2025年全国一卷高考真题

数学试卷解析

1.
【答案】C
【解析】$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}=-5+\mathrm{i}$，虚部为1，故选C.

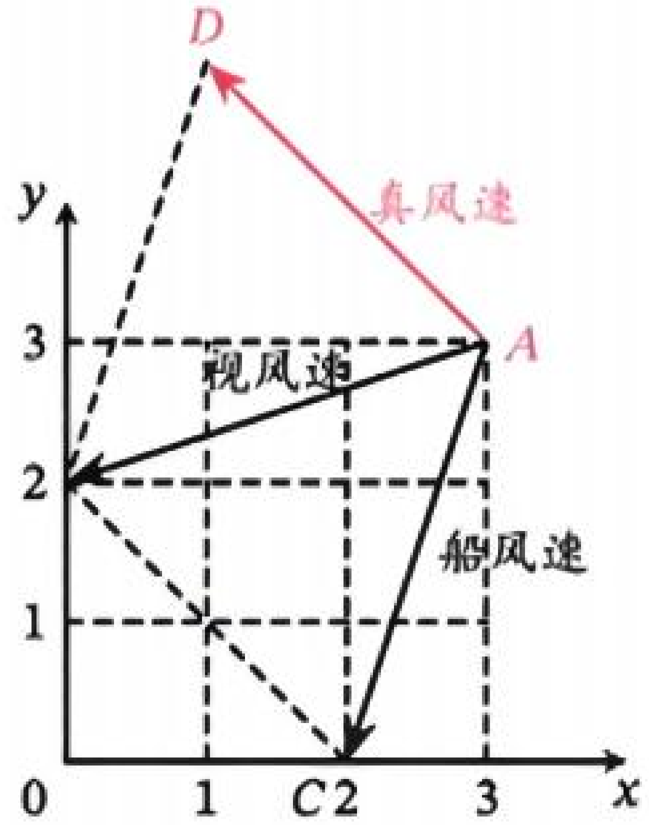
2.
【答案】C
【解析】$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{1,3,5\}$，$\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$，$\complement_U A$元素个数为5个，故选C.

3.
【答案】D
【解析】$2b=2\sqrt{7}a$，$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2\sqrt{2}$.

4.
【答案】B
【解析】$a-\frac{\pi}{3}=k\cdot\frac{\pi}{2}(k\in Z,a>0)$，
可得$a=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}$，当$k=0$时$a_{\min}=\frac{\pi}{3}$. 故选B.

5.
【答案】A
【解析】$f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$，故选A.

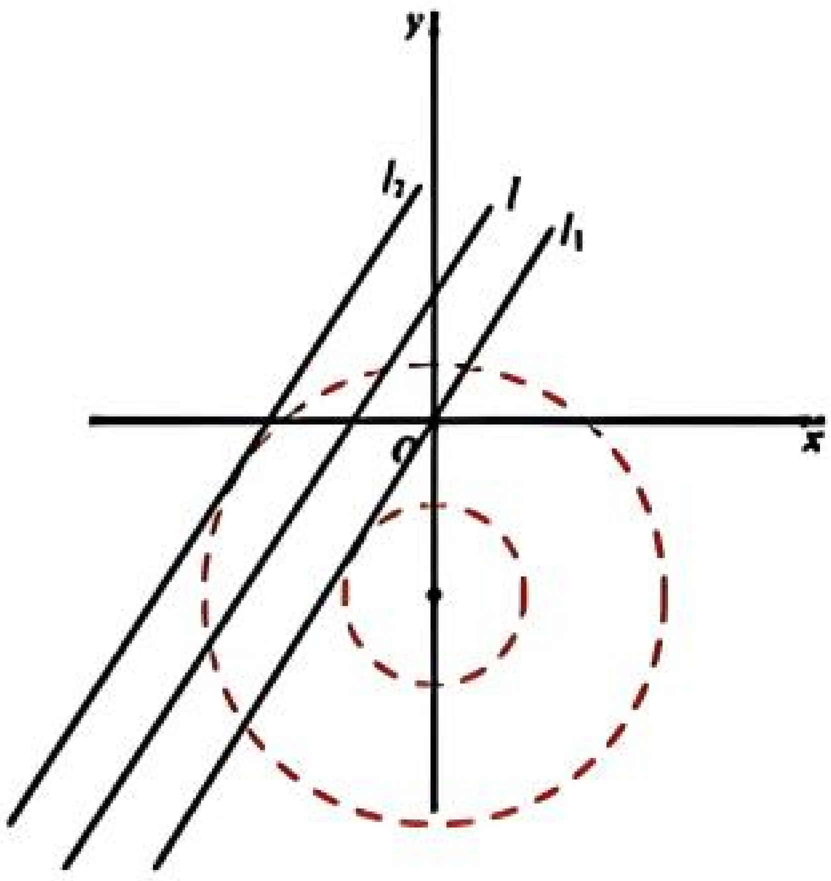
6.
【答案】A
【解析】因为船风速与船行驶速度等大反向，所以船风速为$\overrightarrow{AC}$，



