

2025年全国一卷高考真题

数学试卷解析

1.

【答案】C

【解析】 $(1+5i)i = -5+i$, 虚部为 1, 故选 C.

2.

【答案】C

【解析】 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $C_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, $C_U A$ 元素个数为 5 个, 故选 C.

3.

【答案】D

【解析】 $2b = 2\sqrt{7}a$, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2\sqrt{2}$.

4.

【答案】B

【解析】 $a - \frac{\pi}{3} = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}, a > 0$),

可得 $a = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, 当 $k=0$ 时 $a_{\min} = \frac{\pi}{3}$. 故选 B.

5.

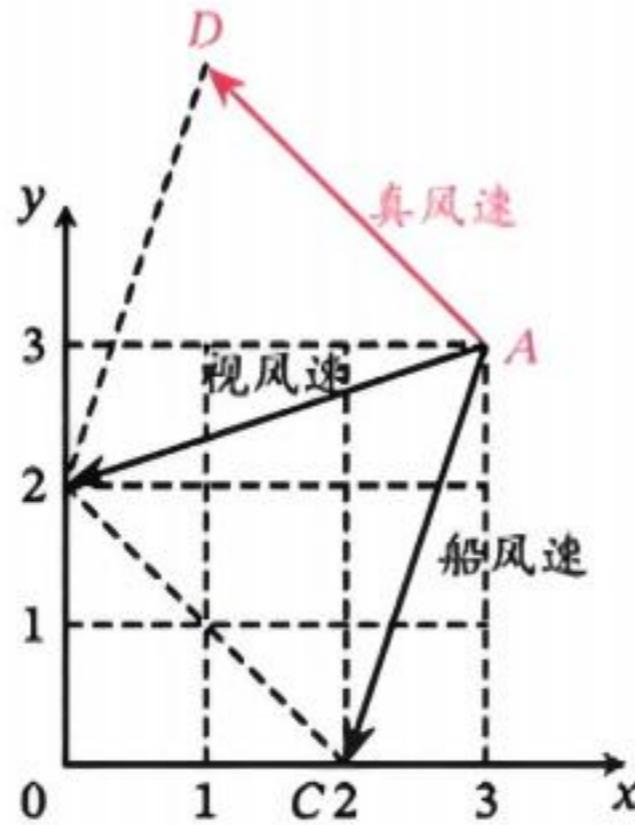
【答案】A

【解析】 $f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{11}{4}\right) = 5 - 2 \times \frac{11}{4} = -\frac{1}{2}$, 故选 A.

6.

