PARTIE II

Soit N un entier strictement positif, a un entier compris entre 0 et N et p un réel vérifiant $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$, et soit $q = 1 - p$. Une particule, située au début du processus au point d'abscisse a se déplace sur un axe aléatoirement par sauts successifs indépendants les uns des autres d'amplitude $(+1)$ avec la probabilité p et (-1) avec la probabilité q. Si x_n est l'abscisse de la particule à l'issue du n^e saut, alors :

$$x_0 = a \qquad x_{n=1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec la probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec la probabilité } q. \end{cases}$$

Le processus s'arrête dès que la particule atteint l'une des extrémités du segment $[0, N]$. Il s'arrête en 0, s'il atteint l'extrémité 0 ; il s'arrête en N s'il atteint l'extrémité N.

1.– Soit q_a la probabilité que le processus s'arrête en 0. On a en particulier $q_0 = 1$ (la particule étant en 0 dès le début, le processus ne démarre pas, la particule stationne en 0).
De même, on a $q_N = 0$ (la particule, issue de N, reste en N, ne démarre donc pas, et le processus ne s'arrêtera pas en 0).

a) Montrer que pour tout a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a

$$q_a = pq_{a+1} + qq_{a-1}$$

b) En utilisant la question **I 4.**–b), exprimer q_a en focntion de a, N, p et q.

2.– De même, calculer la probabilité p_a que le processus s'arrête en N.

3.– Calculer la somme $p_a + q_a$. En déduire la probabilité que le processus ne s'arrête pas, c'est-à-dire que $1 \leq x_n \leq N - 1$ pour tout $n \geq 0$.

4.– Résoudre les questions précédentes dans le cas où $p = 1/2$.

Corrigé

.PARTIE I.

*On aura remarqué que cette partie propose une **redémonstration** de tous les résultats <u>connus</u> sur les **suites récurrentes linéaires d'ordre 2**. Bonnes révisions !*

I.1. La suite **nulle**, dont le terme général est $u_n = 0$, vérifie la relation (R) pour tout $n \geq 0$, donc : $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{U} \text{ n'est pas vide}}$.

I.2.a. Pour $u' = (u'_n)_{n\geq 0}$ et $u'' = (u''_n)_{n\geq 0}$, deux éléments quelconques de $\mathcal{U}$, λ et λ' deux réels quelconques, on a, pour la suite de terme général $u_n = \lambda'.u'_n + \lambda''.u_n$:

$$u_n = \lambda'.u'_n + \lambda''.u_n \ ; \quad u_{n+1} = \lambda'.u'_{n+1} + \lambda''.u_{n+1} \ ; \quad u_{n+2} = \lambda'.u'_{n+2} + \lambda''.u_{n+2}$$

et en effectuant la **combinaison linéaire** suivante de ces égalités, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&p.u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p).u_n \\
&= p.(\lambda'.u'_{n+2} + \lambda''.u''_{n+2}) - (\lambda'.u'_{n+1} + \lambda''.u''_{n+1}) + (1-p).(\lambda'.u'_n + \lambda''.u''_n) \\
&= p.\lambda'.u'_{n+2} + p.\lambda''.u''_{n+2} - \lambda'.u'_{n+1} - \lambda''.u''_{n+1} + (1-p).\lambda'.u'_n + (1-p).\lambda''.u''_n \\
&= \lambda'.\underbrace{(p.u'_{n+2} - u'_{n+1} + (1-p).u'_n)}_{=0 \text{ car } u' \in \mathcal{U}} + \lambda''.\underbrace{(p.u''_{n+2} - u''_{n+1} + (1-p).u''_n)}_{=0 \text{ car } u'' \in \mathcal{U}} = 0
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que : la suite $u = \lambda'.u' + \lambda''.u''$, dont le terme général vaut : $u_n = \lambda'.u'_n + \lambda''.u_n$, vérifie, pour tout $n \geq 0$, la relation (R), donc, par définition de $\mathcal{U}$, on a montré que : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ appartient à } \mathcal{U}}$.

I.2.b. *C'est la conclusion naturelle des deux premières questions* :

i) $\mathcal{U}$ est **inclus dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel** connu, (à savoir, ici : le $\mathbb{R}$-*e.v.* des suites réelles).

ii) $\mathcal{U}$ est **non vide** (*c.f.* **I.1.**).

iii) $\mathcal{U}$ est **stable par combinaison linéaire** (ce qui équivaut au résultat du **I.2.a.**).

Donc, (*c'est la caractérisation du cours*) :

$\boxed{\mathcal{U} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.

I.3.a. *Montrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{U}$ est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes,* **c'est prouver** *que u_0 et u_1 étant donnés, sachant que $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}$, alors les autres termes de $(u_n)_{n\geq 0}$, pour $n \geq 2$, sont définis de façon unique.* Aussi pose-t-on l'hypothèse de récurrence suivante, dont on vérifiera qu'elle est vraie pour tout $k \geq 2$:

$(\mathcal{H}_k)$: (les termes de $(u_n)_{n\geq 0}$ sont définis de façon unique jusqu'au rang k).

◇ Sous l'hypothèse que : $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}$, si u_0 et u_1 sont donnés, alors :

- Au rang $k = 2$: puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{U}$, et en conséquence vérifie, pour $n = 0$, la relation (R), on a : $p.u_2 - u_1 + (1-p).u_0 = 0$, et par suite : u_2 est défini de façon unique et vaut $u_2 = \frac{1}{p}.u_1 - \frac{1-p}{p}.u_0$(*). Donc $(\mathcal{H}_2)$ est vraie.
- Supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geq 2$: alors, puisque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation (R) au rang $n = k-1$, (car $k - 1 \geq 0$), u_{k+1} est nécessairement tel que : $u_{k+1} = \frac{1}{p}.u_k - \frac{1-p}{p}.u_{k-1}$. Donc $\boldsymbol{u_{k+1}}$ **est défini de façon unique** puisque u_k et u_{k-1} le sont d'après l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_k)$.

En conclusion, on a montré que : $(\mathcal{H}_2)$ est vraie et que : si pour $k \geq 2$, $(\mathcal{H}_k$ est vraie, alors $(\mathcal{H}_k$ est vraie. Donc, par le **principe de récurrence**, $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \geq 2$, *i.e.* : $\boxed{\text{toute suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ de } \mathcal{U} \text{ est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes : } u_0 \text{ et } u_1}$.

(*) C'est une grosse lacune de l'énoncé : il **faut** supposer que $\boldsymbol{p \neq 0}$ sinon la présente démonstration ne tient pas, car le résultat demandé lui-même devient faux si $p = 0$. De même, toute la suite de la **PARTIE I** est inepte si $p = 0$ car en ce cas, (R) est une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 et l'ensemble de ces solutions est un *s.e.v.* de dimension 1 et non 2 (en l'occurrence pour $p = 0$, (R) s'écrit : $\forall n \geq 0,\ -u_{n+1} + u_n = 0$, donc $\mathcal{U}$ est l'ensemble des suites réelles constantes.

$\boxed{\textbf{I.3.b.}}$ Notons v et w les deux suites de l'énoncé.

La donnée des deux premiers termes de ces deux suites assurent qu'elles sont entièrement déterminées **en tant qu'éléments de** $\mathcal{U}$. *Mais* **en toute rigueur, il n'a pas été démontré** *qu'il existe de suite dans $\mathcal{U}$ satisfaisant à des conditions initiales telles que celles indiquées. Qu'à cela ne tienne, on peut reprendre la démonstration du* **I.3.a.** *en intégrant dans l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_k)$ l'existence de u_k jusqu'au rang k, et établir ainsi l'existence de v et w comme éléments de $\mathcal{U}$.*

◇ On démontre que v et w forment une base de $\mathcal{U}$, en montrant que la famille $\{v, w\}$ est une **famille libre et génératrice** d'éléments de $\mathcal{U}$, ou, (*et c'est plus indiqué ici*), en montrant que **toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ élément de $\mathcal{U}$ s'écrit, de façon unique, comme combinaison linéaire de v et w.**

• Soit $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}$: si u est combinaison linéaire de v et w, *i.e.* s'il existe α et β, deux réels tels que : $u = \alpha.v + \beta.w$, *i.e.* tels que : $\forall\, n \geq 0,\ u_n = \alpha.v_n + \beta.w_n$, alors par examen des rangs 0 et 1, on a nécessairement, sachant que $v_0 = w_1 = 1$ et $v_1 = w_0 = 0$:

$$u_0 = \alpha.v_0 + \beta.w_0 = \alpha, \quad \text{et} \quad : u_1 = \alpha.v_1 + \beta.w_1 = \beta.$$

Par conséquent, on a établi l'**unicité** d'une éventuelle écriture de u comme combinaison linéaire de v et w.

▪ Reste à montrer qu'une telle écriture **existe**, c'est-à-dire, en vertu du résultat précédent, reste à montrer que la suite $t = u_0.v + u_1.w$ convient, *i.e.* est égale à u.

C'est immédiat : en effet, la suite t ainsi définie appartient à $\mathcal{U}$, en tant que combinaison linéaire de deux suites de $\mathcal{U}$. Et, par ailleurs, la suite u appartient elle aussi à $\mathcal{U}$, par hypothèse, et a les mêmes deux premiers termes que la suite t, **donc**, en vertu du **I.3.a.** (unicité de l'élément de $\mathcal{U}$ les premiers termes étant spécifiés), nécessairement : $t = u$.

En conclusion, on a donc montré que pour toute suite $u \in \mathcal{U}$, il existe une écriture de u comme combinaison linéaire des suites v et w, et qu'une telle écriture est unique, donc : $\boxed{\text{les deux suites, } v \text{ et } w, \text{ introduites par l'énoncé, constituent une base de } \mathcal{U}}$.

$\mathcal{U}$ admettant une base, on en déduit que $\mathcal{U}$ est de dimension finie, et cette base étant constituée de deux éléménts, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{U} \text{ est de dimension finie, et } \dim \mathcal{U} = 2}.$$

$\boxed{\textbf{I.4.}}$ Recherche de suites géométriques, non nulles, élément de $\mathcal{U}$: une suite réelle, non nulle, de terme général $u_n = \lambda^n$ $(n \geq 0)$, *i.e.* une suite géométrique de raison $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et de premier terme 1, est élément de $\mathcal{U}$, si et seulement si pour tout $n \geq 0$:

$$p.u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p).u_n = p.\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} + (1-p).\lambda^n = 0 \quad \text{(relation } (R))$$

ou, ce qui est équivalent (car on peut simplifier par λ^n, puisque $\lambda \neq 0$ par hypothèse) :

$$(\lambda^n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U},\ (\lambda \in \mathbb{R}^*) \quad \underline{\text{si et seulement si}} \quad p.\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0 \ (E).$$

• *On peut alors* ***résoudre l'équation*** *par le calcul du discriminant, mais on peut aussi préalablement rechercher d'éventuelles* ***solutions évidentes***. Ici, **1 est solution évidente de (E)**, tandis que le produit des racines vaut "c/a", ici : $(1-p)/p$ (on rappelle que $p \neq 0$). (E) admet donc pour solutions : 1 et $(1-p)/p$.

D'où la conclusion :

$$\boxed{\text{une suite de la forme } (\lambda^n)_{n\geq 0} \text{ est solution si } \lambda = 1 \text{ ou } (1-p)/p}.$$

◇ Nouvelle base pour $\mathcal{U}$: les deux suites précédemment trouvées, **si elles forment une famille libre**, constituent une base de $\mathcal{U}$, puisqu'il est établi que $\mathcal{U}$ est un *e.v.* de dimension 2 (*c.f.* **I.3.b.**). Examinons l'indépendance de ces deux suites, que l'on note : $e_1 = (1^n)_{n\geq 0} = (1)_{n\geq 0}$ et $e_2 = \left((\frac{1-p}{p})^n\right)_{n\geq 0}$.

• Soient α et β deux réels tels que : $\alpha.e_1 + \beta.e_2 = 0$, *i.e.* tels que $\alpha.e_1 + \beta.e_2$ soit la suite nulle, *i.e.* encore, tels que : pour tout $n \geq 0$, $\alpha.1 + \beta.(\frac{1-p}{p})^n = 0$.

Alors, pour $n = 0$ et $n = 1$, on a :

$$\alpha.1 + \beta.(\tfrac{1-p}{p})^0 = \alpha + \beta = 0, \quad \text{et :} \quad \alpha.1 + \beta.(\tfrac{1-p}{p})^1 = \alpha + \beta.\tfrac{1-p}{p} = 0.$$

ce qui équivaut à : $\alpha = -\beta$, et : $-\beta + \beta.\frac{1-p}{p} = \frac{1-2p}{p}.\beta = 0$.

Or, il est supposé que $p \neq 1/2$, donc $(1-2p)/p \neq 0$, et par conséquent :

$\frac{1-2p}{p}.\beta = 0$ implique : $\underline{\beta = 0}$, puis : $\alpha = -\beta$ implique : $\underline{\alpha = 0}$.

Ainsi, on a montré que : $(\alpha.e_1 + \beta.e_2 = 0) \implies (\alpha = \beta = 0)$.

On en tire que la famille $\{e_1, e_2\}$ est une famille **libre**. C'est aussi une famille de <u>deux</u> éléments de $\mathcal{U}$ (*c.f.* **I.3.a.**), et $\mathcal{U}$ est un *e.v.* de dimension <u>2</u> (*c.f.* **I.3.b.**) donc :

$$\boxed{e_1, \text{ suite constante égale à 1, et } e_2 = \left((\tfrac{1-p}{p})^n\right)_{n\geq 0}, \text{ constituent une base de } \mathcal{U}}.$$

• Puisque $\{e_1, e_2\}$ est une **base** de $\mathcal{U}$, on est assuré de que toute suite u de $\mathcal{U}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha.e_1 + \beta.e_2$. La détermination des cœfficients α et β se fait en écrivant que les termes de rang 0 et 1 des suites $\alpha.e_1 + \beta.e_2$ et u sont égaux, ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha.1 + \beta.(\frac{1-p}{p})^0 = u_0 \\ \alpha.1 + \beta.(\frac{1-p}{p})^1 = u_1 \end{cases} \underset{\substack{\text{licite} \\ \text{pour } p\neq 0}}{\overset{L_2 \leftarrow p.L_2}{\iff}} \begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ p.\alpha + (1-p).\beta = p.u_1 \end{cases}.$$

D'où l'on tire, par les combinaisons : $(1-p).L_1 - L_2$ et $-p.L_1 + L_2$, respectivement, que : $(1-2p).\alpha = (1-p).u_0 - p.u_1$ et $(1-2p).\beta = -p.u_0 + p.u_1$.

