Les épreuves corrigées des grandes écoles scientifiques

problèmes corrigés de MATHÉMATIQUES

posés aux concours de Agro-Véto, BCPST

Écoles Normales Supérieures, INA-ENSA, ENV, ENSG Nancy, ENSTIB, Archimède

solutions proposées par

Luc BAILLE

Agrégé de mathématiques
Ancien élève de l'École des Mines

ellipses

MARKETING - ÉDITEUR DES CLASSES PRÉPARATOIRES

ISBN 2-7298-0445-5

www.editions-ellipses.com

AVERTISSEMENT

Vous en rêviez, nous l'avons fait. Vous voici en possession des Annales corrigées de l'intégralité des sujets posés en 97, 98 et 99, aux concours des classes préparatoires Agro (BCPST) et Véto.

Ce sont là 22 corrigés qui vont vous permettre d'aborder l'intégralité des nouveaux programmes sortis en 96. Au cas où vous en douteriez : **il y a** des questions de Géométrie !

La plupart des problèmes sont des classiques (vous n'échappez pas par exemple à une démonstration de la formule de Stirling !), et sur ces trois années vous avez une bonne couverture des types de sujets qui *peuvent* tomber et de toutes les méthodes et raisonnements usuels dont la maîtrise est nécessaire pour être serein le jour J. Dans cette idée et pour faciliter votre travail d'assimilation, on s'est efforcé d'indiquer systématiquement, dans les corrigés, ces méthodes et raisonnements clefs, là où il faut les mettre en œuvre.

Signalons aussi, pour que l'esprit de cet ouvrage soit bien compris, que l'on a voulu rédiger des corrections complètes, avec le souci de ne laisser dans l'ombre aucun point de rigueur, car c'est bien souvent sur cette *rigueur mathématique* que les candidats peuvent se mettre en valeur et se distinguer en ne rédigeant pas à l'*à-peu-près* les questions qu'ils ont comprises. Cette rigueur dont il est question, consiste pour l'essentiel en le rappel systématique des théorèmes utilisés, la vérification, systématique aussi, de leurs hypothèses sur l'exemple, et enfin en votre soin à ne négliger aucun cas particulier dans la résolution d'une question.

Enfin, vous trouverez, aussi souvent que nécessaire, c'est-à-dire à chaque fois que les questions ne s'enchaînent pas naturellement, un rappel des résultats précédemment démontrés qu'il est utile de garder à l'esprit, ou une indication, placée avant la correction, vous permettant de reprendre vos recherches au lieu de vous jeter sur la réponse (ce qui est, vous le savez, *fortement* déconseillé !).

Voilà, c'est maintenant à vous de vous approprier ce livre, stylo en main, et à nous d'espérer qu'il soit le compagnon de votre réussite.

L'Auteur.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE THÉMATIQUE

Écoles Normales Supérieures 99 — Modélisation de la propagation d'une épidémie — Durée 4 h 00

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Rappels et Notations

Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, le symbôle de Kronecker $\delta_{k,l}$ est défini par $\delta_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $\delta_{k,l} = 1$ si $k = l$.

Pour des entiers $1 \leq k \leq l$, on pose $l_{[k]} = l(l-1)\ldots(l-k+1)$. Par convention, $l_{[0]} = 1$.

$Card(\mathcal{F})$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{P}_k(\mathcal{F})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$ à k éléments ($1 \leq k \leq Card(\mathcal{F})$).

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[x]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes d'indéterminée x, de degré inférieur ou égal à k, à cœfficients réels.

Si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, on dit que les termes a_i et b_i sont équivalents, et l'on écrit $a_i \sim b_i$, s'il existe une suite réelle $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $a_i = b_i[1 + \varepsilon_i]$ et $\lim\limits_{i\to+\infty} \varepsilon_i = 0$.

La notation $E(.)$ désigne l'espérance mathématique.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, et $Z, Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace de probabilité (Ω, A, P), telles que $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots N\}$ et tout $\omega \in \Omega$ $Z_i(\omega) = 0$ ou 1. Pour tout $r \in \{1, 2, \ldots N\}$, on définit le moment binomial d'ordre r de Z en posant :

$$\sigma_r(Z) = \sum E(Z_{i_1} Z_{i_2} \ldots Z_{i_r})$$

où la sommation est effectuée sur tous les r-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N$. Par convention, $\sigma_0(Z) = 1$. On dispose alors des inégalités de Bonferroni (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Z) \leq P(Z = k) \leq \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Z)$$

pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $l \geq 1$ et $k + 2l \leq N$.

On rappelle enfin le lemme de Gronwall (qu'on ne demande pas de démontrer) : Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et deux fonctions continues f et g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que : $(\forall t \geq t_0)\ f(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Alors : $(\forall t \geq t_0)\ f(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(x)\mathrm{d}x\right)$.

PRÉLIMINAIRE

Il est vivement conseillé de consacrer le temps nécessaire à une bonne compréhension des phénomènes et des concepts mathématiques utilisés pour les décrire.

Ce problème est motivé par l'étude de modèles mathématiques de la propagation d'une épidémie. L'épidémie progresse par contacts entre individus sensibles et individus infectés. La maladie est bénigne et se solde par le rétablissement et l'immunisation permanente de chaque personne contaminée. On notera toujours N l'effectif total de la population, et m et n les nombres d'individus respectivement infectés et sensibles à l'instant initial, lorsque l'épidémie se déclare (on a donc $N = m + n$). L'objet spécifique du problème est l'étude de l'étendue de l'épidémie, c'est-à-dire le nombre d'individus initialement sensibles qui, à un moment ou à un autre, contractent la maladie.

Pour représenter les contacts possibles entre individus, la population est schématisée par un <u>graphe</u> dont chaque <u>sommet</u> est occupé par un individu. Par définition, un <u>graphe non orienté</u> (respectivement, <u>orienté</u>) est un couple $(\mathcal{V}, \zeta)$ (resp. $(\mathcal{V}, \vec{\zeta})$) où $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ est un ensemble fini, et ζ (resp. $\vec{\zeta}$) est une partie de l'ensemble des paires $\{v_i, v_j\}$ (resp. des couples (v_i, v_j)) d'éléments <u>distincts</u> de $\mathcal{V}$. On appelle <u>sommets</u> les éléments de $\mathcal{V}$, et <u>arêtes</u> les éléments de ζ (resp. $\vec{\zeta}$). Un sommet est <u>isolé</u> s'il n'appartient à aucune arête. L'<u>ordre</u> d'un graphe (orienté ou non) est le nombre de ses sommets ; sa <u>taille</u> est le nombre de ses arêtes.

Si le graphe est non orienté, on dit que deux individus quelconques sont <u>en contact</u> s'ils occupent les sommets d'une même arête. Un individu infecté peut contaminer tous les individus sensibles avec lesquels il est en contact. Si le graphe est orienté, la contamination n'est possible que dans le sens des arêtes (de v_i infecté vers v_j sensible).

La PARTIE I est une étude probabiliste de l'ensemble des graphes sans sommet isolé (qui correspondent à certaines populations où l'étendue de l'épidémie peut-être égale à n). Dans la PARTIE II, on étudie les propriétés élémentaires d'une famille de polynômes, dont la PARTIE III utilise les propriétés pour calculer la loi de probabilité de l'étendue d'une épidémie. Dans la PARTIE IV, on décrit la propagation d'une épidémie au cours du temps et on recalcule son étendue grâce à l'étude de fonctions réelles à variable réelle vérifiant certaines équations différentielles. Les PARTIES I, II et IV peuvent être traitées chacune indépendamment du reste du problème. La PARTIE III utilise les résultats de la PARTIE II.

PARTIE I

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{V}_N$ un ensemble à N éléments, et $p_N \in]0,1[$. On pose $q_N = 1 - p_N$.

On considère l'espace de probabilité (Ω_N, A_N, P_N) constitué des graphes non orientés construits sur $\mathcal{V}_N$ dont les arêtes sont choisies indépendamment avec probabilité p_N. Autrement dit, on détermine les arêtes d'un graphe de Ω_N en considérant tour à tour toutes les C_N^2 paires de sommets ; pour chacune de ces paires, on effectue un tirage à pile ou face ; une paire devient une arête avec probabilité p_N selon l'issue du tirage. Si $G \in \Omega_N$ possède h arêtes, on a : $P_N(G) = p_N^h q_N^{C_N^2 - h}$.

