I.5 ¶ Au rang 1 : puisque $L_1 = X_1.(1-X_2)$, avec X_1 et X_2 indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, d'après le **I.2.** :

(10) L_1 suit une loi de densité f_1, nulle sur $\mathbb{R} -]0,1[$ et égale à $-\ln$ sur $]0,1[$.

• Au rang 2 : d'après le **I.4**, **L_2 est égale au produit de X_1 et d'une V.A. Y**, suivant la même loi que L_1 (donc ici une loi de densité f_1), et indépendante de X_1. **À ce stade**, on utilisera que :

$L_2 = Y.(1-V)$, où : $V = 1 - X_1$ et V suit, comme X_1, la loi $\mathcal{U}([0,1])$ (*c.f.* **I.1-1.**).

Par cet artifice de calcul, on peut invoquer le **I.3**, pour affirmer directement que :

L_2 suit une loi de densité f_2, nulle sur $\mathbb{R} -]0,1[$ et définie sur $]0,1[$ par :

$$f_2(\lambda) = \int_\lambda^1 f_1(\frac{\lambda}{t})g(1-t)\frac{dt}{t},\text{ où } g \text{ est la densité de la loi } \mathcal{U}([0,1]).$$

Comme, pour λ compris entre 0 et 1, et $t \in [\lambda, 1]$, on a :

(11) $1-t \in [0,1]$ et donc $g(1-t) = 1$, et aussi : $\frac{\lambda}{t} \in [0,1]$ et donc $f_1(\frac{\lambda}{t}) = -\ln(\frac{\lambda}{t})$.

On a encore, pour $\lambda \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) &= \int_\lambda^1 f_1(\frac{\lambda}{t})g(1-t)\frac{dt}{t} = \int_\lambda^1 -\ln(\frac{\lambda}{t}).1\frac{dt}{t} = \int_\lambda^1 -\ln\lambda.\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t}\,dt \\ &= \Big[-\ln\lambda.\ln t + \tfrac{\ln^2 t}{2}\Big]_\lambda^1 \quad (\text{où l'on utilise que } \tfrac{\ln t}{t} = (\ln t).(\ln t)' = \tfrac{1}{2}.(\ln^2 t)') \\ &= \Big(-\ln\lambda.\ln 1 + \tfrac{\ln^2 1}{2}\Big) - \Big(-\ln\lambda.\ln\lambda + \tfrac{\ln^2\lambda}{2}\Big) = 0 + \tfrac{\ln^2\lambda}{2} = \tfrac{\ln^2\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi : f_2 est nulle sur $\mathbb{R} -]0,1[$, et vaut : $f_2(\lambda) = \frac{\ln^2\lambda}{2}$ pour $\lambda \in]0,1[$.

◇ Dès lors, par la détermination de f_1 et f_2, on peut **émettre la conjecture suivante**, où l'on s'est assuré que $f_n \geq 0$ sur $]0,1[$:

$$(\mathcal{H}_n) : \begin{pmatrix} L_n \text{ suit une loi de densité } f_n, \text{ définie par :} \\ f_n(\lambda) = 0 \text{ si } \lambda \in \mathbb{R} -]0,1[\text{ et } f_n(\lambda) = \frac{(-\ln\lambda)^n}{n!} \text{ pour } \lambda \in]0,1[. \end{pmatrix}$$

et vérifier par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$(*).

- Au rang 1 : on a déjà montré que la propriété est vraie.
- Si on suppose la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$: alors, en utilisant le même artifice que pour établir précédemment $(\mathcal{P}_2)$:

  la V.A. L_{n+1} est égale, d'après le **I.4.**, à un produit $Y.(1-V)$, où $V = 1 - X_1$ suit, comme X_1, la loi $\mathcal{U}([0,1])$ (*c.f.* **I.1-1.**) et Y suit la même loi que L_n, c'est-à-dire, d'après l'**hypothèse de récurrence**, suit une loi de densité f_n, nulle sur $\mathbb{R}$ sauf sur $]0,1[$ où elle vérifie $f(\lambda) = \frac{(-\ln\lambda)^n}{n!}$.

  Par conséquent, puisqu'encore, Y et V sont indépendantes, le **I.3.** s'applique et donne que :

  L_{n+1} suit une loi de densité f_{n+1}, nulle sur $\mathbb{R} -]0,1[$ et définie sur $]0,1[$ par : $$f_{n+1}(\lambda) = \int_\lambda^1 f_n(\frac{\lambda}{t})g(1-t)\frac{dt}{t},\text{ où } g \text{ est la densité de la loi } \mathcal{U}([0,1]).$$

(*) Pour présager du factoriel n, plutôt que n, au dénominateur, il faut déterminer f_3 où entamer la démonstration par récurrence et constater que n seul au dénominateur ne convient pas.

Puis par les arguments déjà donnés en (11), on a encore, pour $\lambda \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\lambda) &= \int_\lambda^1 f_n(\tfrac{\lambda}{t})g(1-t)\tfrac{dt}{t} = \int_\lambda^1 \tfrac{[-\ln(\frac{\lambda}{t})]^n}{n!}.\tfrac{dt}{t} = \int_\lambda^1 \tfrac{1}{n!}.\left[\ln\left(\tfrac{t}{\lambda}\right)\right]^n.\tfrac{1}{t}\,dt \\ &= \left[\tfrac{\lambda}{(n+1)!}.\left[\ln\left(\tfrac{t}{\lambda}\right)\right]^{n+1}\right]_\lambda^1 \left(\text{car } \left[\ln\left(\tfrac{t}{\lambda}\right)\right]^n.\tfrac{1}{t} = \left(\tfrac{1}{n+1}\left[\ln\left(\tfrac{t}{\lambda}\right)\right]^{n+1}\right)'\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{(n+1)!}.\left[\ln\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)\right]^{n+1}\right) - 0 = \tfrac{1}{(n+1)!}.[-\ln\lambda]^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi : on a montré que : si $(\mathcal{H}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Et, l'on peut conclure, par le **principe de récurrence**, que :

$\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{H}_n) \text{ est vraie pour tout } n \geq 1}$.

◇ La densité de L_n étant ce qu'elle est, **sous réserve de convergence de l'intégrale** : $E(L_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\lambda)\,d\lambda = \int_0^1 \frac{(-\ln\lambda)^n}{n!}\,d\lambda$, et l'on peut établir la convergence et déterminer la valeur de cette intégrale par des intégrations par parties itérées. **Mais**, il est **plus astucieux** d'utiliser que L_n est égale au produit de X_1 et d'un variable Y, **indépendante de X_1 et de même loi que L_{n-1}**, en effet, dans ces conditions :

(12) $\forall n \geq 2$, $E(L_n)$ existe si et seulement si $E(X_1)$ et $E(L_{n-1})$ existent, auquel cas : $E(L_n) = E(X_1.Y) = E(X_1).E(Y) = E(X_1).E(L_{n-1})$.

Or, puisque X_1 suit la loi $\mathcal{U}([0,1])$, : $E(X_1) = \frac{1}{2}$, donc, d'après (12), **si $E(L_1)$ existe** :

(13) $(E(L_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $E(L_1)$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Et comme L_0 suit la loi de densité f_1 (définie en (11)), nulle sur $\mathbb{R} -]0,1[$:

sous réserve de convergence de l'intégrale, $E(L_1) = \displaystyle\int_0^1 (-\ln\lambda)\,d\lambda.$

Or, (*c'est **à connaître** ou à retrouver par intégration par partie*) :

la fonction $t \mapsto -\ln t$ admet pour primitive sur $]0,1]$, la fonction $t \mapsto -t\ln t + t$.

Et, d'après le cours : $\lim_{\varepsilon\to 0^+} t\ln t = 0$, donc : $\lim_{\varepsilon\to 0^+} -t\ln t + t = 0$, donc, par suite :

pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 (-\ln\lambda)\,d\lambda = [-\lambda.\ln\lambda + \lambda]_\varepsilon^1 = 1 + \varepsilon.\ln\varepsilon - \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0.$

Donc : $E(L_1)$ existe et vaut 1, puis par (13) : $\boxed{\forall n \geq 1,\ E(L_n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n}$.

I.6. *La question est assez floue*, en effet, la **loi faible des grands nombres**s'applique à une suite de V.A. $(\tilde{X}_n)_{n\geq 1}$, non corrélées, de même espérance, m, et même variance, σ^2 et s'énonce : $P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Or, les V.A. $\ln L_n$ ne sont ni non-corrélées, ni de même espérance, ni de même variance. Il s'agit donc de deviner à quelles V.A. l'on va appliquer ce résultat (la loi faible des grands nombres), qui découle directement de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. **Voici ce que nous proposerons.**

◇ Pour tout $n \geq 2$:

(14) $\ln L_n = \ln\left[\left(\prod_{j=1}^n X_j\right).(1 - X_{n+1})\right] = \left(\sum_{j=1}^n \ln X_j\right) + \ln(1 - X_{n+1}).$

Sous réserve d'existence des espérances et variances introduites, on a donc, d'une part, par **linéarité de l'espérance** :

$$E(\ln L_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} E(\ln X_j)\right) + E(\ln(1 - X_{n+1})).$$

Et, **d'autre part**, puisque les V.A. X_j ($j \geq 1$) sont indépendantes, tout $n+1$-uplet de V.A. de la forme $(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2), \ldots, \varphi_{n+1}(X_{n+1}))$, où les f_j sont des fonctions convenables (*i.e.* telles que les $\varphi_j(X_j)$ soient des V.A. à densité, ce qui est le cas ici pour φ_j égale à $x \mapsto \ln x$ ($1 \leq j \leq n$) et $x \mapsto \ln(1-x)$ (pour $j = n+1$) en vertu des **I-1.** et **I-2.**) est un **n-uplet de V.A. indépendantes**, donc pour la variance également :

$$V(\ln L_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} V(\ln X_j)\right) + V(\ln(1 - X_{n+1})).$$

• **On remarquera que**: si on note f la densité communune aux V.A. X_j (il s'agit d'une fonction continue par morceaux - c'est une fonction de densité -, et qu'ici, par hypothèse, f nulle en dehors du segment $[0,1]$), alors la densité d'une V.A. $\ln X_j$ vaut $e^t.f(e^t)$ sur $[0,1]$, nulle ailleurs (*c.f.* **I-3.**), et celle de $\ln(1-X_j)$ vaut $e^{1-t}.f(e^{1-t})$ sur $[0,1]$, nulle ailleurs (*c.f.* **I-3.** conjuguée à **I-2.**). Donc **les espérances et variances considérées existent** en tant qu'intégrales sur $\mathbb{R}$ de fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ nulles ailleurs.

Ensuite, comme les V.A. X_j ($j \geq 1$) suivent toutes la même loi, on a encore :

$$E(\ln L_n) = n.E(\ln X_1) + E(\ln(1 - X_1)),$$
$$\text{et } V(\ln L_n) = n.V(\ln X_1) + V(\ln(1 - X_1)).$$

Aussi, si $\ln L_n$ est une somme de $n+1$ V.A. indépendantes, donc non-corrélées, mais ces V.A. n'ont pas toutes mêmes espérance et même variance (car *a priori* $E(\ln X_j) \neq E(\ln(1 - X_{n+1}))$ et $V(\ln X_j) \neq V(\ln(1 - X_{n+1}))$, donc **on est pas dans un cas d'application de la loi faible des grands nombres**, sauf si les X_j suivent la loi $\mathcal{U}([0,1])$, auquel cas les $n+1$ espérances sont éga lesou toute autre loi de densité symétrique par rapport à $x = \frac{1}{2}$, comme on peut le vérifier). **En revanche**, on pourra mener une démonstration sur le modèle de celle de la loi faible des grands nombres, et aboutissant au même résultat, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n} - E(\ln X_1)\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

en dépit d'hypothèses légèrement différentes.

L'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la V.A. $\frac{\ln L_n}{n+1}$, donne, en notant $m_n = E\left(\frac{\ln L_n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.E(\ln L_n)$ et $V_n = V\left(\frac{\ln L_n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.V(\ln L_n)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \tfrac{V_n}{\varepsilon^2}.$$

et comme :

$$m_n = \tfrac{1}{n}.E(L_n) = E(\ln X_1) + \tfrac{1}{n}.E(\ln(1 - X_{n+1})) \xrightarrow[n \to +\infty]{} E(\ln X_1), \text{ et}$$
$$V_n = \tfrac{1}{n^2}.V(L_n) = \tfrac{1}{n}.V(\ln X_1) + \tfrac{1}{n^2}.V(\ln(1 - X_{n+1})) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

on en déduit que, pour $\varepsilon > 0$ donné, à partir d'un certain rang, une majoration de $P\left(\left|\frac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \varepsilon\right)$ par une suite tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

• En effet, par l'inégalité triangulaire, en notant $m = \ln X_1$:

$$\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| = \left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m + m - m_n\right| \leq \left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| + |m - m_n|.$$

ce qui équivaut à :

$$\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| - |m - m_n|.$$

Or, puisque $\lim_{n\to+\infty} m_n = m$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0,\ |m_n - m| \leq \varepsilon$, et donc :

$$\forall n \geq n_0,\quad \left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| - \varepsilon,$$

de sorte que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| \geq 2\varepsilon\right) \Longrightarrow \left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq 2\varepsilon - \varepsilon\right) \Longrightarrow \left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \varepsilon\right),$$

et en passant aux probabilités (sachant que : $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (P(A) \leq P(B))$) :

$$\forall n \geq n_0,\quad P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right).$$

Et comme, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m_n\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right)$ est majoré par $V_n/\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\forall n \geq n_0,\quad P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \leq \tfrac{2V_n}{\varepsilon},$$

Parce que $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$, on en déduit le résultat :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\tfrac{\ln L_n}{n+1} - m\right| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\right) = 0}.$$

On dit que suite de V.A. $\left(\frac{\ln L_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $\ln X_1$.

PROBLÈME n°2

.PARTIE A.

