---

tags: 电磁场与电磁波 categories: 学习 mathjax: true title: 电磁场与电磁波学习笔记(6) pdf: true date: 2025-04-09 10:01:24

麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组适用于一切宏观的电磁现象

麦克斯韦方程组的微分形式为

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot D = \rho$$

积分形式为

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_s \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$\oint_c \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_s \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_s \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$\oint_s \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

$$\oint_s \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

除了麦克斯韦方程组和本构方程之外，有时还会用到洛伦兹力方程。将伦兹力方程描述的是在电磁场中运动的电荷，受到来自电场和磁场的作用力为

$$F = Q(E + v \times B)$$

其中，Q为电荷的带电量；$\boldsymbol{v}$为电荷的运动速度。

本构关系

$$D = \varepsilon E$$
$$B = \mu H$$
$$J = \sigma E$$

对于线性均匀各向同性的静止媒质而言，本构方程与稳恒场具有相同的形式（~~从这么多条件就能看出工程上分析现实问题有多么麻烦~~）

时变电磁场的边界条件

对比稳恒场与时变场的积分方程可以看出，散度方程式相同但旋度方程不同，我们可以分别用高斯公式和斯托克斯公式将散度旋度方程与面积分和线积分联系起来，再利用边界面微元的分析来分析边界条件。

先来研究散度方程，因为散度方程可以运用高斯公式与圆柱面的积分联系起来，所以散度方程得到的是法向的边界条件。所以由麦克斯韦方程组，我们可以得到D和B的法向分量。

在边界面取微小圆柱体，则我们可以轻松的得到

$D_1 \cdot n\Delta s - D_2 \cdot n\Delta s + \Delta\phi_D = \rho h\Delta s$

即

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

如果分界面有自由电荷密度，则电位移矢量的法向分量不连续

注意，当分界面有一面为理想导体则有可能存在自由电荷密度，当两种媒质都是良介质的时候，分界面则不存在自由电荷密度。

同样的方法，由于磁场是无源场，所以可以得到磁感应强度的的法向分量连续。

$$n \cdot (B_1 - B_2) = 0$$

接着运用同样的研究方法，用散度方程和斯托克斯公式来研究E和H的切向分量方程

这时只需要在分界面取高趋近于0的长矩形回路即可与散度方程联系起来

$$H_1 \cdot t\Delta l - H_2 \cdot t\Delta l = \lim_{h\to 0} J \cdot \Delta s = \lim_{h\to 0} J \cdot h\Delta lN$$

此时，由于电位移矢量的导数为有限值，而矩形回路的面积趋于0，所以仅需考虑分界面的面电流密度即可

$$n \times (H_1 - H_2) = J_s$$

同理，如果分界面有一面是理想导体，则可能存在面电流密度，如果是两面均为良导体，则不存在面电流密度

而按照 上面的分析方法，对于电场强度E的线积分 由于右侧的磁感应强度B关于时间的导数必然是有限值则E的切向分量在分界面总是连续。

综上，我们只需要熟记麦克斯韦方程组，就可以用高斯公式和斯托克斯公式轻松推出边界关系，注意一定要先用麦克斯韦方程组求出边界关系之后在运用本构关系进行分析，由于两边的电磁相关参数不同，如果在一开始就将本构关系带入麦克斯韦方程组则会求出错误的结论。

常用的边界条件

理想介质与理想介质

对理想介质来说，不导电，故电导率等于零。在分界面上不存在自由面电荷密度和面电流密度矢量，即$J_s = \mathbf{0}$和$\rho_s = 0$,故边界条件可简化为

$$
n \times (E_1 - E_2) = 0
$$
$$
n \times (H_1 - H_2) = 0
$$
$$
n \cdot (D_1 - D_2) = 0
$$
$$
n \cdot (B_1 - B_2) = 0
$$