Soit Γ_N l'ensemble des graphes de Ω_N qui ne possèdent aucun sommet isolé. On dit alors que $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(z, N) \mapsto \Phi(z, N)$ est une fonction-seuil s'il existe $\tilde{z} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, si $p_N \sim \Phi(z, N)$ quand $N \to \infty$, alors

$$\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = 1 \text{ si } z > \tilde{z},$$
$$\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = 0 \text{ si } 0 < z < \tilde{z}.$$

Le but de cette partie est de construire une telle fonction-seuil et d'examiner le cas critique $z = \tilde{z}$ correspondant.

Pour $i = 1, 2, \ldots, N$, on note X_i la variable aléatoire définie sur Ω_N par $X_i(G) = 1$ si le i-ème sommet du graphe $G \in \Omega_N$ est isolé, et $X_i(G) = 0$ sinon. On pose $Y_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

I.1.a. Quelle est la loi de chacune des variables aléatoires X_i ? Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

I.1.b. Calculer $E(Y_N)$.

I.1.c. Montrer que le moment binomial d'ordre $r \geq 2$ de Y_N est donné par :

$$\sigma_r(Y_N) = C_N^r q_N^{r(N-r)+C_r^2}.$$

I.1.d. Montrer que si $\lim_{N\to\infty} p_N = 0$, alors, quand $N \to \infty$:

$$\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2} \sim 1 + \frac{1}{E(Y_N)}.$$

I.2. Dans toute la suite de cette PARTIE I, on suppose que la propabilité p_N vérifie : $\lim_{N\to\infty} N p_N^2 = 0$.

I.2.a. Montrer : $E(Y_N) \sim N e^{-N p_N}$ quand $N \to \infty$.

I.2.b. Montrer que si $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = +\infty$, alors $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 0$ (utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

I.2.c. En déduire une fonction-seuil Φ.

I.3.a. Soit $\zeta \in \mathbb{R}$. Construire un exemple de suite de réels $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ telle que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i) $\lim_{N\to+\infty} z_N = 1$,

(ii) si $p_N = z_N N^{-1}\ln N$, alors $\lim_{N\to+\infty} E(Y_N) = e^{-\zeta}$.

I.3.b. On suppose que $p_N = z_N N^{-1}\ln N$ où $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est la suite ainsi construite. en utilisant les inégalités de Bonferroni (cf. RAPPELS ET NOTATIONS), calculer $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k)$ en fonction de k et de ζ.

PARTIE II

Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On associe à $\mathcal{U}$ la suite de polynômes $Q_0(x;\mathcal{U})$, $Q_1(x;\mathcal{U})$, ..., d'indéterminée x, définie par récurrence comme suit :

$$Q_0(x;\mathcal{U}) = 1$$

$$Q_k(x;\mathcal{U}) = \frac{x^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{{u_i}^{k-i}}{(k-i)!} Q_i(x;\mathcal{U}), \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Pour tout k et r dans $\mathbb{N}$, on note $Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})$ le polynôme dérivé d'ordre r de $Q_k(x;\mathcal{U})$.

II.1. Quel est le degré de $Q_k(x;\mathcal{U})$? En raisonnant par récurrence sur k, montrer :

$$(\forall (k,r) \in \mathbb{N}^2)\ Q_k^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \delta_{k,r}.$$

Réciproquement, montrer que cette propriété caractérise la suite des polynômes $Q_k(x;\mathcal{U})$, $k \in \mathbb{N}$; c'est-à-dire : si une suite de polynômes $R_k(x)$ d'indéterminée x et de degré k, $k \in \mathbb{N}$, vérifie : $(\forall (k,r) \in \mathbb{N}^2)$ $R_k^{(r)}(u_r) = \delta_{k,r}$, alors : $(\forall k \in \mathbb{N})\ R_k(x) = Q_k(x;U)$.

II.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout polynôme $R_k(x)$ d'indéterminée x et de degré k, on a :

$$R_k(x) = \sum_{i=0}^{k} R_k^{(i)}(u_i) Q_i(x;\mathcal{U})$$

II.3. Soient k et $r \in \mathbb{N}$. on note $\nu_r(\mathcal{U})$ la suite $(u_{r+i})_{i\in\mathbb{N}}$. En utilisant les questions II.2 et II.1, montrer qu'on a, pour tout $0 \leq r \leq k$:

$$Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U}) = Q_{k-r}(x;\nu_r(\mathcal{U})).$$

II.4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$. On note $a\mathcal{U} + b$ la suite $(au_i + b)_{i\in\mathbb{N}}$. En utilisant les questions II.2 et II.1, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$Q_k(ax + b; a\mathcal{U} + b) = a^k Q_k(x;\mathcal{U}).$$

II.5.a. Donner une expression explicite de $Q_k(x;\mathcal{U})$ dans le cas où $\mathcal{U}$ est une suite constante, c'est-à-dire :

$(\exists u \in \mathbb{R})\ (\forall i \in \mathbb{N})\ u_i = u.$

II.5.b. Soit $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que la suite $\mathcal{U}$ est donnée par : $(\forall i \in \mathbb{N})$ $u_i = ci + d$. Montrer qu'alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$Q_k(x;\mathcal{U}) = (x-u_0)\frac{(x-u_k)^{k-1}}{k!}.$$

PARTIE III

Soient n et $m \in \mathbb{N}$ qui désignent, on le rappelle, les nombres d'individus sensibles et infectés présents initialement dans une population d'effectif $N \in \mathbb{N}^*$. On a donc $N = n + m$. Soient $\mathcal{V}$ un ensemble à N éléments, $\mathcal{I}_0$ un élément de $\mathcal{P}_m(\mathcal{V})$, et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère l'espace de probabilité (Ω, A, P) constitué des graphes orientés construits sur $\mathcal{V}$ de la manière suivante. Étant donné un sommet v_i $(1 \leq i \leq N)$, l'existence d'une arête de v_i vers v_j $(1 \leq j \leq N, j \neq i)$ est déterminée par un tirage à pile ou face de probabilité p ; on réalise un tel tirage indépendamment pour chacun des $N-1$ sommets v_j ; les sommets v_j ainsi connectés à v_i par une arête orientée forment un ensemble noté $\mathcal{L}_i$. La construction du graphe est achevée lorsque les ensembles $\mathcal{L}_i$ ont été déterminés indépendamment pour chaque sommet v_i.

Étant donné un graphe de Ω défini par $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_N$, on construit deux suites d'ensembles, notées $(\mathcal{I}_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$et $(\mathcal{S}_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}}$, de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{V} \setminus \mathcal{I}_0,$$

$$\mathcal{I}_{\tau+1} = \left(\bigcup_{v_i\in\mathcal{I}_\tau} \mathcal{L}_i\right) \cap \mathcal{S}_\tau,$$

$$\mathcal{S}_{\tau+1} = \mathcal{S}_\tau \setminus \mathcal{I}_{\tau+1}.$$

Pour $\tau \in \mathbb{N}$, on définit les variables aléatoires $I_\tau = Card(\mathcal{I}_\tau)$ et $S_\tau = Card(\mathcal{S}_\tau)$. On a donc $I_0 = m$ et $S_0 = n$.

Chaque valeur de τ définit une <u>génération</u> de l'épidémie. On modélise ainsi la propagation de l'épidémie de génération en génération, $\mathcal{I}_\tau$ et $\mathcal{S}_\tau$ désignant les groupes d'individus respectivement infectés et sensibles présents dans la population à la génération τ.

III.1.a. Établir la loi de S_1.

III.1.b. Vérifier la relation :

$$\sum_{j=k}^{n} C_j^k P(S_1 = j \mid n,m) = C_n^k q^{km}$$

pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. La notation $|n,m$ rappelle simplement que $I_0 = m$ et $S_0 = n$.

III.1.c. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose : $\phi_k(n, m) = n_{[k]} q^{k(n+m-k)}$. Établir :

$$\phi_k(n, m) = \sum_{j=k}^{n} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j \mid n, m)$$

pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

III.2. Soit $T = \inf\{\tau \in \mathbb{N} \mid I_\tau = 0\}$. Montrer que la probabilité que T soit fini est égale à 1.

III.3. On admettra que S_T définit une variable aléatoire sur Ω. Par définition, l'étendue de l'épidémie et égale à $n - S_T$. On note φ la fonction génératrice de S_T, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x|n, m) = E(x^{S_T}|n, m)$ (ici encore, la notation $|n, m$ n'est utilisée que pour rappeler que $I_0 = m$ et $S_0 = n$). Si $\mathcal{U} = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, on note $Q_k(x; \mathcal{U})$, $k \in \mathbb{N}$, la suite de polynômes associée à $\mathcal{U}$ et définie dans la PARTIE II.