2.1. Noyau de A : si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A, par définition, $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ appartient au noyau de f si et seulement si : $f[(x,y,z,t)] = (0,0,0,0) \Longleftrightarrow A^t(x,y,z,t) = {}^t(0,0,0,0)$. Or :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x & & & +\ 2t = 0 \\ & y & & +\ 2t = 0 \\ x & & +\ 2z & = 0 \\ x & & & +\ 2t = 0 \end{cases} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3 - L_1)}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t \\ z = t \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate donc que :

$(x,y,z,t) \in \ker f \Longleftrightarrow (x,y,z,t)$ est de la forme $(-2\alpha, -2\alpha, \alpha, \alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\ker f = VECT\,[(2,2,-1,-1)]}.$$

◇ Image de f : L'image de f est engendrée par les images des vecteurs de base, *i.e.* $\mathrm{Im} f = VECT\,[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)]$, et d'après le théorème du rang, puisque $\ker f$ est de dimension 1 :

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - 1 = 3.$$

Par conséquent, la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ est liée, mais il est possible d'en extraire une famille libre de 3 vecteurs. Constatant, par l'examen des colonnes de A que $f(e_4) = 2f(e_1) + f(e_2) - f(e_3)$, *i.e.* que $f(e_4)$ est combinaison linéaire de $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$, on en déduit que la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est nécessairement libre. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Im} A = VECT\,[f(e_1), f(e_2), f(e_3)] = VECT\,[(1,0,1,1), (0,1,0,0), (0,0,2,0)]}.$$

2.2. Tout d'abord, puisque $\ker f = VECT\,[(2,2,-1,-1)]$, 0 est valeur propre de f.
• Puis, en examinant, les deuxième et troisième colonnes de A, on peut noter que : ▌ $f(e_2) = e_2$, et $f(e_3) = 2e_3$. Donc, e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de f pour, respectivement les valeurs propres 1 et 2.
• Enfin, parce que la somme des cœfficients de A, pour chaque ligne est égale à 3, on peut affirmer que : 3 est valeur propre de A et que le vecteur $(1,1,1,1)$ est propre pour la valeur 3 (***astuce à connaître***). En effet :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0+2\\0+1+0+2\\1+0+2+0\\1+0+0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

<u>Ainsi</u>, par ces trois remarques, on constate que A admet 4 valeurs propres **distinctes**, 0, 1, 2 et 3, <u>donc</u> : ▌ A est diagonalisable, semblable, par exemple à $D = \text{Diag}\,[0,1,2,3]$.
De plus, on a exhibé, pour chacune de ces valeurs propres un vecteur propre associé, donc on peut d'ores et déjà proposer une matrice de passage :

$$\boxed{A = PDP^{-1},\ \text{avec } D = \text{Diag}\,[0,1,2,3] \text{ et } P = \begin{pmatrix}2&0&0&1\\2&1&0&1\\-1&0&1&1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}}.$$

◇ <u>Détermination de P^{-1}</u> : on pourra **déterminer P^{-1} de façon directe**, sans utiliser la méthode de Gauss, car si on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique, et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ la base de vecteurs propres choisie, il est facile d'inverser les relations définissant les e'_i en fonction des e_j. En effet :

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3 - e_4 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = e_3 \\ e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2e_1 - e_4 = e'_1 - 2e'_2 + e'_3 \\ e_2 = e'_2 \\ e_3 = e'_3 \\ e_1 + e_4 = -e'_2 - e'_3 + e'_4 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \to 2L_4 - L_1}{\overset{L_1 \to L_1 + L_4}{\iff}} \begin{cases} 3e_1 = e'_1 - 3e'_2 - e'_4 \\ e_2 = e'_2 \\ e_3 = e'_3 \\ 3e_4 = -e'_1 - 3e'_3 + 2e'_4 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}.(e'_1 - 3e'_2 - e'_4) \\ e_2 = \frac{1}{3}.(3e'_2) \\ e_3 = \frac{1}{3}.(3e'_3) \\ e_4 = \frac{1}{3}.(-e'_1 - 3e'_3 + 2e'_4) \end{cases}$$

Ainsi, sachant que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$:

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-3&3&0&0\\0&0&3&-3\\-1&0&0&2\end{pmatrix}}.$$

2.2. En utilisant les règles du produit matriciel, le cœfficient générique du produit, noté $C = (c_{i,j})$ de deux matrices d'ordre 6, $\tilde{A}(\tilde{a}_{i,j})$ et $\tilde{B} = (\tilde{b}_{i,j})$ est donné par :

$$\forall\, 1 \le i,j \le 6, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{6} \tilde{a}_{i,k}.\tilde{b}_{k,j}$$

Donc, si $\tilde{A}$ est de la forme $\begin{pmatrix}A'&0\\B'&0\end{pmatrix}$ et $\tilde{B} = \begin{pmatrix}A''&0\\B''&0\end{pmatrix}$, avec $A', A'' \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ et $B', B'' \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, en introduisant les cœfficients $A' = (a'_{i,j})$, $A'' = (a''_{i,j})$, $B' = (b'_{i,j})$

et $B'' = (b''_{i,j})$, le produit $C = \tilde{A}.\tilde{B}$, **en tenant compte des cœfficients nuls**, s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
\sum_{k=1}^{4} a'_{1,k}.\alpha''_{k,1} & \sum_{k=1}^{4} a'_{1,k}.\alpha''_{k,2} & \sum_{k=1}^{4} a'_{1,k}.\alpha''_{k,3} & \sum_{k=1}^{4} a'_{1,k}.\alpha''_{k,4} & 0 & 0 \\
\sum_{k=1}^{4} a'_{2,k}.\alpha''_{k,1} & \sum_{k=1}^{4} a'_{2,k}.\alpha''_{k,2} & \sum_{k=1}^{4} a'_{2,k}.\alpha''_{k,3} & \sum_{k=1}^{4} a'_{2,k}.\alpha''_{k,4} & 0 & 0 \\
\sum_{k=1}^{4} a'_{3,k}.\alpha''_{k,1} & \sum_{k=1}^{4} a'_{3,k}.\alpha''_{k,2} & \sum_{k=1}^{4} a'_{3,k}.\alpha''_{k,3} & \sum_{k=1}^{4} a'_{3,k}.\alpha''_{k,4} & 0 & 0 \\
\sum_{k=1}^{4} a'_{4,k}.\alpha''_{k,1} & \sum_{k=1}^{4} a'_{4,k}.\alpha''_{k,2} & \sum_{k=1}^{4} a'_{4,k}.\alpha''_{k,3} & \sum_{k=1}^{4} a'_{4,k}.\alpha''_{k,4} & 0 & 0 \\
\sum_{k=1}^{4} b'_{1,k}.\alpha''_{k,1} & \sum_{k=1}^{4} b'_{1,k}.\alpha''_{k,2} & \sum_{k=1}^{4} b'_{1,k}.\alpha''_{k,3} & \sum_{k=1}^{4} b'_{1,k}.\alpha''_{k,4} & 0 & 0 \\
\sum_{k=1}^{4} b'_{2,k}.\alpha''_{k,1} & \sum_{k=1}^{4} b'_{2,k}.\alpha''_{k,2} & \sum_{k=1}^{4} b'_{2,k}.\alpha''_{k,3} & \sum_{k=1}^{4} b'_{2,k}.\alpha''_{k,4} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Et, **par examen des cœfficients de** C, on constate que :

$$C = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ B' & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ B'' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'.A'' & 0 \\ B'.A'' & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit, comme **cas particulier**, la matrice A étant la matrice de l'énoncé et B une matrice réelle quelconque de taille 2×4, que :

$$\textbf{(15)} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ B.A & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ Il est alors possible de montrer la propriété proposée, **par récurrence**, pour $n \geq 1$.

- Au rang 1 : la propriété est vérifiée de façon immédiate, à condition de poser $B_1 = B$.
- Si l'on suppose la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$: alors, d'après (15) :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ B_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{n+1} & 0 \\ B.A^n & 0 \end{pmatrix}$$

et donc la propriété est vérifiée au rang $n+1$, si l'on pose $B_{n+1} = B.A^n$.

En conclusion, on a , par le **principe de récurrence**, que :

> pour tout $n \geq 1$, la puissance n-ième de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ est de la forme $= \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ B_n & 0 \end{pmatrix}$,
> où $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite de matrice définie pour tout $n \geq 1$ par :
> $B_n = B.A^{n-1}$ (en convenant que A^0 est la matrice identité d'ordre 4)

.

2.B.1. Considérons de façon explicite toutes les transitions **possibles** d'une pile à une autre. Pour chaque pile, $P_1, \ldots, P_6$, trois évolutions seulement sont possibles en une seule expérience, suivant que l'on retire de la pile le livre L_1, L_2 ou L_3 ; les voici **de façon exhaustive**, en indiquant au-dessus de chaque flèche le livre retiré, et la probabilité de transition associée (elle est déterminée par le numéro du livre retiré) :

$$P_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[t_{11}=p]{L_1} P_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} ; \; P_1 \xrightarrow[t_{14}=q]{L_2} P_4 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} ; \; P_1 \xrightarrow[t_{15}=r]{L_3} P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[t_{22}=p]{L_1} P_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} ; \; P_2 \xrightarrow[t_{24}=q]{L_2} P_4 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} ; \; P_2 \xrightarrow[t_{25}=r]{L_3} P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

et pour les autres piles, de la même façon :

$$\begin{array}{llll} P_3 \xrightarrow[t_{31}=p]{L_1} P_1 ; & P_3 \xrightarrow[t_{33}=q]{L_2} P_3 ; & P_3 \xrightarrow[t_{36}=r]{L_3} P_6 ; & P_4 \xrightarrow[t_{41}=r]{L_1} P_1 \\ P_4 \xrightarrow[t_{44}=r]{L_2} P_4 ; & P_4 \xrightarrow[t_{46}=r]{L_3} P_6 ; & P_5 \xrightarrow[t_{52}=r]{L_1} P_2 ; & P_5 \xrightarrow[t_{53}=r]{L_2} P_3 \\ P_5 \xrightarrow[t_{55}=r]{L_3} P_5 ; & P_6 \xrightarrow[t_{62}=r]{L_1} P_2 ; & P_6 \xrightarrow[t_{63}=r]{L_2} P_3 ; & P_6 \xrightarrow[t_{25}=r]{L_3} P_6 \end{array}$$

et les autres t_{ij} valent 0 car ces probabilités correspondent à des transitions irréalisables en une seule étape (événements impossibles).

En conclusion, pour la matrice $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq 6}$, où $t_{ij} = P(P_i \to P_j)$, on a :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & q & r & 0 \\ 0 & p & 0 & q & r & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & r \\ p & 0 & 0 & q & 0 & r \\ 0 & p & q & 0 & 0 & r \\ 0 & p & q & 0 & 0 & r \end{pmatrix}}.$$

2.B.2. *Comme d'habitude pour un système évoluant d'un état à un autre, parmi un ensemble donné d'états possibles, avec des probabilités d'évolution indépendantes du « temps» - on parle alors de* ***Chaîne de Markov*** -, pour tout $n \geq 0$, par la **formule des probabilités totales**, avec le système complet d'événements constitué des états possibles de la pile à l'instant n, $\{X_n = P_j\}_{1 \leq j \leq 6}$:

$$\forall 1 \leq i \leq 6, \quad P(X_{n+1} = P_i) = \sum_{j=1}^{6} P(X_{n+1} = P_i \mid X_n = P_j).P(X_n = P_j).$$

Ce qui s'écrit, avec les notations et les hypothèses posées par l'énoncé :

$$\textbf{(16)} \quad \boxed{\forall n \geq 0, \ \forall 1 \leq i \leq 6, \quad t_i(n+1) = \sum_{j=1}^{6} t_{ij} t_j(n)}.$$

2.B.3. *Comme il est usuel quant on étudie une chaîne de Markov*, on peut obtenirune réécriture matricielle du résultat précédent (16). **Ici**, en écrivant (16) plutôt sous la forme : **(17)** $t_i(n+1) = \sum_{j=1}^{6} t_j(n) t_{ji}$, et en notant, pour tout $n \geq 0$:

$T(n)$ la matrice colonne des $t_i(n)$ $(1 \leq i \leq 6)$,

On reconnaît que la somme dans (17) est **le cœfficient générique** d'une ligne résultant du produit de $T(n)$ et de la matrice T. Plus précisément, (16) s'écrit matriciellement :

$$\forall n \geq 0, \ T(n+1) = T.T(n).$$

Ce qui, et cela se démontre **par récurrence**, donne :

$$\textbf{(18)} \quad \forall n \geq 0, \ T(n) = T^n.T(0).$$

Or, **d'une part**, comme l'état initial est connu (la pile est à l'instant initial dans l'état P_5) : $P(X_0 = P_j)$ vaut 1 si $j = 5$ et 0 sinon, *i.e.* : $T(0) = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0)$. Et **d'autre part**, avec l'hypothèse faite selon laquelle : $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ et $r = 0$, on peut expliciter précisément la matrice T.

Ainsi on réécrira (18) comme suit :

$$\textbf{(19)}\quad \forall n \geq 0, \quad \mathcal{T}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n .$$

et l'on remarquera encore que :

$T = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, avec A la matrice étudiée en **B.1.** et **B.2**,
et B la matrice : $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

• On remarque donc que T a la forme étudiée en **B.3.**, au facteur $\frac{1}{3}$ près, par suite :

$$\textbf{(20)}\quad \forall n \geq 1, \quad T^n = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n . \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ B.A^{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, avec les notations du **B.2.** et d'après **B.2.** : $A = PDP^{-1}$, d'où il découle, (*comme l'on sait !*), que : $\forall n \geq 0, \ A^n = PD^nP^{-1}$(*). Et de plus : $D^n = \text{Diag}\,[0, 1^n, 2^n, 3^n]$, car $D = \text{Diag}\,[0, 1, 2, 3, 4]$ (propriété des matrices diagonales). **Donc** :

$$(20) \iff \left(\forall n \geq 1, \ T^n = \begin{pmatrix} PD^nP^{-1} & 0 \\ B.PD^{n-1}P^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right)$$

On peut alors conclure par **(19)** que :

$$\forall n \geq 1, \ \mathcal{T}(n) = T^n.\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(0). \begin{pmatrix} PD^nP^{-1} & 0 \\ B.PD^{n-1}P^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, compte-tenu de la forme de $\mathcal{T}(0)$, égal à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le produit $T^n.\mathcal{T}(0)$ est égal à la cinquième ligne de la matrice T^n, *i.e.* à la première ligne de la matrice $B.PD^{n-1}P^{-1}$ complétée par deux zéros en une ligne de $\mathcal{M}_{1,6}(\mathbb{R})$. Et comme l'on s'intéresse plus précisément, non pas à $\mathcal{T}(n)$ mais à son cœfficient $(\mathcal{T}(n))_1$, égal à $P(X_n = P_1)$, **il suffit de déterminer** le second cœfficient de la ligne $\mathcal{T}(n)$, *i.e.* **le second cœfficient de la première ligne de** $\boldsymbol{B.PD^{n-1}P^{-1}}$.