根据平行四边形法则可以得到真风速为向量$\overrightarrow{AD}$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{2}$，
所以风速等级为轻风，故选A.

7.
【答案】B

【解析】画出平面直角坐标系，易知平面上到直线 l 距离为 1 的点的轨迹为两条平行线 l_1, l_2，



通过计算，得圆心到 l_1 的距离为 1，到 l_2 的距离为 3，若满足两个交点的要求，则 $1 < r < 3$，故答案选 B

8.

【答案】B

【解析】$2+\log_2 x = 3+\log_3 y = 5+\log_5 z$，由.$2+\log_2 x = 3+\log_3 y$，得 $\log_3 y = \log_2 x - 1 = \log_2 \frac{x}{2}$．不妨设 $\log_3 y = \log_2 \frac{x}{2} = m$，得 $y = 3^m, x = 2^{m+1}$，同理，将 $\log_3 y = m$ 代入 $3+\log_3 y = 5+\log_5 z$ 得 $z = 5^{m-2}$，即 $x = 2^{m+1}, y = 3^m, z = 5^{m-2}$，结合选项考虑：

A 选项，易得当 $m = 1$ 时，符合要求，正确；

C 选项，当 $m = 2$ 时，符合要求，正确；

D 选项，当 $m = 5$ 时，符合要求，正确；

9.

【答案】BD

【解析】略

10.

【答案】ACD

【解析】略

11.

【答案】ACD

【解析】略

12.

【答案】4

【解析】设曲线的切点为 $(x_0, e^{x_0} + x_0 + a)$，$y'|_{x=x_0} = e^{x_0} + 1$，

则切线方程为 $y = e^{x_0} + 1(x - x_0) + e^{x_0} + x_0 + a$，

则 $\begin{cases} e^{x_0} + 1 = 2 \\ e^{x_0} + x_0 + a = 5 \end{cases}$，可得 $\begin{cases} x_0 = 0 \\ a = 4 \end{cases}$，故 $a = 4$.

13.

【答案】±2

【解析】由题知，$S_4 = 4$，$S_8 = 68$.

$S_8=\left(1+q^4\right)S_4$，可得 $1+q^4=17$，则 $q=\pm 2$.

14.

【答案】$\dfrac{61}{25}$

【解析】法一：

易知 X 可能取值为 $1,2,3$，且 $P(X=1)=\dfrac{5}{5^3}$，$P(X=2)=\dfrac{5\times 3\times 4}{5^3}$，$P(X=3)=\dfrac{C_5^3A_3^3}{5^3}=\dfrac{60}{5^3}$，

得 $E(X)=1\times\dfrac{5}{5^3}+2\times\dfrac{5\times 3\times 4}{5^3}+3\times\dfrac{60}{5^3}=\dfrac{305}{125}=\dfrac{61}{25}$.

法二：

记 $X_i=\begin{cases}1，第i号小球被取到\\0，第i号小球未取到\end{cases}$，则 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$

$P\left(X_i=1\right)=1-P\left(X_i=0\right)=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{61}{125}$,

则 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{5}E\left(X_i\right)=5\times\dfrac{61}{125}=\dfrac{61}{25}$.

15.

【答案】(1)90%；(2) 可以认为有关.

【解析】(1) 由表格信息可知，检查结果不正常者患该疾病人数为 180 人，检查结果不正常者为 200 人，则 $P=\dfrac{180}{200}=90\%$

(2) 零假设 H_0：超声波检查结果与患该疾病无关.

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{1000(180\times 780-20\times 20)^2}{800\times 200\times 200\times 800}=\dfrac{1000\times 14^2}{16^2}\approx 765.6>10.828$.

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为超声波检查结果与患该疾病有关，此推断犯错的概率不超过 0.001.

16.

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析.

【解析】(1) 将 $\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$ 两边同时乘以 $n(n+1)$

可得 $(n+1)a_{n+1}=na_n+1$.

则 $\{na_n\}$ 是以 3 首项 1 为公差的等差数列.