III.3.a. Montrer que $\varphi(x|n, m)$ est un polynôme d'indéterminée x. Calculer $\varphi(x|0, m)$ et $\varphi(x|n, 0)$.

III.3.b. Établir la relation :

$$\varphi(x|n, m) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x|j, n-j) P(S_1 = j|n, m).$$

III.3.c. On note $\mathcal{U}^{(q)}$ la suite de terme général $u_i^{(q)} = q^i$, $i \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a :

$$\varphi(x|n, m) = \sum_{k=0}^{n} n_{[k]} q^{k(n+m-k)} Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right).$$

III.3.d. En utilisant les résultats des questions II.3 et II.4, montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$P(n - S_T = k) = n_{[k]} q^{(n-k)(m+k)} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$$

et pour tout $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$E(S_{T,[r]}) = \sum_{j=r}^{n} n_{[j]} q^{j(n+m-j)} Q_{j-r}\left(1; \nu_r\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$$

(N.B.: La notation $S_{T,[r]}$ désigne le produit $S_T(S_T - 1)(\ldots(S_T - r + 1).)$

III.4. On suppose dans cette seule question III.4 que q dépend de n, ce que l'on indique en substituant à q la notation q_n. Plus précisément, on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q_n = \exp(-\lambda/n)$.

III.4.a. Soit W la suite de terme général $w_i = -\lambda i$, $i \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Montrer qu'on a :

$$\lim_{n \to \infty} n_{[k]} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = Q_k\left(0; \nu_m\left(W\right)\right)$$

(utiliser la question II.4).

III.4.b. En déduire que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} P(n - S_T = k) = m(m+k)^{k-1} \exp\left[-\lambda(m+k)\right] \frac{\lambda^k}{k!}$$

(utiliser la question II.5.b.).

III.5. On suppose dans cette seule question III.5 que q dépend de m, ce que l'on indique en substituant à q la notation q_m. Plus précisément, on suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q_n = \exp(-\mu/m)$. Soit $\theta = 1 - \exp(-\mu)$. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on a :

$$\lim_{m\to\infty} P(n - S_T = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}.$$

PARTIE IV

On considère une population d'effectif $N \in \mathbb{N}^*$, associée à un graphe non orienté $(\mathcal{V}, \zeta)$. On rappelle qu'initialement, m sommets du graphe sont occupés par des individus infectés, et les n autres sommets, par des individus sensibles. À tout instant $t \in \mathbb{R}_+$, on décrit la population par le nombre $n(t)$ de sommets occupés par des individus sensibles ; le nombre $m(t)$ de sommets occupés par des individus infectés ; le nombre $h_{SS}(t)$ de couples (v_i, v_j) tels que v_i et v_j définissent les sommets d'une arête occupés par des individus sensibles ; et le nombre $h_{SI}(t)$ de couples (v_i, v_j) tels que v_i et v_j définissent les sommets d'une arête où v_i est occupé par un individu sensible et v_j, par un individu infecté. On fait l'hypothèse qu'un individu sensible en contact avec un individu infecté a une probabilité $\beta > 0$ par unité de temps d'être à son tour infecté. On pose $S(t) = N^{-1}n(t)$, $I(t) = N^{-1}m(t)$, $[SS](t) = N^{-1}h_{SS}(t)$ et $[SI](t) = N^{-1}h_{SI}(t)$. On suppose que si N augmente, m augmente aussi, mais de telle sorte que le rapport $m/N = I(0)$ tende vers une limite $\bar{I} \in]0,1[$ quand $N \to \infty$. Pour N suffisamment grand, un modèle de la propagation de l'épidémie est alors donné par le système (1) d'équations différentielles (qu'on ne demande pas de justifier) :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta[SI] \\[2mm] \dfrac{dI}{dt} = \beta[SI] - I \\[2mm] \dfrac{d[SS]}{dt} = -2\beta\dfrac{[SS][SI]}{S} \\[2mm] \dfrac{d[SI]}{dt} = \beta\left(\dfrac{[SS][SI]}{S} - \dfrac{[SI]^2}{S} - [SI]\right) - [SI] \end{cases}$$

avec les conditions initiales (C1) : $S(0) = 1 - \bar{I}$, $I(0) = \bar{I}$, $[SS](0) = \gamma(1-\bar{I})^2$ et $[SI](0) = \gamma\bar{I}(1-\bar{I})$ où $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

IV.1. On admet que le système (1) possède une et une seule solution satisfaisant aux conditions initiales (C1) et définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On note $(S, I, [SS], [SI])$ cette solution et on admet que $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$ $S(t) > 0$ et qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(\forall t \in [0, t_1])$ $S(t) \geq \kappa$ et $I(t) \geq \kappa$.

IV.1.a. Montrer qu'on a :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+)\ [SS](t) = \gamma S(t)^2.$$

IV.1.b. En posant $\hat{I}(t) = [SI](t)/S(t)$, montrer que le triplet $(S, I, \hat{I})$ vérifie le système (2) suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S\hat{I} \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S\hat{I} - I \\ \dfrac{d\hat{I}}{dt} = (\gamma\beta S - \beta - 1)\hat{I} \end{cases}$$

IV.2. On admet que le système (2) possède $(S, I, \hat{I})$ comme unique solution satisfaisant aux conditions initiales (C2) : $S(0) = 1 - \bar{I}$, $I(0) = \bar{I}$ et $\hat{I}(0) = \gamma\bar{I}$ et définie sur tout $\mathbb{R}_+$.

IV.2.a. Montrer qu'il existe c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on déterminera en fonction de β et $\bar{I}$, tels que :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)\ c_1 \ln\left[c_2 S(t)\right] = -\gamma\left[1 - S(t)\right] + \hat{I}(t).$$

IV.2.b. Montrer que la limite de $S(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$ existe et est finie. On la note S_∞ et on définit ici l'étendue de l'épidémie comme étant égale à $1 - S_\infty$. Établir une équation reliant l'étendue de l'épidémie aux paramètres γ, β et $\bar{I}$ (on ne demande pas de résoudre cette équation).

IV.2.c. Montrer :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+)\ \hat{I}(t) \sim \gamma I(t)$$

quand $\gamma \longrightarrow +\infty$ et $\beta \longrightarrow 0$ de telle sorte que le produit $\gamma\beta$ reste constant. On admettra pour cela qu'il existe une constante réelle $C > 0$, indépendante de γ, telle que : $(\forall t \in [0, t_1])\ \hat{I}(t) \leq C\gamma$, et on appliquera le lemme de Gronwall à la fonction $\hat{I} - \gamma I$ (cf. RAPPELS ET NOTATIONS).

IV.3. On peut démontrer (mais il n'est pas demandé de le faire ici) que le système (3) suivant :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \gamma\beta SI - I \end{cases}$$

possède une unique solution satisfaisant aux conditions initiales (C3) : $S(0) = 1 - \bar{I}$ et $I(0) = \bar{I}$, et définie sur tout $\mathbb{R}_+$; et que cette solution est « peu différente » de l'unique solution du système (2) satisfaisant aux conditions initiales (C2) et définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On suppose à présent que le groupe d'individus sensibles est réalimenté par immigration. Le système (3) est modifié pour tenir compte de cette nouvelle hypothèse, et devient (4) :

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\gamma\beta SI + \Delta \\ \dfrac{dI}{dt} = \gamma\beta SI - I \end{cases}$$

avec $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et les mêmes conditions initiales (C3).

IV.3.a. Quelles relations doivent vérifier γ, β, Δ et $\bar{I}$ pour que le système (4) admette une solution constante $(S^*, I^*) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$?

IV.3.b. On suppose que les relations trouvées à la question précédente sont satisfaites. On choisit à présent comme conditions initiales (C4) : $S(0) = (1+\varepsilon_0)S^*$ et $I(0) = (1+\eta_0)I^*$ où $\varepsilon_0 \in \left]-1,1\right[$ et $\eta_0 \in \left]-1,1\right[$. Soit (S, I) la solution (dont on admet l'existence et l'unicité) de (4) satisfaisant aux conditions initiales (C4) et définie sur tout $\mathbb{R}_+$. On définit les fonctions ε et η de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $S(t) = [1+\varepsilon(t)]S^*$ et $I(t) = [1+\eta(t)]I^*$. Écrire le système d'équations différentielles (5) que doivent vérifier les fonctions ε et η.