Puisque par hypothèse : $p \neq 1/2$, on a donc que :

$$\boxed{\text{toute suite } u = (u_n)_{n\geq 0} \text{ de } \mathcal{U} \text{ s'écrit : } \tfrac{(1-p).u_0 - p.u_1}{1-2p}.e_1 + \tfrac{-p.u_0 + p.u_1}{1-2p}.e_2}.$$

où e_1 est la suite constante égale à 1, et e_2 la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1-p}{p}$.

I.4.b *A priori, il n'est pas acquis qu'il existe deux suites* ***éléments de*** $\mathcal{U}$*, satisfaisant les conditions énoncées. En revanche*, en gardant les notations : $e_1 = (1)_{n\geq 0}$ et $e_2 = (\lambda_0^n)_{n\geq 0}$, avec $\lambda_0 = \frac{1-p}{p}$, s'il existe (α_1, β_1), (α_2, β_2), deux couples de $\mathbb{R}^2$ tels que les suites $\tilde{p} = \alpha_1.e_1 + \beta_1.e_2$, de terme général $p_n = \alpha_1 + \beta_1.(\frac{1-p}{p})^n$ et $\tilde{q} = \alpha_2.e_1 + \beta_2.e_2$, de terme général $q_n = \alpha_2 + \beta_2.(\frac{1-p}{p})^n$, satisfassent aux conditions :

$$p_0 = 0 \ ; \ p_N = 1 \ ; \ q_0 = 1 \ ; \ q_N = 0,$$

alors, puisque les suites e_1 et e_2 constituent une base de $\mathcal{U}$, il est acquis que les suites $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ ainsi obtenues sont élément de $\mathcal{U}$.

◇ Existence de la suite $\tilde{p}$: une suite de la forme $\alpha_1.e_1 + \beta_1.e_2$ de terme général $p_n = \alpha_1 + \beta_1.\lambda_0^n$, vérifie : $p_0 = 0$ et $p_N = 1$, si et seulement si :

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \lambda_0^N.\beta_1 = 1, \quad \textit{i.e.} : \quad \alpha_1 = -\beta_1 \quad \text{et} \quad -\beta_1 + \lambda_0^N.\beta_1 = 1.$$

Or, par hypothèse $p \neq 1/2$, donc $1-p \neq p$ et $\lambda_0 = \frac{1-p}{p} \neq 1$. Donc encore : $\lambda_0^N \neq 1$ car $N > 0$. Et, par conséquent, les relations précédentes sur α_1 et β_1 équivalent à :

$$\beta_1 = \frac{1}{\lambda_0^N - 1} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{\lambda_0^N - 1}.$$

Et **on en conclut que** :

$$\boxed{\text{il existe une unique suite } (p_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}, \text{ telle que : } p_0 = 0 \text{ et } p_N = 1, \text{ et son terme général est : } p_n = -\frac{1}{\lambda_0^N-1}.1 + \frac{1}{\lambda_0^N-1}.\lambda_0^n, \text{ où } \lambda_0 = (1-p)/p}.$$

◊ Existence de la suite $\tilde{q}$: de même, une suite de la forme $\alpha_2.e_1 + \beta_2.e_2$ de terme général $q_n = \alpha_2 + \beta_2.\lambda_0^n$, vérifie : $q_0 = 1$ et $q_N = 0$, si et seulement si :

$$\alpha_2 + \beta_2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \lambda_0^N.\beta_2 = 0, \quad i.e. : \quad \alpha_2 = -\lambda_0^N.\beta_2 \quad \text{et} \quad -\lambda_0^N.\beta_2 + \beta_2 = 1.$$

Ce qui équivaut encore, puisque $\lambda_0^N \neq 1$, comme il a été vu, à :

$$\beta_2 = \frac{1}{1-\lambda_0^N} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\frac{\lambda_0^N}{1-\lambda_0^N}.$$

On en conclut que :

$$\boxed{\text{il existe une unique suite } (q_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}, \text{ telle que : } q_0 = 1 \text{ et } q_N = 0, \text{ et son terme général est : } q_n = -\frac{\lambda_0^N}{1-\lambda_0^N}.1 + \frac{1}{1-\lambda_0^N}.\lambda_0^n, \text{ où } \lambda_0 = (1-p)/p}.$$

I.5. **On suppose ici que $p = 1/2$**, auquel cas la relation (R) s'écrit, pour tout $n \geq 0$:

$$\tfrac{1}{2}.u_{n+2} - u_{n+1} + \tfrac{1}{2}.u_n = 0, \quad i.e. \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

Il est alors immédiat que **les suites $v = (v_n)_{n\geq 0} = (1)_{n\geq 0}$ et $w = (w_n)_{n\geq 0} = (n)_{n\geq 0}$ sont éléments de $\mathcal{U}$**, puisque, pour tout $n \geq 0$:

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 1 - 2.1 + 1 = 0,$$
$$\text{et} \quad w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = (n+2) - 2.(n+1) + n = 0,$$

i.e. leurs termes généraux vérifient la relation (R) pour tout $n \geq 0$.

• **De plus**, on vérifie que la famille $\{v, w\}$ est une **famille libre** d'éléments de $\mathcal{U}$ car il n'existe pas de réel α tel que $\alpha.v = w$ ou $\alpha.w = v$ (la famille n'est pas liée), **donc**, étant constituée de deux éléments, et $\mathcal{U}$ étant un *e.v.* de dimension 2 :

$$\boxed{\text{si } p = 1/2 : \text{ les suites } (v_n)_{n\geq 0} = (1)_{n\geq 0} \text{ et } (w_n)_{n\geq 0} = (n)_{n\geq 0} \text{ forment une base de } \mathcal{U}}.$$

◊ Détermination de $(p_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}$, telle que $p_0 = 0$ et $p_N = 1$: comme précédemment (*c.f.* **I.4.b.**), puisque les suites u et w constituent une base de $\mathcal{U}$ pour $p = 1/2$, si une telle suite, $(p_n)_{n\geq 0}$, élément de $\mathcal{U}$, existe, alors elle s'écrit : $\alpha_1.v + \beta_1.w$, avec $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$. Et en examinant les termes de rang 0 et N ($N > 0$), nécessairement :

$$(\alpha_1.v_0 + \beta_1.w_0 = \underline{\alpha_1 = 0}, \text{ et } \alpha_1.v_1 + \beta_1.w_1 = \underline{\alpha_1 + N.\beta_1 = 1}) \iff (\alpha_1 = 0 \text{ et } \beta_1 = \tfrac{1}{N})$$

Il n'y a donc que la suite $0.v + \frac{1}{N}.w$ qui puisse convenir et on peut vérifier qu'elle convient (c'est une combinaison linéaire de v et w, $p_0 = 0$ et $p_N = 1$).

Donc :

$$\boxed{\text{si } p = \tfrac{1}{2}, \text{ il existe une unique suite } (p_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}, \text{ telle que : } p_0 = 0 \text{ et } p_N = 1, \text{ et son terme général est : } p_n = \alpha_1.1 + \beta_1.n = 0.1 + \tfrac{1}{N}.n = \tfrac{n}{N}}.$$

◊ Détermination de $(q_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}$, telle que $q_0 = 1$ et $q_N = 0$: en raisonnant de même, si une telle suite, $(q_n)_{n\geq 0}$, élément de $\mathcal{U}$, existe, elle s'écrit : $\alpha_2.v + \beta_2.w$, avec $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Et en examinant les termes de rang 0 et N ($N > 0$), nécessairement :

$$(\alpha_2.v_0 + \beta_2.w_0 = \underline{\alpha_2 = 1}, \text{ et } \alpha_2.v_1 + \beta_2.w_1 = \underline{\alpha_2 + N.\beta_2 = 0}) \iff (\alpha_2 = 1 \text{ et } \beta_2 = -\tfrac{1}{N})$$

De nouveau, une seule suite peut convenir, et on peut vérifier qu'elle convient.

Donc : $\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2}, \text{ il existe une unique suite } (q_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{U}, \text{ telle que : } q_0 = 1 \text{ et } q_N = 0, \text{ et son terme général est : } q_n = \alpha_2.1 + \beta_1.n = 1.1 - \frac{1}{N}.n = \frac{N-n}{N}}$.

.PARTIE II.

II.1.a. *Ce type de question est classique et la forme du résultat attendu suggère fortement l'utilisation de la* ***formule des probabilités totales****.*
En introduisant la V.A. X_1 égale à l'amplitude du premier saut, et en notant A_a l'événement « le processus s'arrête en 0 en partant de l'abscisse a», alors, on a, par la formule des probabilités totales, appliquée au calcul de $P(A_a)$, avec le **système complet d'événements** $\{(\boldsymbol{X_1} = +\mathbf{1}), (\boldsymbol{X_1} = -\mathbf{1})\}$:

(1) $P(A_a) = P(A_a \mid X_1 = +1).P(X_1 = +1) + P(A_a \mid X_1 = -1).P(X_1 = -1)$

Or, d'une part, pour a compris entre 1 et $N-1$, le déplacement initial peut se faire vers la droite (+1) (auquel cas le mobile est à l'instant 1 à l'abscisse $a+1 \leq N$) ou vers la gauche (-1) (auquel cas le mobile est à l'instant 1 à l'abscisse $a-1$), et d'autre part, parce que les sauts sont indépendants, sauf si le mobile a déjà atteint les points d'abscisses 0 ou N (auquel cas tout déplacement ultérieur est impossible), le déroulement du **processus** à partir d'un instant donné est **indépendant des déplacements passés** tant que le mobile n'est pas arrivé en 0 ou N :

la probabilité que le processus s'arrête en 0 en partant de l'abscisse a, **sachant que** $\boldsymbol{X_1} = +\mathbf{1}$, est égale à la probablité pour que le processus s'arrête en 0 en partant de l'abscisse $a+1$.

Ainsi : $P(A_a \mid X_1 = +1) = q_{a+1}$, et de même : $P(A_a \mid X_1 = -1) = q_{a-1}$.

Et par suite, puisque : $P(X_1 = +1) = p$ et $P(X_1 = -1) = 1 - p = q$, on déduit de (1) que :

$$q_a = P(A_a) = q_{a+1}.P(X_1 = +1) + q_{a-1}.P(X_1 = -1) = q_{a+1}.p + q_{a-1}.q.$$

On a donc montré que : **(2)** $\boxed{\forall\ 1 \leq a \leq N-1, \quad q_a = p.q_{a+1} + q.q_{a-1}}$.

II.1.b. Puisque $q = 1 - p$, et $a \in \mathbb{N}$, on reconnaît que les nombres q_a ($0 \leq a \leq N$) coïncident avec les $N+1$ premiers termes d'une suite $(q_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant la relation (R) pour tout $n \geq 0$ (on étend à $\mathbb{N}$ tout entier ce qui doit être pour $n = a - 1 \in [\![0, N-2]\!]$. La suite $(q_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie verifie pour tout $n \geq 0$ la relation (R), donc $(q_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{U}$. De plus, $(q_a)_{a\geq 0}$ satisfait aux conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 1$, comme il est exposé en préliminaire du **II.1.a.**. Par conséquent, puisque $p \neq 1/2$, en vertu du **I.4.b.**, avec $\lambda_0 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$:

$$\boxed{\forall\ 0 \leq a \leq N, \quad q_a = -\frac{(q/p)^N}{1-(q/p)^N}.1 + \frac{1}{1-(q/p)^N}.(q/p)^n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^N}{1-(q/p)^N}}.$$

II.2. De la même façon qu'en **II.1.a.**, si on note B_a l'événement « le processus s'arrête en N en partant de l'abscisse a», alors, par application de la formule des probabilités totales avec le **système complet d'événements** $\{(\boldsymbol{X_1} = +\mathbf{1}), (\boldsymbol{X_1} = -\mathbf{1})\}$:

(3) $P(B_a) = P(B_a \mid X_1 = +1).P(X_1 = +1) + P(B_a \mid X_1 = -1).P(X_1 = -1)$

Et de nouveau, on peut noter que :

$P(B_a \mid X_1 = +1) = p_{a+1}$, et de même : $P(B_a \mid X_1 = -1) = p_{a-1}$.

Et puisque : $P(X_1 = +1) = p$ et $P(X_1 = -1) = 1 - p = q$, on déduit de (3) que :

$$p_a = P(B_a) = p_{a+1}.P(X_1 = +1) + p_{a-1}.P(X_1 = -1) = p_{a+1}.p + p_{a-1}.q.$$

Et cette fois, puisque le mobile lorsqu'il est en 0 ou N s'immobilise : $p_0 = 0$ et $p_N = 1$, les nombres p_a $(0 \leq a \leq N)$ coïncident avec les $N+1$ premiers termes d'une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant (R) et telle que $p_0 = 0$ et $p_N = 1$. Il s'agit donc de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ déterminée en **I.4.b.**.

Par conséquent, puisque $p \neq 1/2$, en vertu du **I.4.b.**, avec $\lambda_0 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$:

$$\boxed{\forall\ 0 \leq a \leq N, \quad p_a = -\frac{1}{(q/p)^N - 1}.1 + \frac{1}{(q/p)^N-1}.(q/p)^n = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^N}}.$$

II.3. Le calcul de la somme est immédiat, à partir des valeurs de p_a et q_a $(1 \leq a \leq N)$ explicitées aux **II.1.b.** et **II.2.**. On obtient, pour tout a compris entre 1 et $N-1$:

$$p_a + q_a = \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^N} + \frac{(q/p)^n-(q/p)^N}{1-(q/p)^N} = \frac{1-(q/p)^n+(q/p)^n-(q/p)^N}{1-(q/p)^N} = 1.$$

Or, si la particule est initialement à l'abscisse a, l'événement «*le processus ne s'arrête pas*», noté C_a, est le complémentaire de la réunion disjointe des événements A_a et B_a, donc : $P(C_a) = 1 - P(A_a \cup B_a) = 1 - \left[P(A_a) + P(B_a)\right] = 1 - (p_a + q_a)$.

