et puisque, pour $\lambda \neq 0$, $(\lambda-1)/\lambda$ est du signe de $\lambda(\lambda-1)$:

- si $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$: alors $\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x\neq 0}} K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\Big|_{x=0} = 0$.
- si $0 < \lambda < 1$: alors $\frac{\lambda-1}{\lambda} < 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x\neq 0}} K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$ est infinie, sauf si $K = 0$.

En conséquence, la continuité de f en 0, laquelle impose que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x\neq 0}} f(x)$ existe, soit finie et égale à $f(0)$, on obtient en conjonction avec (3), que, **nécessairement** :

• si $f \in E_\lambda$, et si $\lambda \in]0,1[$: f est nulle sur $\mathbb{R}^*$ (car une limite finie en 0 impose $K=0$), et par continuité en 0, f est nulle aussi en 0, donc sur tout $\mathbb{R}$.
• si $f \in E_\lambda$, et si $\lambda = 1$: f est constante, égale à K, $K \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^*$ et par continuité en 0, égale à K en 0 aussi, donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
• si $f \in E_\lambda$, et si $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$: $f(x)$ est, sur $\mathbb{R}$, de la forme $K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$, avec K un réel quelconque

.

I.3.d. Parce que l'on peut constater que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les **formes possibles** de f (**I.3.c.**) sont telles que : $f \in E$ et $\Phi(f) = \lambda.f$ (vérification laissée au lecteur), les conditions nécessaires mises au jour précédemment s'avèrent **suffisantes**, et l'on peut donc conclure, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

• si $\lambda \in]0,1[$:	E_λ est réduit à la fonction nulle nulle.
• si $\lambda = 1$:	E_λ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
• si $\lambda > 1$ ou $\lambda < 0$:	$E_\lambda = \left\{ f \in E \mid \exists\, K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right\}$

.

I.4.a. La fonction f admettant, **par hypothèse**, un développement en série entière en 0 dont le rayon de convergence R est strictement positif (eventuellement infini), alors, **d'après le cours**, ce DSE$_0$ étant noté $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, toute primitive F de f admet un DSE$_0$, donné par :

$$F(x) = C + \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}, \text{ et un rayon de convergence égal à } R.$$

Par conséquent, puisque pour tout x non nul, $g(x) = \Phi(f) = \frac{1}{2x}.[F(x) - F(-x)]$, il vient : $\forall x \in]-R,R[\ \setminus\{0\},\quad g(x) = \frac{1}{2x}.\left[\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right]$.

On peut **rassembler ces deux sommes** et on obtient alors :

$$\forall x \in]-R,R[\ \setminus\{0\},\quad g(x) = \frac{1}{2x}.\left[\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}[1-(-1)^{n+1}]x^{n+1}\right.,$$

et, comme : $1-(-1)^{n+1} = 1+(-1)^n$ vaut 2 si n est pair et 0 si n est impair, il s'ensuit que :

$$\forall x \in]-R,R[\ \setminus\{0\},\quad g(x) = \frac{1}{2x}.\sum_{p\geq 0}^{\infty} \frac{a_{2p}}{2p+1} x^{2p+1},$$

et enfin, en "*rentrant*" le facteur $1/x$ dans la somme et en simplifiant ensuite :

$$\forall x \in]-R,R[\ \setminus\{0\},\quad g(x) = \frac{1}{2}.\sum_{p\geq 0}^{\infty} \frac{a_{2p}}{2p+1} x^{2p},$$

Ainsi, il est acquis que la série entière $x \longmapsto \sum_{p\geq 0}^{\infty} \frac{a_{2p}}{2p+1} x^{2p}$ est convergente pour tout x non nul tel que $|x| < R$, donc elle a elle-même un rayon de convergence $R' \geq R > 0$, et comme tout DSE$_0$ de rayon de convergence > 0, ce développement est continu en 0, de même que g, donc on a :

$$\lim_{x\to 0}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{2p}}{2p+1}x^{2p}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{2p}}{2p+1}(0)^{2p}=a_0 \text{ et } \lim_{x\to 0} g(x)=g(0),$$

et parce que ces deux fonctions coïncident sur $]-R,R[\setminus\{0\}$, **les deux limites sont égales**, de sorte que l'égalité est encore vraie pour $x=0$.

En conclusion :

$$\boxed{g \text{ admet un DSE}_0 \text{ valable sur }]-R,R[\text{ et donné par : } g(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_{2p}}{2p+1}x^{2p}}.$$

I.4.b. ***En vu d'obtenir l'exemple demandé***, plaçons-nous dans le cas particulier où la fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, admet un DSE$_0$, avec un rayon de convergence fini $R_f>0$ et est **impaire**.

En effet : on a vu au **I.1.b.** que, dans ces conditions, $g=\Phi(f)$ est la fonction nulle. Par conséquent, g est développable en série entière en 0, et son développement est celui de la série entière nulle, dont le rayon de convergence est infini, donc strictement supérieur à celui de f.

Par exemple : $\boxed{\text{pour } f : x\longmapsto \frac{x}{1+x^2}, \text{ on a : } R_f=1 \text{ et } R_g=+\infty}$.

• Cet exemple convient car f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $f\in E$, tandis que, **par ailleurs**, pour tout x réel tel que $|x^2|<1$, puisque la série géométrique de premier terme x, de raison $(-x)^2$, est convergente et a pour somme : $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$:

$$\forall x\in\,]-1,+1[,\quad f(x)=x.\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}.$$

Par conséquent : f admet un DSE$_0$, de rayon de convergence $R_f\geq 1$.

De plus, le rayon de convergence est exactement égal à 1 car pour $x=1$, le DSE$_0$ $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n+1}$ est divergent car son terme général est en valeur absolue égal à 1 donc ne converge pas vers 0.

Ainsi, on a bien : $R_f=1$ et $R_g=R_{\Phi(f)}=+\infty$, puisque f est impaire ce qui implique que $g=\Phi(f)$ est nulle sur $\mathbb{R}$ (*c.f.* **I.1.b.**).

I.5. Si f est élément de E et telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$ existe, ce qui signifie, **par définition** que :

à la fois : $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\,dt$ existe, et : $\lim_{B\to-\infty}\int_B^0 f(t)\,dt$ existe.

Si on note respectivement α et β ces deux limites, on a alors, **par la relation de Chasles** pour les intégrales :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt+\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{0}f(t)\,dt=\alpha-\beta.$$

Par suite, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)\,dt$ est la limite d'un produit, avec :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$; $\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}f(t)\,dt=\alpha-\beta\in\mathbb{R}$.

Donc, **par les propriétés usuelles des limites** :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$, et, parce que $g=\Phi(f)$ est paire (*c.f.* **I.1.b.**) : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=0}$

◇ Examinons une éventuelle réciproque : puisque, dès lors que $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ est **bornée** sur $\mathbb{R}$, par les **propriétés usuelles des limites** : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$:

il n'est pas nécessaire que $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour que g admette des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.

Ainsi, **si on prend pour f la fonction cosinus** :

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $f \in E$, et pour tout x réel : $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$.
Et, **comme $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas**(*) : $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'existe pas, et par définition, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ n'existe pas non plus, tandis que dans le même temps :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{2\sin x}{2x} = 0.$$

Par ce **contre-exemple**, on peut conclure que : $\boxed{\text{la réciproque est fausse}}$.

$\boxed{\textbf{I.6.a.}}$ Pour utiliser la T-périodicité de f, on décomposera, grâce à la **relation de Chasles**, l'intégrale dans l'expression de $g(n,T)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(n,T) = \frac{1}{2nT}\cdot \int_{-nT}^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2nT}\cdot\left(\sum_{k=-n}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

En effectuant, sur les intégrales $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t$, le **changement de variable affine** défini par : $t = k.T + u$, pour lequel :

$$\begin{cases} u_2 = T \\ u_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t(u_1) = (k+1).T \\ u(t_1) = k.T \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} f(t) = f(k.T+u) = f(u) \\ \qquad\qquad \text{par } T\text{-périodicité de } f, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}(k.T+u) = (k.T+u)'\mathrm{d}u = \mathrm{d}u, \end{cases}$$

on obtient :

$$\forall k \in [\![-n, n-1]\!], \quad \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, dans l'expression de $g(n,T)$, la somme est une somme de $(n-1)-(-n)+1 = \boldsymbol{2n}$ **intégrales**, toutes **égales à** l'intégrale $\boldsymbol{I = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t}$, en conséquence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(n,T) = \tfrac{1}{2nT}.(2n).I = \tfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

$\boxed{\textbf{I.6.b.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$ $(x \geq T)$, puisque $x \neq 0$: $g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, et, en introduisant $m(x)$, égal à la partie entière $[x/T]$, **par la relation de Chasles** :

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-m(x).T}^{m(x).T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m(x).T}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \tfrac{1}{2x}\cdot\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,\mathrm{d}t + \tfrac{m(x).T}{x}\cdot\tfrac{1}{2.m(x).T}\cdot\int_{-m(x).T}^{m(x).T} f(t)\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2x}\cdot\int_{m(x).T}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, en ayant fait apparaître ***de force***, $g(m(x).T)$, on vérifie que :

$$\textbf{(4)} \quad \boxed{g(x) = \tfrac{1}{2x}\cdot\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,\mathrm{d}t + \tfrac{m(x).T}{x}.g(m(x).T) + \tfrac{1}{2x}\cdot\int_{m(x).T}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

◇ Majoration des deux intégrales : la partie entière de x/T, notée $m(x)$, est, **par définition**, l'unique entier tel que :

$m(x) \leq \frac{x}{T} < m(x)+1$, ce qui équivaut à : **(5)** $m(x).T \leq x < m(x).T + T$.

De façon équivalente encore : $m(x)$ est aussi **le plus grand entier inférieur ou égal à $\boldsymbol{x/T}$**. Donc, comme par hypothèse, $x \geq T$, on a aussi : $x/T \geq 1$, d'où il découle que :

(6) $m(x) \geq 1$, puis, par (5) : **(7)** $x \geq m(x).T \geq T$, et : $-x \leq -m(x).T \leq -T$.

On est ainsi assuré que, dans les intégrales de (7), **les bornes sont " *dans le bon sens* "**. Il s'ensuit les majorations usuelles suivantes :

$$\left|\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,dt\right| \leq \int_{-x}^{-m(x).T} |f(t)|\,dt, \text{ et } \left|\int_{m(x).T}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \int_{m(x).T}^{x} |f(t)|\,dt.$$

On peut ensuite développer cet argument classique pour les fonctions continues périodiques :

> **comme f est continue sur $\mathbb{R}$**, f est aussi continue sur $[0,T]$, or, **d'après le cours** : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, donc, ici, l'image de $[0,T]$ par f est un segment, que l'on peut noter $[m_f, M_f]$. Et avec ces notations : $M = \max(|m_f|, |M_f|)$ est un majorant de $|f|$ sur $[0,T]$, mais plus généralement un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$, car f est T-périodique.

On en déduit, **par croissance de l'intégrale**, que :

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \leq M.\int_a^b 1\,dt, \text{ i.e. : } \int_a^b |f(t)|\,dt \leq M.(b-a), \text{ si } a \leq b.$$

Ce qui donne, appliqué aux majorations précédentes, en multipliant de plus par $1/2x > 0$ (car $x \geq T$) :

$$\textbf{(8)} \quad \left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,dt\right| \leq \frac{M}{2}.\frac{x-m(x).T}{x}, \text{ et } \left|\frac{1}{2x}\int_{m(x).T}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \frac{M}{2}.\frac{x-m(x).T}{x}.$$

<u>**Ainsi**</u>, par l'**inégalité triangulaire** et (8), on a pour majoration de la somme des deux intégrales dans (5) :

$$\textbf{(9)} \quad \left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,dt + \frac{1}{2x}\int_{m(x).T}^{x} f(t)\,dt\right| \leq M.\left(1 - \frac{m(x)}{x}.T\right).$$

◇ <u>Limite de $\frac{m(x).T}{x}$ pour x tendant vers $+\infty$</u> : en vertu de (5), pour tout $x > 0$:

$\frac{m(x).T}{x} \leq 1 < \frac{m(x).T}{x} + \frac{T}{x}$, d'où l'on tire (*et c'est usuel*) : $1 - \frac{T}{x} < \frac{m(x).T}{x} \leq 1$.

On en déduit, par le **théorème d'encadrement**, puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{T}{x} = 0$, que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x).T}{x} = 1.$$

<u>**On peut alors achever**</u> : car cette limite donne, par **passage à la limite sur (9)** :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{-m(x).T} f(t)\,dt + \frac{1}{2x}\int_{m(x).T}^{x} f(t)\,dt = 0,$$

et pour le troisième terme dans (4), égal à $\frac{m(x).T}{x}.g(m(x).T)$ ou encore à $\frac{m(x).T}{x}.\frac{I}{T}$ (*c.f.* **I.6.a.**), il en découle que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x).T}{x}.g(m(x).T) = 1.\frac{I}{T}\int_0^T f(t)\,dt$.

donc, globalement, on peut passer à la limite sur (6), et cela donne :

$$\boxed{\forall f \in E, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = \frac{1}{T}.\int_0^T f(t)\,dt}.$$

I.7.a. La fonction cosinus étant **continue et paire sur** $\mathbb{R}$, d'après le **I.1.b.**, pour tout x réel : $G(x) = \int_0^1 \cos(tx)\,dt$, donc, en distinguant suivant la valeur de x :

$$\boxed{\underline{\text{si } x \neq 0} : G(x) = \left[\frac{\sin(tx)}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x}, \text{ et } \underline{\text{si } x = 0} : G(x) = [t]_0^1 = 1}.$$

I.7.b. Puisque $\sin x$ est borné par 1 sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$.