IV.3.c. Une approximation linéaire du système (5) est donnée par (6) :

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma\beta\Delta(\varepsilon+\eta) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \varepsilon \end{cases}$$

Déduire de (6) une équation différentielle linéaire du second ordre que doit vérifier la fonction ε. Résoudre cette équation différentielle avec la condition initiale $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. Que suggère l'étude de la solution quant au comportement asymptotique de $S(t)$ et $I(t)$?

IV.4. Soit $(\varepsilon_0, \eta_0) \in \left]-1,+1\right[^2$. On admet que le système (5) possède une et une seule solution (ε, η) satisfaisant aux conditions initiales $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\eta(0) = \eta_0$ et définie sur tout $\mathbb{R}_+$.

IV.4.a. On considère la fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$V(x,y) = [1+x-\ln(1+x)] + \gamma\beta\Delta[1+y-\ln(1+y)].$$

Montrer qu'on a :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+) \ \frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t)) \leq 0.$$

En déduire que $V(\varepsilon(t), \eta(t))$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$, et déterminer cette limite.

IV.4.b. Soit c un réel supérieur ou égal à $1+\gamma\beta\Delta$. Étudier la courbe définie dans le plan affine $(O; x, y)$ par $V(x,y) = c$.

IV.4.c. Montrer qu'on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \eta(t) = 0$. Conclure en prouvant que quelles que soient les conditions initiales (C4), la solution (S, I) du système (4) vérifie : $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = S^*$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = I^*$. (L'étendue de l'épidémie vaut donc $1 - S^*$ indépendamment des valeurs de ε_0 et de η_0.)

Corrigé

.PARTIE I.

Remarque préliminaire : Dans cette partie, la probabilité d'un événement est notée $P_N(\dots)$, et non $P(\dots)$ comme on le fait usuellement. On peut considérer cette notation comme le rappel de ce que les probabilités calculées dépendent de N. Si l'on veut préciser, elles dépendent de N en ce que la probabilité d'un résultat élémentaire (ici la probabilité d'obtention d'un graphe donné $G \in \Omega_N$) dépend non seulement du graphe G considéré, (par le nombre de ses arêtes, h), mais aussi de N, comme on le constate sur la formule $P_N(G) = p_N^h . {q_N}^{C_N^2 - h}$.
Ceci étant P_N est une fonction de probabilité comme une autre et la notation ne change rien aux calculs et aux raisonnements ; pour le reste, disons seulement que vous constaterez que toutes les probabilités calculées dépendent de N.

Comme il se doit, on adoptera cette notation dans la correction mais cela ne doit pas vous troubler .

I.1.a. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, par définition, X_i vaut 1 si et seulement si, à l'issue des C_N^2 tirages déterminant quelles sont les paires de sommets reliés, le sommet i n'est lié à aucun des $N-1$ autres sommets.
Ainsi, X_i prend la valeur 1 si et seulement si les $N-1$ tirages relatifs aux paires $\{i, 1\}$, $\{i, 2\}, \dots, \{i, i-1\}, \{i, i+1\}, \dots, \{i, N\}$, amènent à ne pas relier ces sommets, l'issue des autres tirages n'important pas.
En notant "i" pour désigner le sommet numéroté i, on a donc :

$$P_N(X_i = 1) = P_N(\text{“}i \text{ non relié à } 1\text{”} \cap \dots$$
$$\dots \text{“}i \text{ non relié à } i-1\text{”} \cap \text{“}i \text{ non relié à } i+1\text{”} \dots \cap \text{“}i \text{ non relié à } N\text{”})$$

Ces $N-1$ événements sont indépendants, car les $N-1$ tirages correspondants sont indépendants, et pour une paire de sommets donnée, le tirage aboutit à relier ces sommets avec une probabilité p_N (donc à ne pas les relier avec une probabilité $q_N = 1 - p_N$), par conséquent :

$$P_N(X_i = 1) = \underbrace{q_N \dots q_N}_{N-1 \text{ fois}} = q_N^{N-1} = (1 - p_N)^{N-1}$$

Comme les variables X_i ne prennent que la valeur 0 ou la valeur 1, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \{1, 2, \dots, N\},\ X_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre : } p = q_N^{N-1} = (1 - p_N)^{N-1}}.$$

◇ Indépendance des variables X_i : (*utiliser un contre-exemple*)

Les variables X_i ($1 \le i \le N$), ne sont pas indépendantes, en effet, si, par exemple, on sait que tous les sommets portant les numéros 1 à $N-1$ sont isolés, alors le sommet numéroté N est isolé avec une probabilité 1 (événement certain). En revanche, en l'absence de toute information, le sommet N est isolé, comme on l'a établi ci-dessus, avec la probabilité $P(X_N = 1) = q_N^{N-1} \neq 1$ (en rappelant que $p_N \in]0, 1[$, donc que $q_N < 1$). Ainsi :

$$P(X_N = 1 \mid (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \dots \cap (X_{N-1} = 1)) \neq P(X_N = 1).$$

Or si les variables X_i $(1 \leq i \leq N)$ étaient indépendantes, l'inégalité ci-dessus serait une égalité, donc, par un contre-exemple, on a montré que :

$$\boxed{\text{les variables } \{X_i\}_{1 \leq i \leq N} \text{ ne sont pas indépendantes}}.$$

I.1.b. *Il ne faut surtout pas céder à la tentation de penser que Y_N suit une loi binomiale et vouloir calculer $E(Y_N)$ avec la formule de l'espérance pour cette loi. Y_N est la somme de N variables de Bernoulli, mais celles-ci ne sont pas indépendantes !* (la remarque vaut aussi pour la question **I.1.d.**).

◇ L'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre p est égale à p. Donc, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $E(X_i) = q_N^{N-1}$. Puisque $Y_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, par linéarité de l'espérance :

$$\boxed{E(Y_N) = \sum_{i=1}^N E(X_i) = N.q_N^{N-1}}.$$

I.1.c. D'après les **RAPPELS**, pour $r \in \{2, \ldots, N\}$, le moment binomial d'ordre r de Y_N est égal à :

$$\textbf{(1)} \quad \sigma_r(Y_N) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N} E(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r}).$$

◇ Valeur de $E(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r})$, pour $(i_1, \ldots, i_r)$ tel que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N$:

Les variables X_{i_1}, $X_{i_2}, \ldots X_{i_r}$, ne prennent que les valeurs 0 et 1, donc leur produit également ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. La variable $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r}$, elle aussi, est donc une V.A. de Bernoulli, et par conséquent :

$$E(X_{i_1} X_{i_2}, \ldots X_{i_r}) = P(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r} = 1).$$

De plus, la variable-produit $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r}$ prend la valeur 1 si et seulement si toutes les variables X_{i_1}, $X_{i_2}, \ldots X_{i_r}$ prennent la valeur 1.
Donc, on a encore :

$$E(X_{i_1} X_{i_2}, \ldots X_{i_r}) = P((X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1)),$$

Il s'agit donc de calculer la probabilité $P((X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1))$, pour tout r-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ tel que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N$. On en tirera la valeur de $\sigma_r(Y_N)$ par (1).

◇ Probabilité de l'événement $(X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1)$:

La réalisation de l'événement $(X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1)$ signifie que tous les sommets de la famille $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ sont isolés, donc cet événement est réalisé si et seulement si, à l'issue des C_N^2 tirages déterminant quelles sont les paires de sommets reliés, ***ni*** les paires formées avec deux sommets de la famille $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ (parlons de paires de ***type 1***), ***ni*** les paires formées d'un sommet numéroté i_1, $i_2, \ldots$, ou i_r et d'un sommet portant un numéro n'appartenant pas à la famille $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ (paires de ***type 2***), ne deviennent des arêtes. Ce qu'il advient des autres paires n'importe pas.