【答案】A

【解析】因为船风速与船行驶速度等大反向, 所以船风速为 \overrightarrow{AC} ,

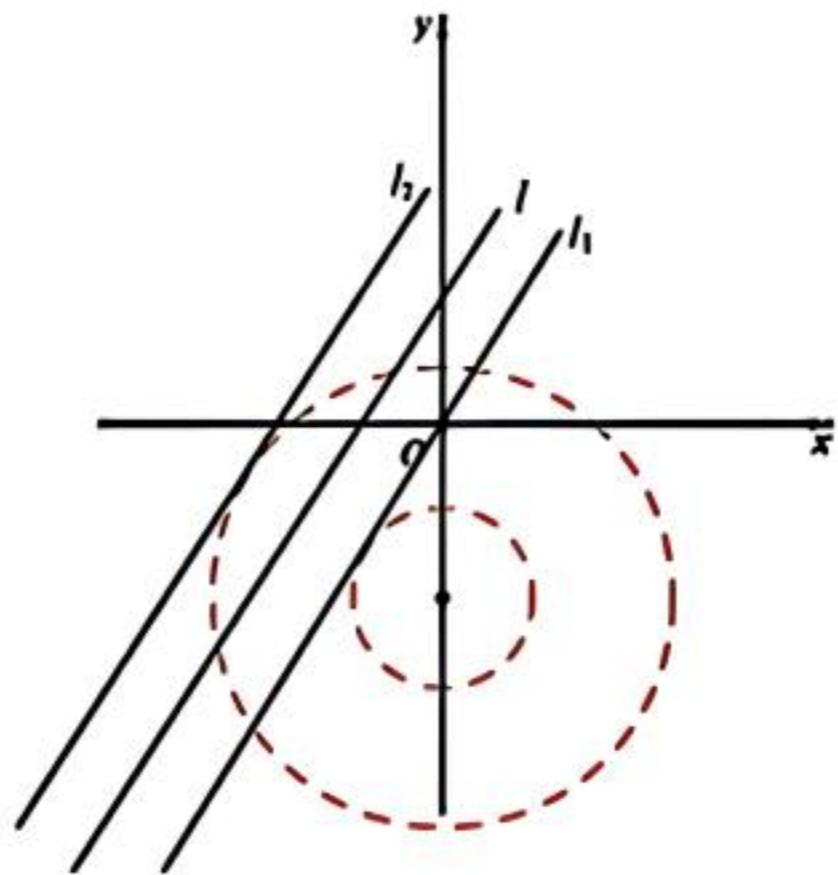


根据平行四边形法则可以得到真风速为向量 \overrightarrow{AD} , $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2}$,
所以风速等级为轻风, 故选 A.

7.

【答案】B

【解析】画出平面直角坐标系，易知平面上到直线 l 距离为 1 的点的轨迹为两条平行线 l_1, l_2 ，



通过计算，得圆心到 l_1 的距离为 1，到 l_2 的距离为 3，若满足两个交点的要求，则 $1 < r < 3$ ，故答案选 B

8.

【答案】B

【解析】 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$ ，由 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y$ ，得 $\log_3 y = \log_2 x - 1 = \log_2 \frac{x}{2}$ 。不妨设 $\log_3 y = \log_2 \frac{x}{2} = m$ ，得 $y = 3^m, x = 2^{m+1}$ ，同理，将 $\log_3 y = m$ 代入 $3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$ 得 $z = 5^{m-2}$ ，即 $x = 2^{m+1}, y = 3^m, z = 5^{m-2}$ ，结合选项考虑：
A 选项，易得当 $m = 1$ 时，符合要求，正确；
C 选项，当 $m = 2$ 时，符合要求，正确；
D 选项，当 $m = 5$ 时，符合要求，正确；

9.

【答案】BD

【解析】略

10.

【答案】ACD

【解析】略

11.

【答案】ACD

【解析】略

12.

【答案】4

【解析】设曲线的切点为 $(x_0, e^{x_0} + x_0 + a)$ ， $y' |_{x=x_0} = e^{x_0} + 1$ ，
则切线方程为 $y = e^{x_0} + 1(x - x_0) + e^{x_0} + x_0 + a$ ，
则 $\begin{cases} e^{x_0} + 1 = 2 \\ e^{x_0} + x_0 + a = 5 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} x_0 = 0 \\ a = 4 \end{cases}$ ，故 $a = 4$ 。

13.

【答案】±2

【解析】由题知， $S_4 = 4$ ， $S_8 = 68$ 。

$S_8 = (1 + q^4)S_4$, 可得 $1 + q^4 = 17$, 则 $q = \pm 2$.

14.

【答案】 $\frac{61}{25}$

【解析】法一：

易知 X 可能取值为 $1, 2, 3$, 且 $P(X=1) = \frac{5}{5^3}$, $P(X=2) = \frac{5 \times 3 \times 4}{5^3}$, $P(X=3) = \frac{C_5^3 A_3^3}{5^3} = \frac{60}{5^3}$,

得 $E(X) = 1 \times \frac{5}{5^3} + 2 \times \frac{5 \times 3 \times 4}{5^3} + 3 \times \frac{60}{5^3} = \frac{305}{125} = \frac{61}{25}$.

法二：

记 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号小球被取到} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号小球未取到} \end{cases}$, 则 $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}$,

则 $E(X) = \sum_{i=1}^5 E(X_i) = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}$.

15.

【答案】(1) 90%; (2) 可以认为有关.

【解析】(1) 由表格信息可知, 检查结果不正常者患该疾病人数为 180 人, 检查结果不正常者为 200 人, 则 $P = \frac{180}{200} = 90\%$

(2) 零假设 H_0 : 超声波检查结果与患该疾病无关.

$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{1000(180 \times 780 - 20 \times 20)^2}{800 \times 200 \times 200 \times 800} = \frac{1000 \times 14^2}{16^2} \approx 765.6 > 10.828$.

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即认为超声波检查结果与患该疾病有关, 此推断犯错的概率不超过 0.001.

16.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析.

【解析】(1) 将 $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 两边同时乘以 $n(n+1)$

可得 $(n+1)a_{n+1} = na_n + 1$.

则 $\{na_n\}$ 是以 3 首项 1 为公差的等差数列.

