---

tags: 电磁场与电磁波 categories: 学习 mathjax: true title: 电磁场与电磁波学习笔记(8) pdf: true date: 2025-06-11 10:01:24

导行电磁波

主要讨论时谐场沿充满均匀无源无耗媒质的均匀导波结构轴向的定向传输问题。

在波导中E和H都必须满足齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0$$
$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0$$

在讨论前有如下假设

(1)导波结构沿$+z$轴方向是均匀的； (2)导波结构由理想导体构成，即$\sigma \to +\infty$; (3)导波结构的内部为理想介质，即$\sigma = 0$且各向同性； (4)导波结构内部区域是无源的，即$\rho = 0, J = 0$; (5)所研究的电磁场为时谐场，即场值随时间做简谐变化。

根据以上假设可知，E 和H的幅值与z无关，可将E和H写成

$$E = E(x, y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_R z}$$
$$H = H(x, y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z}$$

式中，k_g为导行波的波数。

但要注意这里我们认为E和H的幅值与z无关不代表，E,H并没有z方向的分量，而是认为x,y,z三个方向的幅值都只与x,y有关

我们分别研究三个方向的电场磁场，可以得到如下面形式的6个式子

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu\varepsilon - k_\mathrm{g}^2) E_x = 0$$

接下来我们需要求解这样的式子，就可以知道导行波的形式

$$\text{根据} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H} \text{ 与} \nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}, \text{可得各场分量分别满足}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}+\mathrm{j}k_g E_y=-\mathrm{j}\omega\mu H_x$$
$$-\mathrm{j}k_{\mathrm{g}}E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mathrm{j}\omega\mu H_y$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{j}\omega\mu H_z$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial y}+\mathrm{j}k_{\mathrm{g}}H_y=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_x$$
$$-\mathrm{j}k_{\mathrm{g}}H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_y$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z$$

即左边求完散度之后只取一个方向的分量，即为另外一个场在这个方向的分量

在这里我们取对偶的一个式子，将x,y某一方向的分量消去，即可用z方向的两场表示某一场的x,y分量，这样的话我们就可以做到只用求z方向的两场去解出x，y方向的所有分量

求解结果如下

$$E_x=\frac{\mathrm{j}}{\omega^2\mu\varepsilon-k_g^2}(-k_g\frac{\partial E_z}{\partial x}-\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y})$$
$$E_y=\frac{\mathrm{j}}{\omega^2\mu\varepsilon-k_{\mathrm{g}}^2}(-k_{\mathrm{g}}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x})$$
$$H_x==\frac{\mathrm{j}}{\omega^2\mu\varepsilon-k_{\mathrm{g}}^2}(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}-k_{\mathrm{g}}\frac{\partial H_z}{\partial x})$$
$$H_y=\frac{\mathrm{j}}{\omega^2\mu\varepsilon-k_g^2}(-\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}-k_g\frac{\partial H_z}{\partial y})$$

$$\text{记}k_{\mathrm{c}}^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_{\mathrm{g}}^2=k^2-k_{\mathrm{g}}^2$$

综上，对于存在纵向分量的导行波

只要利用边界条件求得下面两式，就可利用上式求得其他分量

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k_c^2E_z=0$$
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+k_c^2H_z=0$$

以上分析表明，导波结构中的导行波可能出现E_z 或H_z 分量。因此通常将导行波分为 四种类型：(1)横电磁波(TEM 波),即电场和磁场均位于垂直于传播方向的平面内，不存在沿传 播方向的纵向分量E_z或H_z, (2) 横电波(TE 波),这种波的纵向磁场分量H_ε不为零，而纵向电场分量E_z为零；

(3)横磁波(TM 波),这种波的纵向电场分量E_z不为零，而纵向磁场分量 H_z为零

(4)一般情况下上述三种类型的导行波均能单独满足场方程和边界条件，但在某些特殊情况下当它们不能单独满足边界条件时，则需要考虑第四种类型：混合波（EH波），这种波的纵向电场分量和纵向磁场分量均不为零，可看作TE波和TM波的叠加。

TEM波的一般性质

解的形式

由于TEM波的纵向场分量为零，即$E_z = H_z = 0$,而E_x, E_y, H_x, H_y不全为零，所以从上式可知,只有当$k_c^2 = k^2 - k_g^2 = 0$时 ,场分量才有非零解。因此只有当

$$k_g = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

时，导波系统中才存在 TEM 波。于是 TEM 波的解的形式为

$$E = E(x, y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z} = (a_x E_x + a_y E_y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z} = (\boldsymbol{a}_x H_x + \boldsymbol{a}_y H_y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z}$$

与均匀平面波的对比

虽然两者都是TEM波，但由于导波结构的存在，场量呈非均匀分布，所以导波结构中的TEM波是非均匀平面波

TEM 波的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

可见，相速度与媒质参数有关，与频率无关。因此，TEM 波在传播过程中不产生色散现象，可以在无限宽的频带内传播复杂波形的信号而不会产生畸变。

$$\text{TEM 波的波阻抗为} Z_{\mathrm{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta$$

TE,TM波的一般性质

解的形式

与TEM波不同的是，TE波和TM波有一个的Z分量不为0，但求解思路相同，还是可以先解出z方向的分量，利用麦克斯韦方程组来解出其余的横向场分量。

$$\begin{gathered}\text{对于} TE\text{波：}\\ E = (a_x E_x + a_y E_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z}\\ H = (a_x H_x + a_y H_y + a_z H_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_g z}\end{gathered}$$