On calculera donc, pour $n \geq 1$, le produit :

$$B.PD^{n-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} .P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

Et, après calcul, il vient :

$$\boxed{P(X_n = P_1) = \tfrac{-3+3.3^{n-1}}{9} = \tfrac{1}{3}.\left(3^{n-1} - 1\right)}.$$

(*) En écrivant que : $A^n = (PDP^{-1}).(PDP^{-1}).\ldots.(PDP^{-1}) = PD\underbrace{P^{-1}P}_{\text{matrice Identité}}D\ldots DP^{-1} = PD.\ldots.D.P^{-1} = PD^nP^{-1}$.

Dans tout le problème, on note pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

Et l'on rappelle que $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.

Partie I

1°/ Déterminer les réels en lesquels φ'' s'annule en changeant de signe. Même question pour Φ''.

2°/ On considère $G : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}(1 - \Phi(x))$.

(i) Montrer que pour tout réel x :

$$G(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{x}^{+\infty} \varphi(t)dt = e^{\frac{x^2}{2}}(\frac{1}{2} - \int_{0}^{x} \varphi(t)dt)$$

(ii) Déterminer, au moyen de G, toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, de l'équation differentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - xy(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(iii) Montrer que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et déterminer ce développement.

3°/ (i) Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x > 0, \quad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2x}}(1 - \frac{1}{x^2}) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2x}}$$

(on pourra utiliser des intégrations par parties).

(ii) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire normale centrée réduite afin de justifier :

$$\forall x > 0, \quad 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2x^2}$$

4°/ Montrer l'existence et calculer : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (1 - \phi(x))dx$.

5°/ Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité : $\Phi(k+1) - \phi(k) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\dfrac{1}{\sqrt{e}})^k$

(on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

6°/ Montrer pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité :

$$0 \leq \varphi(k+x) + \varphi(k-x) \leq (\tfrac{1}{\sqrt{e}})^{k-1}$$

Partie II

Soit $(\omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires intervenant dans cette partie.

1°/ Soit A une variable aléatoire réelle admettant comme densité l'application f continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ (telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$).

On lui associe la variable aléatoire partie entière de A : $B = [A]$, qui à tout $\omega \in \Omega$ associe $B(\omega) = [A(\omega)]$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $B(\omega) \leq A(\omega) < B(\omega) + 1$.

(i) Déterminer $\mathbf{P}(B = k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (au moyen d'une intégrale portant sur f).

(ii) On suppose que A prend des valeurs positives, et que $f(x) = 0$ si $x < 0$. Montrer que A admet une espérance $\mathbf{E}(A)$ si et seulement si B en admet une, et dans ce cas $\mathbf{E}(B) \leq \mathbf{E}(A) \leq \mathbf{E}(B) + 1$.

(iii) Expliciter l'encadrement précédent dans le cas particulier où A suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2°/ Soit T une variable aléatoire réelle, normale centrée réduite, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On lui associe les variables aléatoires suivantes : $X = \mid T \mid$, $Y = [T]$, $Z = [X]$.

(i) Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.

(ii) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Z = k)$ (au moyen de Φ).

(iii) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}(Y = k)$.

(iv) Montrer la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)$, et calculer sa somme (on pourra chercher à simplifier les sommes partielles). Comment interpréter ce calcul ?

(v) Montrer que Z admet une espérance.

3°/ Soit $U = T - Y$.

Montrer que U prend ses valeurs dans $[0, 1[$, et que pour tout $u \in [0, 1[$, on a :

$$\mathbf{P}(U \leq u) = \Phi(u) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\phi(k+u) - \Phi(k-u))$$

4°/ (i) Montrer, en utilisant **I-6**, pour tout $x \in [0, 1[$ la convergence de la série :

$$\theta(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(k+x) + \varphi(k-x))$$

On admettra que l'application θ ainsi définie est continue sur $[0, 1[$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, on pose : $\theta_n(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n}(\varphi(k+x) + \varphi(k-x))$. Montrer que $\mid \theta(x) - \theta_n(x) \mid \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

(iii) En déduire que pour tout $u \in [0, 1[$, on a : $\mathbf{P}(U \leq u) = \int_0^u \theta(x)dx$, et déterminer une densité de U.

(iv) Utiliser l'inégalité de (ii) ci-dessus afin de justifier que U admet une espérance donnée par : $\mathbf{E}(U) = \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 t\theta_n(t)dt \right)$.

(v) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \int_k^{k+1} t\varphi(t)dt, \quad b_k = \int_k^{k+1} \varphi(t)dt$.
Montrer que $0 \leq kb_k \leq a_k$, et prouver: $\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} kb_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0$.

(vi) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t\theta_n(t)dt$ au moyen de a_n, b_n et $\Phi(n)$, et en déduire : $\mathbf{E}(U)$. Ce résultat est-il en accord avec celui de la question **II, 2, (iv)** ?

5°/ (i) Étudier si les variables T et U sont indépendantes.

(ii) Déterminer l'espérance de $T.X$, et étudier si les variables T et X sont indépendantes.

6°/ On considère une variable aléatoire V prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec :

$$\mathbf{P}(V = 1) = \mathbf{P}(V = -1) = \tfrac{1}{2},$$

les variables T et V étant indépendantes. Soit $W = T.V$.

(i) Déterminer une densité de W.

(ii) Déterminer l'espérance de $T.W$, et étudier si les variables T et W sont indépendantes.

Corrigé

.PARTIE I.

$\boxed{\textbf{I.1.}}$ φ est la composée des fonctions $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^x$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel : $\varphi'(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)'.\exp'\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.
Ainsi : $\varphi'(x) = -x.\varphi(x)$, et donc : $\varphi''(x) = (-x)'.\varphi(x) - x.\varphi'(x) = -(1-x^2).\varphi(x)$.
Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en conclut que φ'' est du signe de $-(1-x^2) = -(1+x)(1-x)$ et s'annule si et seulement si $(1-x^2)$ s'annule, donc : $\boxed{\varphi'' \text{ s'annule uniquement en } -1 \text{ et } 1 \text{ et change de signe en ces seuls points}}$.

◇ Rappelons que φ étant continue sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives (qui diffèrent toutes d'une constante) et que si F est l'une d'entre-elles, par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt = F(x) - \lim_{y \to -\infty} F(y), \text{ où } \lim_{y \to -\infty} F(y) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi : $\Phi'(x) = F'(x) = \varphi(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ (Φ est aussi une primitive de ϕ), et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi''(x) = \varphi'(x) = -x.\varphi(x)$, et l'on sait que : $\phi > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Et l'on peut conclure que, comme $x \mapsto -x$:

$\boxed{\Phi \text{ s'anuule uniquement pour } x = 0 \text{ et change de signe en } 0}$.

I.2. *(i). Les deux réécritures sont classiques.* Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ existe et vaut 1 (*c.f.* $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1$), en utilisant la **relation de Chasles**, pour tout x réel :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=1,$$

donc : $\int_{x}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=1-\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=1-\Phi(x)$, et : $\boxed{G(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.\int_{x}^{+\infty}\varphi(t)\,dt}$.

◇ Encore par la **relation de Chasles** :

$$\textbf{(1)}\quad \forall x\in\mathbb{R},\ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt+\int_{0}^{x}\varphi(t)\,dt,$$

et parce que φ est **paire** :

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt \quad \text{(effectuer le changement de variable } t=-x\text{)}.$$

et par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt+\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\underline{2.\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt=2.\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=1}.$$

D'où il découle, puisque $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=1$, que : **(2)** $\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{2}$.

En conjuguant alors (1) et (2), il vient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad G(x)=e^{\frac{x^2}{2}}.(1-\Phi(x))=e^{\frac{x^2}{2}}.\left(\tfrac{1}{2}-\int_{0}^{x}\varphi(t)\,dt\right)}.$$

I.2. *(ii).* L'équation différentielle proposée est une équation différentielle **linéaire du premier ordre, à cœfficients non constants, avec second membre**, *i.e.* du type : $y'(x)+a(x).y(x)=g(x)$. Donc, **d'après le cours**, puisque $a:x\mapsto -x$ et $g:x\mapsto-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sont **continues sur** $\mathbb{R}$, il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$, et toutes ces solutions sont de la forme y_G+y_P où y_G est une solution de l'équation homogène (second membre nul) et y_P une solution particulière de l'équation.

- Résolution de l'équation homogène associée : $y'(x)-xy(x)=0$:

  D'après le cours, les solutions d'une équation différentielle : $y'(x)+a(x)y(x)=0$, avec a continue sur $\mathbb{R}$, sont de la forme : $y\mapsto C.\exp\left(\int_0^x -a(t)\,dt\right)$, avec C un réel quelconque. Donc, ici, où $a:x\mapsto -x$, toute solution y_G de l'équation homogène s'écrit : $y_G: x\longmapsto C.\exp\left(\int_0^x -t\,dt\right)=C.\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$.

- Solution particulière de l'équation :

  C'est là que l'on peut **faire le lien avec la fonction** G, en effet, G est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel, comme $\Phi'(x)=-x.\phi(x)$:

  $$G'(x)=\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'.(1-\Phi(x))+e^{\frac{x^2}{2}}.(1-\Phi(x))'=-x.e^{\frac{x^2}{2}}.(1-\Phi(x))+e^{\frac{x^2}{2}}.\phi(x).$$

  Donc, puisque encore $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}$: $G'(x)=-x.e^{\frac{x^2}{2}}.(1-\Phi(x))+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, et par conséquent, **on vérifie que** : $\forall x\in\mathbb{R},\quad G'(x)-xG(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

  c'est-à-dire, on vérifie que : **G est une solution particulière de l'équation.**

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{toutes les solutions, définies sur } \mathbb{R}\text{, de l'équation sont de la forme : } x\longmapsto C.\exp\left(\tfrac{x^2}{2}\right)+G(x)}.$$

I.2. *(iii).* **D'après le cours**, il y a unicité de la solution pour une ED linéaire du premier ordre, **une condition initiale du type $y(x_o)=y_o$ étant donnée** (où x_0 est un réel fixé de l'intervalle de résolution - ici $\mathbb{R}$ -, et y_0 est une valeur réelle fixée).

<u>Ainsi</u>, puisque $G(0) = e^{\frac{x^2}{2}}.(1-\Phi(x))\big|_{x=0} = 1.(1-\Phi(0)) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (car $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, *c.f.* (2)) : G est l'unique solution y de l'équation différentielle, vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$.

<u>En conséquence</u>, ***pour montrer que G est développable en série entière,*** *on peut* ***chercher si l'équation différentielle admet une solution développable en série entière, prenant la valeur $\frac{1}{2}$ en 0,*** *et si une telle solution existe, on l'identifiera à G en vertu du résultat d'<u>unicité</u> rappelé en préambule de cette question.*

• <u>Recherche des solutions développables en série entière de l'ED proposée</u> : *Comme d'habitude !* **supposons qu'**il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, notée S, <u>solution</u> de l'équation différentielle sur son intervalle ouvert de convergence $]R, R[$. **Alors**, sur $]-R, R[$, il est acquis que : $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est dérivable et que sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, série entière de même rayon de convergence R. Dans ces conditions, pour tout $x \in\,]-R, R[$, on a :

$$S'(x) - xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Puis, par les **changements de variables,** $n' = n-1$ et $n'' = n+1$, respectivement, pour les première et deuxième sommes (on a donc $n = n'+1$ et $n = n''-1$) :

$$S'(x) - xS(x) = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1).a_{n'+1}.x^{n'} - \sum_{n''=1}^{\infty} a_{n''-1}.x^{n''}$$

et, en isolant le terme de rang 0 de la première somme, puis en rassemblant les deux sommes, pour les valeurs communes des indices, on a finalement :

$$\forall x \in\,]-R, R[, \quad S'(x) - xS(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(n+1).a_{n+1} - a_{n-1}\big].x^n.$$

Il apparaît donc, **par unicité du développement en série entière** au voisinage de 0, que :

$$\Big(\forall x \in\,]-R, R[,\ S'(x) - xS(x) = -\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)$$
$$\iff \Big(a_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \text{ et : } \forall n \geq 1,\ (n+1).a_{n+1} - a_{n-1} = 0\Big).$$

La relation de récurrence liant $\boldsymbol{a_{n+1}}$ et $\boldsymbol{a_{n-1}}$, on est amené à déterminer séparément la suite des **termes de rang pair** et la suite des **termes de rang impair** de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. En posant $n = 2p+1$ puis $n = 2p+1$:

$$\forall p \geq 0, \quad a_{2p+3} = \tfrac{1}{2p+3}.a_{2p+1}, \quad \text{et :} \quad a_{2p+2} = \tfrac{1}{2p+2}.a_{2p},$$

et on note qu'il n'y a **aucune condition sur $\boldsymbol{a_0}$**, tandis que **$\boldsymbol{a_1}$ est égal à** $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

En itérant ces relations, on a encore (*pensez à la réécriture des intégrales de Wallis*) :

$$(3)\ \left|\begin{array}{l} a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}.\frac{1}{2p-1}.\cdots.\frac{1}{5}.\frac{1}{3}.a_1 = \frac{(2p).(2p-2).....4.2}{(2p+1).(2p-1).(2p-2).....4.3.2}.\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right) = -\frac{2^p.p.(p-1).....2.1}{\sqrt{2\pi}.(2p+1)!} \\ a_{2p} = \frac{1}{2p}.\frac{1}{2p-2}.\cdots.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.a_0 = \frac{1}{(2p).(2p-2).....4.2}.a_0 = \frac{1}{2^p.p.(p-1).....2.1}.a_0 = \frac{1}{2^p.p!}.a_0. \end{array}\right.$$

<u>Ainsi</u> : si une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est solution de l'équation différentielle, alors ses cœfficients sont **nécessairement** tels que :

(4) $\forall p \geq 0, \quad a_{2p+1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{2^p.p!}{(2p+1)!}, \quad a_{2p} = \frac{1}{2^p.p!}.a_0, \quad \text{et} \quad a_0 \in \mathbb{R}$

On a trouvé la seule forme <u>possible</u> pour une série entière solution.

Reste à examiner si une série entière dont les cœfficients vérifient (4), est une solution acceptable de l'équation différentielle ? (elle le sera si elle admet un rayon de convergence strictement positif(*)).