On déduit donc du fait que $p_a + q_a = 1$, que :

$$\boxed{P(C_a) = 0, \text{ i.e. la pobabilité que le processus ne s'arrête pas est nulle}}.$$

II.4. Par des raisonnements exactement identiques, si ce n'est que, cette fois, ce sont les valeurs obtenues en **II.5.** qui sont pertinentes, (car $p = 1/2$), on trouve :

$$\boxed{\forall\ 0 \leq a \leq N, \quad p_a = \frac{N-n}{N}, \quad q_a = \frac{n}{N}, \text{ et } \quad p_a + q_a = \frac{N-n}{N} + \frac{n}{N} = 1}.$$

De nouveau, $p_a + q_a = 1$, ce qui traduit que :

$$\boxed{\text{la probabilité que le processus ne s'arrête pas est nulle}}.$$

E.N. Vétérinaires 98 — Équation différentielle
Variable à densité
Étude d'un couple de V.A. — Durée 2 h 00

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

Partie I .

Déterminer la solution de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$: $4y'' + 5y' + y = 0$ vérifiant $y(0) = \dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = \dfrac{-3}{8}$.

Partie II .

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{6}e^{\frac{-t}{4}} + \dfrac{1}{3}e^{-t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1 - Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire continue T.
On estime que T indique la durée, en heures, pendant laquelle on peut utiliser un vaccin, après la sortie de son conditionnement.

2 - Déterminer la fonction de répartition F de la variable T.

3 - Calculer l'espérance de T que l'on notera $E(T)$.

4 - Calculer $p\big(T \leq E(T)\big)$.

Partie III .

Un berger trie un groupe de 10 chèvres dont 5 sont déjà vaccinées. Les chèvres entrent une par une, au hasard, dans un sas. Le berger repère, à chaque passage d'une chèvre dans le sas, si elle est déjà vaccinée ou non. On note X la variable aléatoire indiquant, dans le groupe de 10 chèvres, le rang d'apparition dans le sas de la dernière chèvre non vaccinée.

1 - Quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ?

2 - Déterminer la loi de X.

3 - Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Partie IV .

Après vaccination toutes les chèvres rejoignent le reste du troupeau. Le troupeau comporte au total n chèvres qui ont à leur disposition deux abris A_1 et A_2. Suite à une forte pluie, chaque chèvre, indifféremment, s'abrite dans l'abri A_1, dans l'abri A_2 ou reste dehors. On suppose que chaque abri peut contenir l'ensemble du troupeau et que les chèvres agissent indépendamment les unes des autres. On appelle Y la variable aléatoire désignant, à un instant donné, le nombre de chèvres se trouvant dans l'abri A_1 et Z la variable aléatoire désignant le nombre d'abris vides.

A - Étude de Y.

1 - Quelle est la loi de Y ? Donner, en fonction de n, son espérance et sa variance.

2 - On suppose que $n = 450$.

a - Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ?

b - Calculer $p(Y > 160)$.

c - Déterminer le plus petit entier m tel que $p(Y > m) < 0,05$.

B - Étude du couple de variables aléatoires (Y, Z).

1 - a - Que peut-on dire de l'événement $\big((Y = 0) \cap (Z = 0)\big)$?

b - Montrer que $p\big((Y = 0) \cap (Z = 2)\big) = \dfrac{1}{3^n}$

c - En déduire $p\big((Y = 0) \cap (Z = 1)\big)$.

2 - Soit k un entier naturel compris entre 1 et n.

a - Que vaut $p\big((Y = k) \cap (Z = 2)\big)$?

b - Calculer $p\big((Y = k) \cap (Z = 1)\big)$.

c - En déduire $p\big((Y = k) \cap (Z = 0)\big)$.

3 - Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

4 - Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Corrigé

.PARTIE I.

I.1. L'équation différentielle proposée est une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants**, <u>donc</u> on détermine les solutions de l'**équation caractérisque** associée, (EC), d'inconnue x, obtenue en remplaçant y'' par x^2, y' par x et y par 1, ici :

$$\text{(EC)} : \quad 4x^2 + 5x + 1 = 0.$$

(EC) admet pour **solution évidente** $\lambda_1 = -1$, et le **produit des racines** vaut $\frac{1}{4}$, donc la seconde racine est distincte et vaut $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ (*).

Les racines de l'équation caractéristique étant **réelles** et **distinctes**, la forme générale des solutions de l'équation différentielle est la suivante :

$y : x \longmapsto A.e^{\lambda_1.x} + B.e^{\lambda_2.x}$, définie sur $\mathbb{R}$, avec A, B réels quelconques.

• **Des conditions initiales étant données**, du type "valeurs en 0" pour y et y', on sait, d'après le cours, qu'il existe alors **une et une seule** fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle les satisfaisant, que l'on détermine en calculant A et B. Puisqu'il est demandé que : $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = -\frac{3}{8}$, il vient, y ayant la forme spécifiée ci-dessus, après calcul de y', qui vaut $x \longmapsto A.e^{\lambda_1.x} + B.e^{\lambda_2.x}$:

$y(0) = A.e^{\lambda_1.0} + B.e^{\lambda_2.0} = A + B = \frac{1}{2}$,
et $y(0) = A.\lambda_1.e^{\lambda_1.0} + B.\lambda_2.e^{\lambda_2.0} = A.\lambda_1 + B.\lambda_2 = -\frac{3}{8}$.

Ce qui donne, en remplaçant λ_1 et λ_2 par leurs valeurs respectives, -1 et $-\frac{1}{4}$:

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \\ (-1).A - \frac{1}{4}.B = -\frac{3}{8} \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow -8.L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 2.L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 2.A + 2.B = 1 \\ 8.A + 2.B = -3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\overset{L_1 \leftarrow 4.L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 6.B = 7 \\ 6.A = -4 \end{cases}$$

D'où l'on tire que : $A = \frac{7}{6}$ et $B = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$, et donc que :

$$\boxed{\text{la solution, vérifiant } y(0) = \frac{1}{2} \text{ et } y'(0) = -\frac{3}{8}, \text{ est : } x \longmapsto \frac{7}{6}.e^{-x} - \frac{2}{3}.e^{-\frac{1}{4}x}}.$$

.PARTIE II.

II.1. La fonction f proposée coïncide sur $\mathbb{R}_-^*$ avec une fonction continue (fonction nulle), donc : f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+$, f est la somme de deux composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ($t \mapsto -\frac{1}{4}.t$ composée par exp, et $t \mapsto -t$ composée par exp), donc : f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Donc : **(1)** f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

• Pour examiner la continuité en 0 : il convient d'étudier les limites de f à droite et à gauche en 0. **Or**, puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$: $\lim\limits_{t \xrightarrow{<} 0} f(t) = \lim\limits_{t \xrightarrow{<} 0} 0 = 0$,

et, sur $\mathbb{R}_+$, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, donc à droite en 0 :

$\lim\limits_{t \xrightarrow{>} 0} f(t) = f(0) = \frac{1}{6}.e^0 + \frac{1}{3}.e^0 = \frac{1}{2}$.

On constate donc que : $\lim_{t \to 0^-} f(t) = 0 \neq \lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0) = \frac{1}{2}$, donc :

(2) f n'est pas continue en 0, mais y admet, à droite et à gauche une limite finie.

En conséquence de (1) et (2), on peut donc affirmer que :

f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, f, qui, par ailleurs, est définie et positive sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire, que l'on pourra noter T, si et seulement si :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ existe et vaut 1.

Or, une telle intégrale (impropre), pour une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, existe si et seulement si

(3) $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\, dt$, et $\lim_{B \to +\infty} \int_{-B}^0 f(t)\, dt$ existent,

---

(*) on peut bien sûr préférer calculer le discriminant Δ (égal à 3) et en déduire λ_1 et λ_2 par les formules habituelles : $\lambda_2 = (-5 + \sqrt{\Delta})/(2.4) = -1/4$ et $\lambda_1 = (-5 - \sqrt{\Delta})/(2.4) = -1$.

auquel cas : (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et est égale à la somme de ces deux limites.

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, elle ne différe de la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$ qu'en 0, et donc :

- pour tout $B > 0$, $\int_{-B}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-B}^{0} 0\,\mathrm{d}t = 0$, donc : $\lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{0} f(t)\,dt = 0$.

Et pour l'autre intégrale, compte-tenu de l'écriture de f sur $\mathbb{R}_+$, et sachant qu'une fonction de la forme $t \mapsto e^{\alpha.t}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$: $t \mapsto \alpha.e^{\alpha.t}$ (*c.f. densité et fonction de répartition de la loi exponentielle !*), par un calcul direct :

- pour tout $A > 0$, $\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{6}.e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}.e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-4}{6}.e^{-\frac{t}{4}} - \frac{1}{3}.e^{-t}\right]_0^A$, donc :

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{-4}{6}.e^{-\frac{A}{4}} - \frac{1}{3}.e^{-A}\right) - \left(\frac{-4}{6}.e^0 - \frac{1}{3}.e^0\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\left(\frac{-4}{6}.e^0 - \frac{1}{3}.e^0\right) = 1,$$

par composition et somme de limites en s'appuyant sur : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

En conclusion, on a donc montré que les deux limites dans (3) existent et valent respcetivement 1 et 0, donc, en vertu de (4) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ existe et vaut : } 0 + 1 = 1.$$

ce qui, puisqu'aussi f est **continue par morceaux** et **positive sur** $\mathbb{R}$, achève d'établir que : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire continue } T}$.

II.2. Fonction de répartition de T : **par définition**, f étant une densité de T, la fonction de répartition de T est la fonction F_T, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_-$: $\forall x < 0, \quad F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0,$

tandis que, pour $x \geq 0$: $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui, compte-tenu de la primitive précedemment trouvée pour f sur $\mathbb{R}_+$, donne :

$$\forall x \geq 0, \quad F_T(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-4}{6}.e^{-\frac{t}{4}} - \frac{1}{3}.e^{-t}\right]_0^x.$$

Ou encore :

$$\forall x \geq 0, \quad F_T(x) = \left(\frac{-4}{6}.e^{-\frac{x}{4}} - \frac{1}{3}.e^{-x}\right) - \left(\frac{-4}{6}.e^0 - \frac{1}{3}.e^0\right) = 1 - \frac{1}{3}.\left(2.e^{-\frac{x}{4}} + e^{-x}\right).$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la fonction de répartition } F_T \text{ de } T \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_- \text{ et est définie,}\\ \text{pour } x \in \mathbb{R}_+, \text{ par :} \qquad F_T(x) = 1 - \frac{1}{3}.\left(2.e^{-\frac{x}{4}} + e^{-x}\right)\end{array}}.$$

II.3. En conséquence de nouveau de la **nullité** de f sur $\mathbb{R}_-$:

l'espérance de T est définie par : $E(T) = \int_0^{+\infty} t.f(t)\,\mathrm{d}t$, et existe si et seulement si l'intégrale converge, *i.e.* si et seulement si : $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t.f(t)\,dt$ existe.

Or, par une **intégration par parties**, faisant intervenir les fonctions u et v, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, définies par :

$$\left|\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = f(t) \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = F_T(t) - 1, \end{array}\right.$$

(où l'on a choisi pour primitive de f non pas F_T mais $F_T - 1$, d'expression plus simple)

il vient : $\forall A > 0, \quad \int_0^A t.f(t)\,\mathrm{d}t = [t.(F_T(t) - 1)]_0^A - \int_0^A (F_T(t) - 1)\,\mathrm{d}t,$

où :

$$F_T(t) - 1 = -\frac{1}{3}.\left(2.e^{-\frac{x}{4}} + e^{-x}\right) = -\frac{2}{3}.e^{-\frac{x}{4}} - \frac{1}{3}e^{-x}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^A t.f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t.\left(-\tfrac{2}{3}.e^{-\frac{x}{4}} - \tfrac{1}{3}e^{-x}\right)\right]_0^A - \int_0^A -\tfrac{2}{3}.e^{-\frac{x}{4}} - \tfrac{1}{3}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{3}.\left[-2.A.e^{-\frac{A}{4}} - A.e^{-A}\right] - \left[\tfrac{2}{3}.4.e^{-\frac{x}{4}} + \tfrac{1}{3}.e^{-x}\right]_0^A \\ &= \tfrac{1}{3}.\left[\left(-2.A.e^{-\frac{A}{4}} - A.e^{-A}\right) - \left((8.e^{-\frac{A}{4}} + e^{-A}) - (8+1)\right)\right]\end{aligned}$$

Ce qui donne après simplifications :

$$\forall A > 0, \quad \int_0^A t.f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}.\left[-2.A.e^{-\frac{A}{4}} - A.e^{-A} - 8.e^{-\frac{A}{4}} - e^{-A} + 9\right],$$

d'où l'on déduit, en s'appuyant sur les résultats de **comparaison des fonctions usuelles** : $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha.x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x.e^{-\alpha.x} = 0$ $(\alpha > 0)$, que :

$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t.f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{9}{3}$; et par suite, que : $\boxed{E(T) \text{ existe et vaut } 3}$.

II.4. La probabilité à calculer, s'exprime, à l'aide de la fonction de répartition F_T de T, ainsi :

$$P(T \le E(T)) = F_T(E(T))$$

Donc, puisque l'on a montré que $E(T) = 3$, et que : $F_T(t) = \frac{1-2.e^{-\frac{x}{4}} - e^{-x}}{3}$ (pour $t \ge 0$), on a :

$$\boxed{P(T \le E(T)) = \frac{1-2.e^{-\frac{3}{4}} - e^{-3}}{3} \simeq 0.67}.$$

.PARTIE III.

III.1. Les chèvres entrent une par une. Puisqu'il y a 5 chèvres vaccinées, le rang d'apparition X de la dernière vaccinée dans le sas **ne peut être inférieur à 5**, et il est égal à 5 si les chèvres vaccinées rentrent en premier les unes à la suite des autres.

Par ailleurs, puisqu'il y a 10 chèvres en tout, puisqu'elles rentrent toutes dans le sas, le rang d'apparition de la dernière vaccinée dans le sas **ne peut être supérieur à 10**, et il est égal à 10 si par exemple les chèvres vaccinées sont les dernières à rentrer.

Par conséquent : $\boxed{X(\Omega) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}}$.