理想导体与理想介质

理想导体电导率无限大，而体电流密度必然为有限值，所以理想导体内电场处处为0，又由麦克斯韦方程组，如果不考虑恒定磁场，磁感应强度也处处为0，设1为理想介质，2为理想导体

$$
n \times E_1 = 0
$$
$$
n \times H_1 = J_s
$$
$$
n \cdot D_1 = \rho_s
$$
$$
n \cdot B_1 = 0
$$

波动方程

波动方程是由麦克斯韦方程组整理出的，可以得到关于E或H的单个方程

再一次列出麦克斯韦方程组的微分形式

$$
\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
$$
$$
\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}
$$
$$
\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho
$$
$$
\nabla \cdot \mathbf{B} = 0
$$

以电场为例，两边取旋度，带入本构方程将B替换为H

$$
\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})
$$

根据矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}$, 可推出

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=\nabla(\frac{\rho}{\varepsilon})-\nabla^2\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t})$$

进一步整理

$$\nabla^2E-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial J}{\partial t}+\nabla(\frac{\rho}{\varepsilon})$$

将电流密度替换为自由电流可表示为σE与位移电流J'

$$\nabla^2E-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}=\mu\frac{\partial J'}{\partial t}+\nabla(\frac{\rho}{\varepsilon})$$

上式为完整的有源区电场的波动方程

同样的方法可以推导出有源区磁场的波动方程

$$\nabla^2H-\mu\varepsilon\frac{\partial^2H}{\partial t^2}=-\nabla\times J$$

同样将电流密度替换为自由电流可表示为σE与位移电流J'

$$\nabla^2H-\mu\varepsilon\frac{\partial^2H}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}=-\nabla\times J'$$

过于复杂，我们一般研究特殊情况下的波动方程，分别为，非导电媒质即 σ 为0，关心区域为无源区域，即自由电流和电荷密度均为0，则此时位移电流也为0，对于这样的区域，如果是导电媒质

$$\nabla^2E-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}=0$$
$$\nabla^2H-\mu\varepsilon\frac{\partial^2H}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

如果是非导电媒质

$$\nabla^2E-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=0$$
$$\nabla^2H-\mu\varepsilon\frac{\partial^2H}{\partial t^2}=0$$

波印延定理

参照电流连续性方程式

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

可以写出空间点上电磁场的能量守恒关系方程为

$$\nabla \cdot S + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = 0$$

即在空间体积内能量随时间的减少速率等于穿过该体积的闭合曲面向外传播能量的功率，下面从麦克斯韦方程组出发推导波印延定理及波印延矢量的具体表达式

根据矢量恒等式

$$\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$$

将麦克斯韦方程组中的两个旋度方程代人上式，可得

$$\nabla \cdot (E \times H) = -H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} - J \cdot E$$

假设媒质为均匀、线性、各向同性媒质，且电磁参数为σ, ε, μ均不随时间变化。上式等号右边前两项可改写为

$$H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}B \cdot H)$$

$$-----------------------$$

$$E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}E \cdot D)$$

等号右边最后一项的电流密度矢量，假设包含有源项和传导项

$$J \cdot E = (\sigma E + J^{'}) \cdot E = \sigma E^2 + E \cdot J^{'}$$

根据焦耳定律，上式右边第一项表征了在电场作用下有耗媒质在单位体积内的热损耗，第二项为外加源的功率

$$\nabla \cdot (E \times H) = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}B \cdot H + \frac{1}{2}E \cdot D) - \sigma E^2 - E \cdot J^{'}$$

$\frac{1}{2}E \cdot D$ 为电场能量体密度, 记为 w_{e}, 单位为 $\mathrm{J/m^3}$, 即

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}E \cdot D$$

$\frac{1}{2}B \cdot H$ 为磁场能量体密度，记为 w_{m},单位为 $\mathrm{J/m^3}$,即

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} B \cdot H$$

$E \times H$ 为坡印廷矢量，记为 S，单位为 W/m²。

$$S = E \times H$$