• *D'un point de vue* heuristique, *puisque les cœfficients a_n sont* ***grossièrement*** *du type* $\frac{1}{[n/2]!}$, *on peut conjecturer, en référence à la série exponentielle que le rayon de convergence R des séries entières trouvées est infini.* Et de fait, en reprenant (3) :

(5)
$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\cdot\frac{1}{2p-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}.a_1 \leq \frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{2p-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}.a_1, \text{ donc : } a_{2p+1} \leq \frac{1}{2^p.p!}.a_1$$
$$a_{2p} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{2p-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}.a_0 = \frac{1}{(2p).(2p-2).\ldots.4.2}.a_0, \qquad \text{donc : } a_{2p} = \frac{1}{2^p.p!}.a_0.$$

Et par ailleurs, puisque les cœfficients a_n $(n \geq 0)$ sont positifs :

pour tout x réel, pour tout $N \geq 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{2N+1} |a_n x^n| = \sum_{p=0}^{N} a_{2p}|x|^{2p} + \sum_{p=0}^{N} a_{2p+1}|x|^{2p+1}$.

Donc, en reprenant les majorations (5), pour tout x réel, pour tout $N \geq 0$:

$$\textbf{(6)} \quad \sum_{n=0}^{2N+1} |a_n x^n| \leq \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2^p.p!}.a_0|x|^{2p} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2^p.p!}.a_1|x|^{2p+1}.$$

Or, si l'on groupe les termes successifs de la suite comme l'on s'y est préparé :

$$\textbf{(7)} \quad \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2^p.p!}.a_0|x|^{2p} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2^p.p!}.a_1|x|^{2p+1} = (a_0 + a_1.|x|).\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}.\left(\frac{|x|^2}{2}\right)^p$$

où l'on reconnaît dans le majorant la somme partielle de rang p du développement en série de $\exp(u)$, pour $u = \frac{|x|^2}{2}$, dont on sait qu'il converge pour tout réel u. Comme de plus il s'agit de la somme partielle d'une série à termes positifs, la somme de la série est un majorant des sommes partielles, donc, on tire de (6) et (7) que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2N+1} a_k x^k \leq (a_0 + a_1.|x|).\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}.\left(\frac{x^2}{2}\right)^p \leq (a_0 + a_1.|x|).e^{\frac{x^2}{2}}$$

On en déduit assez aisément que la suite des sommes partielles pour la série $\sum_{n\geq 0} a_n\,|x|^n$ est majorée. Il suffit par exemple, pour tout rang $N \geq 0$, de majorer *très grossièrement* N par $2N+1$, car alors, la série étant à termes positifs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} a_k|x|^k \leq \sum_{k=0}^{2N+1} a_k|x|^k \leq (a_0 + a_1.|x|).e^{\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi, on a montré que, pour tout x réel, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n x^n|\right)_{N\geq 0}$ est majorée donc convergente (puisque la série est à termes positifs). **Donc**, pour tout x réel, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est **absolument convergente**, donc convergente. et en conséquence, le **rayon de convergence** de la série entière $\boldsymbol{\sum_{n\geq 0} a_n x^n}$ est **infini**.

On peut donc reprendre les calculs précédents, et affimer que toute série entière dont les cœfficients vérifient (5) est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

(*) En effet, dans le cas contraire, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_b x^n$ n'a de sens que pour $x = 0$, donc on a affaire avec une fonction définie en 0 seulement. Ce qui n'a aucun intérêt.

• Si de plus on impose que cette solution prenne la valeur $\frac{1}{2}$ en 0, on doit avoir : $a_0 = \frac{1}{2}$. Et par unicité de la solution d'une ED linéaire du premier ordre, une condition initiale étant donnée, on peut affirmer que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p.p!}{(2p+1)!}.x^{2p+1} + \frac{1}{2}.\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p.p!}.x^{2p}}.$$

I.3. *(i)*. **Puisque** : $1-\Phi(x) = \int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt = \int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, on utilisera l'indication (**intégration par parties**) pour, au vu de l'encadrement demandé, " *sortir* " un ou plusieurs facteurs "$1/x$" de l'intégrale.

◇ En posant : $u : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$, et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$, on a deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et il est donc licite, pour tous $x > 0$ et $A > 0$ fixés, d'effectuer l'intégration par parties suivante :

$$\textbf{(8)}\quad \int_x^A e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_x^A \frac{1}{t}.\left(t.e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt = \left[-\frac{1}{t}.e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^A - \int_x^A \frac{1}{t^2}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

où l'on utilise que : $u'(t) = t.e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.

Avant de passer à la limite pour $A \longrightarrow +\infty$ pour obtenir le majorant demandé, on effectue une seconde intégration par parties en vue de l'obtention du minorant.

• On définit deux fonctions u_1 et v_1, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$u_1'(t) = t.e^{-\frac{t^2}{2}}\ ;\ v_1(t) = \tfrac{1}{t^3},\ \text{ et }\ u_1(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}\ ;\ v_1'(t) = -3.\tfrac{1}{t^4},$$

ce qui permet d'intégrer par parties l'intégrale au second membre de (8) :

$$\textbf{(9)}\quad \int_x^A \frac{1}{t^2}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_x^A \frac{1}{t^3}.te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-\frac{1}{t^3}.e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^A - \int_x^A 3.\frac{1}{t^4}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

• **Or**, pour tout $k \geq 0$, $x > 0$ fixé, et $A \geq x$, puisque : $0 \leq \frac{1}{t^k}.e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$, d'une part, parce que la fonction intégrée est positive :

la fonction $A \longmapsto \int_x^A \frac{1}{t^k}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est croissante sur $[x,+\infty[$,

et d'autre part :

cette fonction est majorée, en effet : $\int_x^A \frac{1}{t^k}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leq \int_x^A e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Donc, pour tout $k \geq 0$, par le **théorème de la limite monotone pour les fonctions** :

$\lim_{A\to+\infty} \int_x^A \frac{1}{t^k}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ existe, et donc

l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^k}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente,

par ailleurs, le dénominateur tendant vers l'infini :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^k}.e^{-\frac{A^2}{2}} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^k.e^{\frac{A^2}{2}}} = 0.$$

En vertu de ces deux derniers résultats, on peut passer à la limite $A \longrightarrow +\infty$ sur (8) et (9), ce qui donne :

$$\textbf{(10)}\quad \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{x}.e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

$$\text{et : }\quad \textbf{(11)}\quad \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{x^3}.e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^{+\infty} 3.\frac{1}{t^4}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Et en utilisant (11) pour réécrire l'intégrale au membre de droite de (10) :

$$(\mathbf{12})\quad \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{x}.e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x^3}.e^{-\frac{x^2}{2}} + 3.\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^4}.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Enfin, de (10) et (12), on tire un encadrement de $\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, en utilisant que les intégrales dans les seconds membres sont positives (intégrales de fonctions positives avec des bornes *dans le bon sens*) :

$$(\mathbf{13})\quad \frac{1}{x}.e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x^3}.e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leq \frac{1}{x}.e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

et donc, en reprenant l'égalité : $1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ (pour $x>0$), en factorisant convenablement minorant et majorant, on obtient :

$$\boxed{\forall x>0,\quad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}.\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leq 1-\Phi(x) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}}.$$

$\boxed{\mathbf{I.3.}}$ *(ii)*. Si l'on considère une V.A. X suivant une loi normale centrée réduite, φ étant une fonction de densité pour cette loi : **(14)** $1-\Phi(x) = \int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt = \mathbf{P}(X \geq x)$.

Par ailleurs, puisque l'espérance et la variance de X valent respectivement 0 et 1, l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** s'écrit, pour tout $\varepsilon > 0$:

$\mathbf{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$, ou de façon équivalente : $\mathbf{P}((X \leq -\varepsilon)\cup(X \geq \varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$.

En utilisant que, pour deux événement A et B : $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(A\cup B)$ (car $A \subset A\cup B$), il vient encore : $\forall \varepsilon > 0,\quad \mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}((X \leq -\varepsilon)\cup(X \geq \varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Ainsi, en posant $\varepsilon = x$, par (14) :

$$\boxed{\forall x>0,\quad \mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{x^2}}.$$

$\boxed{\mathbf{I.4.}}$ La fonction $x \mapsto 1-\Phi(x)$ est conntinue sur $\mathbb{R}$ (car Φ est une primitive de la fonction continue φ, *c.f.* **I.1.**). Donc, en tant que primitive s'annulant en 0 d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$: $\eta : x \mapsto \int_0^x(1-\Phi(t)\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, η est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $\eta'(x) = 1-\Phi(x) \geq 0$ car $\Phi(x)$ s'identifie à une probabilité (*c.f.* (14)), donc : η est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Et par le résultat de **I.3.***(ii)*. : $\forall x>0,\quad \int_1^x(1-\Phi(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt \leq 1$.

La fonction η est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et y majorée par : $\int_0^1(1-\Phi(t)\,dt + 1$, en utilisant la relation de Chasles pour décomposer $\eta(x)$ en $\int_0^1\ldots\,dt + \int_1^x\ldots\,dt$. Donc :

$\lim_{x\to+\infty}\eta(x)$ existe, *i.e.* : $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty}(1-\Phi(t)\,dt \text{ est convergente}}$.

◇ D'après le **théorème de Fubini**, puisque la fonction : $(x,t) \longmapsto \varphi(t)$ est positive et que l'intégrale double : **(15)** $\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt\,dx = \int_0^{+\infty}(1-\Phi(t)\,dt$ est convergente, on peut intervertir les intégrations par rapport aux variables x et à t.

Le domaine d'intégration $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ comprenant les couples (x,t) tels que : $x \geq 0$, et, pour x fixé : $x \leq t$ (voir (15)), c'est-à-dire que : $\mathcal{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq t\}$, on a pour (15), en intervertissant l'ordre des intégrations, une intégrale pour t variant dans $\mathbb{R}_+$ et pour t fixé, une intégrale intérieure portant sur les x tels que $0 \leq x \leq t$, soit :

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t\varphi(t)\,dx\right)dt,$$

et comme la fonction intégrée est indépendante de x, l'intégrale la plus intérieure vaut :

$$\int_0^t \varphi(t)\,dx = \varphi(t).\int_0^t 1\,dx = \varphi(t).t$$

de sorte que :

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\varphi(t).t\,dt$$

On peut alors achever directement puisque la fonction $t \mapsto t.\varphi(t)$ admet pour primitive $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\varphi(t).t\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left[1-e^{-\frac{A^2}{2}}\right]$$

Et donc finalement : $\boxed{\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\,dt = 1}$.

$\boxed{\text{I.5.}}$ *Il apparaît donc naturel, compte-tenu de l'indication, d'*appliquer l'**inégalité des accroissements finis**, à la fonction Φ sur l'intervalle $[k, k+1]$ $(k \geq 0)$.

◊ **D'après le I.1.**, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Phi''(x) = -x.e^{-\frac{x^2}{2}} < 0$, donc Φ' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $k \geq 0$, décroissante sur $[k, k+1]$, et puisqu'aussi $\Phi' = \varphi \geq 0$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall k \geq 0,\ \forall x \in [k, k+1] :\ \varphi(k+1) \leq \Phi'(x) \leq \varphi(k)$, et aussi : $0 \leq \Phi'(x) \leq \varphi(k)$.

Or, pour tout $k \geq 1$: $k \leq k^2$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t}{2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$\forall k \geq 1,\ \forall x \in [k, k+1] :\ 0 \leq \Phi'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{k}{2}}$, *i.e.* $0 \leq \Phi'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$.

et pour $k = 0$, puisque : $\forall x \in [k, k+1] :\ 0 \leq \Phi'(x) \leq \varphi(0)$, de façon directe, comme $\varphi(0) = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^1 < 1$: $\quad \forall x \in [0,1] :\ 0 \leq \Phi'(x) \leq \varphi(0) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

Ainsi, pour tout $k \geq 0$: $\quad \Phi'$ est majorée sur $[k, k+1]$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$ et positive.

L'**inégalité des accroissements finis** pour Φ sur un segment $[k, k+1]$ $(k \geq 0)$ s'énonce donc :

$$0 \leq \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k.|(k+1)-k|.$$

Ce qui établit le résultat demandé : $\boxed{0 \leq \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k}$.

$\boxed{\text{I.6.}}$ *Cette question ne fait pas l'objet d'une indication, elle doit donc pouvoir se résoudre de façon assez élémentaire. De plus, la forme du majorant rappelle celui de la question précédente. En effet*, la dérivée de φ étant négative sur $\mathbb{R}_+$, on peut déjà affirmer, pour $x \in [0,1[$ et $k \geq 1$, puisqu'alors $[k-x, k+x] \subset [k-1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$, que : $\quad \varphi$ est décroissante sur $[k-1, k+x]$, et : $\varphi(k+x) \leq \varphi(k-x) \leq \varphi(k-1)$.

Il s'ensuit, puisqu'aussi φ est positive sur $\mathbb{R}$, que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \geq 1,\quad 0 \leq \varphi(k+x) + \varphi(k-x) \leq 2.\varphi(k-1).$$

Or, il a été montré à la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) = \Phi'(k)$ est majorée par $1/\sqrt{2\pi}.(1/\sqrt{e})^k$ donc la majoration précédente se prolonge en :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \geq 1,\quad 0 \leq \varphi(k+x) + \varphi(k-x) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}.$$

Enfin, puisque $4 \leq 2.\pi$, on vérifie que : $2 \leq \sqrt{2\pi}$, *i.e.* $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \leq 1$, d'où le résultat :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \forall k \geq 1,\quad 0 \leq \varphi(k+x) + \varphi(k-x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}}.$$

.Partie II.

$\boxed{\textbf{II.1.}}$ *(i)* Par définition de B, pour tout $\omega \in \Omega$, $B(\omega)$ est défini comme l'**unique** entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall \omega \in \Omega$, $B(\omega) \leq A(\omega) < B(\omega) + 1$. En conséquence de l'unicité d'un tel entier, les événements $(B = k)$ et $(k \leq A < k+1)$ sont égaux, donc :

$$\mathbf{P}(B = k) = \mathbf{P}(k \leq A < k+1).$$

Ce qui, parce que la variable A est une variable de densité f, s'écrit aussi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbf{P}(B = k) = \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

$\boxed{\textbf{II.1.}}$ *(ii)* •A étant une variable à densité, de densité nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, A admet une espérance si et seulement si $x \mapsto \int_0^x t.f(t)\,\mathrm{d}t$ (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) est majorée sur $\mathbb{R}_+$, auquel cas $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\mathbf{E}(A)$.