On peut donc écrire :

$$P((X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1)) = P\Big(\bigcap_{\substack{\text{paires } \{i,j\} \text{ de} \\ \text{type 1 ou 2}}} (\text{“}i \text{ non relié à } j\text{”})\Big),$$

et comme chaque tirage déterminant le devenir d'une paire est indépendant des autres, «la probabilité de l'intersection est égale au produit des probabilités» :

$$P((X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1)) = \prod_{\substack{\text{paires } \{i,j\} \text{ de} \\ \text{type 1 ou 2}}} P(\text{“}i \text{ non relié à } j\text{”}).$$

Sachant que l'on s'intéresse aux r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N$, donc à des r-uplets constitués d'entiers distincts :

- Il y a C_r^2 paires de *type 1* (c'est le nombre de parties à deux éléments de l'ensemble à r éléments $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, ou nombre de façon de choisir deux sommets parmi les r sommets numérotés $i_1, i_2, \ldots, i_r$).
- Avec chaque sommet portant un numéro de la famille $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, on peut former $N - r$ paires de *type 2*, (une avec chacun des $N - r$ sommets portant un numéro j, $j \in [\![1, N]\!] \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$) Or, les paires ainsi définies sont toutes distinctes et il y a r sommets portant un numéro de la famille $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, donc, au total, il y a $r(N - r)$ paires de *type 2*.

Ainsi, les types 1 et 2 étant incompatibles, la probabilité cherchée est le produit de $C_r^2 + r(N - r)$ probabilités $P\,(\text{"}i \text{ non relié à } j\text{"})$, toutes égales à q_N.
Par conséquent : $$P\big((X_{i_1} = 1) \cap (X_{i_2} = 1) \cap \ldots \cap (X_{i_r} = 1)\big) = q_N^{C_r^2 + r(N-r)}.$$

$\diamondsuit$ On constate donc que pour tout les r-uplets considérés, la valeur de $E(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r})$ est la même, à savoir : $$E(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r}) = q_N^{C_r^2 + r(N-r)}.$$

Il s'ensuit que $\sigma_r(Y_N) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N} E(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_r})$ est une somme de termes tous égaux, en nombre égal au nombre de r-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ tels que :
$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq N.$$
Or, il y a autant de tels r-uplets que de parties à r éléments $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ (car il n'y a qu'une seule façon d'ordonner un ensemble de r entiers distincts).
Puisqu'il y a C_N^r parties à r éléments d'un ensemble à N éléments, il y a donc C_N^r termes dans la somme définissant $\sigma_r(Y_N)$.
On peut conclure :
$$\boxed{\sigma_r(Y_N) = C_N^r . q_N^{C_r^2 + r(N-r)}}.$$

I.1.d. *Encore une fois (!), Y_N n'est pas une somme de V.A. indépendantes, donc on ne cherchera pas à appliquer une formule sur la variance pour accéder à $E(Y_N^2)$.*
La seule ressource est le calcul direct.
$$Y_N^2 = (X_1 + X_2 + \ldots + X_N)^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + 2. \sum_{1 \leq i < j \leq N} X_i X_j \quad \left(\begin{array}{c}\textit{formule à connaître ou à} \\ \textit{retrouver par récurrence}\end{array}\right).$$
Il en découle, par linéarité de l'espérance :
$$E(Y_N^2) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i^2) + 2. \sum_{1 \leq i < j \leq N} E(X_i X_j).$$
Ou, avec les notations de l'énoncé :
$$E(Y_N^2) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i^2) + 2.\sigma_2(Y_N).$$
Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, X_i prenant uniquement les valeurs 0 ou 1 : $X_i^2 = X_i$ (*comme pour toute variable de Bernoulli*), et donc : $E(X_i^2) = P(X_i = 1) = q_N^{N-1}$.
D'autre part, par la formule établie au **I.1.c.** appliquée pour $r = 2$:
$$\sigma_2(Y_N) = C_N^2 . q_N^{2(N-2) + C_r^2} = \frac{N(N-1)}{2} . q_N^{2(N-2) + \frac{r(r-1)}{2}}.$$

Par conséquent :

$$E(Y_N^2)=\sum_{i=1}^{N}E(X_i^2)+2.\sigma_2(Y_N)=N.q_N^{N-1}+2.\frac{N(N-1)}{2}q_N^{2(N-2)+\frac{r(r-1)}{2}}.$$

◇ Rappelons que $E(Y_N)=N.q_N^{N-1}>0$ et formons le quotient $\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2}&=\frac{1}{N^2q_N^{2(N-1)}}.\left[N.q_N^{N-1}+2.\frac{N(N-1)}{2}q_N^{2(N-2)+\frac{r(r-1)}{2}}\right]\\&=\frac{1}{Nq_N^{(N-1)}}+\frac{N(N-1)}{N^2}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2},\quad\text{(après développement et simplifications).}\end{aligned}$$

L'expression obtenue se prête bien à l'utilisation de la définition de l'équivalence de deux suites (voir les **RAPPELS**)(*).

En effet, **si p_N tend vers 0 quand N tend vers l'infini**, comme il en est fait l'hypothèse, on y reconnaît la somme d'un terme égal à $1/E(Y_N)$ et d'un terme tendant vers 1 lorsque N tend vers $+\infty$ (*ce qui n'est pas suffisant mais encourageant !*).

◇ Poursuivons en mettant ces remarques en évidence :

$$\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2}=\frac{1}{E(Y_N)}+\frac{N^2-N}{N^2}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}=\frac{1}{E(Y_N)}+q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}-\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}$$

où, $\lim_{N\to\infty}q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}=1$, car $q_N\xrightarrow[N\to\infty]{}1$, puisque $\lim_{N\to\infty}p_N=0$ par hypothèse. (en effet, pour tout α réel, $x\mapsto x^\alpha$ est continue et vaut 1 en 1. Ici : $\alpha=\frac{r(r-1)}{2}-2$).

On aboutit à $\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2}=\left(1+\frac{1}{E(Y_N)}\right).[1+\epsilon_N]$, par une dernière réécriture :

$$\begin{aligned}\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2}&=\frac{1}{E(Y_N)}+q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}-\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}\\&=\underline{\underline{1}}+\frac{1}{E(Y_N)}+q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}\underline{\underline{-1}}-\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}\quad\left(\begin{array}{l}\textit{on introduit de}\\ \textit{force } 1 \textit{ et } -1\end{array}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{E(Y_N)}\right).[1+\epsilon_N],\quad\text{en posant } \epsilon_N=\frac{q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}-1-\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}}{1+\frac{1}{E(Y_N)}}.\end{aligned}$$

◇ Reste à vérifier que $\lim_{N\to\infty}\epsilon_N=0$, sachant que $\lim_{N\to\infty}p_N=0$:

- puisque $E(Y_N)>0$ et $q_N>0$ ($q_N=1-p_N$ et $p_N\in]0,1[$), par application de l'inégalité triangulaire :

$$|\epsilon_N|=\frac{\left|q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}-1-\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}\right|}{1+\frac{1}{E(Y_N)}}\le\frac{\left|q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}-1\right|+\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}}{1+\frac{1}{E(Y_N)}}$$

- encore parce que $E(Y_N)>0$, on a aussi : $\frac{1}{E(Y_N)}>0$ et donc $\frac{1}{1+\frac{1}{E(Y_N)}}<1$, d'où :

$$|\epsilon_N|\le\left|q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}-1\right|+\frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2}.$$

(*) le lecteur pourra, s'il préfère, former que le quotient des deux termes généraux et montrer qu'il tend vers 1, ce qui revient au même.

- et comme $\lim_{N\to\infty} q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2} = 1$ (voir plus haut) :

$$\left|q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2} - 1\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}.q_N^{\frac{r(r-1)}{2}-2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Ainsi le majorant de $|\epsilon_N|$ est la somme de deux termes de limite nulle pour N tendant vers l'infini. On a donc fini d'établir que :

$$\frac{E(Y_N^2)}{\left[E(Y_N)\right]^2} = \left(1 + \frac{1}{E(Y_N)}\right).[1+\epsilon_N], \text{ avec } \lim_{N\to\infty}\epsilon_N = 0,$$

et donc :

$$\boxed{\frac{E(Y_N^2)}{\left[E(Y_N)\right]^2} \sim_{N\to\infty} 1 + \frac{1}{E(Y_N)}}.$$

I.2. Pour la fin de la **PARTIE I**, on notera que l'hypothèse $\lim_{N\to\infty} Np_N^2 = 0$ a pour première conséquence que :

$$\lim_{N\to\infty} p_N = 0.$$

(par application du théorème d'encadrement à $0\leq p_N^2 \leq N.p_N^2$, pour $N\geq 1$)

On pourra donc utiliser aussi que :

$$\lim_{N\to\infty} q_N = \lim_{N\to\infty} 1 - p_N = 1.$$

I.2.a. *Dans l'étude de $E(Y_N) = N.q_N^{N-1}$, on a affaire, en q_N^{N-1}, avec une* ***forme indéterminée*** *du type « 1^∞ », car $q_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$ et $N-1 \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$.*
*Dans un tel cas de figure, la méthode est connue et consiste à «**passer à l'exponentielle**», en utilisant que : $q_N^{N_1} = e^{(N-1).\ln q_N}$.*

◇ Pour étudier le comportement de $E(Y_N)$ pour $N\to\infty$, on écrira donc :

$$E(Y_N) = N.q_N^{N-1} = N.e^{(N-1).\ln(q_N)} = N.e^{(N-1).\ln(1-p_N)}.$$

On pourrait donner un équivalent de $(N-1).\ln(1-p_N)$ pour $N\to\infty$, à savoir $N.p_N$, mais ***on ne peut composer un équivalent par la fonction exponentielle****.*
En conséquence, on utilisera un développement limité de $\ln(1-x)$ en 0, plutôt qu'un simple équivalent pour étudier $(N-1).\ln(1-p_N)$, puis $E(Y_N) = N.e^{(N-1).\ln(1-p_N)}$.