Et, par ailleurs, puisqu'ici : $\frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = \frac{1}{2\pi}.[\sin t]_0^{2\pi} = 0$:

$$\boxed{\text{le résultat de } \textbf{I.6.} \text{ est vérifié : } \lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)\,dt}.$$

I.8. Puisque la fonction $x \mapsto |\sin x|$ est **continue sur $\mathbb{R}$, de période π**, les résultats établis s'appliquent, avec $T=\pi$, et en particulier celui du **I.6.c.**, selon lequel :

(10) $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|\sin t|\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|\ dt.$

La fonction sinus étant **positive** sur $[0,\pi]$, on a : $\int_0^{\pi}|\sin t|\ dt = \int_0^{\pi}\sin t\, dt = [-\cos t]_0^{\pi}$, *i.e.* : $\int_0^{\pi}|\sin t|\ dt = 2$, et $|\sin|$ étant **paire**, on a aussi : $\int_{-x}^{x}|\sin t|\ dt = 2\int_0^{x}|\sin t|\ dt$, et donc on tire de (10) que :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\int_0^x|\sin t|\ dt}{2x} = \frac{2}{\pi}$, ce qui équivaut à : $\boxed{\int_0^x|\sin t|\ dt \sim_{+\infty} \frac{2x}{\pi}}$.

I.9.a. La fonction exp est **continue sur $\mathbb{R}$**, donc $S=\Phi(f_3)$ existe et, **par définition** :

$\boxed{S(0)=\exp 0 = 1,\ \text{ et : } \forall x\neq 0,\ \ S(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}\exp t\, dt = \frac{1}{2x}.\,[\exp t]_{-x}^{x} = \frac{e^x-e^{-x}}{2x}}$.

I.9.b. Puisque **f_3 = exp admet un DSE$_0$**, à savoir : $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où : $\forall n\geq 0,\ a_n = 1/n!$, et parce que le rayon de convergence est infini, d'après le **I.4.a.** :

$\boxed{S \text{ admet un DSE}_0\text{, valable sur } \mathbb{R} \text{ également, égal à } \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)!}x^{2p}}$.

I.9.c. *On peut étudier les variations de S par l'étude du signe de sa dérivée,* ***mais ce n'est pas la méthode la plus simple*** :

• En considérant le développement en série entière de S, il apparaît que **S est une somme** (infinie) **de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$** (les fonctions $x\mapsto x^{2p},\ p\geq 0$). Ainsi, pour tout couple $(x,x')\in\mathbb{R}_+$, tel que $x\leq x'$:

$$\forall n\geq 0,\quad \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)!}x^{2p} \leq \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)!}x'^{2p},$$

et, les sommes étant convergentes, de sommes respectives $S(x)$ et $S'(x)$, un passage à la limite pour $p\longrightarrow\infty$ est licite et donne : $S(x)\leq S(x')$. Donc, on a montré que :

$\forall (x,x')\in\mathbb{R}_+^2$ tel que $x\leq x'$: $S(x)\leq S(x')$, *i.e.* S est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, on sait que $S(0)=0$ (*c.f.* **I.9.a.**), et puisque : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{2x} = 0.$

Il reste à invoquer la **parité de S** pour donner son tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$S(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• Ainsi, il apparaît que **S est strictement positive sur** $\mathbb{R}$, donc on peut considérer la fonction $1/S$, et celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

<u>par parité de S</u> : $\forall x\in\mathbb{R},\ 1/S(-x) = 1/S(x)$, donc : $1/S$ est paire,

<u>par croissance de S sur $\mathbb{R}_+$</u> : $\forall (x,x')\in\mathbb{R}_+^2,\ x\leq x'$: $\frac{1}{S(x')} - \frac{1}{S(x)} = \frac{S(x)-S(x')}{S(x')S(x)} \leq 0$,

donc : $1/S$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et par parité, croissante sur $\mathbb{R}_-$.

<u>par passage à l'inverse</u> : puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} S(x) = 0^+$, et $S(0)=1$,

$\lim_{x\to+\infty} 1/S(x) = \lim_{x\to-\infty} 1/S(x) = +\infty$, et $1/S(0) = 1$.

d'où le tableau de variations de $1/S$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1/S$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

. PARTIE II.

II.10. **Les fonctions polynomiales sont des cas particuliers de fonctions développables en série entière au voisinage de 0 et de rayon de convergence infini**. Ainsi, si f est élément de $\mathcal{P}_n$, alors, vb$f$ est de degré au plus n et il existe une suite de réels $(a_k)_{k\geq 0}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{et : } \quad \forall k > n, \quad a_k = 0.$$

En conséquence : le **I.4.** s'applique et donc, $g = \Phi(f)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p}}{2p+1} x^{2p} \quad \text{où } a_{2p} = 0 \text{ si } 2p > n.$$

Puisque : $(2p \leq n) \iff (p \leq \frac{n}{2})$, on a donc :

(11) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{a_{2p}}{2p+1} x^{2p}$, où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$.

Donc :

$\boxed{\text{si } f \in \mathcal{P}_n, \text{ alors } g = \Phi(f) \text{ est aussi polynomiale, de degré inférieur ou égal à } n}$.

II.11. Si l'on applique les résultats du **II.10.** aux vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{P}_n$, il vient, grâce à (11), pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, puisque $p_k = a_k.x^k$ $(a_k = 1)$:

(12) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, impair : $\Phi_n(p_k) = 0$, et pour k pair : $\Phi(p_k) = \frac{1}{k+1}.p_k$.

Par conséquent :

- si $n = 2m$: $\quad \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(\Phi_n) = \text{Diag}\left[1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2m+1}\right]$
- si $n = 2m+1$: $\quad \text{mat}_{\mathcal{B}_n}(\Phi_n) = \text{Diag}\left[1, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots, \frac{1}{2m+1}, 0\right]$.

II.12. De façon immédiate, en considérant les images des vecteurs de la base canonique (*c.f.* **(12)**), il apparaît que : $\mathcal{B}_n$ est une base de vecteurs propres.

Plus précisément : puisque la matrice de Φ_n dans la base $\mathcal{B}_n$ est diagonale, les valeurs propres de Φ_n se lisent sur la diagonale, le vecteur p_i est propre pour la valeur propre qu'on lit sur la $i^{\text{ème}}$ colonne et l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{B}_n$ relatifs à une même valeur propre constitue une base du *s.e.v.* propre associé.

Ainsi :

- si $n = 2m$: Φ_n admet pour valeurs propres 0 avec pour base du *s.e.v.* propre associé : $p_1, p_3, \ldots, p_{2m-1}$, et, pour tout k compris entre 1 et m : $1/(2k+1)$, avec pour base du *s.e.v.* propre associé : p_{2k}.
- si $n = 2m+1$: Φ_n admet pour valeurs propres 0 avec pour base du *s.e.v.* propre associé : $p_1, p_3, \ldots, p_{2m+1}$, et, pour tout k compris entre 1 et m : $1/(2k+1)$, avec pour base du *s.e.v.* propre associé : p_{2k}.

II.13.a. Soit Ψ un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$. **Notons** :

$$A_\Psi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ la matrice de } \Psi \text{ dans la base canonique } \mathcal{B}_2 = (p_0, p_1, p_2).$$

Puisque **Ψ et Φ_2 commutent si et seulement si leurs matrices dans une base de $\mathcal{P}_2$ commutent**, en choisissant pour base la base canonique, la matrice de Φ_2 dans $\mathcal{B}_2$ ayant la forme déterminée au **II.11.**, on a les équivalences suivantes :

$$(\Psi \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Psi) \iff (A_\Psi.\text{Diag}\left[1, 0, \tfrac{1}{3}\right] = \text{Diag}\left[1, 0, \tfrac{1}{3}\right].A_\Psi)$$

Ce qui, en effectuant les produits matriciels, équivaut encore à :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c/3 \\ d & 0 & f/3 \\ g & 0 & i/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g/3 & h/3 & i/3 \end{pmatrix},$$ puis en identifiant les cœfficients, à :

$b = 0 \;\; ; \;\; c/3 = c \;\; ; \;\; d = 0 \;\; ; \;\; f/3 = 0 \;\; ; \;\; g = g/3 \;\; ; \;\; h/3 = 0.$

Équations dont la résolution donne : $b = c = d = f = g = h = 0$.

Donc :

$\boxed{\Psi \text{ commute avec } \Phi_2 \text{ si et seulement si } \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\Psi) \text{ est de la forme : } \mathrm{Diag}\,[a,e,i]}$.

II.13.b. *On procède par **condition nécessaire** puis **condition suffisante**.*

• Si Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$ tel que : $\Psi \circ \Psi = \Phi_2$: alors $\Psi \circ \Psi_2$ est égal à :

$\Psi \circ (\Psi \circ \Psi) = \Psi \circ \Psi \circ \Psi = (\Psi \circ \Psi) \circ \Psi = \Phi_2 \circ \Psi$, donc : Ψ commute avec Φ_2.

Par suite : la matrice de Ψ dans $\mathcal{B}_2$ est diagonale et s'écrit : $A_\Psi = \mathrm{Diag}\,[a,b,c]$.

Ceci étant : $(\Psi \circ \Psi = \Phi_2)$ si et seulement si $(A_\Psi . A_\Psi = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\Phi_2))$, donc, en effectuant le produit matriciel avec la forme nécessaire $\mathrm{Diag}\,[a,b,c]$ pour de A_Ψ :

$(\Psi \circ \Psi = \Phi_2) \iff (\mathrm{Diag}\,[a^2,b^2,c^2] = \mathrm{Diag}\,[1,0,\frac{1}{3}]) \iff (a^2=1,\ b^2=0,\ c^2=\frac{1}{3})$.

On obtient ainsi, comme **condition nécessaire** pour que $\Psi \circ \Psi = \Phi_2$:

(13) $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\Psi) = A_\Psi = \mathrm{Diag}\,[a,0,c]$, avec a et c tels que : $a = \pm 1,\ c = \pm 1/\sqrt{3}$.

• **Réciproquement**, si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\Psi) = A_\Psi = \mathrm{Diag}\,[a,0,c]$ avec $|a| = 1$ et $|c| = 1/\sqrt{3}$: alors il est de vérification immédiate que : $A_\Psi^2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\Phi_2)$, donc, **il existe une base de $\mathcal{P}_2$ dans laquelle les endomorphismes $\Psi \circ \Psi$ et Φ_2 ont même matrice représentative**, ce qui établit que : $\Psi \circ \Psi = \Phi_2$.

La condition nécessaire (13) est donc **suffisante**.

On peut alors conclure :

$\boxed{\Psi \circ \Psi = \Phi_2 \text{ si et seulement si } \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\Psi) = \mathrm{Diag}\,[a,0,c], \text{ avec } a = \pm 1,\ c = \pm 1/\sqrt{3}}$.

.PARTIE III.

III.14.a. **Par définition**, la fonction de répartition F est liée à f par :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui fait de F **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En conséquence :

$$\textbf{(14)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(-x),$$

• De plus, **comme f est paire**, on peut (*on le fait de façon routinière avec la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite*), exprimer $F(-x)$ à l'aide de $F(x)$:

pour tout x réel, par le changement de variable $u = -t$, et par parité de f :

$$\forall A > 0, \quad \int_{-A}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{A}^{x} f(-t)(-\,\mathrm{d}t) = \int_{x}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où l'on tire en passant à la limite pour $A \longrightarrow +\infty$, les intégrales étant convergentes (puisque f est une fonction de densité) :

$$F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et comme aussi : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on conclut que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(x).$$

et donc, par (14) :

$$\textbf{(15)} \quad \boxed{\text{pour tout } x \neq 0 : \quad g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x} = \frac{2F(x) - 1}{2x}}.$$

III.14.b. *Une lecture attentive de la question permet de comprendre qu'il s'agit d'établir l'**existence d'un maximum pour g**.* En effet : le réel $M(f)$ cherché doit être un **majorant de g sur $\mathbb{R}$** ($\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq M(f)$) et ce majorant doit être **atteint** (il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $g(c) = M(f)$).

*Il s'agit d'un **exercice classique**, à connaître, dont il existe plusieurs variantes :*

si une fonction positive est continue sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$ alors cette fonction admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Ici, bien que g soit dérivable (au moins sur $\mathbb{R}^*$), le lecteur pourra remarquer, après essai, que l'absence d'informations sur la dérivabilité de f exclut une étude des variations de g par étude du signe de g'.

◇ Puisque F est une fonction de répartition, F prend ses valeurs dans $[0,1]$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq F(x) \leq 1$, et par application de l'**inégalité triangulaire** :

$$|g(x)| = \left|\frac{F(x) - F(-x)}{2x}\right| \leq \frac{F(x) + F(-x)}{|2x|} \leq \frac{1+1}{|2x|} \leq \frac{1}{|x|} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

<u>Par conséquent</u> (*et ce n'est qu'une façon de faire parmi d'autres*) on obtient, **par le théorème d'encadrement** pour les fonctions, que :

$$\textbf{(16)}\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Ceci étant, il apparaît donc que si g prend des valeurs positives et admet un maximum, celui-ci ne peut être atteint au voisinage de l'infini. Ainsi, ici :

• Sur $\mathbb{R}_+$, puisque f est positive (fonction de densité) : $g(0) = f(0) \geq 0$ et, par **positivité de l'intégrale**, le numérateur de g, $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$, est positif (les bornes sont dans le « *bon sens* »), et par suite :

$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt \geq 0$, et **par parité de g** : $g \geq 0$ aussi sur $\mathbb{R}_-^*$.

<u>**En conclusion**</u>, f étant une fonction de densité :

g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0, donc : **(17)** g est positive sur $\mathbb{R}$.