•Quant à l'espérance de B, puisque B est la partie entière de A, avec A ne prenant que des valeurs positives, B est une V.A. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $\mathbf{E}(B)$ existe si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} n.\mathbf{P}(B = k)$ est convergente, et comme il s'agit d'une série à termes positifs, cette série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

> *Ces précisions étant données, le lien entre cette intégrale et cette série est une variante de l'usuelle* ***comparaison série-intégrale*** *pour une fonction continue, monotone.*

◇ Pour tout $n \geq 0$, et tout $t \in [\![n, n+1]\!]$: $n \leq t \leq n+1$, et en multipliant par $f(t) \geq 0$:

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in [\![n, n+1]\!],\quad n.f(t) \leq t.f(t) \leq (n+1).f(t).$$

Puis, par **croissance de l'intégrale**, en intégrant cette double inégalité sur les intervalles $[\![n, n+1]\!]$, en sortant les constantes n et $n+1$ des intégrales, on en tire :

$$\forall n \geq 0,\quad n.\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq (n+1).\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui s'écrit encore, en utilisant le résultat du **II.1.*(ii)*.** :

$$\forall n \geq 0,\quad n.\mathbf{P}(B = n) \leq \int_n^{n+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq (n+1).\mathbf{P}(B = n).$$

Puis, en sommant ces inégalités pour n variant de 0 à $N \geq 0$:

$$\forall N \geq 0,\quad \sum_{n=0}^{N} n.\mathbf{P}(B = n) \leq \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{N} (n+1).\mathbf{P}(B = n).$$

Enfin, en utilisant la **relation de Chasles** pour réécrire la somme encadrée :

$$\textbf{(16)}\quad \forall N \geq 0,\quad \sum_{n=0}^{N} n.\mathbf{P}(B = n) \leq \int_0^{N+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{N} (n+1).\mathbf{P}(B = n).$$

•**Grâce à (16)**, si A admet une espérance, alors la fonction croissante $x \mapsto \int_0^x t.f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée par sa limite en $+\infty$ qui existe et vaut $\mathbf{E}(A) = \int_0^{+\infty} t.f(t)\,\mathrm{d}t$, donc :

$$\forall N \geq 0,\quad \sum_{n=0}^{N} n.\mathbf{P}(B = n) \leq \int_0^{N+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathbf{E}(A).$$

On en conclut que la série $\sum_{n \geq 0} n.\mathbf{P}(B = n)$ est majorée par $\mathbf{E}(A)$, donc converge vers une limite inférieure ou égale à $\mathbf{E}(A)$. Ainsi :

(17) si A admet une espérance, B admet une espérance et $\mathbf{E}(B) \leq \mathbf{E}(A)$.

•**Réciproquement**, toujours en utilisant (16) pour majorer, si B admet une espérance, alors la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} n.\mathbf{P}(b = k)$ est convergente et la suite (croissante) de ses sommes partielles est majorée par sa limite qui existe et vaut

$\sum_{n=0}^{+\infty} n.\mathbf{P}(b=n) = \mathbf{E}(B)$. Ainsi on peut majorer, après l'avoir scindée en deux la somme la plus à droite dans (16), ce qui donne, pout tout $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N}(n+1).\mathbf{P}(B=k) = \sum_{n=0}^{N} n.\mathbf{P}(B=k) + \sum_{n=0}^{N} \mathbf{P}(B=k) \leq \mathbf{E}(B) + \sum_{n=0}^{N} \mathbf{P}(B=k).$$

Or, comme la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(B=n)$ est à termes positifs et a pour somme 1, ses sommes partielles sont majorée par 1, et donc, la majoration précédente se prolonge en : $\forall N \geq 0,\quad \sum_{n=0}^{N}(n+1).\mathbf{P}(B=k) \leq \mathbf{E}(B)+1.$

Par conséquent, on tire de (16) que :

$$\forall N \geq 0,\quad \int_0^{N+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{N}(n+1).\mathbf{P}(B=n) \leq \mathbf{E}(B)+1.$$

On en conclut que pour tout $x \geq 0$, en introduisant la partie entière de x, notée $[x]$ et vérifiant $x < [x]+1$, que : $\forall x \geq 0,\quad \int_0^x t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{[x]+1} t.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathbf{E}(B)+1.$

donc, la fonction croissante $x \mapsto \int_0^x t.f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée par $\mathbf{E}(B)+1$, et admet par suite une limite en $+\infty$, inférieure à $\mathbf{E}(B)+1$. Ainsi :

(18) si B admet une espérance, A admet une espérance et $\mathbf{E}(A) \leq \mathbf{E}(B)+1$.

On peut alors conclure, en vertu de (17) et (18) que :

A admet une espérance si et seulement si B en admet une, auquel cas on a : $\mathbf{E}(B) \leq \mathbf{E}(A) \leq \mathbf{E}(B)$

.

II.1. ***(iii)*** Si A suit une loi exponentielle de paramètre λ, **d'après le cours**, son espérance vaut : **(19)** $\mathbf{E}(A) = \frac{1}{\lambda}$.

•Quant à la variable aléatoire $B = [A]$, elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ car A est à valeurs positives (*c.f.* **II.1.*(ii)***., et d'après le **II.1.*(i)***. : $\forall k \geq 0,\ \mathbf{P}(B=k) = \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$,

et comme pour pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on peut prendre pour densité f, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et égale à $f(x) = \lambda.e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a plus précisément :

$$\forall k \geq 0,\ \mathbf{P}(B=k) = \int_k^{k+1} \lambda.e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{k+1} = e^{-\lambda k}.\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

Ce qui permet de donner l'expression de $\mathbf{E}(B)$:

$$\mathbf{E}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.\mathbf{P}(B=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n.e^{-\lambda n}.\left(1-e^{-\lambda}\right) = \left(1-e^{-\lambda}\right).\sum_{n=0}^{+\infty} n.e^{-\lambda n}$$

et il est acquis que $\mathbf{E}(B)$ existe car $\mathbf{E}(A)$ existe (*c.f.* (19) et **I.1.*(ii)***).

Ceci étant, la valeur de $\mathbf{E}(B)$ peut être obtenue de façon directe si l'on considère la fonction $x \mapsto (1-x)^{-2}$, développable en série entière au voisinage de 0, et dont le DSE_0 s'écrit : $\sum_{n\geq 1} n.x^{n-1}$ et a pour rayon de convergence 1. En vertu de ces rappels, pour $\lambda > 0$ (ce qui est le cas si λ est le paramètre d'une loi exponentielle), puisque $x = e^{-\lambda}$ est positif et strictement inférieur à 1, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n.e^{-\lambda n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.e^{-\lambda n} = e^{-\lambda}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(e^{-\lambda}\right)^{n-1} = e^{-\lambda}.\frac{1}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

et par suite :

$$\textbf{(20)}\quad \mathbf{E}(B) = \left(1-e^{-\lambda}\right).\sum_{n=0}^{+\infty} n.e^{-\lambda n} = \left(1-e^{-\lambda}\right).\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda}-1}.$$

(en multipliant numérateur et dénominateur par e^{λ} pour la dernière réécriture)

En vertu de (19) et (20), l'encadrement : $\mathbf{E}(B) \leq \mathbf{E}(A) \leq \mathbf{E}(B)+1$, obtenu à la question précédente, donne :

$$\frac{1}{e^{\lambda}-1} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e^{\lambda}-1}+1, \quad \text{ou encore :} \quad \boxed{\frac{1}{e^{\lambda}-1} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}}.$$

$\boxed{\text{II.2.}}$ *(i)* On accède à la loi de X *via* sa fonction de répartition notée F_X. Comme par définition, $X=|T|$: pour tout $x<0$, $F_X(x)=0$, car X est une VA positive. En revanche, pour tout $x \geq 0$, puisque T suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc une loi de densité φ, et comme $(|T| \leq x)=(-x \leq T \leq x)$:

$$F_X(x)=\mathbf{P}(X \leq x)=\mathbf{P}(|T| \leq x)=\mathbf{P}(-x \leq T \leq x)=\int_{-x}^{x} \varphi(t)\, dt$$

De plus, puisque Φ est une primitive de φ (*c.f.* **I.1.**) on a encore :

$$\forall x \geq 0, \quad F_X(x)=\int_{-x}^{x} \varphi(t)\, dt=\Phi(x)-\Phi(-x)$$

On constate donc que F_X est dérivable sur $\mathbb{R}_-$ où sa dérivée est nulle, et aussi sur $\mathbb{R}_+^*$ par différence et composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, plus précisément, puisque sur $\mathbb{R}$, $\Phi'=\varphi$: $\forall x>0, \quad F_X'(x)=[\Phi(x)-\Phi(-x)]'=\varphi(x)+\varphi(-x)=2.\varphi(x).$

(en utilisant la parité de φ pour la dernière réécriture)

On peut donc donner comme densité de X, la fonction f_X suivante, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{f_X : x \longmapsto 0 \text{ si } x<0, \ 2.\varphi(x) \text{ si } x \geq 0}.$$

◇ <u>Espérance et variance de X</u> : X étant une V.A. de densité $2.\varphi$ sur $\mathbb{R}_+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, par définition, $\mathbf{E}(X)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} t.(2.\varphi(t))\, dt$ est convergente. Or, on connaît une primitive de la fonction $t \mapsto 2.t.\varphi(t)$, et écrire :

$$\forall x \geq 0, \quad \int_0^x t.(2.\varphi(t))\, dt=\left[-2.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

En conséquence, $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t.(2.\varphi(t))\, dt$ existe et vaut $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, donc :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}}.$$

• Quant à la variance de X, par la **formule d'Huyghens**, elle existe si et seulement si $\mathbf{E}(X^2)$ existe, *i.e.* si et seulement si $\int_0^{+\infty} t^2.(2.\varphi(t))\, dt$ converge, et vaut alors :

$$\textbf{(21)} \quad \mathbf{V}(X)=\mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(X)^2=\int_0^{+\infty} t^2.(2.\varphi(t))\, dt-\frac{2}{\pi}.$$

Or, φ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et par définition, l'espérance pour cette loi est nulle et la variance égale à 1, donc, en considérant une variable suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, par exemple ici T, toujours par la formule d'Huyguens :

$$\mathbf{E}(T^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.\varphi(t)\, dt=\mathbf{V}(T)+\mathbf{E}(T)=1+0=1.$$

On peut donc affirmer que : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.\varphi(t)\, dt$ est convergente, ce qui équivaut, **d'après le cours**, à la convergence des deux intégrales : $\int_{-\infty}^{0} t^2.\varphi(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2.\varphi(t)\, dt$.

Or, par parité de la fonction intégrée, ces deux intégrales sont égales, elles valent donc toutes deux $\frac{1}{2}$, et l'on en tire que :

$$\int_0^{+\infty} t^2.\varphi(t)\, dt=\frac{1}{2}, \text{ puis que : } \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^2.(2.\varphi(t))\, dt=2.\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^2.\varphi(t)\, dt=1.$$

Ainsi, en reprenant (21) :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) \text{ existe et vaut : } \mathbf{V}(X)=1-\frac{2}{\pi}}.$$

II.2. *(ii)* La V.A. Z étant égale à la partie entière de X, X étant une V.A. positive, la loi de Z a été décrite aux **I.1.***(i)* et *(ii)*, d'où il ressort que, Z est une V.A. discrète, telle que : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, et : $\forall k \geq 0$, $\mathbf{P}(Z = k) = \int_k^{k+1} f_X(t)\, dt$.

En reprenant la loi de X obtenue précédemment, on a donc encore :

$$\forall k \geq 0, \ \mathbf{P}(Z = k) = \int_k^{k+1} 2.\varphi(t)\, dt = 2. \int_k^{k+1} \varphi(t)\, dt,$$

On peut alors introduire Φ en tant que primitive de φ et conclure :

$$\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N}, \text{ et : } \ \forall k \geq 0, \ \mathbf{P}(Z = k) = 2. \int_k^{k+1} \varphi(t)\, dt = 2.\big[\Phi(k+1) - \Phi(k)\big].}$$

II.2. *(iii)* Pour $Y = [T]$ la loi est directement donnée par le **I.1.***(ii)*. Puisque T admet pour densité la fonction φ, dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est Φ :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{Z}, \text{ et : } \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \mathbf{P}(Y = k) = \int_k^{k+1} \varphi(t)\, dt = \big[\Phi(k+1) - \Phi(k)\big].}$$

II.2. *(iv)* Afin d'étudier la convergence absolue de la série de terme général $k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)$, on remarque d'abord que, compte-tenu de la loi de Y, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\big|k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)\big| = k \left| \int_k^{k+1} \varphi(t)\, dt - \int_{-k}^{-k+1} \varphi(t)\, dt \right|$$

et en effectuant le changement de variable $u = -t$ sur la seconde intégrale, ce qui donne, en utilisant la parité de φ : $\int_{-k}^{-k+1} \varphi(t)\, dt = \int_k^{k-1} \varphi(-t)(-\, dt) = \int_{k-1}^{k} \varphi(t)\, dt$, et par suite :

$$\big|k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)\big| = k \left| \int_k^{k+1} \varphi(t)\, dt - \int_{k-1}^{k} \varphi(t)\, dt \right|$$

Puis en faisant intervenir Φ en tant que primitive de φ sur $\mathbb{R}$:

$$\big|k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)\big| = k \left| \big[\Phi(k+1) - \Phi(k)\big] - \big[\Phi(k) - \Phi(k-1)\big] \right|$$

et par application de l'inégalité triangulaire :

$$\textbf{(22)} \quad \big|k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)\big| \leq k\, |\Phi(k+1) - \Phi(k)| + |\Phi(k) - \Phi(k-1)|.$$

Or, on a établi au **I.5**, pour $k \geq 1$: $0 \leq \Phi(k+1) - \Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$, ce qui donne aussi, pour $k \geq 1$: $0 \leq \Phi(k) - \Phi(k-1) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}$ et permet de prolonger la majoration (22) en :

$$\forall k \geq 1, \quad \big|k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)\big| \leq k \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k + k.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}.$$

ou encore :

$$\forall k \geq 1, \quad \big|k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)\big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + 1\right).k.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}.$$

On a ainsi majoré le terme général de la série $\sum_{k \geq 1} k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)$, en valeur absolue, à un cœfficient multiplicatif près, par le terme général d'une série de la forme $\sum_{k \geq 1} k.x^{k-1}$, pour $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Or, cette série correspond au DSE_0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ (dérivée de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$), dont on sait, **d'après le cours**, qu'il est convergent pour $x \in\ ]-1, 1[$, ce qui est le cas pour $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, donc, par le **théorème de comparaison des séries à termes positifs** :

la série $\sum_{k \geq 1} k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)$ est absolument convergente.