则由上述求解结果

$$E_x = \frac{-\mathrm{j}\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_g^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_g^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$H_x = \frac{-\mathrm{j}k_g}{\omega^2\mu\varepsilon - k_g^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{j}k_g}{\omega^2\mu\varepsilon - k_g^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

TM波同理

传播特性

因为

$$k_{\mathrm{g}}=\sqrt{k^{2}-k_{\mathrm{c}}^{2}}$$

所以可知，如果kc>k则kg为纯虚数，那么相位因子则变为纯虚数，振幅按照指数规律衰减，所以只有当k>kc时，电磁波才能在波导中传播，因此kc可以称为截止波数（临界波数）。

临界波长

$$\lambda_{c}=\frac{2\pi}{k_{c}}$$

与之对应的是导行波长

$$\lambda_{g}=\frac{2\pi}{k_{g}}$$

所以可得

$$k_{\mathrm{g}}=k\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathrm{c}}})^{2}}$$

则可以看出，只有波长小于临界波长的波才能在波导里里传播。同理

$$k_{g}=k\sqrt{1-(\frac{f_{e}}{f})^{2}}$$

只有频率高于临界频率的波才能在波导里传播

$$\text{由}k_{\mathrm{g}}=\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{g}}},k_{\mathrm{e}}=\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{c}}}\text{及}k=\frac{2\pi}{\lambda},\text{还可得}\lambda_{\mathrm{g}}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathrm{c}}})^{2}}}f_{\mathrm{c}}=\frac{k_{\mathrm{c}}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

可得导行波的相速度v_{p}为

$$v_{\mathrm{p}}=\lambda_{g}f=\frac{c}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_{c}})^{2}}}>c$$

说明电磁波在波导中沿z轴的相速度大于其在无界媒质中的相速度，说明波导的轴并不是电磁波能量传输的方向，TE和TM波的相速度都与频率有关，所以TE和TM波均为色散波，这种情况是由波导的边界条件引起的，与损耗媒质中的色散不同。

TE 波的波阻抗为

$$Z_{\mathrm{TE}}=\frac{E_{x}}{H_{y}}=-\frac{E_{y}}{H_{x}}=\frac{\omega\mu}{k_{g}}=\frac{\eta}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_{c}})^{2}}}$$

TM 波的波阻抗为

$$Z_{\mathrm{TM}}=\frac{E_{x}}{H_{y}}=-\frac{E_{y}}{H_{x}}=\frac{k_{g}}{\omega\mu}=\eta\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_{c}})^{2}}$$

导行波沿无耗规则导波系统$+z$方向传输的平均功率为

$$\begin{aligned}S_{sv}&=\mathrm{Re}\left[\int_{S}\frac{1}{2}(E\times H^{*})\cdot\mathrm{d}s\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{S}(E_{t}\times H_{t}^{*})\cdot a_{z}\mathrm{d}s\right]\\&=\frac{1}{2\mid Z_{\mathrm{TE}}\mid}\int_{S}\mid E_{,}\mid^{2}\mathrm{d}s=\frac{\mid Z_{\mathrm{TM}}\mid}{2}\int_{S}\mid H_{,}\mid^{2}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

矩形波导中的导行波

由上述分析可知，矩形波导不能传播TEM波，但能传播TE波和TM波

对于矩形波导中的 TE 波；有$E_z = 0, H_z \neq 0$,可得H_z满足方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$$

这里采用分离变量法求解该偏微分方程。设其解为$H_z(x, y) = X(x)Y(y)$,然后在等式两边同除以

$X(x)Y(y)$,可得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} = -k_{\mathrm{c}}^2$$

左边两项分别为x,y的函数，相加等于常数，可知两项必然分别为常数 （~~这个分离变量法的设，个人感觉有点草率子~~）

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 X(x) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 Y(y) = 0$$

$$X(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x$$
$$Y(y) = C\sin k_y x + D\cos k_y x$$
$$H_z = X(x)Y(y) = (A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\sin k_y y + D\cos k_y y)$$

再由边界条件确定Hz中的常数

边界条件是理想导体壁的切向电场等于零，因此有

$$E_y \mid_{x=0} = 0\,, \quad E_y \mid_{x=a} = 0$$
$$E_x \mid_{y=0} = 0\,, \quad E_x \mid_{y=b} = 0$$

结合Ez等于0，再结合之前麦克斯韦方程组推导的结果

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} \mid_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} \mid_{x=a} = 0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \mid_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} \mid_{y=b} = 0$$

当 $x = 0$时, $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$, 则 $A = 0$, 所以 $H_z = B\cos k_x x(C\sin k_y y + D\cos k_y y)$;

当 $y = 0$ 时, $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$, 则 $C = 0$, 此时 B 不能为零, 所以有 $H_z = BD\cos k_x x\cos k_y y$;

当 $x = a$时, $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$, k_x必须满足

$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

所以有 $H_\varepsilon = H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x\cos k_y y$, 这里 $H_0 = BD$。

当 $y = b$ 时 , $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$, k_y 必须满足

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2,$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_g z}$$

$$E_y = --\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_g z}$$

$$H_x = \frac{jk_g}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_g z}$$

$$H_y = \frac{jk_g}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_s z}$$

这里 $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$。

矩形波导中的TE_{10}波

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\pi}{a}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-jk_z z} \\ E_z = 0 \\ H_x = \frac{jk_z}{k_c^2}\frac{\pi}{a}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-jk_z z} \\ H_y = 0 \\ H_z = H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-jk_z z} \end{cases}$$

式中$k_c = \frac{\pi}{a}$
$k_g = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

TE_{10} 模的截止波长及截止频率分别为

$$\lambda_c = 2a$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

波导波长、相速度及波阻抗分别为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$Z_{\mathrm{TE}_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$