Dès lors : soit g est nulle sur $\mathbb{R}$, soit il existe x_0 tel que : $g(x_0) > 0$,

• <u>dans le premier cas</u> : $M = 0$ est un majorant atteint de g sur $\mathbb{R}$.

• <u>dans le second cas</u> : puisque g est positive et de limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geq A$, alors $0 \leq g(x) \leq g(x_0)$.

Par ailleurs, **g étant continue sur le segment $[-A, A]$** (*c.f.* **I.2.a.**) :

l'image de $[-A, A]$ est un segment que l'on peut noter $[m, M]$.

<u>**Ainsi**</u>, on a établi l'existence de M, majorant de g sur $[-A, A]$, mais aussi un majorant de g sur $\mathbb{R}$ car en dehors du segment $[-A, A]$, g est majorée par $g(x_0)$ et $g(x_0)$ est lui-même est majoré par M car $x_0 \in [-A, A]$.

<u>**De plus**</u>, M, majorant de g, est une valeur atteinte car $M \in g([-A, A])$.

<u>Par conséquent</u>, dans tous les cas de figure :

$\boxed{\text{on a montré l'existence d'un maximum sur } \mathbb{R} \text{ pour la fonction } g}$.

Ce maximum dépend de la fonction g considérée, laquelle dépend uniquement de f, on peut donc **noter $M(f)$ ce maximum**.

Enfin, en tant que maximum d'une fonction, $M(f)$ est nécessairement **unique**.

III.15.a. La densité f étant nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, on est assuré de l'existence de $E(X)$ (*i.e.* de la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$) et : $E(X) = \int_{-1}^{1} t f(t)\,dt$.

Or, puisque, conformément aux hypothèses générales de cette **PARTIE III**, on peut constater que **f est paire**, il s'ensuit que **la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire**, et par conséquent :

$$\forall A > 0, \quad \int_{-A}^{0} tf(t)\,dt = -\int_0^A tf(t)\,dt \quad \text{(changement de variable } u = -t\text{)}$$

et, **l'existence de $E(X)$ étant acquise**, par la relation de Chasles :

(18) $$E(X) = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(t)\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left(\int_{-A}^{0} f(t)\,dt + \int_0^A f(t)\,dt\right) = 0$$

Ainsi : $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } 0}$.

III.15.b. *La fonction f étant paire, on pourrait utiliser la forme obtenue au **I.1.b.** pour $g(x)$, mais il s'avère que ce n'est pas la forme la plus adaptée ici.*

◇ En reprenant la définition de $g(x)$ pour $x \neq 0$, la **parité de f** permet d'écrire :

$$\forall x \neq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2x}.\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)\,dt.$$

en utilisant la relation de Chasles ($\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$), et l'égalité : $\int_{-x}^{0} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$ (changement de variable $u = -t$ avec f paire).

Sachant que $g(0) = f(0) = 1$, par définition, sachant que la fonction g est paire, il n'y a à déterminer $g(x)$ que pour $x > 0$. Pour cela, **compte-tenu de la définition de f** (nulle sur $[1, +\infty[$), il convient de distinguer suivant que $x \geq 1$ ou non :

- si $x \in]0, 1[$: alors pour tout $t \in [0, x]$: $f(t) = 1 - t$, donc :
$$g(x) = \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}.\int_0^x (1-t)\,dt = \frac{1}{x}.\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{x}.\left[x - \frac{x^2}{2}\right] = 1 - \frac{x}{2}.$$
- si $x \geq 1$: alors pour $t \in [0, x]$, $f(t)$ vaut $(1-t)$ si $0 \leq t \leq x$, et 0 si $t > 1$ donc :
$$g(x) = \frac{1}{x}.\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}.\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{x}.\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{x}.\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2x}.$$

Ainsi, en tenant compte de la **parité de g** (*c.f.* **I.1.b.**), en notant que l'expression pour $x \in]0, 1[$ vaut encore pour $x = 0$, il vient que :

(19) $$\boxed{g(x) = 1 - \frac{|x|}{2} \text{ si } |x| \leq 1, \text{ et } g(x) = \frac{1}{2|x|} \text{ si } |x| > 1}.$$

(À noter que les deux expressions coïncident en 1, c'est cohérent avec la continuité de g sur $\mathbb{R}$)

◇ Détermination de $M(f)$: compte-tenu de (19), il est possible de **dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$**. Puisque **g est paire**, l'étude se limite à celle du comportement de g sur $\mathbb{R}_+$ (on complétera ensuite par parité).

- Monotonie de g sur $\mathbb{R}_+$: g est continue sur $\mathbb{R}$ (*c.f.* **I.1.a.**) donc sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty]$. Par ailleurs, au vu de (19), g est dérivable sur $]0, 1[$, où elle coïncide avec la fonction affine strictement décroissante $x \mapsto 1 - \frac{x}{2}$, et sur $]1, +\infty[$, où : $g'(x) = \left(\frac{1}{2x}\right)' = -\frac{1}{2x^2} < 0$. g est donc aussi strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Or, d'après le cours, si une fonction est continue sur un intervalle I et strictement décroissante sur I privé d'un (ou deux points) alors g est strictement décroissante sur I, donc : g est strictement décroissante sur $I_1 = [0, 1]$ et sur $I_2 = [1, +\infty[$.

I_1 et I_2 étant des intervalles de $\mathbb{R}$, I_1 et I_2 ayant une intersection non vide, on en déduit que : g est strictement décroissante sur $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}_+$.

Ajoutons à cela que : g est de limite nulle en $+\infty$ (*c.f.* **(16)**) (plus précisément : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$ car g est positive sur $\mathbb{R}$ - *c.f.* **(17)**), vaut $f(0) = 1$ en 0, par définition, et $\frac{1}{2}$ en 1 (*c.f.* **(19)**), et il est alors possible de donner le **tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$** (en complétant par parité) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g	0^+	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0^+

(où l'on note que la croissance ou la décroissance de g est stricte sur chaque intervalle où g est monotone.)

On peut donc conclure, au vu de ce tableau, que :

g est majorée sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$, donc : $\boxed{M(f) = 1}$.

$\boxed{\textbf{III.15.c.}}$ On accède à la loi de $Y = g(X)$, (*comme d'habitude !*), par le biais de sa fonction de répartition, que l'on notera F_Y. **Par définition** :

(20) pour tout y réel : $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(g(X) \leq y\big)$.

Il s'agit alors de déterminer l'image réciproque par g de l'intervalle $]-\infty, y]$.

En effet : $\forall \omega \in \Omega,\ \big(g(X(\omega)) \leq y\big) \Longleftrightarrow \big(X(\omega) \in g^{-1}(]-\infty,y])\big)$.

• pour $y \leq 0$ ou $y \geq 1$: on tire de l'étude des variations de g que : $g(\mathbb{R}) =]0,1]$, donc : pour $y \leq 0$: $g^{-1}(]-\infty,y]) = \emptyset$, et pour $y \geq 1$: $g^{-1}(]-\infty,y]) = \mathbb{R}$.

Ainsi, par suite :

$F_Y(y) = P\big(g(X) \leq y\big)$ vaut 0 pour $y \leq 0$, et vaut 1 et pour $y \geq 1$.

• pour $y \in]0,1[$: ***il convient de distinguer suivant la position de y par rapport à $\frac{1}{2}$***. En effet, on tire des variations de g qu'aucun réel en dehors de ceux de l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ n'a d'antécédent par g compris dans $[-1,1]$, or X peut être considérée comme à valeurs dans $[-1,1]$ car la densité f de X est nulle en dehors de $[-1,1]$, d'où la discussion suivante :

pour $0 < y < \frac{1}{2}$: $g^{-1}(]-\infty,y]) \subset \mathbb{R}\setminus[-1,1]$, et puisque f est nulle en dehors de $[-1,1]$: $P(X \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]) = 0$, donc l'inclusion précédente implique que :

$$F_Y(y) = P\big(g(X) \leq y\big) = P\big(X \in g^{-1}(]-\infty,y])\big) \leq P\big(X \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]\big) = 0.$$

Et, par suite : pour $0 < y < \frac{1}{2}$: $F_Y(y) = P\big(g(X) \leq y\big)$ vaut 0 .

pour $\frac{1}{2} < y < 1$: on peut noter que $g^{-1}(]-\infty,y])$ est la réunion des images réciproques $g^{-1}(]-\infty,\frac{1}{2}[)$ et $g^{-1}([\frac{1}{2},y])$. Or l'étude de g montre qu'il s'agit d'une union **disjointe** et par conséquent :

$$P\big(X \in g^{-1}(]-\infty,y])\big) = P\big(X \in g^{-1}(]-\infty,\tfrac{1}{2}[)\big) + P\big(X \in g^{-1}([\tfrac{1}{2},y])\big).$$

Or comme il vient d'être établi : $P\big(X \in g^{-1}(]-\infty,\frac{1}{2}[)\big) = 0$, donc, pour tout $y \in]\frac{1}{2},1[$:

(21) $P\big(X \in g^{-1}(]-\infty,y])\big) = P\big(X \in g^{-1}([\frac{1}{2},y])\big)$.

Par ailleurs, en s'appuyant toujours sur l'étude de g, les éléments de $[\frac{1}{2},1[$ ont pour antécédents des réels éléments de $[-1,1]$. Donc, pour $y \in]\frac{1}{2},1[$: $g^{-1}([\frac{1}{2},y]) \subset]-1,1[$, de sorte que : $g^{-1}([\frac{1}{2},y]) = \{x \in]-1,1[\mid \frac{1}{2} \leq g(x) \leq y\}$ et de plus, compte-tenu de l'expression de g sur $]-1,1[$, on peut préciser :

(22) $g^{-1}([\frac{1}{2},y]) = \Big\{x \in]-1,1[\ \Big|\ \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{|x|}{2} \leq y\Big\}$.

Or : $\left(\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{|x|}{2} \leq y\right) \iff \left(2(1-y) \leq |x| \leq 1\right)$, et $2(1-y)$ est compris strictement entre 0 et 1 car $y \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ donc, plus précisément :

$$\left(\tfrac{1}{2} \leq 1 - \tfrac{|x|}{2} \leq y\right) \iff \left(x \in \left]-1, -2(1-y)\right[\cup \left]2(1-y), 1\right[\right)$$

et **la réunion est disjointe**, donc, en reprenant (21) et (22), pour $y \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$:

$$P(X \in g^{-1}(]-\infty, y])) = P(X \in]-1, -2(1-y)[) + P(X \in]2(1-y), 1[),$$

et X est une V.A. à densité, de densité f, **paire** :

$$P(X \in g^{-1}(]-\infty, y])) = \int_{-1}^{-2(1-y)} f(t)\,dt + \int_{2(1-y)}^{1} f(t)\,dt = 2.\int_{2(1-y)}^{1} f(t)\,dt,$$

et compte-tenu de l'expression de f sur $[0,1]$, intervalle contenant $[2(1-y), 1]$:

$$P(X \in g^{-1}(]-\infty, y])) = 2.\int_{2(1-y)}^{1} 1 - t\,dt = 2.\left[\tfrac{1}{2}(1-t)^2\right]_{2(1-y)}^{1} = (2y-1)^2,$$

Donc, **en conclusion** : pour $\frac{1}{2} < y < 1$: $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = (2y-1)^2$.

Ainsi, si l'on reprend les valeurs trouvées pour $F_Y(y)$ suivant les valeurs de y :

F_Y est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \frac{1}{2} \\ (2y-1)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$.

Il suffit alors de dériver F_Y sur chaque intervalle sur lequel elle est dérivable, pour obtenir une densité f_Y de Y. Il vient alors :

$$\boxed{f_Y : x \longmapsto \begin{cases} 4(2y-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

◇ Existence et valeur de $E(Y)$: puisque f_Y est nulle en dehors de l'intervalle de longueur finie $[\frac{1}{2}, 1]$, $E(Y)$ existe et compte-tenu de l'expression de f_Y sur $[\frac{1}{2}, 1]$:

$$E(Y) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t.f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t.4(2t-1)\,dt = \left[8.\tfrac{t^3}{3} - 2t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \tfrac{5}{6}. \text{ Donc : } \boxed{E(Y) = \frac{5}{6}}.$$

III.16.a. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{2}.e^{-|t|}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout $A > 0$: $\displaystyle\int_0^A t.f(t)\,dt = \int_0^A \frac{1}{2}.t.e^{-|t|}\,dt = \int_0^A \frac{1}{2}.t.e^{-t}\,dt.$

Par une intégration par parties où l'on pose : $u(t) = \frac{1}{2}.t$ et $v(t) = -e^{-t}$ (fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$), on a ensuite :

$$\int_0^A t.f(t)\,dt = \int_0^A \frac{1}{2}.t.e^{-t}\,dt = \left[\frac{1}{2}.t.(-e^{-t})\right]_0^A - \int_0^A \frac{1}{2}.(-e^{-t})\,dt = \frac{A}{2}e^{-A} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-A}\right)$$

et comme : $\lim_{A\to+\infty} A.e^{-A} = \lim_{A\to+\infty} e^{-A} = 0$, il vient que :

$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

La parité de f impliquant l'imparité de $t \mapsto t.f(t)$, on en déduit que :

pour tout $B > 0$: $\displaystyle\int_{-B}^{0} t.f(t)\,dt = -\int_0^B t.f(t)\,dt$ et donc que :

$\lim_{B\to-\infty} \int_B^0 f(t)\,dt$ existe et vaut $-\frac{1}{2}$.