◇ <u>Somme de la série $\sum_{k \geq 1} k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big)$:</u>

Pour tout $n \geq 1$, on note S_n la somme partielle de rang n de cette série :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\big(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k)\big).$$

On a encore, compte-tenu de la loi trouvée pour Y (*c.f.* I.3.*(ii)*) :

(23) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k.\left([\Phi(k+1)-\Phi(k)] - [\Phi(k)-\Phi(k-1)]\right)$

Il y a peu de techniques pour calculer la somme d'une série, ***ici,*** *S_n ne se pouvant se ramener aux sommes partielles d'une série connue, on s'orientera vers une technique de type* ***télescopage.***

Et en scindant cette somme en quatre sommes :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k) - \sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k) + \sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k-1).$

puis, par décalage de l'indice sur les première et troisième somme (on pose : $k' = k+1$ et $k'' = k-1$ respectivement, auquel cas on a : $k = k'-1$ et $k = k''+1$) :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k'=2}^{n+1}(k-1).\Phi(k) - \sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k) - \sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k) + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1).\Phi(k) \\ &= \underbrace{\sum_{k'=2}^{n+1} k.\Phi(k)}_{[1]} - \underbrace{\sum_{k'=2}^{n+1} \Phi(k)}_{[2]} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k)}_{[3]} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k.\Phi(k)}_{[4]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k.\Phi(k)}_{[5]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(k)}_{[6]} \end{aligned}$$

On peut alors **éliminer les termes communs** entre les différentes sommes pour obtenir :

$$\begin{aligned} S_n = \underbrace{(n+1).\Phi(n+1) - 1.\Phi(1)}_{[1]-[3]} - \Big[\underbrace{n.\Phi(n) - 0.\Phi(0)}_{[4]-[5]}\Big] \\ -\Big[\underbrace{\Phi(n+1) + \Phi(n) - \Phi(1) - \Phi(0)}_{[2]-[6]}\Big] \end{aligned}$$

Soit, après simplifications :

(24) $S_n = n.\Phi(n+1) - (n+1).\Phi(n) + \Phi(0) = n.[\Phi(n+1) - \Phi(n)] - \Phi(n) + \Phi(0).$

On peut alors déterminer la limite de la suite S_n(*). En effet, d'une part :

puisque : $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 1$, on a de même : $\lim_{n\to+\infty}\Phi(n) = 1.$

et d'autre part, en vertu du **I.5.** : $0 \le \Phi(n+1) - \Phi(n) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$, donc :

(25) $n.|\Phi(n+1) - \Phi(n)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.n.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n,$

or : $n.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en tant que terme général de la série <u>convergente</u> $\sum_{n\ge1} n.x^{n-1}$ pour $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, donc, par le **theorème d'encadrement**, on déduit de (25) que :

$\lim_{n\to+\infty} n.|\Phi(n+1) - \Phi(n)| = 0.$

Par conséquent, on tire de ces deux calculs de limite, par (24) que :

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n.[\Phi(n+1) - \Phi(n)] - \Phi(n) + \Phi(0) = -1 + \Phi(0)$

(*) On pourra noter qu'il est beaucoup plus simple de poser dans (23) $v_k = \Phi(k+1) - \Phi(k)$, ce qui donne pour (23) : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k.(v_k - v_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k.v_k - \sum_{k=1}^{n} k.v_{k-1}$, puis $S_n = \sum_{k=1}^{n} k.v_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1).v_k = \sum_{k=1}^{n} k.v_k - \sum_{k=0}^{n-1} k.v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k$, qui se simplifie en : $S_n = n.v_n - \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ puis, par définition des v_k, en réécrivante aussi la somme grâce à la relation de Chasles pour les intégrales, on obtient :

$S_n = n.(\Phi(n+1) - \Phi(n)) - \int_0^n \varphi(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 - \int_0^{+\infty}\varphi(t)\,dt = -\frac{1}{2}$ (*C.Q.F.D.*).

Et comme il a été vu (*c.f.* **(4)**) : $\Phi(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathbf{P}(Y=k) - \mathbf{P}(Y=-k)\big) = -\tfrac{1}{2}}.$$

◇ Interprétation du calcul : la somme précédemment calculée s'écrit aussi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathbf{P}(Y=k) - \mathbf{P}(Y=-k)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.\mathbf{P}(Y=k) - k.\mathbf{P}(Y=-k).$$

Or, les deux sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} k.\mathbf{P}(Y=k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} -k.\mathbf{P}(Y=-k)$ sont convergentes (*c.f.* cela ayant été établi lorsque l'on a montré la convergence absolue demandée. *Au passage notons que cette convergence absolue n'a aucun intérêt dans le problème, puisque l'on montrer ensuite, directement, que* $\lim_{n\to+\infty} S_n$ *existe*).

Donc, on peut scinder la somme précédente en deux, puis effectuer sur la seconde le changement d'indice $k' = -k$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathbf{P}(Y=k) - \mathbf{P}(Y=-k)\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k.\mathbf{P}(Y=k) + \sum_{k=1}^{+\infty}(-k).\mathbf{P}(Y=-k).\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k.\mathbf{P}(Y=k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} k.\mathbf{P}(Y=k).\end{aligned}$$

La somme ayant été calculée et valant $-\frac{1}{2}$, on a donc en rassemblant les deux sommes et en y intégrant le terme de rang 0, $k.\mathbf{P}(Y=k)$ pour $k=0$, qui est nul, on a donc :

$$-\tfrac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathbf{P}(Y=k) - \mathbf{P}(Y=-k)\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k.\mathbf{P}(Y=k).$$

On reconnaît ainsi, au membre de droite, l'**espérance de la V.A.** $\boldsymbol{Y}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) \text{ existe et vaut : } \mathbf{E}(Y) = -\tfrac{1}{2}}.$$

II.2. ***(v)*** Il s'agit d'une simple application du **II.1.*(ii)***, $Z = [X]$, avec $X = |T|$ une V.A. à densité ne prenant que des valeurs positives, donc Z admet une espérance si et seulement si X en admet une, ce qui a été établi au **II.2.*(i)***, donc :

$$\boxed{Z \text{ admet une espérance}}.$$

De plus, puisque $\mathbf{E}(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, d'après le **II.1.*(ii)*** : $\mathbf{E}(Z) \le \mathbf{E}(X) \le \mathbf{E}(Z) + 1$, ou encore :

$$\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} - 1 \le \mathbf{E}(Z) \le \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}.$$

II.3. Par les définitions de Y ($Y = [T]$) et de la partie entière d'un réel :

$\forall\,\omega \in \Omega, \quad Y(\omega) \le T(\omega) < Y(\omega) + 1$, et donc : $0 \le T(\omega) - Y(\omega) < 1$,

ce qui établit que :

$$\boxed{U = T - Y \text{ est à valeurs dans } [0,1[}.$$

◇ Fonction de répartition de U : *comme on fait pour la loi de la somme de deux V.A. discrètes, on contourne l'incapacité dans laquelle on est de déterminer la probabilité* $\mathbf{P}(U \le u) = \mathbf{P}(0 \le T - Y < 1)$ *grâce au* ***système complet d'événements*** $\{(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}}$, *pour se ramener à des probabilités sur la seule variable* T.

Pour tout $u \in [0,1[$, U étant à valeurs positives : $\mathbf{P}(U \le u) = \mathbf{P}(0 \le U \le u)$, puis, pour le **système complet d'événements** $\{(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}}$, par application de la **formule des probabilités totales** :

$$\textbf{(26)}\quad \mathbf{P}(U \le u) = \mathbf{P}(0 \le T - Y < u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}\big((0 \le T - Y < u) \cap (Y = k)\big),$$

où (***et c'est là l'intérêt***) : $(0 \le T - Y < u) \cap (Y = k) = (0 \le T - k < u) \cap (Y = k)$.

Or, d'une part : $(0 \le T - k < u) = (k \le T < k + u)$,

et d'autre part, puisque $Y = [T]$: $(Y = k) = (k \le T < k + 1)$,

donc, on a l'égalité d'événements suivante :

$(0 \leq T - k < u) \cap (Y = k) = (k \leq T < k+u) \cap (k \leq T < k+1) = (k \leq T < k+u).$

et par suite, en reportant dans (26) :

$\mathbf{P}(U \leq u) = \mathbf{P}(0 \leq T - Y < u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(k \leq T < k+u),$

ou encore, en faisant intervenir la densité ϕ de la V.A. T :

$$\mathbf{P}(U \leq u) = \mathbf{P}(0 \leq T - Y < u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de cette série est acquise (elle découle de l'application de la formule des probabilités totales), **or**, s'agissant d'une somme sur un indice variant dans $\mathbb{Z}$, on sait qu'elle équivaut à la convergence des deux sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+u} \varphi(t)\,dt$ et $\sum_{k=-\infty}^{-1} \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, et que :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

Ce qui donne ensuite, en isolant le terme de rang $k = 0$ de la première somme, en changeant l'indice k en $k' = -k$ sur la seconde somme, et en rassemblant alors les deux sommes :

$$\mathbf{P}(U \leq u) = \int_0^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-k}^{-k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right),$$

L'utilisation du changement de variable $u = -t$, de la parité de φ permettent de réécrire pour la seconde intégrale dans la somme :

$$\int_{-k}^{-k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k-u} \varphi(-t)(-\,\mathrm{d}t) = \int_{k-u}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

puis, par application de la relation de Chasles, il vient :

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-k}^{-k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{k-u}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{k-u}^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne alors pour $\mathbf{P}(U \leq u)$: $\mathbf{P}(U \leq u) = \int_0^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k-u}^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$

puis en introduisant Φ, primitive de φ :

$$\mathbf{P}(U \leq u) = \int_0^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k-u}^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(u) - \Phi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+u) - \Phi(k-u)),$$

et enfin, sachant $\Phi(0) = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\forall u \in [0,1[, \quad \mathbf{P}(U \leq u) = \Phi(u) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+u) - \Phi(k-u))}.$$

II.4. *(i)* Pour tout $k \geq 1$, et $x \in [0,1[$: $0 \leq \varphi(k+x) + \varphi(k-x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}$, en vertu du **I.6.**. On en déduit que, pour $x \in [0,1[$, la série $\sum_{k\geq 0} u_k$, avec $u_0 = \varphi(x)$, et $u_k = \varphi(k+x) + \varphi(k-x)$ pour $k \geq 1$, est une série à termes positifs, dont le terme général est majoré par le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $1/\sqrt{e} \in]-1,1[$), donc, par le **théorème de comparaison des séries à termes positifs**, cette série est convergente :

$$\boxed{\text{l'expression } \theta(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi(k+x) + \varphi(k-x)) \text{ définit une fonction sur } [0,1[}.$$

II.4. *(ii)* On constate que $\theta_n(x)$ désigne, pour tout $x \in [0,1[$, la somme partielle de rang n de la série précédente, de somme $\theta(x)$, donc, $\theta(x) - \theta_n(x)$ désigne le **reste de rang n** de cette série, *i.e.* : $\theta(x) - \theta_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \big(\varphi(k+x) + \varphi(k-x)\big)$.

En vertu de la majoration rappelée précédemment (*c.f.* **I.6.**), en sommant pour k variant de $n+1$ à N : **(27)** $0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} (\varphi(k+x) + \varphi(k-x)) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}$.

Et, en tant que somme des $N-(n+1)+1 = N-n$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ et de raison $\frac{1}{\sqrt{e}}$, positive et < 1, la somme au membre de droite admet une limite pour N tendant vers $+\infty$, qui vaut :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{e}}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.$$

Ainsi, on peut passer à la limite pour N tendant vers $+\infty$ sur (27), et l'on obtient :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad |\theta(x) - \theta_n(x)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}}.$$

II.4. *(iii) La démarche est classique. On constate que l'expression obtenue au* ***II.3.*** *pour* $\mathbf{P}(U \leq u)$ *peut, semble-t-il, se ramener à* $\int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t$*, pourvu que l'on puisse* ***intégrer terme à terme*** *le développement en série de* $\theta(t)$*.* ***Or****, il est* ***faux*** a priori *pour une somme infinie de fonctions que l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales. Il s'agit donc de biaiser en* ***se ramenant à l'intégrale d'une somme finie****.*

◇ Tout d'abord précisons que $\int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont définies pour tout $u \in [0,1[$ en tant qu'intégrales de fonctions continues, car on admis que θ est continue sur l'intervalle $[0,1[$, contenant $[0,u]$, et θ_n est une somme finie de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Ensuite, **en posant** : pour $n \geq 1$, $w_n(u) = \int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t$, pour plus de clarté, on a, par **linéarité de l'intégrale** :

(28) $\forall u \in [0,1[, \; \int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t - w_n(u) = \int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^u \theta(t) - \theta_n(t)\,\mathrm{d}t$,

et par ailleurs, le **II.4.***(ii)* donnant un majorant de la fonction $t \mapsto |\theta(t) - \theta_n(t)|$ sur l'intervalle $[0,1[$, en utilisant l'**inégalité de la valeur absolue** pour les intégrales :

$$\textbf{(29)} \quad \left|\int_0^u \theta(t) - \theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^u |\theta(t) - \theta_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \cdot \tfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \cdot \int_0^u 1\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, par (28) et (29), pour tout $u \in [0,1[$, comme $\int_0^u 1\,\mathrm{d}t = u$:

$$\textbf{(30)} \quad \forall n \geq 1, \; \left|\int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t - w_n(u)\right| \leq \tfrac{u.\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \quad \text{où : } \lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0,$$

car $|1/\sqrt{e}| < 1$.

Donc, par le **théorème d'encadrement**, il vient que, pour tout $u \in [0,1[$:

la suite $(w_n(u))_{n\geq 1}$, de terme général $\int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t$, converge vers $\int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t$.