III.2. *Dans la mesure où la V.A. X ne suit aucune loi connue, on va* **procéder par dénombrement** pour déterminer la loi de X. c'est-à-dire que l'on va calculer directement les probabilités $P(X = k)$, $(5 \le k \le 10)$, par la formule :

$$P(X = k) = \text{Card } (X = k)/\text{Card } \Omega.$$

◇ Choix de l'univers : L'utilisation de la formule précédente nécessite le choix d'un univers constitué de **résultats tous équiprobables**. Ici, les chèvres rentrant au hasard dans le sas, par exemple, **les listes** :

"**V V V V V C C C C C**",

où l'on indique, dans l'ordre d'entrée dans le sas si la chèvre entrante est vaccinée (V) ou non-vaccinée (C), **sont équiprobables**.

(dans l'exemple, les 5 chèvres vaccinées rentrent en premier, les autres ensuite).

• Cet univers étant choisi, égal à l'ensemble des listes possibles de 5 symbôles "V" et 5 symbôles "C", il y a **autant de listes possibles que de choix des rangs d'apparition des chèvres vaccinées**, c'est-à-dire autant que de choix possibles de 5 éléments (les rangs d'apparition des chèvres vaccinées) parmi 10 (ensemble de tous les rangs possibles, égal à $\{1, 2, \ldots, 10\}$).

En conséquence : $\text{Card}\ \Omega = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6}{5!} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = 252.$

◇ Probabilité d'apparition de la dernière chèvre vaccinée en $k^{\text{ème}}$ position ($5 \leq k \leq 10$) :

Pour tout k compris entre 5 et 10, l'événement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si le résultat de l'expérience est une liste "VVCV...CC" pour laquelle 4 symbôles "V" apparaissent strictement avant le $k^{\text{ème}}$ rang et un au $k^{\text{ème}}$ rang exactement. Il y a donc autant de résultats réalisant $(X = k)$ que de possibilités de choisir les 4 rangs d'apparition des 4 premières chèvres vaccinées entrantes dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k-1\}$, le rang d'apparition de la $5^{\text{ème}}$ et dernière davnt être égal à k.

Par conséquent : $\text{Card}\ (X = k) = C_{k-1}^4.$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in X(\Omega) = [\![5, 10]\!]\ , \quad P(X = k) = \frac{C_{k-1}^4}{C_{10}^5} = \frac{1}{252}.C_{k-1}^4}.$$

III.3. L'espérance de X est donnée par la formule :

$$E(X) = \sum_{k=5}^{10} k.P(X = k) = \sum_{k=5}^{10} k.\frac{1}{252}.C_{k-1}^4 = \frac{1}{252}.\sum_{k=5}^{10} k.C_{k-1}^4.$$

On peut alors expliciter les valeurs numériques des C_{k-1}^4, $(5 \leq k \leq 10)$ et achever le calcul de $E(X)$.

• Signalons cependant cette autre façon de faire (*plutôt à l'attention des lecteurs de la filière BCPST*) :

$$k.C_{k-1}^4 = k.\frac{(k-1)!}{4![(k-1)-4]!} = \frac{k!}{4!(k-5)!} = 5.\frac{k!}{5!(k-5)!} = 5.C_k^5 \quad (\text{formule : } n.C_{n-1}^{p-1} = p.C_n^p)$$

d'où l'on tire : $E(X) = \frac{1}{252}.\sum_{k=5}^{10} k.C_{k-1}^4 = \frac{5}{C_{10}^5}.\sum_{k=5}^{10} C_k^5,$

et en rappelant la formule : $\sum_{i=p}^{n} C_i^n = C_{p+1}^{n+1}$ (démonstration par récurrence), il vient :

$$\boxed{E(X) = \frac{5}{C_{10}^5}.\sum_{k=5}^{10} C_k^5 = \frac{5}{C_{10}^5}.C_{11}^6 = 5.\frac{5!.5!}{10!}.\frac{11!}{5!6!} = \frac{5.11}{6} = \frac{55}{6}}.$$

.PARTIE IV.

IV.A.1. La variable Y est ce que l'on appelle un "***compteur***", c'est-à-dire que Y est une somme de variables aléatoires de Bernoulli (*i.e.* prenant les valeurs 0 ou 1). Ici, en numérotant les chèvres, **Y est la somme de n variables X_i**, les V.A. X_i prenant la valeur 1, si la chèvre n°i est dans l'abri A_1, et 0 sinon.

• **Parce que chaque chèvre choisit indifféremment** entre les 3 possibilités : s'abriter dans A_1, s'abriter dans A_2 et rester dehors :

la probabilité, pour chacune des chèvres, de s'abriter dans A_1 vaut : $\frac{1}{3}$.

• Par ailleurs, **les chèvres font leur choix indépendamment les unes des autres**, donc : les variables X_i sont indépendantes, Ainsi, **on peut conclure que** :

Y st une somme de n varaibles de Bernoulli **indépendantes** et de paramètre $\frac{1}{3}$

Et par suite : $\boxed{Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p = 1/3}$.

■Espérance et variance de Y : **d'après le cours** sur la loi binomiale,

$$\boxed{E(X) = n.p = \frac{n}{3}, \quad \text{et} \quad V(X) = n.p.(1-p) = n.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2n}{9}}.$$

IV.A.2.a. Approximation de la loi de Y : puisque $n = 450 > 30$, $p = \frac{1}{3}$ est proche de $0,5$, et $np(1-p) = 450.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{900}{9} = 100 > 5$ et , **d'après le cours** :

$$\boxed{\text{on peut approcher la loi } \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{3}) \text{ par la loi normale } \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)}) = \mathcal{N}(150, 10)}.$$

IV.A.2.b. Afin de pouvoir **utiliser l'approximation précédente** (en se reportant à une table), on "***centre***" et on "***réduit***", c'est-à-dire on se ramène à la variable $\tilde{Y} = \frac{Y-150}{10}$, dont on sait qu'elle suit une loi normale centrée réduite si Y suit la loi $\mathcal{N}(150, 10)$:

$$P(Y > 160) = P(Y - 150 > 160 - 150) = P(Y - 150 > 10) = P(\tfrac{Y-150}{10} > 1)$$

Ainsi : $P(Y > 160) = P(\tilde{Y} > 1)$. Et en vertu de l'approximation précédente, on peut considérer que $\tilde{Y}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et si l'on dispose d'une table de la fonction de répartion Φ de cette loi, on réécrira encore :

$$P(Y > 160) = P(\tilde{Y} > 1) = 1 - P(\tilde{Y} \leq 1) \simeq 1 - \Phi(1)$$

On achève en consultant une table indiquant que : $\Phi(1) \simeq 0,84$, ce qui donne :

$$\boxed{P(Y > 160) \simeq 1 - \Phi(1) \simeq 1 - 0,84 \simeq 0,26}.$$

IV.A.2.c. On procède de la même façon, pour tout entier m :

$$P(Y > m) = P(Y - 150 > m - 150) = P\left(\tfrac{Y-150}{10} > \tfrac{m-150}{10}\right) = P\left(\tilde{Y} > \tfrac{m-150}{10}\right).$$

Considérant encore que la loi de $\tilde{Y}$ peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a, cette fois encore, en introduisant la fonction de répartition Φ :

$$P(Y > m) = P\left(\tilde{Y} > \tfrac{m-150}{10}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\tfrac{m-150}{10}\right).$$

Ainsi, on considèrera que : $P(Y > m) < 0,05$ équivaut à $\Phi\left(\frac{m-150}{10}\right) > 0,95$.

La consultation d'une table indique que : $\Phi(t) > 0,95$ dès lors que $t >$, aussi conclut-on : $\boxed{P(Y > 160) \simeq 1 - \Phi(1) \simeq 1 - 0,84 \simeq 0,26}$.

IV.B.1.a. **Par définition des variables Y et Z**, l'événement $(Y = 0)$ est réalisé si et seulement si aucune chèvre ne se trouve dans l'abri A_1, tandis que l'événement $(Z = 0)$ est réalisé si et seulement si aucun abri n'est vide. **Les événements $(Y = 0)$ et $(Z = 0)$ sont donc incompatibles** et par suite :

$$\boxed{\text{l'événement } ((Y = 0) \cap (Z = 0)) \text{ est } \textbf{impossible}\text{, donc : } P((Y = 0) \cap (Z = 0)) = 0}.$$

IV.B.1.b. L'événement $((Y=0)\cap(Z=2))$ est réalisé si et seulement si, à la fois, aucune chèvre ne se trouve dans l'abri A_1 $((Y=0))$ et les deux abris sont vides $((Z=2))$; l'événement est donc réalisé si et seulement si toutes les chèvres sont restées au dehors. En notant D_i l'événement "*la $i^{\text{ème}}$ chèvre est restée au dehors*", on a donc : $((Y=0)\cap(Z=2))=(Z=2)=\bigcap_{i=1}^{n} D_i$.

De nouveau, comme **les choix des chèvres sont indépendants**, il s'ensuit que :

$$\textbf{(5)}\quad P\big((Y=0)\cap(Z=2)\big)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n} D_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(D_i).$$

Et comme **chaque chèvre choisit indifféremment entre l'abri A_1, l'abri A_2 et l'extérieur**, pour chaque chèvre : $P(D_i)=\frac{1}{3}$, et l'on peut conclure par (5) :

$$\boxed{P\big((Y=0)\cap(Z=2)\big)=\left(\tfrac{1}{3}\right)^n=\tfrac{1}{3^n}}.$$

IV.B.1.c. *En considérant les deux questions précédemment posées,* on introduira le **système complet d'événements** : $\{(Z=0),(Z=1),(Z=2)\}$, pour exprimer, grâce à la **formule des probabilités totales**, la probabilité de l'événement $(Y=0)$:

$$\textbf{(6)}\quad P(Y=0)=P(Y=0\cap Z=0)+P(Y=0\cap Z=1)+P(Y=0\cap Z=2).$$

Les probabilités : $P(Y=0\cap Z=0)$ et $P(Y=0\cap Z=2)$ ont déjà été déterminées et valent respectivement : 0 et $1/3^n$, tandis que, puisque Y suit la loi $\mathcal{B}(n,\frac{1}{3})$ (*c.f.* **IV.A.1.**), la probabilité $P(Y=0)$, vaut : $C_n^0(1/3)^0(2/3)^n=(2/3)^n$, **donc**, par (6), $P(Y=0\cap Z=1)$ vaut :

$$P(Y=0)-P(Y=0\cap Z=0)-P(Y=0\mid Z=2)=\left(\tfrac{2}{3}\right)^n-0-\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

D'où le résultat : $\boxed{P(Y=0\cap Z=1)=\frac{2^n-1}{3^n}}$.

IV.B.2.a. Pour tout entier k étant compris entre 1 et n, l'événement $(Y=k)\cap(Z=2)$ est un **événement impossible** puisque la réalisation de $(Z=2)$ signifie les deux abris sont vides, ce qui exclut que k chèvres soient dans l'abri A_1 $(k\geq 1)$.

Par conséquent : $\boxed{\text{pour tout } k\in[\![1,n]\!],\quad P(Y=k\cap Z=2)=0}$.

IV.B.2.b. La réalisation de l'événement $(Z=1)$ signifie que l'un des abris et vide. Par conséquent, dans la mesure où l'entier k considéré est **supérieur ou égal à 1**, la réalisation simultanée de $(Y=k)$ et $(Z=1)$ signifie, puisqu'alors l'abri A_1 n'est pas l'abri vide $(k\geq 1)$, que : **l'abri A_2 est vide** et l'abri A_1 accueille k chèvres.

Ainsi, on peut écrire : **(7)** $(Y=k)\cap(Z=1)=(Y=k)\cap(\text{"}A_2\text{ est vide"})$.

Cependant, malgré cette récriture, on ne sait pas plus calculer la probabilité recherchée. Aussi, doit-on opérer une dernière manipulation.

Par la formule des probabilités conditionnelles :

$$\textbf{(8)}\quad P\big((Y=k)\cap(\text{"}A_2\text{ est vide"})\big)=P\big(Y=k\mid\text{"}A_2\text{ est vide"}\big).P\big(\text{"}A_2\text{ est vide"}\big).$$

Or, parce que les chèvres ne font pas de différence entre les abris A_1 et A_2, la probabilité pour que l'abri A_2 soit vide est égale à la probabilité pour que A_1 soit vide, c'est-à-dire est égale à $P(Y=0)$ (calculée au **IV.B.1.c.**), donc :

$$\textbf{(9)}\quad P\big(\text{"}A_2\text{ est vide"}\big)=P(Y=0)=\left(\tfrac{2}{3}\right)^n.$$

Par ailleurs, **si l'on sait que l'abri A_2 est vide**, les chèvres choisissant au hasard leur destination, **chaque chèvre est, avec la même probabilité, soit au dehors, soit abritée dans A_1**, et comme les choix sont indépendants :

la loi de Y, **sachant que A_2 est vide**, est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

(la V.A. égale au nombre de chèvres dans A_1 est égale au nombre de succés obtenus lorsque l'on effectue n tirages au sort, indépendants, déterminant chacun, sachant que A_2 est vide, si la chèvre n°i est dans A_1 (succès, probabilité 1/2) ou dans A_1 (échec)).