(2) **此题有争议，一种是求 $f'(2)$，一种是求 $f'(-2)$**

若为 $f'(2)$：

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+ma_m\cdot x^{m-1}$

令 $x=2, f'(2)=a_1+2a_2\cdot 2^1+3a_3\cdot 2^2+\cdots+m\cdot a_m\cdot 2^{m-1}$

由 (1) 可知 $a_n=n+2$.

故 $f'(2)=3+4\times 2+5\times 2^2+\cdots+(m+2)\cdot 2^{m-1}$ ①

$2f'(2)=3\times 2+4\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(m+1)\cdot 2^{m-1}+(m+2)\cdot 2^m$ ②

① − ②可得

$-f'(2)=3+\left(2+2^2+2^3+\cdots+2^{m-1}\right)-(m+2)\cdot 2^m$

$-f'(2)=3+2^m-2\ -(m+2)\cdot 2^m$

则 $f'(2)=(m+1)\cdot 2^m-1$

若为 $f'(-2)$：

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+ma_m\cdot x^{m-1}$

令 $x=-2, f'(-2)=a_1+2a_2\cdot(-2)^1+3a_3\cdot(-2)^2+\cdots+m\cdot a_m\cdot(-2)^{m-1}$

由 (1) 可知 $a_n=n+2$.

故 $f'(-2)=3+4\times(-2)+5\times(-2)^2+\cdots+(m+2)\cdot(-2)^{m-1}$ ①

$-2f'(-2)=3\times(-2)+4\times(-2)^2+\cdots+(m+1)\cdot(-2)^{m-1}+(m+2)\cdot(-2)^m$ ②

① − ②可得

$3f'(-2)=3+\left((-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{m-1}\right)-(m+2)\cdot(-2)^m$

$3f'(-2)=3+\dfrac{-2-(-2)^m}{3}-(m+2)\cdot(-2)^m$

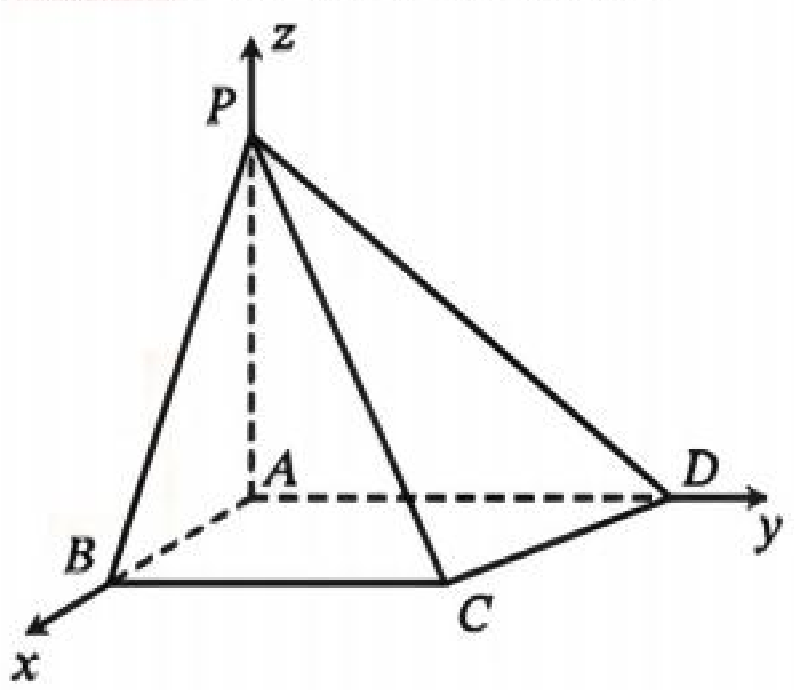
则 $f'(-2)=-\dfrac{3m+7}{9}\cdot(-2)^m+\dfrac{7}{9}$

17.

【答案】(1) 见解析；(2)(i) 见解析；(ii)$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】(1) 证明：因为 $PA\perp$ 面$ABCD$，得 $PA\perp AB$；而 $AB\perp AD$，即 $\begin{cases}AB\perp AD\\PA\perp AB\\AD\subset \text{面}PAD\\PA\subset\text{面}PAD\\PA\cap AD=A\end{cases}$，证得 $AB\perp$ 面PAD，而 $\begin{cases}AB\perp PAD\\AB\subset\text{面}PAB\end{cases}$，证得面$PAB\perp$面$PAD$；

(2)(i) 建立如图所示的坐标系：



欲证 O 在平面 $ABCD$ 上，等价于证明 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心即为几何体的外接球球心 O.