- On sait que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1-x)$ est :
  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2.\epsilon(x)$, où $\epsilon(x)$ est une fonction de limite nulle en 0.
- pour $x = p_N$, ce DL donne la réécriture suivante de $(N-1)\ln(1-p_N)$:

$$\begin{aligned}(N-1)\ln(1-p_N) &= (N-1).\left(-p_N - \tfrac{p_N^2}{2} + p_N^2.\epsilon(p_N)\right)\\ &= -N.p_N + p_N + (N-1)p_N^2\left(-\tfrac{1}{2}+\epsilon(p_N)\right)\\ &= -N.p_N + p_N + Np_N^2.\tfrac{(N-1)}{N}\left(-\tfrac{1}{2}+\epsilon(p_N)\right).\end{aligned}$$

En posant $\mu_N = p_N + Np_N^2\frac{(N-1)}{N}\left(-\frac{1}{2}+\epsilon(p_N)\right)$, on a donc :

$$(N-1).\ln(1-p_N) = -Np_N + \mu_N,$$

- Limite de μ_N lorsque $N\to\infty$:
- Puisque $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$ et que par hypothèse $p_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, il vient, par composition de limites : $\epsilon(p_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, puis comme : $\frac{(N-1)}{N} = (1-\frac{1}{N}) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$, on a enfin :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(N-1)}{N}\left(-\tfrac{1}{2}+\epsilon(p_N)\right) = -\tfrac{1}{2}.$$

• Puisque, par hypothèse encore : $p_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ et $Np_N^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, on a aussi :

$$\mu_N = p_N + Np_N^2 \tfrac{(N-1)}{N}\left(-\tfrac{1}{2} + \epsilon(p_N)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

<u>En conclusion</u> :

$$E(Y_N) = N.e^{(N-1).\ln(1-p_N)} = N.e^{-Np_N+\mu_N} = N.e^{-Np_N}.e^{\mu_N}.$$

Comme $\lim_{N\to\infty}\mu_N = 0$ et $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, en composant ces deux limites :

$$\frac{E(Y_N)}{N.e^{-Np_N}} = e^{\mu_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1, \text{ ce qui équivaut à : } \boxed{E(Y_N) \sim_{N\to\infty} N.e^{-Np_N}}.$$

I.2.b. Pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à la V.A. Y_N, s'écrit :

$$P_N\left(|Y_N - E(Y_N)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V(Y_N)}{\epsilon^2}.$$

• Puisque, d'une part, ***on peut donner à ϵ une valeur arbitraire***, strictement positive, et que, d'autre part, on sait que :

$$\left(|Y_N - E(Y_N)| \geq \epsilon\right) \iff \left(Y_N \geq E(Y_N) + \epsilon \text{ ou } Y_N \leq E(Y_N) - \epsilon\right),$$

<u>**donnons à ϵ la valeur $E(Y_N)$**</u>, et en ce cas on a :

$$P_N\left(|Y_N - E(Y_N)| \geq \epsilon\right) = P_N\left((Y_N \geq 2.E(Y_N)) \cup (Y_N \leq 0)\right).$$

Or, d'une part, Y_N est une V.A. positive (en tant que somme de V.A. positives), donc les événements $(Y_N \leq 0)$ et $(Y_N = 0)$ sont égaux. Et d'autre part, les événements $(Y_N \geq 2.E(Y_N))$ et $(Y_N = 0)$ sont incompatibles.

Donc pour $\epsilon = E(Y_N)$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut finalement s'écrire :

$$P_N(Y_N \geq 2.E(Y_N)) + P_N(Y_N = 0) \leq \frac{V(Y_N)}{E(Y_N)^2}.$$

En passant $P_N(Y_N \geq 2.E(Y_N))$ au membre de gauche, et en utilisant que ce terme est positif, il vient :

$$\textbf{(2)} \quad P_N(Y_N = 0) \leq \frac{V(Y_N)}{E(Y_N)^2}.$$

• <u>D'après la formule d'Huyghens : $V(Y_N) = E(Y_N^2) - E(Y_N)^2$</u>, donc le majorant dans l'inégalité précédente s'écrit :

$$\frac{V(Y_N)}{E(Y_N)^2} = \frac{E(Y_N^2) - E(Y_N)^2}{E(Y_N)^2} = \frac{E(Y_N^2)}{E(Y_N)^2} - 1.$$

Or d'après le **I.1.d.** :

$$\frac{E(Y_N^2)}{[E(Y_N)]^2} = \left(1 + \frac{1}{E(Y_N)}\right).[1 + \epsilon_N], \text{ avec } \lim_{N\to\infty}\epsilon_N = 0,$$

donc, en développant et réduisant :

$$\frac{V(Y_N)}{E(Y_N)^2} = \left(1 + \frac{1}{E(Y_N)}\right).[1 + \epsilon_N] - 1 = \frac{1}{E(Y_N)}.[1 + \epsilon_N] + \epsilon_N.$$

Comme ϵ_N tend vers 0 pour $N \to \infty$, et que **dans cette question, par hypothèse,** <u>$\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = +\infty$</u>, il vient :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{V(Y_N)}{E(Y_N)^2} = 0,$$

puis par la majoration (2) et le théorème d'encadrement (car $P_N(Y_N = 0) \geq 0$) :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 0}.$$

I.2.c. *La fonction seuil recherchée est définie par des propriétés relatives à $\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N)$. Il s'agit donc d'abord de faire le lien entre la probabilité $P_N(\Gamma_N)$ et les questions déjà traitées.*

$P_N(\Gamma_N)$ est la probabilité pour un graphe non orienté construit sur $\mathcal{V}_N$ de n'avoir aucun sommet isolé. Comme Y_N est la variable aléatoire qui « *compte* » le nombre de sommets isolés du graphe que l'on construit, on en déduit que :

$$P_N(\Gamma_N) = P(Y_N = 0).$$

◇ D'après l'étude précédente (résultats de **I.1.d.** à **I.2.b.**), on peut déjà affirmer que :

si la suite $(p_N)_{N\geq 1}$ vérifie les conditions : (C1) $\begin{cases} N.p_N^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \\ \text{et} \quad Ne^{-Np_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty \end{cases}$

alors :
$$\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = \lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 0.$$

(*l'hypothèse* $N.p_N^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ *valide le résultat de **I.2.a.**, puis l'hypothèse* $Ne^{-Np_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ *assure, par **I.2.a.**, que* $E(Y_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$. *Alors, par **I.2.b.**, il vient :* $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N=0)=0$.)

Pour $\tilde{z}$ donné, $\tilde{z} > 0$, on cherchera donc Φ de sorte que pour $0 < z < \tilde{z}$, les conditions (C1) soient vérifiées si $p_N \sim_{N\to\infty} \Phi(z, N)$.

◇ À ce stade, il manque donc d'énoncer des conditions (C2) sur le comportement de p_N pour N tendant vers l'infini, assurant que $\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = \lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 1$, et permettant, en conjonction avec les conditions (C1), de proposer une fonction seuil Φ.

Tout d'abord, gardons l'hypothèse $\lim_{N\to\infty} Np_N^2 = 0$ (elle implique $p_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$), de sorte que les résultats des questions **I.1.d.** et **I.2.a.** soient toujours valables. ***Puis inspirons-nous de la question I.2.b., des hypothèses que l'on y fait et de leurs conséquences*** .