Par conséquent, on peut conclure que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\,dt = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to+\infty}} \int_{-B}^{A} f(t)\,dt \text{ existe et vaut : } -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}, \text{ donc : } \boxed{\begin{array}{c} E(X) \text{ existe} \\ \text{et vaut } 0 \end{array}}.$$

III.16.b. La fonction f étant paire, $g = \Phi(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$ (*c.f.* **I.1.b.**) par :

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \int_0^1 f(xu)\,du = \int_0^1 \frac{1}{2}.e^{-|x|u}\,du = \left[\frac{1}{2|x|}.(-e^{-|x|u})\right]_0^1 = \frac{1-e^{-|x|}}{2|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}}.$$

◇ Détermination de $M(f)$: sur $\mathbb{R}_+^*$, g est dérivable et :

$$g'(x) = \left(\frac{1-e^{-|x|}}{2|x|}\right)' = \frac{1}{2}.\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)' = \frac{1}{2}.\frac{e^{-x}.x-(1-e^{-x})}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{2x^2},$$

où l'on a posé : $\varphi(x) = (1+x)e^{-x} - 1$.

Ainsi, **sur $\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$**, et comme φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\varphi'(x) = \left((1+x)e^{-x} - 1\right)' = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x} < 0,$$

on en déduit que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi(0) = 0$. D'où il découle que : **g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$**.

Et donc :

$$g \text{ est majorée qur } \mathbb{R}_+ \text{ par } g(0) = \tfrac{1}{2},$$

La fonction g étant paire (*c.f.* **I.1.b.**), on peut alors conclure que :

$$\max_{x\in\mathbb{R}_-} g(x) = \max_{x\in\mathbb{R}_+} g(x) = \tfrac{1}{2}, \quad \text{d'où : } \boxed{M(f) = \tfrac{1}{2}}.$$

III.17.a. Pour que f, déjà continue et positive sur $\mathbb{R}$, soit une fonction de densité acceptable, il faut et il suffit que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et soit égale 1.

Or, pour tout $A > 0$:

$$\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A a.|t|.e^{-t^2}\,dt = \frac{a}{2}.\int_0^A 2t.e^{-t^2}\,dt = \frac{a}{2}.\left[-e^{-t^2}\right]_0^A = \frac{a}{2}.(1-e^{-A^2}).$$

Donc :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(t)\,dt \text{ existe et vaut } a/2.$$

Par **parité de f**, il s'ensuit qu'aussi : $\lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^0 f(t)\,dt$ existe et vaut $a/2$, et par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ existe et vaut : } \tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2} = a.$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } a = 1}.$$

◇ Espérance de X : comme au **III.16.a.**, on calcule, avec $a = 1$, pour tout $A > 0$:

$\int_0^A t.f(t)\,dt = \int_0^A t.|t|.e^{-t^2}\,dt = \int_0^A t^2.e^{-t^2}\,dt$, et **en intégrant par parties** cette dernière intégrale, en posant : $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{1}{2}.e^{-t^2}$:

$$\textbf{(23)} \int_0^A t.f(t)\,dt = \left[t.(-\frac{1}{2}.e^{-t^2})\right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{2}.e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}.Ae^{-A^2} + \frac{1}{2}.\int_0^A e^{-t^2}\,dt.$$

Et comme : **(24)** $\lim_{A\to+\infty} Ae^{-A^2} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x}$ (poser $x = A^2$), et comme par ailleurs, parce que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}\,dt = 1$ (intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$), on sait que :

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, donc : **(25)** $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t^2}\,dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

on peut conclure, par (24) et (25) et grâce à (23) que :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t.f(t)\,dt \text{ est convergente existe et vaut : } \tfrac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Puis comme $t \mapsto t.f(t)$ est impaire, on en tire que : $\int_{-\infty}^{0} t.f(t)\,dt$ existe et vaut $-\frac{\sqrt{\pi}}{4}$, donc : $\boxed{\text{la V.A. } X \text{ admet une espérance et celle-ci est nulle}}$.

III.17.b. D'après le **III.14.a.**, on peut obtenir l'expression de $g(x)$ pour $x \neq 0$ en déterminant d'abord F pour $x > 0$. Ici :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} |t|.e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} t.e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et comme, de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et f est paire, on déduit que : $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, on a encore :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} t.e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}.e^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{2}$$

puis, d'après le **III.14.a.**, pour tout x réel non nul :

$$g(x) = \frac{2F(|x|)-1}{2|x|} = \frac{1}{|x|}.\left(F(|x|) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{|x|}.\left(1 - \frac{e^{-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2|x|}.\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

et **en conclusion** :

$$\boxed{\text{pour tout } x \neq 0 : \ g(x) = \frac{1}{2|x|}.\left(1 - e^{-x^2}\right), \quad \text{et pour } x = 0 : \ g(0) = f(0) = 0}.$$

III.17.c. On recherche le maximum de g comme au **III.16.b.**, en étudiant g sur $\mathbb{R}_+^*$ où :

$$g'(x) = \left(\frac{1-e^{-x^2}}{2x}\right)' = \frac{1}{2}.\frac{2x.e^{-x^2}.x-(1-e^{-x^2}).1}{x^2} = \frac{\eta(x)}{2x^2}.$$

en posant : $\eta(x) = (2x^2+1).e^{-x^2} - 1$.

La fonction auxilliaire η a, sur $\mathbb{R}_+$, une dérivée donnée par :

$$\eta'(x) = 4x.e^{-x^2} + (2x^2+1).(-2x)e^{-x^2} = -2x(2x^2-3).e^{-x^2}$$

Ce qui permet d'étudier le signe de η', puisque : $\eta'(x) = -4x(x-\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{\sqrt{3}}{2}).e^{-x^2}$, et après calculs des limites en 0 et $+\infty$, de donner les variations de η sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		$\sqrt{3}/2$		$+\infty$
η	0^+	$\nearrow$	$\eta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\searrow$	-1

On déduit des variations de η, que, sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique réel $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour lequel η s'annule et que $\eta > 0$ sur $]0,\alpha[$ et $\eta < 0$ sur $]\alpha,+\infty[$.

Le réel α est l'unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation : $\eta(x) = 0$, *i.e.* de $(2x^2+1).e^{-x^2}-1$.

Un **programme de résolution approchée d'équation** (dichotomie, Newton,...) donne pour valeur approchée de α : $\alpha \simeq 1,1209$ à 10^{-4} près.

Comme η donne le signe de g' sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut ensuite donner les variations de g sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		α		$+\infty$
g	$g(0)=0$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0^+

Le maximum de g sur $\mathbb{R}_+$ est donc atteint en α et il s'agit de $M(f)$ car g est paire, donc : $M(f) = g(\alpha)$, et un calcul numérique donne :

$$\boxed{M(f) = g(\alpha) \simeq g(1,1209) \simeq 0,3 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}.$$

III.18. D'une façon générale, les résultats obtenus sur g lorsque f est paire donnent que g est continue sur $\mathbb{R}$, positive (considérer l'expression de g à l'aide de F (*c.f.* **III.14.a.**), sachant que F étant une fonction de répartitition F prend ses valeurs dans $[0,1]$). Dans ces conditions :

g est peut être considérée comme une fonction de densité si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existe et vaut 1.

On peut constater, au cas par cas, que déjà dans tous les exemples considérés, cette intégrale n'est pas convergente, mais **dans le cas général** aussi, c'est-à-dire quelle que soit la fonction de densité, paire, f, considérée, c'est encore vrai. **En effet** :

puisque sur $\mathbb{R}_+^*$: $g(x) = \frac{2F(x)-1}{2x}$ (*c.f.* III.14.a.), puisque : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ (car F est une fonction de répartition), il vient : $\lim_{x\to+\infty} 2F(x) - 1 = 1$ et donc : il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A,\ 2F(x) - 1 \geq \frac{1}{2}$, *i.e.* tel que : $g(x) \geq \frac{1}{4x}$ d'où l'on tire, **par croissance et linéarité de l'intégrale**, que :

$$\forall x \geq A : \quad \int_A^x g(x)\,dx \geq \frac{1}{4}\int_A^x \frac{1}{t}\,dt$$

et comme : $\lim_{x\to+\infty} \int_A^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} [\ln t]_A^x = +\infty$, on conclut que :

pour toute fonction de densité paire f : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ est divergente.

Ainsi :

$$\boxed{\text{dans le cas général, } g \text{ ne peut être considérée comme une fonction de densité}}.$$

E.N.S.T.I.B. 97 Étude des polynômes de Tchebychev — Durée 2 h 00

PARTIE I

1.– Soit n un entier positif ou nul. On pose, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$P_n(x) = \cos n(\mathrm{Arccos} x)$$

Démontrer que pour tout $n > 0$ on a la relation :

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

En déduire que P_n est un polynôme dont on précisera le degré et le cœfficient du terme de plus haut degré.
Calculer les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4. Déterminer leurs racines.
Étudier la parité des polynômes P_n.
Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$ pour tout entier $n \geq 0$.

2.– On veut démontrer que pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n possède n racines distinctes toutes situées dans l'intervalle ouvert $]-1, +1[$ et que ces racines séparent les $n+1$ racines distinctes de P_{n+1}.

a) Formuler une hypothèse de récurrence convenable sur les racines de P_n et P_{n-1}.
On désigne par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ les racines de P_{n-1} et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ celles de P_n, toutes ces racines étant rangées dans l'ordre croissant.
Comparer les signes de $P_{n+1}(1)$ et $P_{n+1}(\beta_n)$. Conclure sur l'existence d'au moins une racine de P_{n+1} entre β_n et 1.

b) Conclure de manière analogue entre (-1) et β_1, puis entre deux racines consécutives β_i et β_{i+1} de P_n.

c) Terminer la récurrence.

PARTIE II

1.– Soient m et n deux entiers distincts ou non. A l'aide de la question **I.1.–**, calculer les intégrales :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

où l'intégrale impropre ci-dessus est définie par

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{(X\to-1^+;Y\to+1^-)} \int_X^Y \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

Faire le changement de variable $x = \cos\varphi$.

2.– Soit N un entier et soit E_N l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à N. Que peut-on dire des polynômes $(P_n)_{0\leq n\leq N}$ relativement à l'espace vectoriel E_N.

Soit k un entier supérieur strictement à N. Démontrer

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^N P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 0$$

3.– Vérifier que P_n satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + xy' - n^2 y = 0$$

4.– Soit U l'application de l'espace E_N définie par

$$U(Q) = (x^2-1)Q'' + xQ' \qquad \forall Q \in E_N$$

où Q' et Q'' désignent les polynômes dérivées première et seconde du polynôme Q.
Vérifier que l'application U est linéaire de l'espace vectoriel E_N dans lui-même.
Démontrer que U est diagonalisable et exprimer une base de vecteurs propres.

Corrigé

.PARTIE I.

I.1. Pour tout $x \in [0,1]$, en posant $\alpha = \text{Arccos}(x)$, **par définition de la fonction Arccos** : $\cos(\alpha) = x$, et, par définition de $P_n(x)$, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} 2x.P_n(x) - P_{n-1}(x) &= 2x.\cos\left(n.\text{Arccos}(x)\right) - \cos\left((n-1).\text{Arccos}(x)\right) \\ &= 2x.\cos(n\alpha) - \cos\left((n-1).\alpha\right) = 2x.\cos(n\alpha) - \cos(n\alpha - \alpha). \end{aligned}$$

Alors, **en appliquant la formule** : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, avec $a = n\alpha$ et $b = \alpha$, il vient, en rappelant que $x = \cos(\alpha)$:

$$2x.P_n(x) - P_{n-1}(x) = 2\cos(\alpha).\cos(n\alpha) - \left(\cos(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(n\alpha)\sin(\alpha)\right).$$

et après développement et simplification :

$$2x.P_n(x) - P_{n-1}(x) = \cos(\alpha).\cos(n\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)$$

où l'on reconnaît, grâce à la formule : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, que :

$$2x.P_n(x) - P_{n-1}(x) = \cos\left((n\alpha)+\alpha\right) = \cos\left((n+1)\alpha\right).$$

<u>**Ainsi**</u>, puisque : $\alpha = \text{Arccos}(x)$, et par définition de $P_{n+1}(x)$, **il apparait que** :

(1) $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall n \geq 1,\ \ 2x.P_n(x) - P_{n-1}(x) = \cos\left((n+1)\text{Arccos}(x)\right) = P_{n+1}(x)}$.

▪ **Notons maintenant** qu'il n'est pas cohérent de ne définir les fonctions P_n que sur $[0,1]$ dans la mesure où l'on s'y intéresse ensuite sur $[-1,+1]$. Il s'agit manifestement d'une ***erreur d'énoncé*** que l'on corrige en faisant **remarquer** que

les résultats précédents sont encore valables pour tout x de $[-1,+1]$.

◇ ***Les trois résultats suivants se prêtent à une démonstration par récurrence unique.*** *Après examen de la relation de récurrence, ou après avoir déterminé les deux ou trois premiers polynômes de la suite, il apparaît raisonnable de* **poser pour hypothèse de récurrence au rang n** ($n \geq 1$) :

$(\mathcal{H}_n)$: $\left(\begin{array}{c}\underline{\text{pour tout } k \text{ compris entre } 0 \text{ et } n} : P_(x) \text{ est un} \\ \text{polynôme en } x \text{ de degré } n \text{ et de cœfficient dominant } 2^n\end{array}\right)$.

- Au rang $n=1$: pour tout $x \in [-1,+1]$, par définition, $P_0(x) = \cos(0.\text{Arccos}(x))$, $P_0(x)$ est donc une constante, égale à $\cos 0 = 1$, donc : P_0 est la fonction $x \mapsto 1$.