易知 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心为三边中垂线的交点，故先得外接圆圆心坐标，

因 $ABCD$ 所在平面为 xOy 平面，故 B,C,D 用 (x,y) 表示，

得 $B\left(\sqrt{2},0\right),C\left(\sqrt{2},2\right),D(0,\sqrt{3}+1)$,

得 BC 中垂线表达式为 $y=1$；CD 中垂线表达式为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}x+1$,

联立两个中垂线方程得交点坐标为 $(0,1)$(点在 AD 上，设为 E)，即为外接圆圆心位置，且 $EB=EC=ED=\sqrt{3}$；

而 $PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=\sqrt{3}=EB$，故 E 点即为 O 点，结论得证；

(ii)

法 1：基于建系，$A(0,0,0)$，$C\left(\sqrt{2},2,0\right)$，$P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$.

O 在 AD 上，且 $AO=1$，所以 $O(0,1,0)$.

则 $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{2},2,0\right)$，$\overrightarrow{PO}=\left(0,1,\sqrt{2}\right)$.

根据向量点积公式求夹角余弦：

$$\cos\langle\overrightarrow{PO},\overrightarrow{AC}\rangle=\left|\frac{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

法 2:

先计算各线段长度：

$$AC=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{6},PO=\sqrt{3},PC=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

$AO=1$，$PA=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{3}$

根据斯坦纳定理，计算夹角余弦：

$$\cos\theta=\frac{|PC^2+AO^2-PA^2-OC^2|}{2\cdot PO\cdot AC}=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

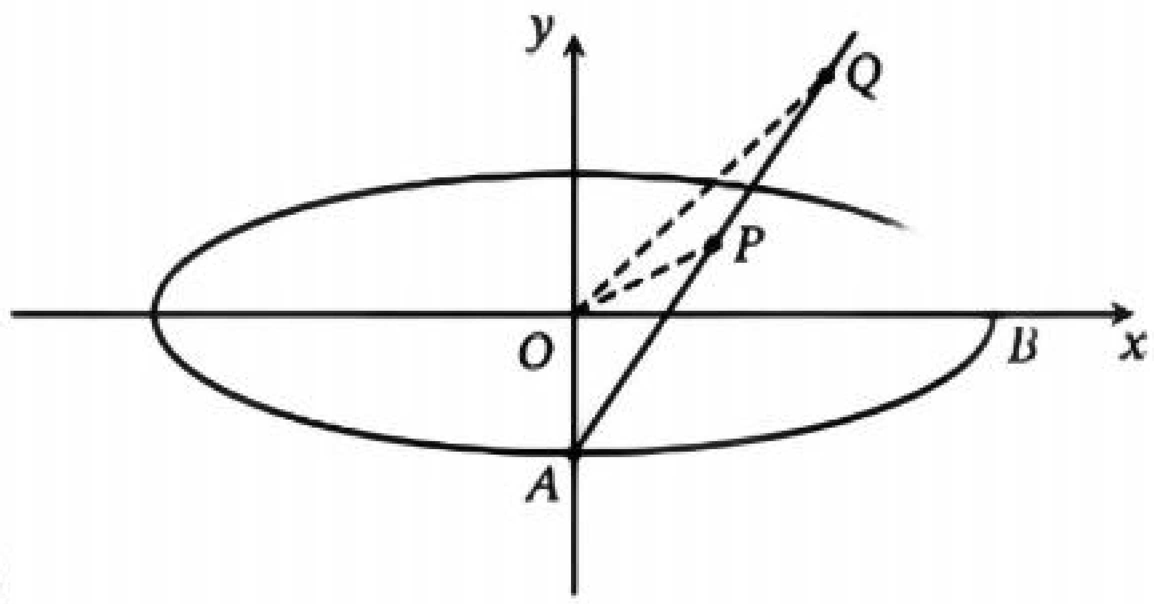
18.

【答案】(1)$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；(2)(i)$Q:(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1)$；(ii)$3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

【解析】(1) 设 $A(0,b)$，$B(a,0)$，由 $|AB|=\sqrt{10}$ 得 $a^2+b^2=10$,

$\because\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.



