---

tags: 电磁场与电磁波 categories: 学习 mathjax: true title: 电磁场与电磁波学习笔记(5) pdf: true date: 2025-04-02 10:01:24

时变电磁场

法拉第电磁感应定律

老生常谈

当通过任意导体回路的磁通量Φ随时间发生变化时，回路中产生感应电动势的大小等于磁通量Φ随时间的变化率。

$$\mathrm{E_c} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t}$$

式中E为感应电场的强度

我们会用这个公式将磁场与电场联系起来，由定义直接可得导体回路的磁通量Φ可表示为

$$\Phi = \int_S B \cdot \mathrm{d}s$$

所以

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}s$$

以上我们便获得了电磁感应定律的积分形式，按照一贯风格，下面我们要推得微分形式并用∇算子表示

对于只有磁场变化而回路静止的情况，对于右侧的积分来说，只有B是t的函数，则

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s$$

根据斯托克斯公式

$$\int_S (\nabla \times E) \cdot \mathrm{d}s = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s$$

因为在空间中任意曲面S上，上述积分都成立，所以有(我们可以取积分区域内一个面积微元，此时可以看做面积微元直接乘在被积函数上)

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

这就是电磁感应定律的微分形式

至此，可知有两种能够产生电场的源：电荷和时变磁场。电荷产生的电场为保守场，如果令电荷产生的电场为E_Q,则有$\oint_C E_Q \cdot \mathrm{d}l = 0$。时变磁场产生的电场环路积分不为零，因此感应电场不是保守场，为有旋场。一般认为由时变磁场产生的电场没有散度分量，只有旋度分量，故该电场为管形场。

位移电流

从电流的连续性方程引入本节内容

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

稳恒电流的安培环路定律的微分形式为

$$\nabla \times H = J$$

如果我们对上式两边取散度，则得到

$$\nabla \cdot \nabla \times H = \nabla \cdot J = 0$$

发现上式发现了矛盾，根据电荷守恒定律，电荷不能凭空产生或者消失，因此可认为电流连续性方程在时变条件下也是正确的。因此应对稳恒场的安培环路定律进行修正。

我们令等式右侧加上一个电荷变化量，同时引入电位移矢量

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (J + \frac{\partial D}{\partial t}) = 0$$

这样的话我们就能让上述两个方程自洽

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

好了皆大欢喜。

？这公式你相加就加一项，不是不符合安培的实验定律了吗

我们知道在安培环路定律中，实验对象是稳恒电流产生的磁场。在稳态条件下有$J_{\mathrm{d}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$ 和$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$

为了解决更为普遍的情况，我们需要引入位移电流的概念

首先要提出的是，位移电流是一种假想的，或者说是一种数学模型，为的是使我们的理论更加完整更加自洽。从上式的修补我们注意到，位移电流必然与电位移矢量有关，而电位移矢量有两部分组成。

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

位移电流与电荷的定向运动并无关系，它是由电场随时间的变化而引起的，与介质无关，在真空中同样存在。

而位移电流的第二部分呢，由极化强度的变化引起，可称为极化电流，代表了极化电荷的运动。

引入位移电流，可以解决很多电路中不连续的问题，例如电路中电容器的问题。将这类问题转化为位移电流与自由电流相互转换的问题，让一大类问题逻辑更为自洽，理论更加健壮

时变条件电场和磁场的散度方程

散度方程的推到由旋度方程导出。

对上述电场的旋度方程取散度，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot B) = 0$$

所以磁感应强度的散度不随时间变化。则可以取很久之前空间中某处不存在磁场，则$\nabla \cdot B = 0$

散度方程与上述电场的旋度方程本质上只是进行了一次运算，需要注意的是求解释这两个式子相当于是一个条件

同理，对磁场的旋度方程两边求散度，可得

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot (J + \frac{\partial D}{\partial t}) = \nabla \cdot J + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot D) = 0$$

将电流的连续性方程带入，可得$\frac{\partial}{\partial t}(-\rho + \nabla \cdot D) = 0$

与前面的思路一样，我们便得到了$\nabla \cdot D = \rho$

同样，这个方程也与磁场的旋度方程不独立