  De même : $P_1(x) = \cos(1.\text{Arccos}(x)) = \cos(\text{Arccos}(x))$, et comme, par définition de la fonction Arccos : $\cos \circ \text{Arccos} = id$ sur $[-1,+1]$, pour tout x de $[-1,+1]$, $P_1(x) = x$. Donc : P_1 est la fonction $x \mapsto x$.

  Par conséquent, au vu de P_0 et P_1 : on constate que $(\mathcal{H}_1)$ est vraie .
- Si pour un entier $n \geq 1$, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie : alors, **en vertu de l'hypothèse de récurrence**, il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ tels que, pour tout x de $[0,1]$: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $P_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$. Par suite, en vertu de la relation (1) : $\forall x \in [-1,+1],\ P_{n+1}(x) = 2x.\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$

  Donc, en réarrangeant les termes, pour tout $x \in [-1,+1]$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} 2a_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \\ &= \textstyle\sum_{k'=1}^{n+1} 2a_{k'-1} x^{k'} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \quad \left(\begin{array}{c}\text{changement d'indice } k' = k+1 \\ \text{dans la première somme}\end{array}\right) \\ &= 2a_n x^{n+1} + \textstyle\sum_{k=0}^{n} (2a_{k-1} - b_k).x^k \end{aligned}$$

  Ainsi, on constate que, **comme les P_k, pour $0 \leq k \leq n$** (d'après $(\mathcal{H}_n)$) :

  P_{n+1} est une fonction polynomiale de degré $n+1$ et de cœfficient dominant (celui de x^{n+1}) égal à $2a_n$, *i.e.* égal à 2^{n+1} puisque $a_n = 2^n$ d'après $(\mathcal{H}_n)$.

  Par conséquent : $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Ainsi, **par récurrence**, il est établi que : $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$. Il s'ensuit que :

pour tout $n \geq 0$: P_n est une fonction polynomiale sur $[-1,+1]$, de degré n et de cœfficient dominant 2^n

.

Désormais, même si l'énoncé ne l'explicite pas, **on confondra P_n et la fonction polynomiale dont P_n n'est que la restriction à** $[-1,+1]$.

◇ **On a déjà déterminé P_0 et P_1**. Les polynômes P_2, P_3 et P_4 se déterminent alors grâce à la relation (1). Pour tout $x \in [-1,+1]$:

- $P_2(x) = 2x.P_1(x) - P_0(x)$, donc : $P_2(x) = 2x.x - 1 = 2x^2 - 1$.
- $P_3(x) = 2x.P_2(x) - P_1(x)$, donc : $P_3(x) = 2x.(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$.
- $P_4(x) = 2x.P_3(x) - P_2(x)$, ou encore : $P_4 = 2x.(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1)$

  donc : $P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

Les **racines de P_2** se trouvent aisément en résolvant l'équation $P_2(x) = 0$, et **celles de P_3** de même, en commençant par factoriser par x. **Pour P_4**, l'équation $P_4(x) = 0$ est une équation "**bicarrée**", que l'on résout en posant : **(2)** $z = x^2$. **Alors** :

(3) $\big(x \text{ solution de } (E) : P_3(x) = 0\big) \iff \big(z \text{ solution de : } (E') : 8z^2 - 8z + 1 = 0\big)$.

Le discriminant de (E') valant : $\Delta = 8^2 - 4.8.1 = 32 = (4\sqrt{2})^2$, les solutions de (E') sont : $z_1 = \frac{8+4\sqrt{2}}{2.8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $z_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Donc, par (2) et (3) :

(4) $\big(x \text{ solution de } (E) : P_3(x) = 0 \big) \iff \big(x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ ou } x^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \big)$.

<u>**Ainsi**</u>, donnés **sous forme développée et sous forme factorisée** (pour mettre en évidence les racines), les quatre premiers polynômes de la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = x \quad ; \quad P_2(x) = 2x^2 - 1 = 2.\Big(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \\ P_3(x) = 4x^3 - 3x = 4x.\Big(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad ; \quad P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \text{factorisable en : } P_4(x) = 8.\Big(x + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\Big)\Big(x - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\Big)\Big(x + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Big)\Big(x - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Big) \end{array}}.$$

◇ Pour les valeurs en -1, 0 et 1, et en même temps pour la parité, **en considérant les expressions développées ci-dessus**, il vient, en calculant pour $n = 0, 1, \ldots 4$, de poser pour **hypothèse**, pour tout rang $k \geq 0$:

$$(\mathcal{H}'_k) : \left(\begin{array}{l} P_k \text{ a même parité que } k, \quad P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k \\ P_k(0) = 0 \text{ si } k \text{ est impair } (k = 2p+1) \text{ et } (-1)^p \text{ si } k \text{ est pair } (k = 2p) \end{array} \right).$$

On peut alors envisager une démonstration sur le **principe de la récurrence forte** :

- <u>$(\mathcal{H}'_k)$ est vraie aux rangs 0 et1</u> : comme on le constate **par examen direct** des <u>polynômes P_0 et P_1</u> : $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = 2x^2 - 1$.
- <u>Si $(\mathcal{H}'_k)$ est vraie jusqu'à un rang $n \geq 2$</u> : alors, P_{n-1} et P_n ont même parité que <u>$n-1$ et n, respectivement, ce que l'on</u> peut traduire par :

  $\forall x \in [-1, +1], \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, et : $P_{n-1}(-x) = (-1)^{n-1} P_{n-1}(x)$,

  d'où il découle, **par la relation (1)**, que, pour tout x de $[-1, +1]$:

  $$\begin{aligned} \underline{P_{n+1}(-x)} &= 2(-x).P_n(-x) - P_{n-1}(-x) = -2x(-1)^n P_n(x) - (-1)^{n-1} P_{n-1}(x) \\ &= (-1)^{n+1} 2x.P_n(x) - (-1)^{n-1} P_{n-1}(x) = \underline{(-1)^{n+1} P_{n+1}(x)}. \end{aligned}$$

  On a ainsi montré que : P_{n+1} aussi à même parité que $n+1$.

  Ensuite, **toujours en vertu de (1) et de l'hypothèse de récurrence** :

  $$P_{n+1}(1) = 2.1.P_n(1) - P_{n-1}(1) = 2.1.1 - 1 = 1,$$

  et en s'appuyant, par exemple, sur le résultat déjà obtenu sur la parité de P_{n+1} :

  $$P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(1) = (-1)^{n+1}.$$

  Enfin, <u>si $n+1$ est impair</u>, **par l'imparité avérée de P_{n+1}** : $P_{n+1}(0) = 0$, et <u>si $n+1$ est pair</u>, de la forme $n + 1 = 2p$:

  $n-1$ est pair et s'écrit $n-1 = 2p-2 = 2(p-1)$ donc $P_{n-1}(0) = (-1)^{p-1}$ (d'après $(\mathcal{H}'_{n-1})$) et par (1) : $P_{n-1}(0) = 2.0.P_n(0) - P_{n)1}(0) = 0 - (-1)^{p-1} = (-1)^p$.

  <u>**ce qui achève d'établir que**</u> : $(\mathcal{H}'_{n+1})$ est vraie.

Ainsi, $(\mathcal{H}'_k)$ est vraie jusqu'au rang 2, et si $(\mathcal{H}'_k)$ est vraie jusqu'à un rang $n \geq 2$, alors elle est vraie jusqu'au rang $n+1$, donc, **par le prinicipe de récurrence forte** :

$$(\mathcal{H}_n) \text{ est vraie pour tout entier } n \geq 0.$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{pour tout } n \geq 0} : & P_n \text{ a même parité que } n, \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \text{ et} \\ & P_n(0) \text{ vaut } 0 \text{ si } n \text{ est impair, et } (-1)^p \text{ si } n \text{ est pair } (n = 2p) \end{array}}.$$

I.2.a. *C'est l'énoncé lui-même qui nous souffle l'hypothèse de récurrence à formuler,* il suffit de d'énoncer la propriété à démontrer, (pour tout $n \geq 1$), relativement à P_n et P_{n-1} au lieu de P_{n+1} et P_n, *i.e.* il suffit d'y changer n en $n-1$, en conséquence de quoi l'hypothèse de récurrence sera à vérifier à partir du rang 2 au lieu de 1.
On posera donc pour **hypothèse de récurrence à un rang $n \geq 2$** :

$$\boxed{(\tilde{\mathcal{H}}_n) : \begin{pmatrix} P_n \text{ et } P_{n-1} \text{ possèdent respectivement } n \text{ et } n-1 \text{ racines, toutes situées} \\ \text{dans } [-1,+1] \text{ et les } n-1 \text{ racines de } P_{n-1} \text{ séparent les } n \text{ racines de } P_n \end{pmatrix}}.$$

On suppose désormais pour la fin de cette question **I.2.a.** et pour la question **I.2.b.**, **que l'entier n considéré est ≥ 1 et tel que $(\tilde{\mathcal{H}}_n)$ soit vérifiée.**
Livrons dès maintenant à ***quelques remarques très utiles pour la suite*** *de cette question I.2.* : $(\tilde{\mathcal{H}}_n)$ étant supposée vraie, en notant comme indiqué :

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ les $n-1$ racines de P_{n-1} et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les n racines de P_n,

le fait que les $n-1$ racines distinctes de P_{n-1} séparent les n racines distinctes de P_n se traduit par l'ensemble des inégalités suivantes :

(5) $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots \alpha_{i-1} < \beta_i < \alpha_i < \beta_{i+1} \ldots \beta_{n-1} < \alpha_{n-1} < \beta_n$.

De plus, **P_{n-1} et P_n étant respectivement des polynômes de degrés $n-1$ et n**, les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont respectivement les seules racines de P_{n-1} et de P_n. Comme **on a déterminé l'expression du cœfficient dominant** de tous les polynômes P_k $(k \geq 0)$ (*c.f.* **I.1.**), on en déduit que P_{n-1} et P_n se factorisent comme suit :

(6) $P_{n-1}(x) = 2^{n-1}.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})$
(7) $P_n(x) = 2^n.(x-\beta_1).(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_{n-1}).(x-\beta_n)$.

Comparons maintenant les signes de $P_{n+1}(1)$ et $P_{n+1}(\beta_n)$.

◇En vertu du **I.1**, tout d'abord, $P_n(1) > 0$ car $P_n(1) = 1$. Quant au signe de $P_n(\beta_n)$, de (4) l'on tire que : $P_{n+1}(\beta_n) = 2.\beta_n.P_n(\beta_n) - P_{n-1}(\beta_n)$, c'est-à-dire, puisque β_n par définition est racine de P_n : $P_{n+1}(\beta_n) = -P_{n-1}(\beta_n)$. **Or**, en considérant (6), pour $x = \beta_n$, puisque $\beta_n > \alpha_i$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$ (*c.f.* **(5)**) : $P_{n-1}(\beta_n) > 0$ et par suite : $P_{n+1}(\beta_n) = -P_{n-1}(\beta_n) < 0$.
Ainsi :

(8) $\boxed{P_{n+1}(1) \text{ et } P_{n+1}(\beta_n) \text{ sont de signes contraires et non nuls}}$.

Par suite, P_n étant une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$, **par le théorème des valeurs intermédiaires**, l'image, notée J, de l'intervalle $]\beta_n, 1[$(*) par la fonction P_{n+1} est un intervalle. **Or**, en vertu de (8), J contient deux réels non nuls de signe contraire, donc, **J étant un intervalle de $\mathbb{R}$**, nécessairement :

$J = P_{n+1}(]\beta_n, 1[)$ contient 0, donc : 0 admet un antécédent par P_{n+1} dans $]\beta_n, 1[$.

Par conséquent, **on en conclut que** :

$$\boxed{P_{n+1} \text{ admet au moins une racine dans l'intervalle }]\beta_n, 1[}.$$

I.2.b. De la même façon, on a montré au **I.1.** que : $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$, et **par (4)** : $P_{n+1}(\beta_1) = 2.\beta_1.P_n(\beta_1) - P_{n-1}(\beta_1) = -P_{n-1}(\beta_1)$, car, par définition, β_1 est racine de P_n. Puis, cette fois, en considérant (7), pour $x = \beta_1$, puisque $\beta_1 < \alpha_i$ $(\forall i \in [\![1, n-1]\!])$, il apparaît que $P_{n_1}(\beta_1)$ est le produit de 2^{n-1} et de $n-1$ facteurs $\beta_1 - \alpha_i$, tous strictement négatifs, donc : $P_{n-1}(\beta_n)$ est non nul et

(*) On rappelle que d'après $(\tilde{\mathcal{H}}_n)$ supposée vraie : $\beta_n < 1$

du signe de $(-1)^{n-1}$, et par suite : $P_{n+1}(\beta_n) = -P_{n-1}(\beta_n)$ est non nul et du signe de $(-1)^n$ donc de signe opposé au signe de $P_{n-1}(-1)$.

<u>**Ainsi**</u> : $P_{n+1}(1)$ et $P_{n+1}(\beta_n)$ sont de signes contraires et non nuls .

Par une argumentation semblable à la précédente, s'appuyant sur la **continuité de P_{n+1} sur $\mathbb{R}$** et le **théorème des valeurs intermédiaires**, on en conclut que :

$\boxed{P_{n+1} \text{ admet au moins une racine dans l'intervalle }]-1,\beta_1[}$.