- **Enfin**, en revenant à la **définition de θ_n**, puis par **linéarité de l'intégrale** :

$\forall u \in [0,1[, \forall n \geq 1,$

$$\begin{aligned} w_n(u) &= \int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^u \Big(\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} [\varphi(k+t) + \varphi(k-t)]\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_0^u \varphi(k+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^u \varphi(k-t)\,\mathrm{d}t\Big). \end{aligned}$$

On peut alors par les **changements de variables** $\boldsymbol{u = k + t}$ **et** $\boldsymbol{v = k - t}$ sur les deux intégrales de la somme, respectivement, écrire :

$$\int_0^u \varphi(k+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^u \varphi(k-t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+u} \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_k^{k-u} \varphi(v)(-\,\mathrm{d}v)$$
$$= \int_k^{k+u} \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_{k-u}^{k} \varphi(v)\,\mathrm{d}v = \int_{k-u}^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(relation de Chasles)}$$

On obtient ainsi la réécriture suivante de $w_n(u)$:

$$w_n(u) = \int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n \int_{k-u}^{k+u} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

puis, en introduisant Φ, primitive de φ sur $\mathbb{R}$:

$$w_n(u) = \int_0^u \theta_n(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(u) - \Phi(0) + \sum_{k=1}^{n} \big(\Phi(k+u) - \Phi(k-u)\big).$$

où l'on reconnaît en $w_n(u)$ la somme partielle de rang n de la série dont la somme vaut $\mathbf{P}(U \leq u)$ (*c.f.* **II.3.**), donc, puisque $\lim_{n\to+\infty} w_n(u) = \int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$\boxed{\forall\, u \in [0,1[, \quad \mathbf{P}(U \leq u) = \int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t}.$$

◇ <u>**En conséquence**</u> : la fonction de répartition F_U de U, sur $[0,1[$, égale à la primitive de θ qui s'annule en 0, donc elle est dérivable sur $[0,1[$ et sa dérivée en u vaut : $\theta(u)$. C'est donc une fonction continue sur $[0,1[$.
Par ailleurs, puisque U est à valeurs dans $[0,1[$, $\mathbf{P}(U \leq u)$ est nul pour $u < 0$ et égal à 1 pour $u \geq 1$, donc F_U est de dérivée nulle sur $]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$. On peut donc donner pour densité f_U de U la fonction suivante, continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et 1 :

$$\boxed{f_U : x \longmapsto \theta(x) \text{ si } x \in [0,1[, \quad 0 \text{ sinon}}.$$

II.4. *(iv)* U étant à valeurs dans $[0,1[$, U, dont la densité sur $[0,1[$ coïncide avec θ, admet une espérance si et seulement si $\int_0^1 t.\theta(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Puisqu'on sait seulement que θ est continue sur $[0,1[$, et que l'on ne sait rien sur la continuité de θ en 1, l'intégrale $\int_0^1 t.\theta(t)\,\mathrm{d}t$, tout comme $\int_0^1 \theta(t)\,\mathrm{d}t$, est *a priori* une intégrale impropre.

Cependant, pour tout $u \in [0,1[$, en utilisant que : $\forall\, t \in [0,u]$, $t.\theta(t) \leq u.\theta(t)$ (car $\theta \geq 0$), on a :

$$\int_0^u t.\theta(t)\,\mathrm{d}t \leq u.\int_0^u \theta(t)\,\mathrm{d}t \leq u.\mathbf{P}(U \leq u) \leq 1.$$

On en déduit que la fonction croissante $u \mapsto \int_0^u t.\theta(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque u tend vers 1^-, et donc que :

$$\boxed{U \text{ admet une espérance, égale à } \int_0^1 t.\theta(t)\,\mathrm{d}t}.$$

• De plus, en vertu de la majoration du **II.4.** ***(ii)***, pour tout $n \geq 1$, et $u \in [0,1[$:

$$\left|\int_0^u t.\theta(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^u t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^u t.\left|\theta(t) - \theta_n(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.\tfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.\int_0^u t\,\mathrm{d}t$$

soit, puisque $\int_0^u t\,\mathrm{d}t = \frac{u^2}{2}$:

$$\left|\int_0^u t.\theta(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^u t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \tfrac{u^2\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}.\left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n,$$

puis, **par passage à la limite pour $\boldsymbol{u}$ tendant vers $\mathbf{1}^-$**, les intégrales étant convergentes, et le majorant admettant une limite pour $u \longrightarrow 1^-$:

$$\forall\, n \geq 1, \quad \left|\int_0^1 t.\theta(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \tfrac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}.\left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n,$$
$$\textit{i.e.} \quad \left|\mathbf{E}(U) - \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \tfrac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}.\left(\tfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.$$

On conclut alors, le majorant tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \mathbf{E}(U)}.$$

$\boxed{\text{II.4.}}$ ***(v)*** Puisque φ est une fonction positive, on a, pour $t \in [k, k+1]$ $(k \geq 0)$, par multiplication par $\varphi(t)$: $\quad (k \leq t \leq k+1) \iff (\, 0 \leq k.\varphi(t) \leq t.\varphi(t)\,)$,

puis, **par croissance de l'intégrale**, en intégrant sur $[k, k+1]$ cette double inégalité entre fonctions continues : $\quad \int_k^{k+1} 0 \,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} k.\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t$,

soit : $\quad 0 \leq k.\int_k^{k+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, *i.e.* : **(31)** $\boxed{\forall k \geq 0,\ 0 \leq k.b_k \leq a_k}$.

◇ Comme, par un calcul direct, sachant que $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on obtient :

$$a_k = \int_k^{k+1} t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \big[-\varphi(t)\big]_k^{k+1} = \varphi(k) - \varphi(k+1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

on déduit de l'encadrement (31), qui se prolonge en : $0 \leq b_k \leq k.b_k \leq a_k$, par le **théorème d'encadrement**, que : $\boxed{\lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} k.b_k = \lim_{k\to+\infty} a_k = 0}$.

$\boxed{\text{II.4.}}$ ***(vi)*** Pour tout $n \geq 1$, par définition de θ_n, $t \mapsto t.\theta_n(t)$ apparaît comme une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. En intégrant cette somme de fonctions sur $[0,1]$, par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\textbf{(32)}\quad \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\Big(\int_0^1 t.\varphi(k+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t.\varphi(k-t)\,\mathrm{d}t\Big),$$

puis, comme **II.4.*(ii)***, par les mêmes **changements de variables** $\boldsymbol{u = k+t}$ **et** $\boldsymbol{v = k-t}$, pour lesquels on a : $t = u-k$ et $t = k-v$ respectivement, il vient :

$$\int_0^1 t.\varphi(k+t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t.\varphi(k-t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1}(u-k).\varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_{k-1}^{k}(k-v).\varphi(v)\,\mathrm{d}v$$

puis, **par linéarité de l'intégrale**, on réexprimer le second membre, sous la forme :

$$\int_k^{k+1} t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t - k.\int_k^{k+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + k.\int_{k-1}^{k}\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{k-1}^{k} t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t = a_k - k(b_k - b_{k-1}) - a_{k-1},$$

ce qui en revenant à (32), où aussi : $\int_0^1 t.\varphi(t)\,\mathrm{d}t = a_0$, permet d'écrire :

$$\int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k - k(b_k - b_{k-1}) - a_{k-1},$$

L'expression se prête à des **manipulations de type "*télescopage*"**, facilitées par la réécriture :

$$\textbf{(33)}\quad \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n}(k.b_k - k.b_{k-1}),$$

où : $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$, et, grâce à un décalage d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k.b_k - k.b_{k-1}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k.b_k - \sum_{k=1}^{n} k.b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k.b_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1).b_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k.b_k - \sum_{k=0}^{n-1} k.b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k = n.b_n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k,\end{aligned}$$

et comme, par application de la relation de Chasles :

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(n) - \Phi(0) = \Phi(n) - \frac{1}{2},$$

on obtient finalement pour réécriture de (33) :

$$\boxed{\int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = a_0 + (a_n - a_1) - n.b_n + \Phi(n) - \frac{1}{2} = a_n - n.b_n + \Phi(n) - \frac{1}{2}}.$$

◇ Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.b_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$, on tire de l'égalité précédente que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Or, d'après le **II.4.*(iv)*** : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t.\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}(U)$, donc, on a montré **ici** que : $\mathbf{E}(U) = \frac{1}{2}$.

Or, par ailleurs, puisque : $U = T - Y$, **par linéarité de l'espérance**, T et Y admettant chacune une espérance, valant 0 pour T (loi $\mathcal{N}(0,1)$) et $-\frac{1}{2}$ pour Y (d'après le **II.2.*(ii)***), on a :

$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(T-Y) = \mathbf{E}(T) - \mathbf{E}(Y) = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (en vertu du **II.2.*(ii)***).

Donc :

le résultat est en accord avec celui du **II.2.*(ii)***. On retrouve que : $\mathbf{E}(U) = \frac{1}{2}$.

II.5. *(i)* Les variables aléatoires T et U étant des variables à densité, on dispose des **trois** caractérisations **équivalentes** suivantes de l'indépendance de T et U :

$\forall\,(t,u) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\,u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}(T \leq t).\mathbf{P}(U \leq u) = \mathbf{P}\big((T \leq t) \cap (U \leq u)\big).$

ou :

$\forall\,I$ et J intervalles de $\mathbb{R}$: $\quad \mathbf{P}(T \in I).\mathbf{P}(U \in J) = \mathbf{P}\big((T \in I) \cap (U \in J)\big).$

et enfin, si on note f_T, f_U, les densités respectives de T et U, et $f_{T,U}$ la densité conjointe du couple (T,U) :

$\forall\,(t,u) \in \mathbb{R}^2, \qquad f_{T,U}(t,u) = f_T(t).f_U(u).$

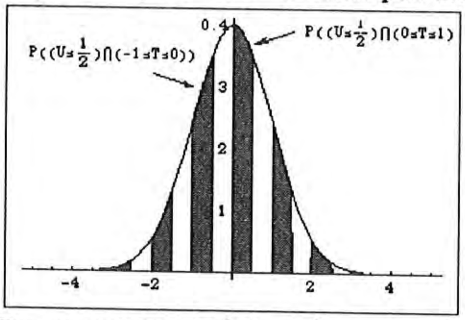
On sait aussi que, T et U admettant une espérance :

si T et U sont indépendantes, alors $\mathbf{E}(T.U) = \mathbf{E}(T).\mathbf{E}(U)$.

*On dispose donc de **trois** façons de montrer que T et U sont indépendantes, et de **quatre** façons de montrer qu'elles ne sont pas indépendantes (la dernière consistant à montrer que : $\mathbf{E}(T.U) \neq \mathbf{E}(T).\mathbf{E}(U)$.*

***Ceci étant**, il importe pour ces questions d'indépendance d'avoir une idée **a priori** du résultat à établir.*

***Ici**, c'est en considérant la **représentation graphique** suivante que l'on peut conjecturer que T et U **ne sont pas** indépendantes :*



On a, ci-contre, la représentation graphique de la fonction φ, (densité de T), et l'on a fait figurer, en grisé, les “aires sous la courbe” correspondant aux probabilités :

$$\mathbf{P}\big((U \leq \tfrac{1}{2}) \cap (T \in [k, k+1]\big),$$

et l'on remarque que, pour $|T|$ compris entre deux entiers donnés, ces probabilités sont différentes suivant que T est positif ou négatif.

<u>Par exemple</u> : $\mathbf{P}\big((U \leq \frac{1}{2}) \cap (T \in [0,1]\big) < \mathbf{P}\big((U \leq \frac{1}{2}) \cap (T \in [-1,0])\big)$, alors que ces probabilités, **en cas d'indépendance de T et U** valent respectivement : $\mathbf{P}(U \leq \frac{1}{2}).\mathbf{P}(T \in [0,1])$, et $\mathbf{P}(U \leq \frac{1}{2}).\mathbf{P}(T \in [-1,0])$ et donc **sont égales**, car $\mathbf{P}(T \in [0,1]) = \mathbf{P}(T \in [-1,0])$ (par parité de la densité de T, égale à $f_T = \varphi$).

◇ <u>Établissement de la conjecture</u> : compte-tenu de la définition de U ($U = T - |T|$) :

$\mathbf{P}\big((U \leq \frac{1}{2}) \cap (0 \leq T \leq 1)\big) = \mathbf{P}(0 \leq T \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$

et : $\mathbf{P}\big((U \leq \frac{1}{2}) \cap (-1 \leq T \leq 0)\big) = \mathbf{P}(-1 \leq T \leq -\frac{1}{2}) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

La **différence de ces deux probabilités** vaut donc :

$$\mathbf{P}\big((U \le \tfrac{1}{2}) \cap (0 \le T \le 1)\big) - \mathbf{P}\big((U \le \tfrac{1}{2}) \cap (-1 \le T \le 0)\big) = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

et comme la dernière intégrale, par parité de φ et changement de variable $u = -t$ s'écrit aussi : $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi(u)\,\mathrm{d}u$, puis $\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(v + \frac{1}{2})\,\mathrm{d}u$ (poser : $v = \frac{1}{2} + u$), il vient :

$$\mathbf{P}\big((U \le \tfrac{1}{2}) \cap (0 \le T \le 1)\big) - \mathbf{P}\big((U \le \tfrac{1}{2}) \cap (-1 \le T \le 0)\big) = \int_0^{\frac{1}{2}} \big[\varphi(t) - \varphi(t + \tfrac{1}{2})\big]\,\mathrm{d}t$$

en utilisant la linéarité de l'intégrale, pour réexprimer la différence .

Constatant alors que : $t \mapsto \varphi(t) - \varphi(t + \frac{1}{2})$ est continue et strictement positive (par décroissance stricte de φ) sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale au membre de droite est **strictement négative**, et donc : $\mathbf{P}\big((U \le \frac{1}{2}) \cap (0 \le T \le 1)\big) - \mathbf{P}\big((U \le \frac{1}{2}) \cap (-1 \le T \le 0)\big) > 0.$

Or, **si T et U sont indépendantes**, cette différence est <u>nulle</u>, car :

$$\mathbf{P}\big((U \le \tfrac{1}{2}) \cap (0 \le T \le 1)\big) = \mathbf{P}(U \le \tfrac{1}{2}).\mathbf{P}(0 \le T \le 1) = \underline{\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t}, \quad \text{et :}$$

$$\mathbf{P}\big((U \le \tfrac{1}{2}) \cap (-1 \le T \le 0)\big) = \mathbf{P}(U \le \tfrac{1}{2}).\mathbf{P}(-1 \le T \le 0) = \int_{-1}^{0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \underline{\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$$

(où l'on utilise la parité de φ pour affirmer que : $\int_{-1}^{0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$).