(i)

法一：弦长公式

当直线 AP 斜率不存在时，$P(0,1)$，此时 $|AP|=2\Rightarrow|AQ|=\frac{3}{2}$，$\therefore Q\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

当直线 AP 斜率存在时，设直线 AP 方程为 $y=kx-1$,

由 $A(0,-1)$，$P(m,n)$ 可知 $k=\frac{n+1}{m}$,

根据弦长公式得 $\begin{cases}|AP|=\sqrt{1+k^2}|m|\\|AQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_Q|\end{cases}$，

$\because|AQ|\cdot|AP|=3$，$\therefore(1+k^2)mx_Q=\left[1+\left(\frac{n+1}{m}\right)^2\right]mx_Q=3$,

$\Rightarrow x_Q=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$y_Q=\frac{n+1}{m}x_Q-1=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$.

$P(0,1)$，$Q\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 满足上式，

综上，$\begin{cases}x_Q=\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2}\\y_Q=\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\end{cases}$.

法二：向量法

$\because$ 设 Q 是射线 AP 上一点 $\therefore \overrightarrow{AQ} = \lambda\overrightarrow{AP}(\lambda > 0)$，即 $(x_Q, y_Q + 1) = \lambda(m, n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_Q = \lambda m \\ y_Q = \lambda(n+1) - 1 \end{cases},$$

$\because |AQ| \cdot |AP| = 3$，$\therefore \lambda|AP|^2 = 3 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3}{|AP|^2} = \dfrac{3}{m^2 + (n+1)^2}$，代入上式可得，

$$\begin{cases} x_Q = \dfrac{3m}{m^2 + (n+1)^2} \\ y_Q = \dfrac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 \end{cases}.$$

(ⅱ) 由 $k_1 = 3k_2$ 可得：$\dfrac{y_Q}{x_Q} = \dfrac{3y_P}{x_P}$，将 (ⅰ) 中结果代入可得：

$\dfrac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 = \dfrac{9n}{m^2 + (n+1)^2}$，整理得：$m^2 + (n+4)^2 = 18(m \neq 0)$，

$\therefore$ 点 P 在以 $D(0, -4)$ 为圆心，以 $3\sqrt{2}$ 为半径的圆上.

设 $M(x_0, y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$，

$$|MD| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 4)^2} = \sqrt{-8y_0^2 + 8y_0 + 25} = \sqrt{-8\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 27} \leqslant 3\sqrt{3},$$

当 $y_0 = \dfrac{1}{2}$ 时取等.

$|PM| \leqslant |MD| + 3\sqrt{2} \leqslant 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

19.

【答案】(1)$3\sqrt{3}$；(2) 见解析；(3)$3\sqrt{3}$.

【解析】(1) 可得 $f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 5(\sin 5x - \sin x) = 5[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)]$，

整理可得 $f'(x) = 10\cos 3x \cdot \sin 2x$.

可得当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调递减.

则 $f(x)_{\max} = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$.

(2) 可考虑反证法，命题的否定为 $\forall y \in [a-\theta, a+\theta]$，都有 $\cos y > \cos\theta$.

由 $\cos y > \cos\theta$，可得 $y \in (-\theta + 2k\pi, \theta + 2k\pi)$，$k \in \mathbf{Z}$.

则 $[a-\theta, a+\theta] \subseteq \{x \mid -\theta + 2k\pi \leqslant x \leqslant \theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

考虑区间长度，左边区间长度为 2θ 的闭区间，而左边为一系列区间长度为 2θ 的开区间的并集，显然不能成立，矛盾.

因此，结论成立.

(3) 由 (2) 知，令 $a = t, \theta = \dfrac{5\pi}{6}$，知 $\exists y \in \left[t - \dfrac{5\pi}{6}, t + \dfrac{5\pi}{6}\right]$ 使 $\cos y \leqslant \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

由 $y \in \left[t - \dfrac{5\pi}{6}, t + \dfrac{5\pi}{6}\right]$ 知 $\exists x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$，使 $5x + t = y$，这样有 $\cos(5x+t) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$5\cos x - \cos(5x+t) \geqslant 5\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

因此，若 $b < 3\sqrt{3}$，则 $\forall t, \exists x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ 可以使 $5\cos x - \cos(5x+t) \geqslant 3\sqrt{3} > b$

故此时 b 不满足要求.

若 $b = 3\sqrt{3}$，则存在 $t = 0$ 时，$5\cos x - \cos 5x \leqslant b$.

由 (1) 知，$f(x) = 5\cos x - \cos 5x$，$f'(x) = 10\cos 3x \cdot \sin 2x$，周期为 2π 的偶函数，则考虑在 $[0, \pi]$ 的最大值.

可得当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减. 则 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$.

故 $5\cos x-\cos 5x\leqslant 3\sqrt{3}$ 恒成立.

$b=3\sqrt{3}$ 满足题目要求.