◇ Enfin, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, **par (4)** et parce que **β_i est racine de P_n** :

$$P_{n+1}(\beta_i) = 2.\beta_i.P_n(\beta_i) - P_{n-1}(\beta_i) = -P_{n-1}(\beta_i).$$

et **par (6)** :

$P_{n-1}(\beta_i)$ est **non nul** et **du signe du produit** $(\beta_i-\alpha_1).(\beta_i-\alpha_2)\ldots(\beta_i-\alpha_{n-1})$, où, l'on reconnaît, **par (5)**, que le produit se scinde en deux sous-produits : $\prod_{k=1}^{i-1}(\beta_i-\alpha_k)$ et $\prod_{k=i}^{n-1}(\beta_i-\alpha_k)$, composés respectivement de **$(i-1)$ facteurs strictement positifs** et de $(n-1)-(i)+1 = $ **$n-i$ facteurs strictement négatifs.**

<u>**En conséquence**</u>, pour β_i, $1 \le i \le n$:

$P_{n-1}(\beta_i)$ est non nul et du signe de $(-1)^{n-i}$,

et donc aussi pour β_{i+1} si $1 \le i \le n-1$:

$P_{n-1}(\beta_{i+1})$ est non nul et du signe de $(-1)^{n-(i+1)} = (-1)^{n-i+1}$.

<u>Ainsi</u>, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, $P_{n-1}(\beta_i)$ et $P_{n-1}(\beta_{i+1})$ sont **non nuls** et **de signes contraires**, et par le théorème des valeurs intermédiaires, comme précédemment :

$\boxed{P_{n+1} \text{ admet au moins une racine comprise strictement entre } \beta_i \text{ et } \beta_{i+1}}$.

I.2.c. Ainsi, on a montré, par les résultats du **I.2.a.** et du **I.2.b.**, que :

<u>si $(\tilde{\mathcal{H}}_n)$ est vraie pour un entier $n \ge 2$</u> : alors **P_{n+1} admet au moins $n+1$ racines**, que l'on peut noter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{n+1}$, comprises strictement respectivement entre -1 et β_1, β_2 et β_3, ..., β_{n-1} et β_n, et entre β_n et 1. On a donc aussi montré que **les racines de P_{n+1} sont situées dans l'intervalle $]-1,+1[$** et **séparent les racines de P_n.**

<u>Ainsi</u>, il a été établi que, pour tout $n \ge 2$: $(\tilde{\mathcal{H}}_n)$ vraie implique $(\tilde{\mathcal{H}}_{n+1})$ vraie. Et comme, par ailleurs, **il est de vérification immédiate que $(\tilde{\mathcal{H}}_2)$ est vraie**, (sachant (*c.f.* **I.1.**) que P_1 admet pour unique racine 0, tandis que les racines de P_2 sont $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$), on peut conclure, **par le principe de récurrence**, que :

$\boxed{(\tilde{\mathcal{H}}_n) \text{ est vraie pour tout } n \ge 2\text{, ce qui établit le résultat demandé}}$.

.PARTIE II.

II.1. Pour tous m et n, sur $]-1,+1[$, la fonction $\varphi : x \longmapsto P_m(x)P_n(x)/\sqrt{1-x^2}$ est continue comme quotient d'une fonction continue (polynomiale) et d'une fonction composée de fonctions continues ne s'annulant pas sur $]-1,+1[$. Donc :

$\forall (X,Y) \in]-1,+1[$, l'intégrale $\int_X^Y P_m(x)P_n(x)/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe.

En revanche, la fonction φ n'est pas définie en -1 et en $+1$, donc l'intégrale $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ est doublement impropre et existe si et seulement si la limite de $\int_X^Y P_m(x)P_n(x)/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe pour X tendant vers -1, et pour Y tendant vers $+1$.

Pour $(X,Y) \in]-1,+1[$, et l'intégrale $\int_X^Y \varphi(x)\,dx$, la fonction $\varphi \mapsto x = \cos\varphi$ de $]0,\pi[$ sur $]-1,+1[$ définit un le **changement de variable** de classe C^1 et par conséquent acceptable, pour lequel on a :

$$\begin{cases} Y = \cos\varphi_1 \\ X = \cos\varphi_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_1 = \text{Arccos}Y \\ \varphi_2 = \text{Arccos}X \end{cases}, \quad dx = d(\cos\varphi) = (-\sin\varphi)d\varphi,$$

et, pour tout x appartenant à $[X,Y]$, **par définition des polynômes P_n** $(n \geq 0)$:

$P_n(x) = \cos\left(n.\text{Arccos}(x)\right) = \cos\left(n.\varphi\right)$, car sur $[0,\pi]$: $(\text{Arccos}) \circ (\cos) = id$.

et : $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\sin^2\varphi} = |\sin\varphi| = \sin\varphi$, car $\sin \geq 0$ sur $[0,\pi]$.

__En conséquence__, la fonction sinus étant strictement positive sur $[X,Y] \subset]-1,+1[$:

$$\int_X^Y \varphi(x)\,dx = \int_{\text{Arccos}X}^{\text{Arccos}Y} \frac{\cos(m\varphi).\cos(n\varphi)}{\sin\varphi} \sin\varphi\, d\varphi = \int_{\text{Arccos}X}^{\text{Arccos}Y} \cos(m\varphi).\cos(n\varphi)\, d\varphi.$$

et, par application de la formule : $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}.\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$:

$$\int_X^Y \varphi(x)\,dx = \int_{\text{Arccos}X}^{\text{Arccos}Y} \frac{1}{2}.\left[\cos\left((m+n)\varphi\right) + \cos\left((m-n)\varphi\right)\right]\, d\varphi.$$

Puis, ***en prenant soin de distinguer les cas***, puisque :

$\varphi \mapsto \cos(k\varphi)$ admettant pour primitive : $\varphi \mapsto \varphi$ si $k=0$, et $x \mapsto \frac{\sin(k\varphi)}{k}$ si $k>0$,

comme pour $m,n \in \mathbb{N}$: $(m+n=0) \iff (m=n=0)$ et $(m-n=0) \iff (m=n)$,

il vient :

$$\int_X^Y \varphi(x)\,dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}.\frac{\sin[(m+n).\varphi]}{m+n} + \frac{1}{2}.\frac{\sin[(m-n).\varphi]}{m-n}\right]_{\text{Arccos}X}^{\text{Arccos}Y}, & \text{si } m \neq n, \\ [\varphi]_{\text{Arccos}X}^{\text{Arccos}Y}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Les fonctions Arccos et sinus étant, respectivement, continue sur l'intervalle **fermé** $[-1,+1]$ (donc en -1 et 1), et continue sur $\mathbb{R}$, il vient :

- __pour $m=n$__ : $\lim\limits_{X\to-1^+\,;\,Y\to1^-} \int_X^Y \varphi(x)\,dx = \text{Arccos}(1) - \text{Arccos}(-1)$, donc :

  $$\lim_{X\to-1^+\,;\,Y\to1^-} = \pi - (-\pi) = 2\pi,$$

- __pour $m \neq n$__ : pour X tendant vers -1^+ ou Y tendant vers $+1^-$, les "sinus" du crochet tendent chacun vers la valeur du sinus pour un multiple de π, *i.e.* vers 0, donc :

  $$\lim_{X\to-1^+\,;\,Y\to1^-} \int_X^Y \varphi(x)\,dx = 0.$$

__Ainsi__, il est acquis que :

$\boxed{\text{pour tout } (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \int_{-1}^1 \frac{P_m(x)P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ existe, et vaut : } 2\pi \text{ si } m=n \text{ et } 0 \text{ sinon}}$.

II.2. Puisque, d'après le **I.1.** : $\forall n \geq 0$, $d^\circ P_n = n$, les polynômes de la famille $\mathcal{F} = (P_n)_{0\leq n\leq N}$ sont de **degrés échelonnés** et **inférieurs à N**, ils forment une **famille libre** de vecteurs de l'*e.v.* E_N.

Comme, par ailleurs : $\dim E_N = N+1$ et Card $\mathcal{F} = N+1$, il s'ensuit que :

$\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} = (P_n)_{0\leq n\leq N} \text{ constitue une base de } E_N}$.

◇ On déduit du fait que $\mathcal{F}$ est une base de E_N, que, pour tout $k > N \geq 0$:

$x \mapsto x^N \in E_N$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Il existe donc $N+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_N$, tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^N = \sum_{l=O}^{N} a_l P_l(x)$, ce qui, **par linéarité de l'intégrale**, chacune des intégrales impropres au membre de droite étant convergente, donne :

$$\forall k > N,\ \int_{-1}^{1} \frac{x^N P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sum_{l=0}^{N} a_l P_l(x).\frac{P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{N} a_l.\int_{-1}^{1} \frac{P_l(x)P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

On conclut alors en invoquant le **II.1.**, selon lequel, pour $k > N$, puisqu'en ce cas $l \neq k$ pour tout $l \in [\![0, N]\!]$, **les intégrales de la somme sont nulles**, ce qui établit que :

$$\boxed{\forall k > N \geq 0,\quad \int_{-1}^{1} \frac{x^N P_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0}.$$

$\boxed{\textbf{II.3.}}$ Pour tout $n \geq 0$, sachant que la fonction Arccos est dérivable sur $]-1, +1[$, avec pour dérivée : $\mathrm{Arccos}'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, en revenant à sa définition (*c.f.* **I.1.**), la fonction P_n apparaît comme une composée des fonctions $x \mapsto m.\mathrm{Arccos}(x)$ et cosinus, deux fois dérivables sur $]-1, +1[$ et $\mathbb{R}$, respectivement, et à ce titre $\boldsymbol{P_n}$ **est deux fois dérivable** sur $]-1, +1[$, et ses dérivées première et seconde y sont données par :

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \big(n.\mathrm{Arccos}'(x)\big).\cos'\!\big(\mathrm{Arccos}(x)\big) = \tfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}.\big(-\sin\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big)\big)\\
&= \tfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}.\sin\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big)\\
P_n''(x) &= \Big(\tfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\Big)'.\sin\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big) + \tfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}.\big(\sin\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big)\big)'\\
&= (-n)\Big(-\tfrac{1}{2}\tfrac{(-2x)}{(1-x^2)^{3/2}}\Big).\sin\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big) + \Big(\tfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2.\cos\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big)\\
&= \tfrac{1}{x^2-1}.\Big(x.\tfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}.\sin\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big) - n^2.\cos\big(n.\mathrm{Arccos}(x)\big)\Big)
\end{aligned}$$

On peut alors, en formant et en simplifiant l'expression $(x^2-1).P_n''(x) + x.P_n'(x)$, constater qu'**effectivement** :

$$\boxed{\forall n \geq 0,\ \forall x \in\ ]-1, +1[\ :\ (x^2-1).P_n''(x) + x.P_n'(x) - n^2.P_n(x) = 0}.$$

$\boxed{\textbf{II.4.}}$ Nature de U : pour tout polynôme Q, Q' et Q'' sont encore des polynômes et :

$$\mathrm{d}^\circ(x^2-1)Q'' = \mathrm{d}^\circ(x^2-1) + \mathrm{d}^\circ Q'' = 2 + \mathrm{d}^\circ Q'' \quad ; \quad \mathrm{d}^\circ(xQ) = \mathrm{d}^\circ x + \mathrm{d}^\circ Q'$$

et pour $Q \in E_N$: $\quad \mathrm{d}^\circ Q' \leq n-1$ et $\mathrm{d}^\circ Q'' \leq n-2$

(formules tout à fait générales si l'on se rappelle que : $\mathrm{d}^\circ P = -\infty$ si $P = 0$),

donc, pour tout $Q \in E_N$, puisqu'aussi : $\forall P_1, P_2 \in E_N,\ \mathrm{d}^\circ P_1P_2 = \mathrm{d}^\circ P_1 + \mathrm{d}^\circ P_2$:

$$\mathrm{d}^\circ U(Q) = \mathrm{d}^\circ(x^2-1)Q'' + xQ' \leq n, \text{ de sorte que : } \boxed{U(E_N) \subset E_N}.$$

• Par ailleurs, par **linéarité de la dérivation** (qui entraîne celle de la dérivée seconde, par composition), pour tout couple (Q_1, Q_2) de polynômes de E_N et tout λ réel :

$$\begin{aligned}
U\big(Q_1 + \lambda.Q_2\big) &= (x^2-1).\big(Q_1 + \lambda.Q_2\big)'' + x.\big(Q_1 + \lambda.Q_2\big)'\\
&= (x^2-1).\big(Q_1'' + \lambda.Q_2''\big) + x.\big(Q_1' + \lambda.Q_2'\big)\\
&= \big((x^2-1).Q_1'' + xQ_1'\big) + \lambda.\big((x^2-1).Q_2'' + xQ_2'\big).
\end{aligned}$$

Donc, on vérifie que :

$$\forall (Q_1, Q_2) \in E_N, \forall \lambda \in \mathbb{R} : U\big(Q_1 + \lambda.Q_2\big) = U(Q_1) + \lambda.U(Q_2),$$

ce qui établit que : $\boxed{U \text{ est linéaire}}$, et puisqu'aussi : $U(E_N) \subset E_N$, on a que :

U est un endomorphisme de E_N.

◇ *Étant avéré que U est un* ***endomorphisme*** *de E_N, on peut se poser le problème de sa diagonalisabilité.*

En exprimant le résultat obtenu à la question **II.2.**, à l'aide de U, il vient :

$\forall\, n \in [\![0, N]\!], \forall\, x \in\,]-1, +1[,\ \ [U(P_n)](x) = (x^2 - 1)P_n''(x) + xP_n'(x) = n^2.P_n(x).$

L'égalité n'est, à ce stade, **vérifiée que sur $]-1, +1[$ et non sur $\mathbb{R}$.**

• Cependant, pour tout n compris entre 0 et N, la fonction $U(P_n) - n^2.P_n$ étant polynomiale, élément de E_N, et nulle sur $]-1, +1[$:

le polynôme $U(P_n) - n^2P_n$ est de degré au plus N et admet une infinité de racines, donc : $U(P_n) - n^2.P_n$ est le polynôme nul, *i.e.* : $U(P_N) = n^2.P_n$

Ainsi, **il apparaît que** :

P_n est un vecteur propre pour U, associé à la valeur propre n^2.