On peut donc conclure qu'il est exclu que T et U soient indépendantes :

$$\boxed{\text{les varaibles aléatoires } T \text{ et } U \text{ sont indépendantes}}\,.$$

$\boxed{\textbf{II.5.}}$ *(ii)* <u>Espérance de $T.X.$</u> : *Parce que l'indépendance des V.A. T et X n'a pas été encore examinée (on verra d'ailleurs que T et X ne sont pas indépendantes), on ne peut que déterminer* $\mathbf{E}(T.X)$ *par un* ***calcul direct***.

La variable aléatoire $T.X$ est en fait une V.A. **fonction** de T : $T.X = \psi(T)$, avec $\psi : x \mapsto x.|x|$, donc, ψ étant continue et strictement croissante, on peut déterminer $\mathbf{E}(T.X)$ par la **formule de transfert** :

$$\mathbf{E}(T.X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t).f_T(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t.|t|.\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(sous réserve de convergence).}$$

Or, pour tout $A > 0$ et $B > 0$, en considérant le signe de $|t|$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$:

$$\int_{-B}^{A} t.|t|.\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-B}^{0} t.|t|.\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^A t.|t|.\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-B}^{0} -t^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^A t^2.\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

puis, par changement de variable $u = -t$ sur la première intégrale :

$$\textbf{(34)} \quad \int_{-B}^{A} t.|t|.\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^B t^2.\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^A t^2.\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\int_0^{+\infty} t^2.\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$, *i.e.* : $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t t^2.\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Donc, par (34), $\lim_{\substack{A \to +\infty \\ B \to +\infty}} \int_{-B}^{A} t^2.\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, *i.e.* :

$$\boxed{\mathbf{E}(T.X) \text{ existe et vaut } 0}\,.$$

◇ <u>Indépendance des variables X et T</u> : *Parce que $X = |T|$ on peut présager que ces deux variables ne sont pas indépendantes. En effet :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big((T \le -2) \cap (X \le 1)\big) &= \mathbf{P}\big((T \le -2) \cap (|T| \le 1)\big) \\ &= \mathbf{P}\big((T \le -2) \cap (-1 \le T \le 1)\big) = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{événements} \\ \text{incompatibles}\end{array}\right)\end{aligned}$$

tandis que : $\mathbf{P}(T \le -2) = \int_{-\infty}^{-2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t > 0$ et $\mathbf{P}(X \le 1) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t > 0$

(car il s'agit de deux intégrales d'une fonction strictement positive et continue)

Ainsi : $\mathbf{P}\big((T \le -2) \cap (X \le 1)\big) \ne \mathbf{P}(T \le -2).\mathbf{P}(X \le 1)$

Donc : $\boxed{\text{les variables } T \text{ et } X \text{ ne sont pas indépendantes}}\,.$

$\boxed{\textbf{II.6.}}$ *(i)* Pour tout $w \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(W \leq w) = \mathbf{P}(T.V \leq w)$, et en utilisant le système complet d'événements $\{(V = -1), (V = 1)\}$, par la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T.V \leq w) &= \mathbf{P}\big((T.V \leq w) \cap (V = -1)\big) + \mathbf{P}\big((T.V \leq w) \cap (V = 1)\big)\\ &= \mathbf{P}\big((-T \leq w) \cap (V = -1)\big) + \mathbf{P}\big((T \leq w) \cap (V = 1)\big)\\ &= \mathbf{P}(-T \leq w).\mathbf{P}(V = -1) + \mathbf{P}(T \leq w).\mathbf{P}(V = 1) \quad \begin{pmatrix}\text{par indépendance}\\ \text{des variables } T \text{ et } V\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Et comme, par hypothèse sur V : $\mathbf{P}(V = -1) = \mathbf{P}(V = 1) = \frac{1}{2}$, finalement :

$$\mathbf{P}(T.V \leq w) = \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(-T \leq w) + \mathbf{P}(T \leq w)\big] = \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(-w \leq T) + \mathbf{P}(T \leq w)\big]$$

et en faisant intervenir la fonction de répartion Φ de la V.A. T :

$$\mathbf{P}(T.V \leq w) = \tfrac{1}{2}.\big[(1 - \mathbf{P}(T < -w)) + \mathbf{P}(T \leq w)\big] = \tfrac{1}{2}.\big[(1 - \Phi(-w)) + \Phi(w)\big]$$

Puis, Φ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par somme et composition de fonctions dérivables, la fonction de répartition de W est dérivable, et sa dérivée vaut :

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f_W(w) = \tfrac{1}{2}.\big[-\Phi'(-w).(-1) + \Phi'(w)\big] = \tfrac{1}{2}.\big[\varphi(-w) + \varphi(w)\big]$$

On peut donc affirmer que : $\boxed{f_W : x \mapsto \tfrac{1}{2}.\big[\varphi(-w) + \varphi(w)\big] \text{ est une densité de } W}$.

$\boxed{\textbf{II.6.}}$ *(ii)* Espérance de $T.W$: *Encore une fois, l'indépendance de T et W n'étant pas à étudier en premier lieu (si l'on suit l'énoncé), on propose un calcul direct.* Il est aussi aisé de donner une densité pour la V.A. $T.W = T.(T.V) = T^2.V$, que de donner une densité de $T.V$. De même : pour tout $w \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(T.W \leq w) = \mathbf{P}(T^2.V \leq w)$, et en utilisant le système complet d'événements $\{(V = -1), (V = 1)\}$, par la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T.W \leq w) &= \mathbf{P}\big((T^2.V \leq w) \cap (V = -1)\big) + \mathbf{P}\big((T^2.V \leq w) \cap (V = 1)\big)\\ &= \mathbf{P}\big((-T^2 \leq w) \cap (V = -1)\big) + \mathbf{P}\big((T^2 \leq w) \cap (V = 1)\big)\end{aligned}$$

puis, par indépendance des variables T et V :

$$\mathbf{P}(T.W \leq w)\mathbf{P}(-T^2 \leq w).\mathbf{P}(V = -1) + \mathbf{P}(T^2 \leq w).\mathbf{P}(V = 1)$$

Et comme, par hypothèse sur V : $\mathbf{P}(V = -1) = \mathbf{P}(V = 1) = \frac{1}{2}$, finalement :

$$\mathbf{P}(T.W \leq w) = \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(-T^2 \leq w) + \mathbf{P}(T^2 \leq w)\big] = \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(-w \leq T^2) + \mathbf{P}(T^2 \leq w)\big]$$

À ce stade, en discutant suivant le signe de w :

- si $w \geq 0$: alors $(-w \leq T^2)$ est un événement certain, donc $\mathbf{P}(-w \leq T^2) = 1$ et :
$$\mathbf{P}(T.W \leq w) = \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(-w \leq T^2) + \mathbf{P}(T^2 \leq w)\big] = \tfrac{1}{2}.\big[1 + \mathbf{P}(-\sqrt{w} \leq T \leq \sqrt{w})\big].$$
- si $w < 0$: alors $(T^2 < w)$ est un événement impossible, donc $\mathbf{P}(T^2 \leq w) = 0$ et :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T.W \leq w) &= \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(-w \leq T^2) + \mathbf{P}(T^2 \leq w)\big] = \tfrac{1}{2}.\mathbf{P}(-w \leq T^2).\\ &= \tfrac{1}{2}.\mathbf{P}\big((\sqrt{-w} \leq T) \cup (T \leq -\sqrt{-w})\big).\\ &= \tfrac{1}{2}.\big[\mathbf{P}(\sqrt{-w} \leq T) + \mathbf{P}(T \leq -\sqrt{-w})\big] \quad \text{(événements incompatibles).}\end{aligned}$$

On obtient ensuite une densité pour $T.W$, par dérivation, après avoir réexprimé les résultats précédents en fonction de Φ :

- sur $\mathbb{R}_+^*$: $w \mapsto \mathbf{P}(T.W \leq w)$ est dérivable et sa dérivée vaut :
$$\begin{aligned}f_{T.W}(w) &= \big(\tfrac{1}{2}.\big[1 + \mathbf{P}(-\sqrt{w} \leq T \leq \sqrt{w})\big]\big)' = \big(\tfrac{1}{2}.\big[1 + \Phi(\sqrt{w}) - \Phi(-\sqrt{w})\big]\big)'.\\ &= \tfrac{1}{2}.\big[\tfrac{1}{2\sqrt{w}}.\varphi(\sqrt{w}) + \tfrac{1}{2\sqrt{w}}.\varphi(-\sqrt{w})\big] = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{\sqrt{w}}.\varphi(\sqrt{w}) \quad \text{(par parité de } \varphi).\end{aligned}$$

• sur $\mathbb{R}_-^*$: $w \mapsto \mathbf{P}(T.W \leq w)$ est dérivable et sa dérivée vaut :

$$f_{T.W}(w) = \left(\tfrac{1}{2}.\left[\mathbf{P}(\sqrt{-w} \leq T) + \mathbf{P}(T \leq -\sqrt{-w})\right]\right)' = \left(\tfrac{1}{2}.\left[(1 - \Phi(\sqrt{-w})) + \Phi(-\sqrt{-w})\right]\right)'.$$
$$= \tfrac{1}{2}.\left[\tfrac{1}{2\sqrt{-w}}.\varphi(\sqrt{-w}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-w}}.\varphi(-\sqrt{-w})\right] = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{\sqrt{-w}}.\varphi(\sqrt{-w}) \quad \text{(par parité de } \varphi).$$

Ainsi, on peut proposer pour la densité de $T.W$, l'expression suivante sur $\mathbb{R}^*$:

$$\boxed{f_{T.W} : x \mapsto \tfrac{1}{2\sqrt{|w|}}.\varphi(\sqrt{|w|})}.$$

▪Espérance de $T.W$: dans la mesure où la densité de $T.W$ est paire, $\mathbf{E}(T)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t$ existe. **Or**, sur $\mathbb{R}_+$, $t.f_{T.W}(t)$ est positive et continue, **donc** $x \mapsto \int_0^x t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque, pour tout $x \geq 0$: $\int_0^x t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t.\frac{1}{2\sqrt{|t|}}.\varphi(\sqrt{|t|})\,\mathrm{d}t$, et par le changement de variable : $u \mapsto t = u^2$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, pour lequel "$\mathrm{d}t = 2u.\mathrm{d}u$":

$$\int_0^x t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}.\int_0^x \sqrt{|t|}.\varphi(\sqrt{|t|})\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}.\int_0^x u.\varphi(u)(2u.\mathrm{d}u) = \int_0^x u^2.\varphi(u)\,\mathrm{d}u.$$

Et comme φ est une densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on sait que : $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x u^2.\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ existe car $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2.\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ existe et vaut : $\mathbf{E}(T^2) = \mathbf{V}(T) = 1$.

Ainsi : $\int_0^{+\infty} t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t$ existe et l'on en déduit, en s'appuyant sur la parité de $t \mapsto t.f_{T.W}(t)$, que $\int_{-\infty}^0 t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t$ existe aussi et vaut $-\int_0^{+\infty} t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t$, de sorte que enfin :

$$\boxed{\mathbf{E}(T.W) \text{ existe et vaut : } -\int_0^{+\infty} t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t.f_{T.W}(t)\,\mathrm{d}t = 0}.$$

◇ Indépendance des variables T et W : *cette fois, on peut avoir l'intuition du résultat en considérant les* ***probabilités conditionnelles*** *: il est en effet clair qu'une information sur la valeur prise par T est susceptible de "renseigner" sur la valeur de W.* **Par exemple**, puisque la V.A. W prend à l'issue de l'expérience la même valeur que T ou la valeur opposée, il est immédiat que :

$$\mathbf{P}(-1 \leq W \leq 1 \mid 0 \leq T \leq 1) = 1, \text{ tandis que : } \mathbf{P}(-1 \leq W \leq 1) < 1$$

ce que l'on justifie par exemple, par le fait que :

$$\mathbf{P}(-1 \leq W \leq 1) = 1 - \mathbf{P}\big((-1 \leq W) \cup (W \geq 1)\big)$$
$$= 1 - \underbrace{\left(\int_{+\infty}^{-1} f_W(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f_W(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{>0 \text{ car } f_W \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R} \text{ et continue}} < 1.$$

Ainsi :

$$\mathbf{P}(-1 \leq W \leq 1 \mid 0 \leq T \leq 1) \neq \mathbf{P}(-1 \leq W \leq 1) < 1.$$

On a donc vérifié que : $\boxed{\text{les variables } T \text{ et } W \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

E.N.S.T.I.B. 98 — Étude d'une suite récurrente d'ordre 2 Marche aléatoire sur une droite — Durée 3 h 00

PARTIE I

Soit p un nombre réel différent de $1/2$ ($p \neq 1/2$). On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant pour tout $n \geq 0$

$$(R) \qquad pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$$

1.– Démontrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas vide (on pourra exhiber une suite particulière très simple).

2.– Soient $(u'_n)_{n\geq 0}$ et $(u''_n)_{n\geq 0}$ deux suites de $\mathcal{U}$ et λ' et λ'' deux réels et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = \lambda' u'_n + \lambda'' u''_n \, .$$

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\mathcal{U}$.

b) En déduire que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel.

3.–

a) Démontrer que toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{U}$ est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et de u_1. (Raisonnement par récurrence).

b) Soient les deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{U}$ déterminées par

$$\begin{array}{lcl} v_0 = 1 & & w_0 = 0 \\ v_1 = 0 & & w_1 = 1 \end{array}$$

Démontrer que ces deux suites forment une base de $\mathcal{U}$ et que l'espace $\mathcal{U}$ est de dimension 2.

4.–

a) Déterminer des suites non nulles de $\mathcal{U}$ de la forme :

$$u_n = \lambda^n \qquad \forall n \geq 0$$

En déduire une nouvelle base de $\mathcal{U}$. Exprimer toute suite de $\mathcal{U}$ en fonction de cette base.

b) Soit N un entier strictement positif. Déterminer les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ de l'espace $\mathcal{U}$ telles que

$$\begin{array}{lcl} p_0 = 0 & & q_0 = 1 \\ p_N = 1 & & q_N = 0 \end{array}$$

5.– Dans cette question, on suppose que $p = 1/2$. Vérifier que les deux suites définies ci-dessous appartiennent à $\mathcal{U}$:

$$v_n = 1 \quad \forall n \geq 0 \qquad w_n = n \quad n \geq 0.$$

En déduire les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ définies dans la question **4.**–b) mais pour $p = 1/2$.