On peut subodorer que l'hypothèse $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = 0$ ne peut qu'aider à obtenir $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 1$. Cette hypothèse faite, **considérons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev** :
$$P_N\left(|Y_N - E(Y_N)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V(Y_N)}{\epsilon^2}.$$
ou plutôt sa seconde version (obtenue en passant à l'événement contraire) :
$$\textbf{(3)} \quad P_N\left(|Y_N - E(Y_N)| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{V(Y_N)}{\epsilon^2}.$$

En effet, cette formule donne une minoration de la probabilité pour que Y_N soit distant de $E(Y_N)$ de moins de ϵ. Et si $\frac{V(Y_N)}{\epsilon^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, on peut constater que cette probabilité tend vers 1. L'hypothèse étant faite que $E(Y_N)$ tend vers 0, on peut espérer, pour une valeur bien choisie de ϵ, accéder à $P_N(Y_N = 0)$.

Vérifions ces dernières conjectures.

◇ Supposons les conditions suivantes satisfaites :
$$\text{(C2)} \quad \lim_{N\to\infty} N.p_N^2 = 0 \text{ et } \lim_{N\to\infty} N.e^{-Np_N} = 0.$$
Dans ces hypothèses,

$\lim_{N\to\infty} N.p_N^2 = 0$ implique par le **I.2.a.** que : $E(Y_N) \sim_{N\to\infty} N.e^{-N.p_N}$
Et on en déduit par la seconde hypothèse : $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = 0$.

Dans la minoration (3), on sait que l'événement $\left(|Y_N - E(Y_N)| < \epsilon\right)$ équivaut à $\left(E(Y_N) - \epsilon < Y_N < E(Y_N) + \epsilon\right)$ et l'on peut faire en sorte que l'encadrement soit suffisament précis pour qu'il s'agisse en fait de l'événement $(Y_N = 0)$.

- Puisque $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = 0$, il existe un rang N_0 tel que :
$$\forall\, N \geq N_0, \quad E(Y_N) < 1/2.$$
Dans ces conditions, pour $N \geq N_0$, la V.A. Y_N étant positive :
$$\Big(E(Y_N) - \epsilon < Y_N < E(Y_N) + \epsilon\Big) \implies \Big(Y_N < 1/2 + \epsilon\Big)$$
ou encore, en passant aux probabilités :
$$P_N\Big(E(Y_N) - \epsilon < Y_N < E(Y_N) + \epsilon\Big) \leq P_N\Big(Y_N < 1/2 + \epsilon\Big).$$

Puisque $P_N\Big(E(Y_N) - \epsilon < Y_N < E(Y_N) + \epsilon\Big) = P_N\big(|Y_N - E(Y_N)| < \epsilon\big)$, en invoquant alors la formule de Bienaymé-Tchebychev, sous sa forme (3), il vient :
$$\forall\, N \geq N_0, \quad 1 - \tfrac{V(Y_N)}{\epsilon^2} \leq P_N\big(|Y_N - E(Y_N)| < \epsilon\big) \leq P_N\Big(Y_N < 1/2 + \epsilon\Big).$$
Si on profite alors de l'arbitraire sur la valeur de $\epsilon > 0$, pour **poser** $\epsilon = \mathbf{1/2}$, on en déduit :
$$\textbf{(4)} \quad \forall\, N \geq N_0, \quad 1 - 4.V(Y_N) \leq P_N\Big(Y_N < 1\Big).$$
Comme Y_N ne prend que des valeurs entières positives, $P_N(Y_N < 1) = P_N(Y_N = 0)$, et qu'en tant que valeur d'une probabilité, $P_N(Y_N = 0) \leq 1$, (4) équivaut à :
$$\textbf{(5)} \quad \forall\, N \geq N_0, \quad 1 - 4.V(Y_N) \leq P_N\Big(Y_N = 0\Big) \leq 1.$$

Reste à étudier $\boldsymbol{\lim_{N\to\infty} V(Y_N)}$.

- D'après le **I.1.d.**, (valide car : $(\lim_{N\to\infty} N.p_N^2 = 0) \implies (\lim_{N\to\infty} p_N = 0)$) :
$$\frac{E(Y_N^2)}{E(Y_N)^2} = \left(1 + \frac{1}{E(Y_N)}\right).[1 + \epsilon_N], \quad \text{où } \epsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$
Ce qui donne de façon équivalente :
$$E(Y_N^2) = \Big(E(Y_N)^2 + E(Y_N)\Big).[1 + \epsilon_N], \quad \text{où } \epsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$
puis, par la formule de Huyghens :
$$V(Y_N) = \Big(E(Y_N)^2 + E(Y_N)\Big).[1 + \epsilon_N] - E(Y_N)^2, \quad \text{où } \epsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$
Comme, ici, à la fois, $E(Y_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ et $\epsilon_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, il vient :
$$\textbf{(6)} \quad \lim_{N\to\infty} V(Y_N) = 0.$$

Ainsi, on peut conclure que :

si la suite $(p_N)_{N\geq 1}$ vérifie les conditions : (C2) $\begin{cases} N.p_N^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \\ \text{et} \quad Ne^{-Np_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \end{cases}$

alors :

par (6), $\lim_{N\to\infty} V(Y_N) = 0$,

puis par (5) : $\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = \lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = 0) = 1$.

◇ <u>Il reste donc à trouver une fonction seuil Φ telle que</u> : pour un certain réel $\tilde{z} > 0$, si $p_N \sim_{N\to\infty} \Phi(z, N)$, alors (p_N) vérifie les conditions (C1) pour $0 < z < \tilde{z}$, et les conditions (C2) pour $z > \tilde{z}$.

Tout d'abord, rappelons que l'équivalence des suites $(p_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\Phi(z,N))_{N\in\mathbb{N}^*}$, équivaut à l'exitence d'une suite $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\quad p_N = \Phi(z, N).(1 + \eta_N)$ et telle que : $\eta_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Dans ces conditions, on a, d'une part : $N.p_N^2 = N.\Phi(z,N)^2.(1+\eta_N)^2$,
et d'autre part : $N.e^{-Np_N} = e^{\ln N}.e^{-Np_N} = e^{\ln N - Np_N} = e^{\ln N - N.\Phi(z,N).(1+\eta_N)}$.
(expressions sur lesquelles on peut vérifier si les conditions (C1) ou (C2) sont vérifiées).

Pour plus de lisibilité, et éventuellement en jetant un œil aux questions **I.3.a.** ou **I.3.b.**, ***on peut poser :*** $\Phi(z,N) = \frac{g(z,N)}{N}$, ***et chercher une fonction*** g ***convenable.***

Avec cette notation, on a, exprimées à l'aide de g, les égalités :

$$N.p_N^2 = \frac{(1+\eta_N)^2}{N}.g(z,N)^2 \quad \text{et} \quad N.e^{-Np_N} = e^{\ln N - g(z,N).(1+\eta_N)}.$$

On peut, en conséquence, énoncer que, un réel $\tilde{z} > 0$ étant arbitrairement choisi, les conditions (C1) et (C2) sont vérifiées pour les bonnes valeurs de z si :

($\underline{i}$) pour tout $z > 0$: $N.p_N^2 = (1+\eta_N)^2.\frac{g(z,N)^2}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$,

et si :

($\underline{ii}$) pour $0 < z < \tilde{z}$, $\ln N - g(z,N).(1+\eta_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$, de sorte que :
$N.e^{-Np_N} = e^{\ln N - g(z,N).(1+\eta_N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$
pour $z > \tilde{z}$, $\ln N - g(z,N).(1+\eta_N) \xrightarrow[N\to\infty]{} -\infty$, de sorte que :
$N.e^{-Np_N} = e^{\ln N - g(z,N).(1+\eta_N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

C'est alors que l'on peut penser à poser : $g(z,N) = (\ln N)^{\beta(z,\tilde{z})}$.