Ainsi, connaissant l'expression de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$:

$$\textbf{(10)} \quad P(Y = k \mid \text{“}A_2 \text{ est vide”}) = C_n^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

On peut alors conclure, par (7), (8), (9) et (10), que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad P(Y = k \cap Z = 1) = C_n^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^n . \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = \tfrac{1}{3^n}.C_n^k}.$$

IV.B.2.c. Comme au **IV.B.1.c.**, la valeur de cette dernière probabilité se calcule par application de la **formule des probabilités totales**, appliquée avec le même système complet d'événements, au calcul de la probabilité $P(Y = k)$, $(1 \leq k \leq n)$, dont on sait qu'elle vaut : $C_n^k(1/3)^k(2/3)^{n-k}$ (*c.f.* **IV.A.1.**). On obtient :

$$P(Y = k) = P(Y = k \cap Z = 0) + P(Y = k \cap Z = 1) + P(Y = k \cap Z = 2).$$

puis : $$P(Y = k \cap Z = 0) = P(Y = k) - P(Y = k \cap Z = 1) - P(Y = k \cap Z = 2).$$

Soit, en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$P(Y = k \cap Z = 0) = C_n^k . \left(\tfrac{1}{3}\right)^k . \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-k} - \tfrac{1}{3^n}.C_n^k - 0.$$

et enfin, en simplifiant :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad P(Y = k \cap Z = 0) = \frac{1}{3^n}.(2^{n-k} - 1).C_n^k}.$$

IV.B.3. Les réponses aux questions **B.1.** et **B.2.** concourant à la détermination de la loi du couple (Y, Z), on peut maintenant déterminer la loi de Z en tant que **seconde loi marginale du couple (Y, Z)**, par la formule du cours :

$$\text{pour } j \in Z(\Omega),\ (Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}), \quad P(Z = j) = \sum_{k=0}^{n} P(Y = k \cap Z = j).$$

Il convient alors pour achever de distinguer suivant la valeur de j, pour utiliser les résultats précédents :

- <u>pour $j = 0$</u>, d'après **IV.B.1.a.** et **IV.B.2.c.** :

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(Y = 0 \cap Z = 0) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} P(Y = k \cap Z = 0) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^n}.(2^{n-k} - 1).C_n^k = \frac{1}{3^n}. \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k.2^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} C_n^k \right) \end{aligned}$$

On reconnaît alors dans chaque somme un **développement du binôme** : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^k.b^{n-k}$, l'un pour $a = 1$ et $b = 2$, l'autre pour $a = b = 1$, si ce n'est que chacun est privé de son terme de rang $k = 0$, égal à $C_n^0.a^0.b^{n-0} = b^n$.

Ainsi, on a encore :

$$P(Z=0)=\frac{1}{3^n}.\left(\left[(1+2)^n-2^n\right]-\left[(1+1)^n-1\right]\right)=\frac{1}{3^n}.(3^n-2.2^n+1).$$

- pour $j=1$, d'après **IV.B.1.c.** et **IV.B.2.b.** :

$$\begin{aligned}P(Z=1)&=P(Y=0\cap Z=1)+\sum_{k=1}^{n}P(Y=k\cap Z=1)\\&=\frac{2^n-1}{3^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^n}.C_n^k=\frac{1}{3^n}.\left(2^n-1+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\right)\end{aligned}$$

Et comme (*c.f.* ci-dessus) : $\sum_{k=1}^{n}C_n^k=2^n-1$, on peut conclure que :

$$P(Z=1)=\frac{1}{3^n}.(3^n-2^n+(2^n-1))=\frac{1}{3^n}.2.(2^n-1).$$

- pour $j=2$, d'après **IV.B.1.b.** et **IV.B.2.a.**, on a cette fois immédiatement :

$$P(Z=2)=P(Y=0\cap Z=2)+\sum_{k=1}^{n}P(Y=k\cap Z=2)=\frac{1}{3^n}+\sum_{k=1}^{n}0=\frac{1}{3^n}.$$

On a ainsi montré que la loi de Z est décrite par :

$$\boxed{Z(\Omega)=\{0,1,2\},\quad P(Z=0)=\tfrac{3^n-2.2^n+1}{3^n}\ ;\ P(Z=1)=\tfrac{2.(2^n-1)}{3^n}\ ;\ P(Z=2)=\tfrac{1}{3^n}}.$$

IV.B.4. Par la **formule du cours** : $E(Z)=\sum_{j=0}^{2}j.P(Z=j)$, donc, compte-tenu de la loi trouvée pour Z :

$$E(Z)=0.\tfrac{3^n-2.2^n+1}{3^n}+1.\tfrac{2.(2^n-1)}{3^n}+2.\tfrac{1}{3^n}=\tfrac{2^{n+1}-2+2}{3^n},\ \text{soit :}\ \boxed{E(Z)=\frac{2^{n+1}}{3^n}}$$

IV.B.5. De façon immédiate, puisque, par exemple : $P\big((Y=0)\cap(Z=2)\big)=\frac{1}{3^n}$, tandis que $P(Y=0).P(Z=2)=\frac{2^n}{3^n}.\frac{1}{3^n}\neq\frac{1}{3^n}$:

$\boxed{\text{les variables } Y \text{ et } Z \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

car, il est **faux** que : $\forall\,(k,j)\in Y(\Omega)\times Z(\Omega),\ P(Y=k\cap Z=j)=P(Y=k).P(Z=j)$.

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Les deux parties du problème sont indépendantes ; dans la première partie les trois modèles peuvent être abordés dans un ordre indifférent. Leur étude n'utilise que les résultats énoncés dans la question 2. de la première partie.

On rappelle que si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne, quand elle existe, l'espérance de X.

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives réelles ou nulles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout réel $a \geq 0$, on note $N(a)$ le nombre de variables Y_n dont la valeur est dans l'intervalle $[0, a]$. On désire étudier dans certains cas la variable aléatoire $N(a)$. Dans une première partie la suite (Y_n) est telle que la suite $(Y_n - Y_{n-1})_{n\geq 1}$est une suite de variables aléatoires positives ou nulles, indépendantes, et de même loi.

Dans une seconde partie, la suite (Y_n) est construite de telle sorte que jusqu'à un certain instant (pouvant être aléatoire), elle soit constituée de variables aléatoires positives ou nulles, indépendantes, de même loi uniforme, et qu'après cet instant les valeurs de Y_n n'influent pas sur la valeur de $N(a)$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs ou nuls, avec $a_0 = 1$.

   a. Indiquez les raisons pour lesquelles la suite (a_n) converge vers une limite $0 \leq l \leq 1$.

   Montrez que la série de terme général $a_{n-1} - a_n$ $(n \geq 1)$ converge et a pour somme $S = 1 - l$.

   b. Montrez que si la série de terme général na_n converge, il en est de même pour la série de terme général a_n, ainsi que pour la série de terme général $n(a_{n-1} - a_n)$. Montrez que l'on a alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

2. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$de variables aléatoires réelles positives ou nulles indépendantes et de même loi, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   Soit alors $Y_0 = 0$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout entier $n \geq 1$. On note pour tout $n \geq 0$, F_n la fonction de répartition de Y_n, à savoir :
$$F_n(a) = P(Y_n \leq a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

   a. Montrez que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la suite $\big(F_n(a)\big)_{n\geq 0}$ est décroissante avec $F_0(a) = 1$.

   b. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, soit $N(a)$ le nombre de Y_n dont la valeur est dans $[0, a]$ (ce nombre pouvant être éventuellement égal à $+\infty$).
   Montrez alors que l'on a, pour tout $n \geq 1$,
$$P\big(N(A) = n\big) = F_{n-1}(a) - F_n(a),$$
   puis en utilisant le préliminaire, montrez que :
$$P\big(N(A) < \infty\big) = 1$$
   est équivalent à :
$$F_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   c. On suppose que la série de terme général $nF_n(a)$ converge.
   Montrez que $P\big(N(A) < \infty\big) = 1$. La variable aléatoire $N(a)$ peut alors être considérée à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Montrez que $E\big(N(a)\big)$ existe et est égale à :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(a).$$

3. *Le modèle de Bernoulli.*
   Dans cette partie on considère le cas particulier où la loi de X_n est, pour tout $n \geq 1$, une loi de Bernoulli de paramètre p, $0 < p < 1$.

   a. Quelle est alors, pour tout $n \geq 1$, la loi de Y_n ?
   Écrire pour tout k entier positif ou nul, pour tout n entier positif ou nul, l'expression de $F_n(k)$.

   b. Montrez que pour tout $k \geq 0$, $F_n(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et que la série de terme général $nF_n(k)$ converge.

   c. Montrez que l'on a pour tout $k \geq 0$, entier :
$$E\big(N(k)\big) = k + \sum_{n=k}^{+\infty} F_n(k),$$
   puis calculez $E\big(N(0)\big)$, $E\big(N(1)\big)$.

   d. À partir du développement en série entière de $(1-x)^\alpha$, α réel quelconque, trouvez la valeur explicite de :
$$\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^{n-k}, \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1,$$
   k entier positif ou nul quelconque.

e. En utilisant le résultat de la question précédente, montrez que l'on a :
$$E(N(k+1)) = E(N(k)) + \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$
En déduire la valeur de $E(N(k))$ pour tout entier $k \geq 0$.

4. *Le modèle géométrique.*

On considère le cas où la loi de X_n est, pour tout $n \geq 1$, définie par :
$$P(X_n = k) = (1-a)a^k$$
pour tout entier $k \geq 0$, où a est un réel fixé strictement compris entre 0 et 1.

a. Calculez la fonction génératrice de X_1, puis celle de Y_n pour tout entier $n \geq 1$.
En déduire que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \geq 0$, on a :
$$P(Y_n = k) = \alpha_{n,k}(1-a)^n a^k,$$
où $\alpha_{n,k}$ est un réel que l'on déterminera.

b. Montrez que $E(N(k))$ existe pour tout entier $k \geq 0$.
Calculez $E(N(0))$, puis pour tout entier $k \geq 1$, $E(N(k))$ en fonction de $E(N(k-1))$.
En déduire la valeur de $E(N(k))$ pour tout entier $k \geq 0$.

5. *Le modèle exponentiel.*

On considère maintenant le cas particulier où la loi de X_n est, pour tout $n \geq 1$, une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Calculez alors la densité de la loi de Y_2, puis par récurrence montrez que la densité de la loi de Y_n est, pour tout $n \geq 1$, égale à $f_n(x)$ où :
$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} \quad \text{pour } x > 0, \qquad 0 \text{ pour } x \leq 0.$$
Donnez pour $a \geq 0$ l'expression de $F_n(a)$ sous la forme d'une intégrale définie qu'on ne cherchera pas à calculer.

b. Calculez pour tout $n \geq 1$, $F_{n-1}(a) - F_n(a)$.
En déduire la valeur de $P(N(a) = n)$, pour tout entier $n \geq 1$. Montrez alors que $N(a)-1$ suit une loi classique que l'on déterminera ; en déduire les valeurs de $E(N(a))$ et $\sigma^2(N(a))$ (variance de $N(a)$).

SECONDE PARTIE

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$. Soit a un réel, $0 < a \leq 1$.

1. Soit n un entier strictement positif. on note :
$$\begin{aligned} Y_k &= X_k \quad \text{si } k < n \\ Y_k &= 2 \quad \text{si } k \geq n \end{aligned}$$
et $N_n(a)$ le nombre de Y_k dont la valeur est dans l'intervalle $[0,a]$.
Quelle est alors la loi de $N_n(a)$? Donnez la valeur de $E(N_n(a))$.

2. Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

On définit alors, pour tout entier $k \geq 0$, la variable aléatoire $\tilde{Y}_k$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k(\omega) &= X_k(\omega) \quad \text{si } Z(\omega) > k \\ &= 2 \quad \text{si } Z(\omega) \leq k \end{aligned}$$

De même $\tilde{N}(a)$ désigne le nombre de $\tilde{Y}_k$ dont la valeur est dans l'intervalle $[0, a]$.

i. Montrez les égalités :

$$P(\tilde{N}(a) = 0) = P(Z = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N_n(a) = 0) P(Z = n)$$

$$P(\tilde{N}(a) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N_n(a) = k) P(Z = n) \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

En déduire que $\tilde{N}(a)$ suit une loi de Poisson de paramètre λa, ceci pour tout $0 < a \leq 1$.

ii. Soit pour tout $\omega \in \Omega$, $(T_n(\omega))$ la suite obtenue à partir de la suite $(\tilde{Y}_n(\omega))$ en ordonnant cette suite de manière croissante.
Montrez alors que l'on a, pour tout $m \geq 1$, $0 < a \leq 1$,

$$P(T_n \leq a) = P(\tilde{N}(a) \geq m).$$

En déduire que :

$$P(T_n \leq a) = \int_0^{\lambda a} \frac{t^{m-1} e^{-t}}{(m-1)!} dt.$$

Que vaut enfin la fonction de répartition de T_m, soit $G_m(x)$, pour $x \notin [0, 1[$? (on pourra faire intervenir dans le résultat $\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{t^{m-1} e^{-t}}{(m-1)!} dt$, qu'on ne cherchera pas à calculer.)

Corrigé

.PREMIÈRE PARTIE.

$\boxed{\text{I.1.a.}}$ La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 (car ses termes sont positifs), donc, d'après le **théorème de la limite monotone** :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est convergente}}.$$

• Puisque $(a_n)_{n \geq 0}$est décroissante, elle est majorée par son premier terme $a_0 = 1$, d'autre part, elle est à termes positifs, donc : $\forall n \geq 0, \quad 0 \leq a_n \leq 1$.
Par ailleurs, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est convergente, donc, si on note l sa limite, on a, **par passage à la limite** sur l'inégalité précédente : $\boxed{0 \leq l \leq 1}$.

◇ *Il s'agit d'un cas de* ***télescopage****. Dès lors que le terme général d'une série s'exprime comme la différence de deux termes successifs d'une suite, on dispose d'une écriture simple du terme général S_N de la suite de ses sommes partielles*, ici :

$$S_N = a_0 - a_N.$$

Voici, la façon de procéder :

$$\text{pour tout } N \geq 1, \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} a_{n-1} - a_n = \sum_{n=1}^{N} a_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} a_n$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \begin{pmatrix}\text{par décalage de l'indice} \\ \text{sur la première somme}\end{pmatrix}$$

les termes communs aux deux sommes s'éliminent alors, et on obtient :

$$\forall N \geq 1, \quad S_N = a_0 - a_N = 1 - a_N.$$

Il s'ensuit : $\lim_{N\to+\infty} S_N = 1 - \lim_{N\to+\infty} a_N = 1 - l$.

Ainsi, la suite des sommes partielles converge vers $1 - l$, donc par définition :

$\boxed{\text{la série de terme général } a_{n-1} - a_n \ (n \geq 1) \text{ converge et sa somme vaut } 1 - l}$.

I.1.b. On obtient facilement la convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n$ **par comparaison** avec $\sum_{n\geq 0} n.a_n$:

i. les séries de terme général na_n et a_n à termes positifs
ii. à partir du rang $n = 1$: $a_n \leq na_n$
iii. $\sum_{n\geq 0} n.a_n$ est convergente par hypothèse.

donc, d'après le **théorème de comparaison des séries à termes positifs**,

$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n \text{ est convergente}}$.