On a donc affaire avec la famille $\mathcal{F} = (P_N)_{0 \leq n \leq N}$, a une **base** de E_N (*c.f.* **II.2.**), **constituée de vecteurs propres**, ce qui assure que :

$\boxed{\text{$U$ est un endomorphisme de E_N, diagonalisable, pour lequel la famille $\mathcal{F} = (P_N)_{0 \leq n \leq N}$ constitue une base de vecteurs propres}}$.

E.N. Vétérinaires 97 — Les lois de la jungle : probabilités discrètes et continues — Durée 2 h 00

La partie A est indépendante de la suite du problème

Partie A

La nuit, dans la savane, le lion se rend à la rivière pour boire et y reste un quart d'heure.
Après de nombreuses observations, on estime que l'instant T d'arrivée du lion à la rivière se situe entre 0 et 2 heures. T, exprimée en heures, est une variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{si } t \in]-\infty, 0[, & f(t) = 0 \\ \text{si } t \in [0, 2], & f(t) = \dfrac{3}{4}t(2-t) \\ \text{si } t \in]2, +\infty[, & f(t) = 0 \end{cases}$$

1) a) Représenter f dans un repère orthonormé.
b) Vérifier que f est une densité de probabilité.

2) Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
Préciser $F(x)$, pour tout réel x.

3) Calculer $P(\frac{1}{4} \leq T \leq \frac{3}{4})$.

4) Un observateur se présente à la rivière à 0 heure 30 minutes et y reste un quart d'heure. Quelle est la probabilité pour qu'il aperçoive le lion ?

Partie B

Les lionnes chassent des gazelles et des zèbres, pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes rapportent une gazelle est de 2/3, celle pour qu'elles rapportent un zèbre est de 1/3. Les repas du lion ne sont composés que d'une gazelle ou que d'un zèbre, à chaque repas. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.

On appelle G l'événement : il a mangé une gazelle au premier repas observé, et Z l'événement : il a mangé un zèbre à ce premier repas.

1) Quelle est la probabilité pour que, lors des deux premiers repas observés, le lion ait mangé deux gazelles (et donc pas de zèbre) ?

2) Quelle est la probabilité pour que, lors des trois premiers repas, il ait mangé dans cet ordre un zèbre puis deux gazelles ?

3) Sur les quatre premiers repas observés, on considère l'événement E : il a mangé une gazelle deux fois de suite, <u>pour la première fois</u>, aux troisième et quatrième repas.

Calculer $P(E\,/\,G)$ et $P(E\,/\,Z)$. En déduire $P(E)$.

Partie C

On observe le lion sur une assez longue période. on désigne par Y la variable prenant pour valeur le nombre de repas nécessaires pour que, <u>pour la première fois</u>, le lion ait mangé deux gazelles à deux repas consécutifs. Par exemple, l'événement E (défini en **B** 3) est l'événement $(Y = 4)$.

On note $u_n = P(Y = n)$ pour tout n, $n \geq 2$, et on pose $u_1 = 0$.

1) En utilisant la partie **B**, préciser u_2, u_3, u_4.

2) Exprimer $P(Y = n + 2\,/\,G)$ et $P(Y = n + 2\,/\,Z)$ à l'aide des termes de la suite (u_n), pour tout n, $n \geq 2$.

En déduire que, pour tout n, $n \geq 2$, on a : $u_{n+2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{2}{9}u_n$.

Vérifier que cette relation est encore vraie pour $n = 1$.

A l'aide de cette même formule, retrouver u_4 obtenu dans la partie **B**, en utilisant u_2 et u_3.

Partie D

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que, pour tout n, $n \geq 1$, on a : $X_{n+1} = AX_n$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout n, $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \dfrac{2}{3^{n+1}} & \dfrac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3^n} \\ \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+2}} + (-1)^{n+1} \dfrac{2}{3^{n+2}} & \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n \dfrac{1}{3^{n+1}} \end{pmatrix}$$

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n, $n \geq 1$.

Partie E

1) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.

2) On admet la formule suivante, valable pour tout réel p appartenant à $]-1, 1[$:

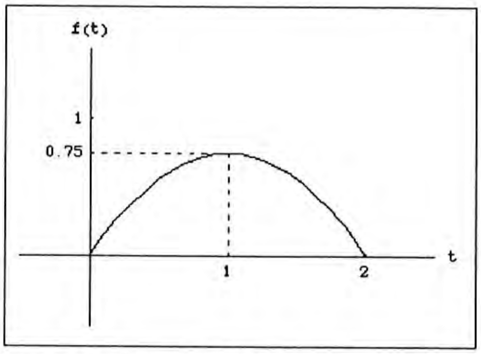
$$\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \quad .$$

Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Corrigé

.PARTIE A.

I.1.a. Représentation graphique de f :



Sur l'intervalle $[0,2]$, f est polynomiale de degré 2, donc sa représentation graphique est une **parabole, tournée vers le bas**, car le cœfficient de t^2 est négatif.
Son **axe de symétrie** est **parallèle à l'axe des ordonnées** et à pour équation : $t = -b/2a$, si on note : $f(t) = at^2 + bt + c$.
Et c'est pour cette valeur de t, ici : $\boldsymbol{t = 1}$ (car $a = -3/4$ et $b = 6/4$) que la fonction atteint son **maximum**, ici : $f(1) = 3/4$.

(*tous ces résultats,* **usuels**, *se retrouvent aisément par une simple étude de la fonction*).

A.1.b. **Par définition**, la fonction f est une densité de probabilité si elle est positive, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et si son intégrale sur $\mathbb{R}$ existe et vaut 1.
Ici, sur $[0,2]$, la fonction f est polynomiale donc **continue**, et l'intervalle étant fermé :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 0.$$

Par ailleurs, parce que la fonction f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]2, +\infty[$, elle est continue sur ces intervalles et :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0.$$

Donc, en 0 et en 2, les limites à gauche et à droite existent est sont égales à la valeur de la fonction f en ces points, donc : **f est continue en 0 et 2.**
<u>Ainsi</u>, f est continue sur $]-\infty, 0[$, $[0,2]$ et $]2, +\infty[$, et aussi en 0 et 2, donc :

$$\textbf{(1)} \quad f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

- Par ailleurs, il est de vérification immédiate que : **(2)** f est **positive** sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, **l'intégration de f sur $\mathbb{R}$ ne pose pas de problèmes de convergence**, car f est nulle en dehors de l'intervalle de longueur finie $[0,2]$, où elle est continue.

Et pour ces mêmes raisons, **en reprenant la définition de f** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{3}{4}.t(2-t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}.\int_0^2 2t - t^2\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}.\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2,$$

de sorte que :

$$\textbf{(3)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}.\left[4 - \frac{8}{3}\right] = \frac{3}{4}.\frac{12-8}{3} = 1.$$

<u>Ainsi</u>, par (1), (2) et (3), on peut conclure que :

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}.$$

A.2. La fonction de répartition F de la V.A. T, de densité f, s'obtient par intégration de f, sur les intervalles $]-\infty, x]$ $(x \in \mathbb{R})$.
Utilisant la nullité de f sur $]-\infty, 0[$ et $]2, +\infty[$, la primitive de f sur $[0,2]$ précédente, et le résultat précédent, il vient :

$$\forall x \in [0,2,] \quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}.\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{3}{4}.\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{(3-x)x^2}{4}.$$

et :
$$\forall x < 0,\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0, \text{ et : } \forall x > 2,\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt = 1$$
Et l'on **en déduit que** :

$\boxed{F(x) \text{ est nul sur }]-\infty, 0[, \text{ égal à } \frac{1}{4}.(3-x)x^2 \text{ sur } [0,2] \text{ et à 1 sur }]2, +\infty[}$.

A.3. *Le calcul est **usuel**.* Puisque $(T \le \frac{3}{4})$ est la réunion disjointe (événements incompatibles) $(T < \frac{1}{4})$ et $(\frac{1}{4} \le T \le \frac{3}{4})$: $P(\frac{1}{4} \le T \le \frac{3}{4}) = P(T \le \frac{3}{4}) - P(T < \frac{1}{4})$.
Et comme pour une V.A. à densité, la probabilité de prendre une valeur réelle donnée (ici : 1/4) est nulle : $P(T < \frac{1}{4}) = P(T \le \frac{1}{4})$, **en utilisant la fonction de répartition F de T**, telle que, pour tout x réel, $F(x) = P(T \le x)$, et son expression pour $x \in [0,2]$, trouvée en **A.2.**, l'égalité précédente s'écrit :
$$P\left(\frac{1}{4} \le T \le \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(3-\frac{3}{4})(\frac{3}{4})^2}{4} - \frac{(3-\frac{1}{4})(\frac{1}{4})^2}{4} = \frac{3}{4}.\frac{9^2-11}{4^3}.$$
Ce qui donne :
$$\boxed{P\left(\frac{1}{4} \le T \le \frac{3}{4}\right) = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}}.$$

A.4. L'observateur se présentant à la rivière à 0 h 30, et y restant un quart d'heure, il verra le lion si et seulement si celui-ci s'y rend entre 0 h 30 et 0 h 45. **Exprimé à l'aide de la V.A. T** (égale à l'heure d'arrivée du lion, comptée en heures, à partir de minuit), **cet événement est réalisé si et seulement si T prend une valeur comprise entre 1/2 et 3/4.** La probabilité cherchée vaut donc, par des manipulations analogues à celle du **A.3.** :
$$P\left(\frac{1}{2} \le T \le \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(3-\frac{3}{4})(\frac{3}{4})^2}{4} - \frac{(3-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2}{4} = \frac{1}{4}.\frac{9^2-40}{4^3}.$$
Ainsi : $\boxed{\text{la probabilité pour que l'observateur aperçoive le lion vaut : } \frac{41}{256}}$.

.PARTIE B.

B.1. **Si on note** G_i l'évenement : "le lion mange une gazelle au $i^{\text{ème}}$ repas observé", et Z_i l'événement : "le lion mange un zèbre au $i^{\text{ème}}$ repas observé", comme, à chaque repas, la probabilité pour le lion de manger une gazelle est de 2/3, et celle de manger un zèbre est de 1/3 : pour tout $i \ge 1$: $P(G_i) = \frac{2}{3}$, et $P(Z_i) = \frac{1}{3}$.
Avec ces notations, **la probabilité cherchée est celle de l'événement $G_1 \cap G_2$**, et comme la composition d'un repas ne dépend pas des précédedentes, **G_1 et G_2 sont indépendants**, et donc : $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1).P(G_2) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}$.
Donc :

$\boxed{\text{la probabilité cherchée vaut } 4/9}$.

B.2. **De la même façon**, la probabilité cherchée est cette fois :
$$P(Z_1 \cap G_2 \cap G_3) = P(Z_1).P(G_2).P(G_3) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.$$
Donc :

$\boxed{\text{la probabilité cherchée vaut } 4/27}$.

B.3. Avec les notations introduites à la question **B.1.**, **la réalisation de E impose que G_3 et G_4 soient réalisés.** Si l'on connaît la composition du premier repas, les scenarii amenant à la réalisation de E sont alors peu nombreux et on peut les examiner de façon exhaustive :

- Si l'on sait que l'événement noté G (G_1 avec nos notations) est réalisé : alors, la réalisation de E, compte-tenu des remarques ci-avant, laisse comme seules possibilités pour les 3 repas suivants : $Z_2 \cap G_3 \cap G_4$ ou $G_2 \cap G_3 \cap G_4$. Or dans le second scenario le lion mange 2 gazelles, consécutivement, avant le 4ème repas (ici : dès le second repas) : **ce qui exclut que E soit réalisé**. Ainsi, la réalisation de E impose en fait qu'il mange un zèbre au second repas puis les 2 gazelles aux 3ème et 4ème repas, auquel cas E est effectivement réalisé. Donc, en utilisant toujours l'**indépendance de la composition des repas** :
$$\boxed{P(E\,/\,G) = P(Z_2 \cap G_3 \cap G_4) = P(Z_2).P(G_3).P(G_4) = \tfrac{1}{3}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{27}}.$$
- Si l'événement noté Z (Z_1 avec nos notations) est réalisé : alors, de la même façon, les seuls scenarii **compatibles** avec la réalisation de E sont, pour les 3 repas suivants : $Z_2 \cap G_3 \cap G_4$ ou $G_2 \cap G_3 \cap G_4$. Et il faut exclure le second pour la même raison. Ainsi, ici aussi, un seul scenario est possible et celui-ci convient. **On conclut semblablement** :
$$\boxed{P(E\,/\,G) = P(Z_2 \cap G_3 \cap G_4) = \tfrac{4}{27}}.$$

◇ On peut alors calculer $P(E)$ en appliquant la **formule des probabilités totales**, avec le système complet d'événements $\{G, Z\}$, ce qui donne :

$P(E) = P(E\,/\,G).P(G) + P(E\,/\,Z).P(Z)$, et comme : $P(G) = \frac{2}{3}$ et $P(Z) = \frac{1}{3}$, il vient finalement, compte-tenu des valeurs trouvées pour $P(E\,/\,G)$ et $P(E\,/\,Z)$:
$$\boxed{P(E) = \tfrac{4}{27}.\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{27}.\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{27}}.$$

.PARTIE C.