(2) 此题有争议, 一种是求 $f'(2)$, 一种是求 $f'(-2)$

若为 $f'(2)$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_m \cdot x^{m-1}$$

$$\text{令 } x = 2, f'(2) = a_1 + 2a_2 \cdot 2^1 + 3a_3 \cdot 2^2 + \cdots + m \cdot a_m \cdot 2^{m-1}$$

由(1) 可知 $a_n = n + 2$.

$$\text{故 } f'(2) = 3 + 4 \times 2 + 5 \times 2^2 + \cdots + (m+2) \cdot 2^{m-1} \quad ①$$

$$2f'(2) = 3 \times 2 + 4 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (m+1) \cdot 2^{m-1} + (m+2) \cdot 2^m \quad ②$$

① - ② 可得

$$-f'(2) = 3 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{m-1}) - (m+2) \cdot 2^m$$

$$-f'(2) = 3 + 2^m - 2 - (m+2) \cdot 2^m$$

$$\text{则 } f'(2) = (m+1) \cdot 2^m - 1$$

若为 $f'(-2)$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_m \cdot x^{m-1}$$

令 $x = -2$, $f'(-2) = a_1 + 2a_2 \cdot (-2)^1 + 3a_3 \cdot (-2)^2 + \cdots + m \cdot a_m \cdot (-2)^{m-1}$

由(1)可知 $a_n = n+2$.

$$\text{故 } f'(-2) = 3 + 4 \times (-2) + 5 \times (-2)^2 + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1} \quad ①$$

$$-2f'(-2) = 3 \times (-2) + 4 \times (-2)^2 + \cdots + (m+1) \cdot (-2)^{m-1} + (m+2) \cdot (-2)^m \quad ②$$

① - ② 可得

$$3f'(-2) = 3 + ((-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots + (-2)^{m-1}) - (m+2) \cdot (-2)^m$$

$$3f'(-2) = 3 + \frac{-2 - (-2)^m}{3} - (m+2) \cdot (-2)^m$$

$$\text{则 } f'(-2) = -\frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m + \frac{7}{9}$$

17.

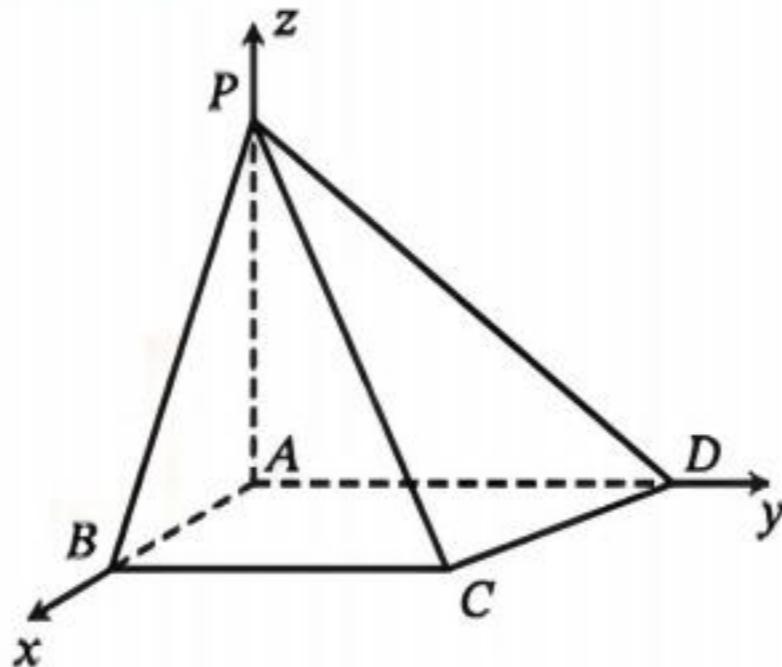
【答案】(1) 见解析; (2)(i) 见解析; (ii) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】(1) 证明: 因为 $PA \perp$ 面 $ABCD$, 得 $PA \perp AB$; 而 $AB \perp AD$, 即

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ PA \perp AB \\ AD \subset \text{面}PAD, \text{ 证} \\ PA \subset \text{面}PAD \\ PA \cap AD = A \end{cases}$$

得 $AB \perp$ 面 PAD , 而 $\begin{cases} AB \perp PAD \\ AB \subset \text{面}PAB \end{cases}$, 证得 面 $PAB \perp$ 面 PAD ;

(2)(i) 建立如图所示的坐标系:



欲证 O 在平面 $ABCD$ 上, 等价于证明 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心即为几何体的外接球球心 O .