• Pour la convergence de la série de terme général $n(a_{n-1} - a_n)$, $(n \geq 1)$, on revient aux **sommes partielles**, qui s'écrivent pour cette série : $\hat{S}_n = \sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} - a_n)$.

Par une technique de type « ***télescopage*** *»* :

$$\hat{S}_N = \sum_{n=1}^{N} na_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} na_n = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)a_n - \sum_{n=1}^{N} na_n \quad \begin{pmatrix}\text{en décalant l'indice} \\ \text{sur la première somme}\end{pmatrix}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} na_n + \sum_{n=0}^{N-1} a_n - \sum_{n=1}^{N} na_n.$$

On constate alors que, dans la première somme, le terme de rang 0 est nul et tous les autres s'éliment avec ceux de la troisième somme, pour n compris entre 1 et $N - 1$.

Ainsi, **après simplification** :

$$\hat{S}_N = \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right) - Na_N.$$

Comme on fait l'hypothèse que $\sum_{n\geq 0} na_n$ est **convergente** :

$Na_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, en tant que terme général d'une série convergente,
et $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, comme on l'a montré plus haut,

En conséquence :

$$\lim_{N\to+\infty} \hat{S}_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n - \lim_{N\to+\infty} Na_N = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .$$

Ce qui établit le résultat demandé :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} n(a_{n-1} - a_n) \text{ converge et sa somme vaut } \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}.$$

$\boxed{\textbf{I.2.a.}}$ Pour $n \geq 0$: ▌ $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$, avec X_{n+1}, variable aléatoire positive.

Il s'ensuit donc que : ▌ $\forall \omega \in \Omega$: $Y_{n+1}(\omega) \geq Y_n(\omega)$.

On peut dire que la suite de V.A. $(Y_k)_{n\geq 0}$ est **croissante**, et noter : ▌ $Y_{n+1} \geq Y_n$.

• En conséquence, on a aussi pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\omega \in \Omega$:
$(Y_{n+1}(\omega) \leq a) \Longrightarrow (Y_n(\omega) \leq a)$ ou en termes d'événements : $(Y_{n+1} \leq a) \subset (Y_n \leq a)$.
Ce qui donne, **par croissance de la fonction probabilité P** :

$$\forall n \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}, \qquad P(Y_{n+1} \leq a) \leq P(Y_n \leq a).$$

On a ainsi établi, pour a positif, mais plus généralement pour $a \in \mathbb{R}$:

▌ la décroissance de la suite de terme général $F_n(a) = P(Y_n \leq a)$.

• Comme Y_0 est par hypothèse une variable aléatoire certaine égale à 0, si $a \geq 0$, $(Y_0 \leq a)$ est un événement certain, donc : ▌ $F_0(a) = P(Y_0 \leq a) = 1$.

<u>**En conclusion**</u> : $\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R}_+, \ (F_n(a))_{n\geq 0} \text{ est décroissante, et } F_0(a) = 1}$.

$\boxed{\textbf{I.2.b.}}$ *Revenant à la définition de $F_n(a)$, l'égalité proposée pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$ s'écrit :*

$$P(N(a) = n) = P(Y_{n-1} \leq a) - P(Y_n \leq a).$$

ou de façon équivalente :

$$\textbf{(1)} \ P(Y_{n-1} \leq a) = P(Y_n \leq a) + P(N(a) = n).$$

Il s'agit donc d'interpréter l'événement $(N(a) = n)$ à l'aide des V.A. Y_k.

◇ Étant donné un réel positif a, $N(a)$ est, par définition, une variable aléatoire qui « *compte* », lors de chaque réalisation de l'expérience aléatoire, le nombre de variables aléatoires Y_k $(k \geq 0)$ prenant une valeur dans $[0, a]$.

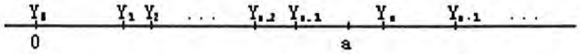
Or, il a été établi au **I.1.b.** que la suite $(Y_k)_{k\geq 0}$ est croissante, c'est-à-dire que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y_0(\omega) \leq Y_1(\omega) \leq \ldots \leq Y_k(\omega) \leq Y_{k+1}(\omega) \leq \ldots$$

et puisque Y_0 est la V.A. certaine égale à 0, on peut préciser :

$$\textbf{(2)} \ \forall \omega \in \Omega, \quad \underline{Y_0(\omega) = 0} \ \text{ et } \ Y_0(\omega) \leq Y_1(\omega) \leq \ldots \leq Y_k(\omega) \leq Y_{k+1}(\omega) \leq \ldots$$

Donc, par suite, pour a un réel positif donné, on peut illustrer une issue de l'expérience aléatoire comme suit :



<u>Et argumenter ainsi</u>, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, en s'appuyant sur (2), pour démontrer (1) :

- par la **formule des probabilités totales**, appliquée au calcul de $P(Y_n \leq a)$, avec le sytème complet d'événements $\{(Y_n \leq a), (Y_n > a)\}$:

$$\textbf{(3)} \ P(Y_{n-1} \leq a) = P((Y_{n-1} \leq a) \cap (Y_n \leq a)) + P((Y_{n-1} \leq a) \cap (Y_n > a)).$$

- **Or**, par (3), si l'une des Y_k prend une valeur inférieure ou égale à a, alors toutes les V.A. Y_i d'indice inférieur prennent une valeur inférieure ou égale à a, donc :

$$\big(\,(Y_n \leq a) \ \text{réalisé}\,\big) \Longrightarrow \big(\,(Y_{n-1} \leq a) \ \text{réalisé}\,\big).$$

  et par suite, en terme d'événements : $(Y_n \leq a) \subset (Y_{n-1} \leq a)$, et donc :

$$\textbf{(4)} \ \big(\,(Y_n \leq a)\,\big) \cap \big(\,(Y_{n-1} \leq a)\big) = \big(\,(Y_n \leq a)\,\big).$$

- **De même**, par (2), si l'une des V.A. Y_k prend une valeur strictement supérieure à a, alors toutes les V.A. Y_i d'indice $i \geq k$ prennent une valeur strictement supérieure à a. **Donc**, si $(Y_n > a)$ est réalisé, alors seules les n V.A. $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sont susceptibles de prendre une valeur inférieure à a.

En conséquence, si dans le même temps $(Y_{n-1} \leq a)$ est réalisé, ce qui implique, par (2) que : $\forall\, k \leq n-1$, $(Y_k \leq a)$ est réalisé :

(5) il y a alors **exactement** n V.A. Y_k prenant une valeur inférieure à a.

Or, comme les V.A. Y_k sont **positives** (ce qui encore une conséquence de (2)), pour tout $k \geq 0$, parce que a est positif :

$((Y_k \leq a)$ réalisé$) \Longrightarrow ((Y_k \in [0,a])$ réalisé$)$, *i.e.* **(6)** $(Y_k \leq a) = (Y_k \in [0,a])$.

La conclusion (5) equivaut donc au fait qu'exactement n V.A. Y_k prennent une valeur dans $[0,a]$, *i.e.* au fait que : $(N(a)=n)$ est réalisé.

On a ainsi montré que : **(7)** $((Y_n > a)) \cap ((Y_{n-1} \leq a)) = (N(a)=n)$.

En conclusion, par (3), (4) et (7), pour tout $n \geq 1$:

$$P(Y_{n-1} \leq a) = P(Y_n \leq a) + P(N(a)=n).$$

Ce qui équivaut à l'égalité proposée, en réintroduisant les fonctions de répartition :

$$\boxed{\forall\, n \geq 1, \quad P(N(a)=n) = F_{n-1}(a) - F_n(a)}.$$

◇ $(N(a) < \infty)$ est réalisé si et seulement si un nombre fini de Y_i $(i \geq 0)$ prennent leur valeur dans $[0,a]$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(N(a)=n)$ soit réalisé. Ce qui se traduit par l'égalité d'événements :

$$(N(a) < \infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (N(a)=n).$$

S'agissant d'une **réunion infinie dénombrable d'événements incompatibles**, par additivité de P (on dit aussi σ-additivité), il s'ensuit que :

$$P(N(a) < \infty) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(N(a)=n),$$

soit, en vertu du résultat précédent :

$$\textbf{(8)} \quad P(N(a) < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{n-1}(a) - F_n(a).$$

• Suivons l'indication de l'énoncé et appliquons le préliminaire avec $a_n = F_n(a)$:

Les hypothèses du **I.1.a** sont satisfaites (suite décroissante (*c.f.* **I.2.a.**), termes positifs ($F_n(a)$ est une probabilité, premier terme, $F_0(a)$, égal à 1 (*c.f.* **I.2.a.**)), donc, il est acquis, d'après le **préliminaire I.1.a.**, que :

- $(F_n(a))_{n \geq 0}$ converge vers une limite l
- $\sum_{n \geq 1} F_{n-1}(a) - F_n(a)$ est convergente, de somme $1-l$.

Par suite, il découle de (8) que :

$$P(N(a) < \infty) = 1 - l = 1 - \lim_{n \to +\infty} F_n(a).$$

On en déduit l'équivalence demandée :

$$\boxed{P(N(a) < \infty) = 1 - l \quad \text{vaut 1 si et seulement si} \quad l = \lim_{n \to +\infty} F_n(a) = 0}.$$

I.2.c. En vertu du résultat précédent :

$$\textbf{(9)} \quad (P(N(a) < \infty) = 1) \quad \text{équivaut à} \quad (F_N(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0).$$

Or, puisque, **par hypothèse**, la série de terme général $nF_n(a)$ est convergente, son terme général tend vers 0 : $\lim_{n \to +\infty} nF_N(a) = 0$. Et la suite $(nF_n(a))_{n \geq 0}$ étant convergente, c'est une suite **bornée**, donc : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|nF_n(a)| \leq M$.

Il s'ensuit que : $|F_n(a)| \leq \frac{M}{n}$, d'où l'on tire que : $\lim_{n \to +\infty} F(a) = 0$.

On en conclut, par (9), que : $\boxed{P(N(a) < \infty) = 1}$ ou encore $P(N(a) = +\infty) = 0$, par passage au complémentaire. Ainsi, l'événement $(N(a) = +\infty)$ étant **quasi-impossible**, on peut considérer que $N(a)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

◇ Par suite, $N(a)$ est ainsi une «*bonne*» variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, par conséquent :

(10) $E(N(a))$ existe si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} nP(N(a) = n)$ converge, auquel cas $E(N(a))$ est égale à la somme de la série.

Puisque (*c.f.* **I.2.b.**), pour tout $n \geq 1$: $nP(N(a) = n) = n(F_{n-1} - F_n(a))$, il convient d'**appliquer le préliminaire I.1.b.**, toujours avec $a_n = F_n(a)$, en s'appuyant sur l'hypothèse faite de convergence de la série : $\sum_{n\geq 0} na_n = \sum_{n\geq 0} F_n(a)$.

• **Cette hypothèse complémentaire étant faite**, la suite $(F_n(a))_{n\geq 0}$ satisfaisant les autres conditions d'application des résultats du **I.1.**, comme il a été vu au **I.2.b.**, le **I.1.b** s'applique et donne que :

les séries $\sum_{n\geq 1} F_n(a)$, $\sum_{n\geq 1} n(F_{n-1}(a) - F_n(a))$ sont convergentes et de même somme.

et l'on conclut, par (10), que :

$$\boxed{E(N(a)) \text{ existe et vaut : } E(N(a)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(F_{n-1}(a) - F_n(a)) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(a)}.$$

I.3.a. (*Modèle de Bernoulli*) pour $n \geq 1$, d'après les hypothèses faites, Y_n est la somme des n variables de Bernoulli $\{X_k\}_{1\leq k\leq n}$ **indépendantes** et de **même paramètre p**, donc, **d'après le cours** : $\boxed{Y_n \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(n,p)}$.

◇ Par conséquent, puisque $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, pour $k \geq n$: $F_n(k) = P(Y_n \leq n) = 1$, tandis que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, par définition de la loi de Bernoullli , il vient :

$$F_n(k) = P(Y_n \leq k) = \sum_{l=0}^{k} P(Y_n = l) = \sum_{l=0}^{k} C_n^l p^l (1-p)^{n-l}.$$

D'où le résultat : $\boxed{\forall n \geq 1,\ \ F_n(k) = \sum_{l=0}^{k} C_n^l p^l (1-p)^{n-l}, \text{ si } 0 \leq k \leq n,\ \ 1 \text{ si } k \geq n}$.

I.3.b. *Pour montrer, pour $k \geq 0$, que : $\lim_{n\to+\infty} F_n(k) = 0$, puisque $(F_n(k))_{n\geq 0}$ est* ***à termes positifs****, on pourra* ***chercher une suite majorante de limite nulle*** *et pour cela essayer de* ***préciser,*** *«****localiser****»,* ***la dépendance en n de $F_n(k)$****.*

◇ Pour $k \geq 1$, fixé, par **définition des C_n^k**, et des $F_n(k)$, pour tout $n \geq k$:

$$F_n(k) = \sum_{l=0}^{k} \frac{n!}{l!(n-l)!} p^l (1-p)^{n-l} = \sum_{l=0}^{k} \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{l!} p^l (1-p)^{n-l}.$$

En extrayant le facteur $(1-p)^n$, indépendant de l, de cette somme, ainsi que le facteur $n(n-1)\dots(n-l+1)$, **moyennant la majoration** :

$$n(n-1)\dots(n-l+1) \leq n^l \leq n^k, \quad \text{valable pour tout } l \in [\![0, k]\!],$$

on obtient, **les autres termes étant positifs** :

$$\forall n \geq k :\ \ 0 \leq F_n(k) \leq n^k (1-p)^n . \sum_{l=0}^{k} \tfrac{1}{l!} p^l (1-l)^{-l}.$$

Alors, la somme étant **indépendante de n** (k est fixé), on peut la noter M, ce qui permet de réécrire l'encadrement précédent sous la forme :

$$\textbf{(11)}\quad 0 \leq F_n(k) \leq M.n^k (1-p)^n$$

• Par les résultats sur la **comparaison des fonctions usuelles**, pour tout a réel :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} x^a.e^{-x} = 0,$$

d'où, par composition de limites, en changeant x en βx, pour $\beta > 0$:

(12) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^a.e^{-\beta.x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\beta^a}(\beta x)^a.e^{-\beta.x} = \frac{1}{\beta^a}.\lim\limits_{x\to+\infty} (\beta x)^a.e^{-\beta.x} = 0.$

On en déduit, **ici**, avec $a = k$ (k fixé) et $\beta = \ln(1-p) < 0$ (car $p \in\,]0,1[$), que :

$$n^k(1-p)^n = n^k.e^{ln(1-p).n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut alors conclure, grâce à (12), et au **théorème d'encadrement** ("*Gendarmes*") pour les suites réelles :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(k) = 0}.$$

◇ Convergence de la série de terme général $nF_n(k)$: en reprenant (12), que l'on multiplie par $n \geq 0$, il vient tout d'abord :

(13) $0 \leq nF_n(k) \leq M.n^{k+1}(1-p)^n$

• La **suite majorante** est le terme général d'une série **convergente**, ce que l'on montre en remarquant que, puisque $\ln(1-p) < 0$ (car $p \in\,]0,1[$) :

$n^{k+1}.(1-p)^n = n^{k+1}.e^{\ln(1-p).n}$ décroît vers 0 de «*façon exponentielle*».

