的作用力如下

$$F_{C_1C_2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{I_2\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_2 \times (I_1\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

式中，$R_{12} = |\boldsymbol{R}_{12}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = [(x_2 - x_1)^2+(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m(亨/米),称为真空磁导率。

经过一次微分，我们可以得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{C_{1\to2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \oint_{C_1}\frac{(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

可以看做整个回路C1对电流元I2的作用力

经过两次微分，我们可以将上式变化为两个单独的电流元之间的相互作用力

$$\mathrm{d}F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times (I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

值得一提的是，电流回路间的相互作用力满足牛顿第三定律 ,即$F_{C_1C_2} = F_{c_2C_1}$,但两个电流元间的相互作用力一般不满足牛顿第三定律，因为孤立的电流元是不存在的。

毕奥萨伐尔定律

电流或磁铁在其周围空间要激发磁场，而磁场对处于场内的电流或磁铁有力的作用。为此可定义磁感应强度 B 这个物理量来表征磁场特性。我们可以注意到上式子中C1对I2的力中右端积分号内的量与$I_2\mathrm{d}l_2$无关，只与回路C_1的电流元分布及场点位置r_2有关，因此，我们可以从此引入磁感应强度的定义，初步将其定义为

$$\mathrm{d}\,F_2 = I_2\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}$$

进而有

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{c_1}\frac{I_1\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

去掉下标后得到，磁感应强度的定义式，即毕奥萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3}$$

上述分析是对于线电流而说，对于体电流和面电流，只需要将其电流元同样用微元表示后积分即可，以体电流举例

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J(r') \times R}{R^3}\mathrm{d}V'$$

将电流看做电荷定向移动而形成的，我们可以得到Idl = dq/dt * dl = dq*v

所以有

$$F = qv \times B$$

虽然是从道题中的运动电荷推导出来的，但仍具有普遍的意义，F代表电荷以速度v在磁场中所受的力，称为洛伦兹力

恒等磁场的基本方程

上式两端同时对场点坐标(x, y, z)取散度，并注意到式中的体积分是对源点坐标进行的，所以等式右端的散度符号可移人到积分号内

$$\nabla \cdot B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot [\frac{J(r') \times R}{R^3}] \mathrm{d}v'$$

$$\text{利用恒等式} \nabla \frac{1}{R} = -\frac{R}{R^3} \text{ 和} \nabla \times (\phi A) = \nabla \phi \times A + \phi \nabla \times A, \text{则有}$$

注：上述的第二个恒等式，其中的ϕ是一个标量函数，而A是一个矢量函数

则有

$$J(r') \times \frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla \frac{1}{R} \times J(r') = \nabla \times \frac{J(r')}{R} - \frac{1}{R} \nabla \times J(r')$$

由于J是一个标量函数，所以其旋度必然为0，则上式可化为

$$\nabla \cdot B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \cdot [\nabla \times \frac{J(r')}{R}] \mathrm{d}v'$$

又因为旋度场散度必然为0，可得

$$\nabla \cdot B(r) = 0$$

这就是磁场的高斯定律的微分形式。它表明磁场是一种没有通量源的场，不存在与自由电荷相对应的自由磁荷。

成热打铁，我们对上式使用高斯散度定理，将其转化为通量的积分

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}v \equiv 0$$

所以我们可以得到，磁感应强度对于任何闭合曲面的通量为零，所以磁感应线是无头无尾的闭合曲线。

真空中恒等磁场的旋度与安培环路定律

仍然从上述定义式出发，以体电流为例，我们研究磁感应强度的旋度，继承父类的方法，我们从上述推导的中间一步出发。

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \frac{J(r')}{R} \mathrm{d}v' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{V'} \frac{J(r')}{R} \mathrm{d}v'$$

再对两边同时取旋度

$$\nabla \times B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \nabla \times \int_{V'} \frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'$$

虽然已经感觉不妙，但是还是要接着写，由神奇的恒等式$\nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$我们可以得到

$$\nabla \times B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\nabla \cdot \int_{V'} \frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2 \int_{V'} \frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v'$$

根据矢量恒等式$\nabla \bullet (\phi F) = \nabla\phi \cdot F + \phi \cdot F$,并注意到 $J(r')$ 与∇无关，则

$$\nabla \times B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \int_{V'} \nabla\frac{1}{R} \cdot J(r')\,\mathrm{d}v' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} J(r')\,\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}v'$$

利用恒等式$\nabla\frac{1}{R} = -\nabla'\frac{1}{R}$和$\nabla' \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla'\phi \cdot A + \phi\nabla' \cdot A$,上式右端第一项可改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla\frac{1}{R} \cdot J(r')\,\mathrm{d}v' &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla'\frac{1}{R} \cdot J(r')\,\mathrm{d}v' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla' \cdot \frac{J(r')}{R}\mathrm{d}v' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{1}{R}\nabla' \cdot J(r')\,\mathrm{d}v'\end{aligned}$$

到此我们观察靠后的式子，由于磁场是恒定的，所以电流强度应该是稳定的，则对其求散应该为0。

我们再来观察第一项，利用高斯公式，可将其化为面积分 $-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'} \frac{J(r')}{R} \cdot \mathrm{d}s'$

由于电流只分布在积分区域内，所以闭合曲面S的通量为零，所以我们可以推出上式左边恒等于0。

我们将话题回到上上式

利用恒等式$\nabla^2\frac{1}{R} = -4\pi\delta(r - r')$以及$\delta$函数的挑选性质，式右端第二项为 $\mu_0 J(r)$,故上上式变为

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

这就是真空中环路定律的微分形式。说明磁场是一个有旋场，任一点的磁感应强度的旋度只与该点的电流密度矢量有关。

在此我们贴心的提供了神奇恒等式的证明

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times F) &= \nabla \times \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)' \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) Q \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) R \end{pmatrix} \\
&= \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F
\end{aligned}
$$

介值的磁化