C.1. u_2 est, **par définition**, la probabilité pour qu'il faille attendre juste deux repas pour voir, pour la première fois, le lion manger consécutivement deux gazelles, c'est donc la probabilité pour qu'il les mange aux deux premiers repas observés. **Il s'agit donc de la probabilité calculée au B.1.**. De façon tout aussi évidente, u_3 et u_3 sont égales aux probabilités calculées aux questions **B.2.** et **B.3.**. Ainsi :
$$\boxed{u_2 = \tfrac{4}{9} \quad ; \quad u_3 = \tfrac{4}{27} \quad ; \quad u_4 = \tfrac{4}{27}}.$$

C.2. Si l'on sait que G est réalisé : alors, pour que $(Y = n+2)$ soit réalisé, il ne faut pas que le lion mange une gazelle au 2ème repas, car c'est alors $(Y = 2)$ qui serait réalisé, **ce qui est incompatible avec $(Y = n+2)$**. **Par conséquent** : si l'on sait que G est réalisé, la réalisation de E requiert celle de Z_2 (Z_2 : "dégustation d'un zèbre au second repas"). Ceci étant, il ne faut pas qu'au cours des n repas suivants, du 3ème au $(n+2)$ème, le lion mange deux gazelles lors de deux repas consécutifs, sauf aux deux derniers ($(n+1)$ème et $(n+2)$ème repas) : on note E' cet événement.
Réciproquement, si l'on sait que G est réalisé, la réalisation de Z_2 et E', assure que $(Y = n+2)$ est réalisé : en effet en cas le lion ne mange pas deux gazelles de suite lors des repas n° 3 à $n+2$, sauf aux deux derniers (événement E'), ni lors des repas n°1 et 2, ni lors des repas n°2 et 3, car il mange un zèbre au repas n°2 (événement Z_2).
Ainsi, on a montré que :

sachant G réalisé : $\big((Y = n+2)$ réalisé$\big) \iff (Z_2 \cap E'$ réalisé$)$.

ce qui, en passant aux probabilités, donne :

$$P(Y = n+2\,/\,G) = P(Z_2 \cap E'\,/\,G)$$

puisque **la composition d'un repas est indépendante des repas précédents** : E' (dont la réalisation ne dépend que de la composition des repas n°3 à $n+2$) et Z_2 (dont la réalisation dépend de la composition du repas n°2) sont tous deux indépendants de $G = G_1$, et par suite :

$$P(Y = n+2\,/\,G) = P(Z_2 \cap E'\,/\,G) = P(Z_2 \cap E')$$

puis, comme aussi, **pour la même raison**, E' est indépendant de Z_2 :

$$P(Y = n+2\,/\,G) = P(Z_2 \cap E'\,/\,G) = P(Z_2 \cap E') = P(Z_2).P(E')$$

__Enfin__ : E' correspondant à l'observation de n repas successifs, au cours desquels le lion ne mange deux gazelles consécutivement qu'aux deux derniers repas, puisque, de nouveau, la composition d'un repas est indépendante des repas précédents, la probabilité d'observer ce scenario est indépendante du fait que deux repas déjà aient été observés avant, donc : $P(E') = P(Y = n)$.

__Par conséquent__ : $\quad P(Y = n+2\,/\,G) = P(Z_2).P(E') = P(Z_2).P(Y = n)$.

En reprenant la définition des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la valeur de $P(Z_2)$:

$$(4)\ \boxed{P(Y = n+2\,/\,G) = P(Z_2).P(Y = n) = \tfrac{1}{3}.u_n}.$$

• __Si l'on sait que Z est réalisé__ : la réalisation de $(Y = n+2)$ correspond au fait que, au cours des $n+1$ repas suivant le premier, le lion ne mange pas deux gazelles consécutivement sauf aux repas n°$(n+1)$ et $(n+2)$: événement noté E''.
Réciproquement, si Z est réalisé, la réalisation de E'' assure celle de $(Y = n+2)$ puisqu'alors le lion ne mange pas deux gazelles consécutivement au cours des repas n°2 à $(n+2)$ sauf aux deux derniers, et il n'en mange pas non plus deux consécutivement au cours des repas n°1 et 2 puisqu'il mange un zèbre au premier repas observé.
__Ainsi__, en revenant aux probabilités, on a, comme précédemment, **par indépendance de la composition des repas**, les égalités suivantes :

$$P(Y = n+2\,/\,Z) = P(E''\,/\,Z) = P(E''),$$

puis, E' correspondant à l'observation de $n+1$ repas successifs, au cours desquels le lion ne mange deux gazelles consécutivement qu'aux deux derniers repas :

$$P(E') = P(Y = n+1).$$

__Par conséquent__ : $\quad (5)\ \boxed{P(Y = n+2\,/\,Z) = P(E') = P(Y = n+1) = u_{n+1}}$.

◇ De nouveau, comme au **B.3.**, il s'agit d'appliquer la **formule des probabilités totales**, avec le système complet d'événements $\{G, Z\}$ pour obtenir :

$$P(Y = n+2) = P(Y = n+2\,/\,G).P(G) + P(Y = n+2\,/\,Z).P(Z),$$

puis, comme : $P(G) = \frac{2}{3}$ et $P(Z) = \frac{1}{3}$, en vertu aussi de (4) et (5) :

$$P(Y = n+2) = (\tfrac{1}{3}.u_n).\tfrac{2}{3} + u_{n+1}.\tfrac{1}{3},\ \text{soit : } (6)\ \boxed{\forall n \geq 2,\ u_{n+2} = \tfrac{1}{3}.u_{n+1} + \tfrac{2}{9}.u_n}.$$

◇ Pour $n = 1$, puisque $u_1 = 0$, par convention, et (*c.f.* **C.1.**) : $u_2 = \frac{4}{9}$ et $u_3 = \frac{4}{27}$, on peut vérifier, par le calcul, que :

$$\boxed{\text{la relation (6) est vraie encore pour } n = 1 :\ u_3 = \tfrac{1}{3}.u_2 + \tfrac{2}{9}.u_1}.$$

◇ Pour $n = 2$, la relation (6) s'écrit : $u_4 = \frac{1}{3}.u_3 + \frac{2}{9}.u_2$, et comme $u_2 = \frac{4}{9}$ et $u_3 = \frac{4}{9}$, on vérifie que :

$$\tfrac{1}{3}.u_3 + \tfrac{2}{9}.u_2 = \tfrac{1}{3}.\tfrac{4}{27} + \tfrac{2}{9}.\tfrac{4}{9} = \tfrac{4}{81} + \tfrac{8}{81} = \tfrac{12}{81} = \tfrac{4}{27},$$

Ainsi :

$\boxed{\text{on retrouve la valeur de } u_4 \text{ obtenue au B.3. : } u_4 = P(Y=4) = P(E) = 4/81}$.

.PARTIE D.

$\boxed{\textbf{D.1.}}$ Pour tout $n \geq 1$, d'après les règles du produit matriciel :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \frac{2}{9}.u_n + \frac{1}{3}u_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ tandis que : } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Sachant que la relation (6) est vraie pour tout $n \geq 1$, on vérifie donc que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad X_{n+1} = AX_n}.$$

$\boxed{\textbf{D.2.}}$ Comme demandé, posons pour **hypohèse de récurrence au rang n** ($n \geq 1$) :

$$(\mathcal{H}_n) : \quad A^n = \mathcal{A}_n, \text{ avec : } \mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \dfrac{2}{3^{n+1}} & \dfrac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3^n} \\ \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+2}} + (-1)^{n+1} \dfrac{2}{3^{n+2}} & \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n \dfrac{1}{3^{n+1}} \end{pmatrix}$$

- <u>au rang $n = 1$</u> : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie, car la matrice $\mathcal{A}_1$ s'écrit :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3^2} - \dfrac{2}{3^2} & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2^2}{3^3} + \dfrac{2}{3^3} & \dfrac{2^2}{3^2} - \dfrac{1}{3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{3} \\ \dfrac{6}{27} & \dfrac{3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{9} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ donc : } \mathcal{A}_1 = A.$$

- <u>si $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$</u> : alors $A^n = \mathcal{A}_n$, donc $A^{n+1} = A^n.A = \mathcal{A}_n.A$, puis , par les règles du calcul matriciel :

$$\mathcal{A}_n.A = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{2}{3^{n+1}} & \frac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} \\ \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^{n+2}} & \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}.\left(\frac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}\right) & \left(\frac{2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{2}{3^{n+1}}\right) + \frac{1}{3}.\left(\frac{2^n}{3^n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}\right) \\ \frac{2}{3}.\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}\right) & \left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^{n+2}}\right) + \frac{1}{3}.\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}\right) \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\mathcal{A}_n.A = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^{n+1}} & \frac{2.2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{2-1}{3^{n+1}} \\ \frac{2^{n+2}}{3^{n+2}} + (-1)^n \frac{2}{3^{n+2}} & \frac{2.2^{n+1}}{3^{n+2}} + (-1)^n \frac{(-2+1)}{3^{n+2}} \end{pmatrix}.$$

où l'on reconnaît, car $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ et $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, que :

$$A^{n+1} = \mathcal{A}_n.A = \mathcal{A}_{n+1}, \text{ donc : } \mathcal{H}_{n+1} \text{ est vraie.}$$

<u>**On a ainsi montré que**</u> :

$\mathcal{H}_1$ est vraie, et, pour $n \geq 1$, $((\mathcal{H}_n)$ vraie $) \Longrightarrow ((\mathcal{H}_{n+1})$ vraie $)$,

donc, **par le principe de récurrence** :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 1, A^n \text{ est de la forme attendue : } A^n = \mathcal{A}_n}.$$

D.3. *C'est archi-classique* : de l'égalité $X_{n+1} = AX_n$ (*c.f.* **D.1.**), on tire, **par récurrence**, que :

$$\text{(7)} \quad \forall n \geq 1, \quad X_n = A^{n-1}X_1.$$

en effet, l'égalité est vraie pour $n = 1$, et pour $n \geq 1$:

$$(X_n = A^{n-1}X_1) \implies (X_{n+1} = AX_n = AA^{n-1}X_1 = A^n X_1)$$

• **Par suite**, en utilisant, pour $n-1$ au lieu de n, l'expression de A^n obtenue au **D.2.**, (expression à propos de laquelle on peut remarquer qu'elle est encore valable pour $n = 0$, donc pour A^{n-1} et $n = 1$), il vient pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} \frac{2^{n-1}}{3^n} + (-1)^{n-1}\frac{2}{3^n} & \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}} \\ \frac{2^n}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{2}{3^{n+1}} & \frac{2^n}{3^n} + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne, **en ne s'intéressant qu'à la première ligne du produit $A^{n-1}X_1$** :

$$u_n = \left(\frac{2^{n-1}}{3^n} + (-1)^{n-1}\frac{2}{3^n}\right).u_1 + \left(\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + (-1)^n\frac{1}{3^{n-1}}\right).u_2$$

et comme : $u_1 = 0$ et $u_2 = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2}$, **on peut conclure** :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}}\right).\frac{2^2}{3^2} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + (-1)^n\frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{9}.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right]}.$$

(où la dernière réécriture est pour préparer le calcul des sommes du **E.1.**)

.PARTIE E.

E.1. En rappelant que , **par définition**, pur tout $n \geq 1$: $u_n = P(Y = n)$, le résultat du **D.3.** donne, **par linéarité de la somme**, pour tout $N \geq 1$:

$$\text{(8)} \quad \sum_{n=1}^{N} P(Y=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{9}.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{4}{9}.\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

On reconnaît alors, dans les deux sommes, les **sommes des N premiers termes de deux suites géométriques**, de premier terme 1, et de raisons respectives $2/3$ et $-1/3$. Par conséquent, ces deux sommes valent respectivement :

$$1.\frac{1 - (\frac{2}{3})^N}{1 - \frac{2}{3}} = 3.\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N\right] \quad \text{et} \quad 1.\frac{1 - (\frac{-1}{3})^N}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^N\right].$$

Et comme **les deux raisons sont, en valeur absolue, strictement inférieures à 1**, les deux sommes tendent respectivement vers 3 et $3/4$ lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi, **par les opérations usuelles sur les limites**, on tire de (8) que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} P(Y = n) \text{ existe et vaut : } \quad \frac{4}{9}.\left[3 - \frac{3}{4}\right] = \frac{4}{9}.\left[\frac{12-3}{4}\right] = \frac{4}{9}.\frac{9}{4} = 1.$$

E.2. **Par définition**, l'espérance de la V.A. Y existe si et seulement si la somme infinie $\sum_{n \in Y(\Omega)} n.P(Y = n)$ existe, auquel cas l'espérance est égale à cette somme.

◇ Ici, pour s'assurer de l'existence de la somme, considérons, pour $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} nP(Y=n) = \sum_{n=1}^{N} n.\tfrac{4}{9}.\left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\tfrac{-1}{3}\right)^{n-1}\right] = \tfrac{4}{9}.\left[\sum_{n=1}^{N} n.\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n.\left(\tfrac{-1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

En appliquant la **formule admise**, avec, respectivement, $p = 2/3$ et $p = -1/3$ (en valeur absolue strictement inférieurs à 1), on obtient que les deux sommes dans le crochet tendent respectivement vers :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 9 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)\right)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Et l'on en déduit, par les opérations usuelles sur les limites, à partir de l'expression précédemment obtenue, que $\sum_{n=1}^{N} nP(Y = n)$ **admet une limite pour N tendant vers l'infini**, valant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n) = \frac{4}{9}.\left[9 - \frac{9}{16}\right] = \frac{4}{9}.\left[\frac{9.(16-1)}{16}\right] = \frac{4 \times 15}{16} = \frac{15}{4}.$$

D'où la conclusion : $\boxed{E(Y) \text{ existe et vaut } 15/4}$.

Aubin Imprimeur
LIGUGÉ, POITIERS

Achevé d'imprimer en février 2001
N° d'impression L 61274
Dépôt légal février 2001 / Imprimé en France