La remarque consiste à noter que : $(1-p)^n$ tend «suffisamment vite» vers 0 pour pouvoir largement «compenser» la divergence de n^{k+1} vers $+\infty$.
Ce que l'on exploite pour **comparer $\sum_{n\geq 1} F_n(k)$ à une série géométrique.**

Pour $k \geq 0$ **fixé**, pour tout $n \geq 0$, on peut écrire :

$$n^{k+1}(1-p)^n = \left[n^{k+1}(1-p)^{\frac{n}{2}}\right](1-p)^{\frac{n}{2}}$$

or, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$: $\lim_{x\to+\infty} n^\alpha.e^{\beta.x} = 0$ (*c.f.* **(12)**), **donc**, ici, avec $\alpha = k+1$ et $\beta = -\frac{\ln(1-p)}{2} > 0$, par ce résultat de comparaison, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{k+1}(1-p)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty} n^{k+1}.e^{\frac{\ln(1-p)}{2}.n} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha.e^{-\beta.n} = 0\,.$$

Par suite, la suite de terme général $n^{k+1}(1-p)^{\frac{n}{2}}$ est convergente, **donc** est bornée. En notant M' ($M' > 0$) un majorant de cette suite, il vient, par (13) :

(14) $\forall\, n \geq 0, \quad 0 \leq nF_n(k) \leq MM'(1-p)^{\frac{n}{2}} = MM'.\left(\sqrt{1-p}\right)^n.$

La série (géométrique) de raison $\sqrt{1-p} \in\,]0,1[$ étant convergente, la majoration (14), par le **théorème de comparaison des séries à termes positifs** donne que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \text{ fixé, } k \geq 0, \quad \text{la série } \textstyle\sum_{n\geq 1} nF_n(k) \text{ est convergente}}.$$

I.3.c. D'après le **I.2.c.**, pour $a = k \geq 0$, puisque $\sum_{n\geq 1} nF_n(k)$ converge :

$E(N(k))$ existe et vaut $E(N(k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(k)$

Et, puisque $F_n(k) = 1$ dès lors que $n \leq k-1$ (*c.f.* **I.3.a**), on a : $\sum_{n=0}^{k-1} F_n(k) = k$, et l'on peut scinder la somme précédente en deux pour obtenir :

(15) $\boxed{\forall\, k \geq 0, \quad E(N(k)) = \sum_{n=0}^{k-1} F_n(k) + \sum_{n=k}^{+\infty} F_n(k) = k + \sum_{n=k}^{+\infty} F_n(k)}.$

◇ Calcul de $E(N(0))$: pour $k = 0$, (15) s'applique et s'écrit : $E(N(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(0)$.
Or, d'après le **I.3.a.**, $F_n(0)$ se réduit au seul terme : $C_n^0 p^0(1-p)^{n-0} = (1-p)^n$. **D'où** :

$$\boxed{E(N(0)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}}$$

(en ayant reconnu dans la somme le DSE_0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ pour $x = 1-p \in\,]0,1[$)

◇ Calcul de $E(N(1))$: pour $k=1$, (15) s'applique : $E(N(1)) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(1)$, avec, $F_0(1) = 1$ (*c.f.* **I.2.a.**) et, d'après **I.3.a.**, puisqu'ici k vaut $1 \leq n$ (si $n \geq 1$) :

$$\forall n \geq 1, \quad F_n(1) = \sum_{l=0}^{1} C_n^l p^l (1-p)^{n-l} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1},$$

en utilisant que : $C_n^0 = 1$ et $C_n^1 = n$.

Par suite : $$\textbf{(16)} \quad E(N(1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.$$

• On peut, dans (16), scinder la somme <u>infinie</u> en deux sommes infinies <u>si</u> l'on s'est d'abord assuré de leur convergence ; **or**, on reconnaît dans la première somme potentielle, le **développement en série précédent de $E(N(0))$**, valant $1/p$, et quant à la seconde somme potentielle, il s'agit de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \quad \left(\begin{array}{c}\text{en sortant la constante } p\text{, ce}\\ \text{qui n'affecte pas la convergence}\end{array}\right)$$

et l'on y reconnaît le DSE_0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $x = 1-p \in]0,1[$.

Ainsi, on peut <u>légitimement</u> scinder la somme infinie (16) en deux sommes convergentes de valeur connue, comme suit :

$$E(N(1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n + p.\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = E(N(0)) + p.\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}.$$

<u>**D'où le résultat**</u> : $\boxed{E(N(1)) = \frac{2}{n}}$.

I.3.d. Suivons l'indication et **considérons**, de façon «*parallèlle*», **d'une part**, le DSE_0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ (*on choisira α ultérieurement*) :

$$\textbf{(17)} \quad (1-x)^\alpha = \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{l} (-x)^l = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}{l!} (-1)^l x^l$$

et, **d'autre part**, la somme infinie proposée, pour $k > 0$ et $0 < x < 1$:

$$\textbf{(18)} \quad \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k . x^{n-k} = \sum_{l=0}^{+\infty} C_{l+k}^k . x^l \quad \left(\begin{array}{c}\text{où l'on a effectué le changement d'indice}\\ l = n-k \text{ pour ensuite mieux identifier}\end{array}\right)$$

(*on utilise le même indice de sommation pour faciliter les recoupements !*).

Il y a **deux développements possibles** pour $C_{l+k}^k = \frac{(l+k)!}{k!(l+k-k)!} = \frac{(l+k)!}{k!l!}$, à savoir :

$$C_{l+k}^k = \frac{(l+k)(l+k-1)(l+k-2)\dots(k+2)(k+1)}{l!} \quad \text{ou} \quad C_{l+k}^k = \frac{(l+k)(l+k-1)(l+k-2)\dots(l+2)(l+1)}{k!}$$

On choisit le premier, qui laisse $l!$ au dénominateur, afin d'identifier (18) à (17). En effet, puisque dans (17) :

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)(-1)^l = \underbrace{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)\dots(-\alpha+l-1)}$$

produit de l entiers successifs de $(-\alpha)$ à $(-\alpha+l-1)$ qui s'identifie à $(l+k)(l+k-1)\dots(k+1)$ pour $\alpha = -(k+1)$

on constate que, pour $\alpha = -(k+1)$, en considérant aussi le premier développement de C_{l+k}^l, **les deux sommes sont égales**, ce qui s'écrit :

$$\boxed{\forall k \geq 0, \forall x \in]0,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^{n-k}}.$$

• *On a suivi là, docilement, l'indication de l'énoncé, mais* ***la tactique suivante est de loin plus légère****. Constatez !*

On sait, **en dérivant k fois** terme à terme pour x intérieur au disque de convergence, que :
$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k}$$
mais aussi, toujours pour $|x| < 1$, on sait que :
$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)^{(k)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$
Par conséquent, en comparant les deux expression, sachant aussi que : $C_n^k = \dfrac{1}{k!}A_n^k$, il vient :
$$\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^{n-k} = \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad C.Q.F.D.\,!$$

I.3.e. Pour tout $k \geq 0$, en vertu du **I.2.c.**, et parce que l'on a montré que la série de terme général $nF_n(k)$ converge (*c.f.* **I.3.b.**), et parce que l'on peut, **sans condition**, regrouper deux sommes infinies convergentes :
$$E(N(k+1)) - E(N(k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(k+1) - \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(k+1) - F_n(k)$$
où, parce que F_n est une **fonction de répartition** (celle de Y_n), on a :
$$F_n(k+1) - F_n(k) = P(Y_n = k+1).$$
Par conséquent, on vérifie, pour tout $k \geq 0$, que :
$$E(N(k+1)) - E(N(k)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = k+1) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}.$$
(on peut tronquer la somme, car $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc : $P(Y_n = k+1) = 0$ si $n < k+1$).

• Après factorisation de la dernière somme par p^{k+1}, il vient encore, par le résultat du **I.3.d.** pour $k+1$ au lieu de k et avec $x = (1-p) \in]0,1[$ (car $0 < p < 1$) :
$$E(N(k+1)) - E(N(k)) = p^{k+1}.\sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n^{k+1}(1-p)^{n-k-1} = \frac{p^{k+1}}{(1-(1-p))^{k+2}} = \frac{1}{p}.$$
Ainsi :
$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad E(N(k+1)) = E(N(k)) + \tfrac{1}{p}}.$$

◊ Calcul de $E(N(k))$ pour $k \geq 0$: le calcul est immédiat, dans la mesure où le résultat précédent établit que la suite $(E(N(k)))_{k\geq 0}$ est une **suite arithmétique de raison $1/p$** et de **premier terme $E(N(0))$**. Il s'ensuit que :
$$\forall k \geq 0, \quad E(N(k)) = E(N(0)) + k.\tfrac{1}{p}.$$
Puis, parce que $E(N(0)) = \frac{1}{p}$ (*c.f.* **I.3.c.**) :
$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad E(N(k)) = \tfrac{k+1}{p}}$$
(ce qui confirme la valeur trouvée au **I.3.c.** pour $E(N(1))$).

I.4.a. (*Modèle géométrique*) Pour tout $i \geq 1$, la V.A. X_i étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice, notée G_{X_i}, est définie, en tant que série entière, par :
$$G_{X_i}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_i = k).x^k, \text{ et le rayon de convergence est } \geq 1^{(*)}.$$

(*) En effet, indépendamment de la loi de X_i, par le theorème de comparaison des séries à termes positifs : $\forall\ |x| < 1$, la série converge absolument car la valeur absolue de son terme général est majoré par $P(X_i = k)$, terme général d'une série convergente ($\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_i = k) = 1$).

Ici, compte-tenu de la loi de X_i, (loi géométrique de paramètre a), on a :

$$G_{X_i}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_i = k).x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-a).a^k.x^k = (1-a).\sum_{k=0}^{+\infty}(ax)^k,$$

et l'on reconnaît dans la dernière réécriture la somme de la série géométrique de raison ax et de premier terme 1, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall\, i \geq 1, \quad G_{X_i}(x) = (1-a).\frac{1}{1-ax}}.$$

et l'on peut vérifier que le DSE$_0$ de G_{X_i} a un rayon de convergence $R \geq 1$, puisque la série précédente converge si et seulement si $|ax| < 1$, *i.e.* $|x| < \frac{1}{a}$, donc $R = \frac{1}{a} > 1$ car $a \in \,]0,1[$.

◇ Fonction génératrice de Y_n, $n \geq 1$: *On procède* ***par récurrence****. De plus,* ***on le sait****, Y_n étant la somme de n V.A. aléatoires X_i indépendantes, la fonction génératrice de Y_n est le produit des fonctions génératrices des X_i. Ici, les V.A. X_i ayant même loi, on posera donc l'hypothèse de récurrence suivante,* en notant G_{Y_n} la fonction génératrice de Y_n :

$$(\mathcal{H}_n) : \left(G_{Y_n}(x) = \left(\frac{1-a}{1-ax}\right)^n\right).$$

- Au rang $n = 1$: $Y_1 = X_1$ donc : $G_{Y_1}(x) = G_{X_1}(x) = \frac{1-a}{1-ax}$. **Donc** : $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.
- Si l'on suppose $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$: alors, $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$, **or** l'indépendance des V.A. $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ assure, (*c.f.*cours), l'**indépendance** de $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ (fonction des V.A. $X_1, \ldots, X_n$) et de X_{n+1}, **par suite**, (c'est aussi un résultat de cours), la fonction génératrice de la somme $Y_n + X_{n+1}$, *i.e.* $G_{Y_{n+1}}$ est égale qu produit $G_{Y_n}.G_{X_{n+1}}$, et, en utilisant $(\mathcal{H}_n)$, s'écrit :
$$G_{Y_{n+1}}(x) = G_{Y_n}(x).G_{X_{n+1}}(x) = \left(\frac{1-a}{1-ax}\right)^n.\left(\frac{1-a}{1-ax}\right) = \left(\frac{1-a}{1-ax}\right)^{n+1}$$
Ce qui établit que : $((\mathcal{H}_n)$ vraie $) \Longrightarrow ((\mathcal{H}_{n+1})$ vraie $)$.

On peut alors conclure, **par le principe de récurrence**, que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall\, n \geq 1, \quad G_{Y_n}(x) = \left(\frac{1-a}{1-ax}\right)^n} \quad \left(\begin{array}{c}\text{valable encore pour}\\ n = 0 \text{ d'ailleurs}\end{array}\right).$$

◇ Loi de Y_n : elle est donnée par le DSE$_0$ de G_{Y_n}. **Par définition**, G_{Y_n}, dont une expression a été obtenue ci-dessus, vérifie :

$$\forall\, |x| < 1, \quad G_{Y_n}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y_n = k).x^k.$$

Or, ici, par le résultat précédent, on a :

$$\forall\, |x| < 1, \quad G_{Y_n}(x) = (1-a)^n.\frac{1}{(1-ax)^n} = (1-a)^n.\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^{n-1}(ax)^k,$$

où le DSE$_0$ est obtenu à partir du DSE$_0$ de $u \mapsto (1-u)^\alpha$, pour $\alpha = -n$, dont le rayon de convergence vaut 1, en posant $u = ax$ (ce qui est licite pour $x \in \,]-1,1[$, car alors $|ax| < 1$ puisque $a \in \,]0,1[\,$)(*).