易知 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心为三边中垂线的交点, 故先得外接圆圆心坐标,

因 $ABCD$ 所在平面为 xOy 平面, 故 B, C, D 用 (x, y) 表示,

$$\text{得 } B(\sqrt{2}, 0), C(\sqrt{2}, 2), D(0, \sqrt{3} + 1),$$

得 BC 中垂线表达式为 $y = 1$; CD 中垂线表达式为 $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}x + 1$,

联立两个中垂线方程得交点坐标为 $(0, 1)$ (点在 AD 上, 设为 E), 即为外接圆圆心位置, 且 $EB = EC = ED = \sqrt{3}$;

而 $PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = \sqrt{3} = EB$, 故 E 点即为 O 点, 结论得证;

(ii)

法 1: 基于建系, $A(0, 0, 0)$, $C(\sqrt{2}, 2, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$.

O 在 AD 上, 且 $AO = 1$, 所以 $O(0, 1, 0)$.

$$\text{则 } \overrightarrow{AC} = (\sqrt{2}, 2, 0), \overrightarrow{PO} = (0, 1, \sqrt{2}).$$

根据向量点积公式求夹角余弦：

$$\cos\langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{AC} \rangle = \left| \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \right| = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

法 2：

先计算各线段长度：

$$AC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}, PO = \sqrt{3}, PC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AO = 1, PA = \sqrt{2}, OC = \sqrt{3}$$

根据斯丹纳定理，计算夹角余弦：

$$\cos \theta = \frac{|PC^2 + AO^2 - PA^2 - OC^2|}{2 \cdot PO \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

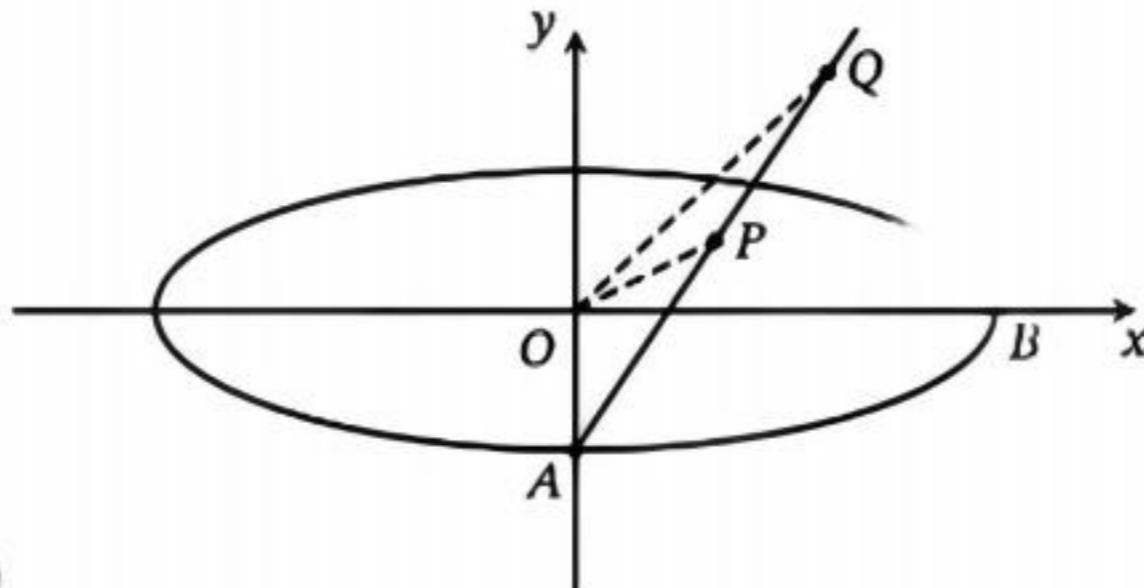
18.

【答案】(1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; (2)(i) $Q : \left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 \right)$; (ii) $3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

【解析】(1) 设 $A(0, b)$, $B(a, 0)$, 由 $|AB| = \sqrt{10}$ 得 $a^2 + b^2 = 10$,

$$\because \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{解得} \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{椭圆的标准方程为: } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$



(i)

法一：弦长公式

当直线 AP 斜率不存在时, $P(0, 1)$, 此时 $|AP| = 2 \Rightarrow |AQ| = \frac{3}{2}$, $\therefore Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

当直线 AP 斜率存在时, 设直线 AP 方程为 $y = kx - 1$,

$$\text{由 } A(0, -1), \quad P(m, n) \text{ 可知 } k = \frac{n+1}{m},$$

$$\text{根据弦长公式得} \begin{cases} |AP| = \sqrt{1+k^2}|m| \\ |AQ| = \sqrt{1+k^2}|x_Q| \end{cases},$$

$$\because |AQ| \cdot |AP| = 3, \quad \therefore (1+k^2)m x_Q = \left[1 + \left(\frac{n+1}{m}\right)^2\right] m x_Q = 3,$$

$$\Rightarrow x_Q = \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \quad y_Q = \frac{n+1}{m} x_Q - 1 = \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1.$$

$P(0, 1)$, $Q\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 满足上式,

$$\text{综上, } \begin{cases} x_Q = \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2} \\ y_Q = \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 \end{cases}.$$

法二：向量法

\because 设 Q 是射线 AP 上一点 : $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$ ($\lambda > 0$), 即 $(x_Q, y_Q + 1) = \lambda(m, n + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_Q = \lambda m \\ y_Q = \lambda(n + 1) - 1 \end{cases},$$

$\because |AQ| \cdot |AP| = 3$, $\therefore \lambda |AP|^2 = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{|AP|^2} = \frac{3}{m^2 + (n + 1)^2}$, 代入上式可得,

$$\begin{cases} x_Q = \frac{3m}{m^2 + (n + 1)^2} \\ y_Q = \frac{3(n + 1)}{m^2 + (n + 1)^2} - 1 \end{cases}.$$

(ii) 由 $k_1 = 3k_2$ 可得: $\frac{y_Q}{x_Q} = \frac{3y_P}{x_P}$, 将(i)中结果代入可得:

$$\frac{3(n + 1)}{m^2 + (n + 1)^2} - 1 = \frac{9n}{m^2 + (n + 1)^2}, \text{ 整理得: } m^2 + (n + 4)^2 = 18 (m \neq 0),$$

\therefore 点 P 在以 $D(0, -4)$ 为圆心, 以 $3\sqrt{2}$ 为半径的圆上.

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$,

$$|MD| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 4)^2} = \sqrt{-8y_0^2 + 8y_0 + 25} = \sqrt{-8\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 27} \leq 3\sqrt{3},$$

当 $y_0 = \frac{1}{2}$ 时取等.

$$|PM| \leq |MD| + 3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

19.

【答案】(1) $3\sqrt{3}$; (2) 见解析; (3) $3\sqrt{3}$.

【解析】(1) 可得 $f'(x) = -5 \sin x + 5 \sin 5x = 5(\sin 5x - \sin x) = 5[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)]$, 整理可得 $f'(x) = 10 \cos 3x \cdot \sin 2x$.

可得当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

则 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

(2) 可考虑反证法, 命题的否定为 $\forall y \in [a - \theta, a + \theta]$, 都有 $\cos y > \cos \theta$.

由 $\cos y > \cos \theta$, 可得 $y \in (-\theta + 2k\pi, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

则 $[a - \theta, a + \theta] \subseteq \{x \mid -\theta + 2k\pi \leq x \leq \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

考虑区间长度, 左边区间长度为 2θ 的闭区间, 而左边为一系列区间长度为 2θ 的开区间的并集, 显然不能成立, 矛盾.

因此, 结论成立.

(3) 由(2)知, 令 $a = t, \theta = \frac{5\pi}{6}$, 知 $\exists y \in \left[t - \frac{5\pi}{6}, t + \frac{5\pi}{6}\right]$ 使 $\cos y \leq \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

由 $y \in \left[t - \frac{5\pi}{6}, t + \frac{5\pi}{6}\right]$ 知 $\exists x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 使 $5x + t = y$, 这样有 $\cos(5x + t) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$5 \cos x - \cos(5x + t) \geq 5 \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

因此, 若 $b < 3\sqrt{3}$, 则 $\forall t, \exists x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 可以使 $5 \cos x - \cos(5x + t) \geq 3\sqrt{3} > b$

故此时 b 不满足要求.

若 $b = 3\sqrt{3}$, 则存在 $t = 0$ 时, $5 \cos x - \cos 5x \leq b$.

由(1)知, $f(x) = 5 \cos x - \cos 5x$, $f'(x) = 10 \cos 3x \cdot \sin 2x$, 周期为 2π 的偶函数, 则考虑在 $[0, \pi]$ 的最大值.

可得当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 单调递减. 则 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

故 $5 \cos x - \cos 5x \leq 3\sqrt{3}$ 恒成立.

$b = 3\sqrt{3}$ 满足题目要求.