L'unicité du DSE$_0$ de G_{Y_n}, donne alors, en comparant les deux DSE$_0$ (17) et (18) :

$$\forall\, n \geq 1, \ \forall\, k \geq 0, \quad P(Y_n = k) = \alpha_{n,k}.(1-a)^n.a^k, \text{ avec : } \alpha_{n,k} = C_{k+n-1}^{n-1}.$$

ou encore, en utilisant la **symétrie des "C_n^p"** $(C_n^{n-p} = C_n^p)$:

$$\boxed{\forall\, n \geq 1, \ \forall\, k \geq 0, \quad P(Y_n = k) = \alpha_{n,k}.(1-a)^n.a^k, \text{ avec : } \alpha_{n,k} = C_{k+n-1}^{k}}.$$

(*) il s'agit du résultat du **I.3.d.**, pour $n - 1 \geq 0$ au lieu de k, et ax au lieu de x : $1/(1-ax)^{(n-1)+1} = \sum_{l=n-1}^{+\infty} C_l^{n-1}(ax)^{l-(n-1)}$ sur lequel on décale l'indice de la somme pour qu'elle commence au rang 0 (on pose : $k = l - (n-1)$).

I.4.b. *En référence à la question I.2.c., on montrera d'abord, pour tout $k \geq 0$, que la série $\sum_{n\geq 0} nF_n(k)$ converge.*

◇ Compte-tenu de la loi de Y_n (*c.f.* **I.4.a.**), pour tout $k \geq 0$:

$$\forall n \geq 1, \quad nF_n(k) = n.\sum_{l=0}^{k} P(Y_n = l) = n.\sum_{l=0}^{k} C_{l+n-1}^{l}.(1-a)^n.a^l.$$

et, par une majoration tout à fait analogue à celle du **I.3.b.** :

$$C_{l+n-1}^{l} = \frac{(l+n-1)!}{l!(n-1)!} = \frac{(l+n-1)(l+n-2)...(n)}{l!} \leq \frac{(n+l)^l}{l!} \quad \left(\begin{array}{c}\text{le numérateur est un produit}\\ \text{de } l \text{ termes} \leq n+l\end{array}\right).$$

Ce qui donne, **en majorant encore $(n+l)^l$ par $(n+k)^k$** (puisque : $0 \leq l \leq k$)(*):

$$\forall n \geq 1, \ 0 \leq nF_n(k) \leq n.\sum_{l=0}^{k} \frac{(n+k)^k}{l!}.(1-a)^n.a^l.$$

En factorisant alors par les termes indépendants de l'indice de sommation l, en notant que, k étant fixé, la somme restante est indépendante de n, ou plus explicitement en la majorant par e^a (car $a > 0$) :

$$\forall n \geq 1, \ 0 \leq nF_n(k) \leq n.(n+k)^k.(1-a)^n.\sum_{l=0}^{k} \frac{a^l}{l!} \leq n.(n+k)^k.(1-a)^n.e^a.$$

On conclut alors, en notant, k étant fixé, que, pour n tendant vers l'infini :

(19) $n + k \sim_{+\infty} n$ et par suite : $n.(n+k)^k.(1-a)^n \sim_{+\infty} n^{k+1}.(1-a)^n$.

ce qui établit, en rappelant que : $n^\alpha.\beta^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $|\beta| < 1$ (*c.f.* **I.3.A.**), que la majorant dans (19) tend vers 0 pour $n \to +\infty$. Ainsi, par le **théorème d'encadrement**, $nF_n(k)$ étant aussi minorée par 0 :

$$\forall k \geq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} nF_n(k) = 0.$$

Ce résultat étant acquis, en vertu du **I.2.c.** :

$$\textbf{(20)} \quad \boxed{\forall k \geq 0, \ E(N(k)) \text{ existe et vaut } \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(k)}.$$

◇ Calcul de $E(N(0))$: puisque $F_n(0) = P(Y_n = 0) = C_{n-1}^{0}(1-a)^n.a^0 = (1-a)^n$, (d'après le **I.4.a.**), expression valable encore pour $n = 0$ car $Y_0 = 0$, on a, par (20) :

$$\boxed{E(N(0)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-a)^n = \frac{1}{1-(1-a)} = \frac{1}{a}}.$$

◇ Calcul de $E(N(k))$, $(k \geq 1)$: en vertu du **I.3.c.** de nouveau, comme au **I.3.e.** :

$$\forall k \geq 1, \ E(N(k)) - E(N(k-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(k) - F_n(k-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = k)$$

et connaissant la loi de Y_n (*c.f.* **I.4.a.**), sachant en particulier que, puisque $k \geq 1$, le premier terme de la somme, $P(Y_0 = k)$, est **nul**, car Y_0 est la V.A. certaine égale à 0 :

$$E(N(k)) - E(N(k-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{k+n-1}^{k}(1-a)^n.a^k = \sum_{n'=k}^{+\infty} C_{n'}^{k}(1-a)^{n'-k+1}.a^k$$

moyennant le changement d'indice : $n' = k + n - 1$ $(n = n' - k + 1)$, qui permet de reconnaître maintenant la somme calculée au **I.3.d.**, ici pour $x = 1 - a \in]0,1[$:

$$E(N(k)) - E(N(k-1)) = (1-a).a^k.\sum_{n'=k}^{+\infty} C_{n'}^{k}(1-a)^{n'-k} = (1-a).a^k.\frac{1}{(1-(1-a))^{k+1}}.$$

(*) pour $0 \leq l \leq k$: $x^l \leq x^k$ pour $x \geq 0$, donc : $(n+l)^l \leq (n+l)^k$, puis comme $x \mapsto x^k$ est croissante, on a : $(n+l)^k \leq (n+k)^k$.

On conclut donc que : $\boxed{\forall k \geq 1, \quad E(N(k)) - E(N(k-1)) = \frac{(1-a).a^k}{a^{k+1}} = \frac{1-a}{a}}$.

• De même qu'au **I.3.e.**, il apparaît que la suite de terme général $E(N(k))$ est **arithmétique**, cette fois de **raison** $\frac{1-a}{a}$ et de **premier terme** $E(N(0)) = \frac{1}{a}$.
En conséquence : $\boxed{\forall k \geq 0, \quad E(N(k)) = \frac{1}{a} + k.\frac{1-a}{a} = \frac{(1-a)k+a}{a}}$.

I.5.a. (*Modèle exponentiel*) X_1 et X_2 étant deux V.A. **indépendantes**, de même densités $f_{X_i} : x \mapsto \lambda.e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ $(i = 1,2)$, (loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$), **d'après le cours**, $Y_2 = X_1 + X_2$ est une V.A. à densité et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_2(x) = f_{Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-t) f_{X_2}(t)\, dt$ (**formule de convolution**).
où, **ici**, $f_{X_1}(x-t)f_{X_2}(t)$ vaut 0 dès que : $x - t < 0$ (*i.e.* $t > x$) ou $t < 0$, car f_{X_i} est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. On a donc plus simplement, en remplaçant aussi $f_{X_1}(x-t)$ et $f_{X_2}(t)$ par leur valeur :

pour $x < 0$, $f_2(x) = 0$, et pour $x \geq 0$, $f_2(x) = \int_0^x \lambda.e^{-\lambda(x-t)}.\lambda.e^{-\lambda t}\, dt$.

En sortant de l'intégrale les facteurs indépendants de t, par linéarité, on a encore, pour $x \geq 0$: $f_2(x) = \lambda^2.e^{-\lambda x}.\int_0^x e^{\lambda t}.e^{-\lambda t}\, dt = \lambda^2.e^{-\lambda x}.\int_0^x 1.\, dt = \lambda^2.e^{-\lambda x}.x$.

On obtient ainsi pour densité de Y_2 : $\boxed{\begin{array}{llll} f_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda^2.x.e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$.

◇ Loi de Y_n, $(n \geq 1)$: l'on vient de montrer que l'**hypothèse de récurrence** proposée : $(\mathcal{H}_n)$: $\left(f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda x}, \text{ pour } x > 0, \quad 0 \text{ pour } x \leq 0 \right)$
est **vraie au rang $n = 2$**.
Ceci étant, il est de vérification immédiate que $(\mathcal{H}_1)$ **est vraie**. Car, comme f_{Y_1}, égale à f_{X_1}, f_1 est la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ (seule la valeur en 0 diffère peut-être suivant la définition qu'on en donne, ce qui n'importe pas).
***Ainsi**, on pourra démarrer la récurrence à partir du rang 1.*

Implication $((\mathcal{H}_n)$ vraie $) \Longrightarrow ((\mathcal{H}_{n+1})$ vraie $)$: si l'on suppose $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un entier n, alors, **Y_n et X_{n+1} étant indépendantes** (*c.f.* argument donné au **I.4.a.**), la densité de la somme $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ est donnée par la **formule de convolution** :

$$f_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_n}(x-t).f_{X_{n+1}}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t).f_1(t)\, dt$$

où l'on utilise que toutes les V.A. X_i ont même loi, de densité f_1.
Puis - comme précédemment pour la détermination de f_2 - en exploitant la **nullité de $f_n = f_{Y_n}$ et de $f_{X_n} = f_{X_1}$ sur** $\mathbb{R}_-^*$, pour limiter l'intervalle d'intégration, (en effet $f_n(x-t) = 0$ si $t > x$, $f_1(t) = 0$ si $t < 0$) :

- pour $x < 0$: $f_{n+1} = 0$.
- pour $x \geq 0$: $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(x-t).f_1(t)\, dt$ puis grâce à l'**hypothèse de récurrence** et la simplification $e^{\lambda t}.e^{-\lambda t} = 1$ sous l'intégrale :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^n (x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda(x-t)}.\lambda.e^{-\lambda t}\, dt = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda x}.\int_0^x (x-t)^{n-1}\, dt \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda x}.\left[\frac{-(x-t)^n}{n}\right]_0^x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}.e^{-\lambda x}.x^n \quad \left(\begin{array}{c}\text{où dans le crochet} \\ (x-x)^n = 0 \text{ car } n \geq 1\end{array}\right). \end{aligned}$$

On ainsi montré que : $((\mathcal{H}_n)$ vraie $) \Longrightarrow ((\mathcal{H}_{n+1})$ vraie $)$. Et, puisqu'aussi $(\mathcal{H}_1)$ est vraie, l'on peut conclure, **par le principe de récurrence**, que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{\begin{array}{llll} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}.$$

Le résultat est à ***connaître. Y_n suit une loi Gamma de paramètres n et $1/\lambda$.***

◇ Expression de $F_n(a)$, pour $a \geq 0$: de façon immédiate, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ si } n \geq 1 : \quad F_n(a) = P(Y_n \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ \bullet \text{ si } n = 0 : \quad F_0(a) = P(Y_0 \leq a) = 1 \text{ car } Y_0 \text{ est la V.A. certaine égale à } 0 \end{array}}.$$

I.5.b. Pour $a \geq 0$ et $n \geq \mathbf{2}$: l'expression ci-dessus vaut pour $F_n(a)$ et pour $F_{n-1}(a)$, et donne :

$$\textbf{(21)} \quad F_{n-1}(a) - F_n(a) = \int_0^a \frac{\lambda^{n-1} t^{n-2}}{(n-2)!}.e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Une ***intégration par parties*** *de l'une des deux intégrales vous sort d'affaire (on pose par exemple $u'(t) = e^{-\lambda t}$ et $v(t) = t^{n-1}$ dans la seconde intégrale). Mais on peut aussi remarquer que*, de façon directe, **par linéarité de l'intégrale** :

$$F_{n-1}(a) - F_n(a) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.\int_0^a (n-1)t^{n-2}.e^{-\lambda t} - \lambda t^{n-1}.e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

et l'on reconnaît sous l'intégrale l'expression de la dérivée de $x \mapsto t^{n-1}.e^{-\lambda t}$, d'où :

$$F_{n-1}(a) - F_n(a) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.\left[t^{n-1}.e^{-\lambda t}\right]_0^a = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.\left[a^{n-1}.e^{-\lambda a} - 0\right] = \frac{(\lambda a)^{n-1}.e^{-\lambda a}}{(n-1)!}.$$

(la valeur en 0 du crochet est 0 car $x \mapsto x^{n-1}$ est nulle en 0 pour $n \geq 2$)

• Pour $a \geq 0$ et $n = 1$: on a, toujours d'après le **I.5.a.** :

$$F_0(a) - F_1(a) = 1 - \int_0^a \lambda.e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - \left[1 - e^{-\lambda a}\right] = e^{-\lambda a}.$$

• Pour $a < 0$ et $n \geq 1$: toutes les V.A. Y_n $(n \geq 0)$ prenant des valeurs positives (f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ $(n \geq 1)$, et $Y_0 = 0$), $\boldsymbol{F_n(a)}$ **et** $\boldsymbol{F_{n-1}(a)}$ **sont nulles**.

En conclusion, on a la formule générale suivante :

$$\textbf{(22)} \quad \boxed{\forall n \geq 1, \quad F_{n-1}(a) - F_n(a) \text{ vaut } \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda a} \text{ pour } a \geq 0, \text{ et } 0 \text{ pour } a < 0}.$$

◇ Loi de la V.A. $N(a)$: comme il a été vu au **I.3.b.**, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $N(a)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq 1$: $P(N(a) = n) = F_{n-1}(a) - F_n(a)$. On donc de façon directe :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad P(N(a) = n) = \frac{(\lambda a)^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda a}}.$$

Par suite, la V.A. $N(a) - 1$, pour $a \geq 0$, est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $n \geq 0$:

$$P(N(a) - 1 = n) = P(N(a) = n + 1) = \frac{(\lambda a)^n}{n!}.e^{-\lambda a}.$$

On reconnaît donc que :

$$\boxed{\text{pour } a \geq 0, \quad N(a) - 1 \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda a}.$$

◇ Espérance et variance de la V.A. $N(a)$: en notant Z la V.A. $N(a) - 1$ et T la V.A. constante égale à 1, par les **propriétés de l'espérance et de la variance** :

$$E(N(a)) = E(Z + T) = E(Z) + E(T) = E(N(a) - 1) + 1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{linéarité de} \\ \text{l'espérance}\end{array}\right)$$

$$V(N(a)) = V(Z + T) = V(Z) + V(T) = V(N(a) - 1) + 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{indépendance} \\ \text{de } Z \text{ et } T\end{array}\right)$$