- En effet, d'après les résultats de comparaisons pour les fonctions : pour tout réel α : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x} = 0$, donc, quelque soit la valeur de $\beta(z,\tilde{z})$:
$$N.p_N^2 = (1+\eta_N)^2.\frac{g(z,N)^2}{N} = (1+\eta_N)^2.\frac{(\ln N)^{2\beta(z,\tilde{z})}}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$
Ce qui assure que la condition ($\underline{i}$) est vérifiée.
- Par ailleurs, si $g(z,N) = (\ln N)^{\beta(z,\tilde{z})}$:
$$\begin{aligned}\ln N - g(z,N).(1+\eta_N) &= \ln N - (\ln N)^{\beta(z,\tilde{z})}.(1+\eta_N)\\ &= (\ln N).\left[1 - (\ln N)^{\beta(z,\tilde{z})-1}.(1+\eta_N)\right].\end{aligned}$$

Or, suivant la valeur de $\beta(z,\tilde{z})$:

* si $\beta(z,\tilde{z}) < 1$ alors $(\ln N)^{\beta(z,\tilde{z})-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ et le crochet précédent tend vers 1,
donc : $\lim_{N\to\infty} \ln N - g(z,N).(1+\eta_N) = +\infty$.

* si $\beta(z,\tilde{z}) > 1$ alors $(\ln N)^{\beta(z,\tilde{z})-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ et le crochet tend vers $-\infty$,
donc : $\lim_{N\to\infty} \ln N - g(z,N).(1+\eta_N) = -\infty$.

Donc on peut achever en posant : $\beta(z,\tilde{z}) = z/\tilde{z}$, car alors les conditions ($\underline{ii}$) sont vérifiées, puisque pour $0 < z < \tilde{z}$, $\beta(z,\tilde{z}) < 1$, et pour $z > \tilde{z}$, $\beta(z,\tilde{z}) > 1$.

En conclusion :

> La fonction $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(z,N) \longmapsto \Phi(z,N) = \frac{(\ln N)^{\frac{z}{\tilde{z}}}}{N}$, où $\tilde{z}$ est un réel strictement positif quelconque, est telle que, si $p_N \sim_{+\infty} \Phi(z,N)$, alors :
> pour tout $z > 0$: $\lim_{N\to\infty} Np_N^2 = 0$
> si $0 < z < \tilde{z}$: $N.e^{-Np_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$, ce qui implique $\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = 0$
> si $z > \tilde{z}$: $N.e^{-Np_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, ce qui implique $\lim_{N\to\infty} P_N(\Gamma_N) = 1$
> de sorte que c'est une fonction-seuil convenable.

I.3.a. Considérons une suite $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{N\to\infty} z_N = 1$: alors, si aussi p_N est égal à $z_N N^{-1}\ln N$, on a : $\lim_{N\to\infty} Np_N^2 = \lim_{N\to\infty} z_N^2 \frac{(\ln N)^2}{N} = 0$.

(produit d'une suite convergeant vers 1 et d'une suite de limite nulle)

En conséquence, le résultat de **I.2.a.** est valide : $E(Y_N) \sim_{N\to\infty} Ne^{-Np_N}$. Ce qui s'énonce encore, compte-tenu de l'expression de p_N : $E(Y_N) \sim_{N\to\infty} Ne^{-z_N \ln N}$.

Dans ces conditions, la condition *(ii)* est réalisée dès lors que : $Ne^{-z_N\ln N} \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\zeta}$,

ou de façon équivalente, en composant par la fonction $(-\ln)$, (ce qui est licite car $(-\ln)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc en $x = e^{-\zeta}$), si : $-\ln N + z_N \ln N \xrightarrow[N\to\infty]{} \zeta$.

Ainsi, **la condition *(ii)* est réalisée si**, par exemple (*en allant au plus simple*) :

pour tout $N \in \mathbb{N}$: $(\ln N - z_N \ln N = \zeta) \iff (z_N = 1 + \frac{\zeta}{\ln N})$

◇ Vérification de ce que la suite $(z_n) = (1+\zeta/(\ln N))$ convient :

si $\forall N \in \mathbb{N}$, $z_N = 1 + \frac{\zeta}{\ln N}$,

alors
- *(i)* $\lim_{N\to\infty} z_N = 1$ (car $\lim_{N\to\infty} \ln N = +\infty$)
- et par application de ce qui précède, on a :
- *(ii)* si $p_N = z_N N^{-1}\ln N$, alors $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = e^{-\zeta}$.

En conclusion :

la suite $(z_N)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $z_N = 1 + \frac{\zeta}{\ln N}$, est une suite telle que les conditions *(i)* et *(ii)* soient satisfaites.

I.3.b. *Les **inégalités de Bonferroni** qu'il est demandé d'utiliser suggèrent qu'il est possible obtenir la valeur de $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k)$ par encadrement.*
*La difficulté réside en ceci que **le théorème d'encadrement pour les suites réelles** ("Gendarmes"!), **ne s'applique pas**, et qu'il va falloir revenir à la définition des limites avec les ϵ, parce que rien ne permet d'affirmer que $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k)$ existe.*

Procédons (on étudiera l'encadrement, d'abord pour $N \to \infty$, puis pour $l \to \infty$).

◇ Commençons par fixer un entier k, élément de $\mathbb{N}$, alors pour tout $l \geq 1$ et tout N tel que $N \geq 2l + k$ on a, d'après les inégalités de Bonferroni :

$$\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) \leq P_N(Y_N = k) \leq \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N).$$

***Il est alors à remarquer que**, k et l étant fixés, **dans les deux termes encadrants, seul $\sigma_{k+j}(Y_N)$, dépend de** N.* De plus, on peut faire tendre N vers l'infini, l étant fixé, car ceci est compatible avec la condition $N \geq 2l + k$.

◇ Limite de $\sigma_{k+j}(Y_N)$ pour $N \to \infty$:

D'après le **I.1.c.**, $\sigma_{k+j}(Y_N)$ vaut $C_N^{k+j} q_N^{(k+j)(N-(k+j))+C_{k+j}^2}$, mais le calcul de la limite de cette expression pour $N \to \infty$ s'annonce délicat (pensez à ce qu'il a déjà fallu faire entre **I.1.d.** et **I.3.a.** pour la limite de $E(Y_N) = \sigma_1(Y_N)$.

Aussi, ***afin d'éviter de fastidieux calculs, il sera astucieux de*** chercher d'abord à introduire dans l'expression de $\sigma_{k+j}(Y_N)$, $E(Y_N)$, égal à Nq_N^{N-1} et de limite connue (de par le choix de (p_N)), avant de s'attaquer à la limite de $\sigma_{k+j}(Y_N)$.

Les calculs peuvent être menés comme suit :

$$\sigma_{k+j}(Y_N) = C_N^{k+j} q_N^{(k+j)(N-(k+j))+C_{k+j}^2} = C_N^{k+j} q_N^{(k+j)\left[(N-1)-(k+j-1)\right]+C_{k+j}^2}$$
$$= C_N^{k+j} q_N^{(k+j)(N-1)} q_N^{-(k+j)(k+j-1)+C_{k+j}^2}$$

et enfin :

$$\sigma_{k+j}(Y_N) = C_N^{k+j} \left(q_N^{N-1}\right)^{k+j} q_N^{-(k+j)(k+j-1)+C_{k+j}^2}.$$

Puis, en substituant $E(Y_N)/N$ à q_N^{N-1} (car d'après **I.1.b.** : $E(Y_N) = Nq_N^{N-1}$) :

$$\sigma_{k+j}(Y_N) = \frac{C_N^{k+j}}{N^{k+j}} \left(E(Y_N)\right)^{k+j} q_N^{-(k+j)(k+j-1)+C_{k+j}^2}.$$

Or, dans cette expression :

- $\frac{C_N^{k+j}}{N^{k+j}}$, en explicitant C_N^{k+j}, s'écrit : $\frac{C_N^{k+j}}{N^{k+j}} = \frac{1}{N^{k+j}} \cdot \frac{N(N-1)\ldots\left(N-(k+j)+1\right)}{(k+j)!}$
  ou encore :
  $$\frac{C_N^{k+j}}{N^{k+j}} = \frac{1}{(k+j)!} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{N-1}{N}\right)\ldots\left(\tfrac{N-(k+j)+1}{N}\right)}_{\text{produit fini de } k+j-1 \text{ facteurs tendant vers 1 lorsque } N\to\infty, \text{ avec } k \text{ et } j \text{ fixés}}.$$
  D'où l'on déduit :
  $$\frac{C_N^{k+j}}{N^{k+j}} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{(k+j)!}.$$
- On a fait l'hypothèse, *via* le choix de $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ (*c.f.* **I.3.a.**), que la suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{N\to\infty} E(Y_N) = e^{-\zeta}$, donc, k et j étant fixés, éléments de $\mathbb{N}$, par composition de limites, sachant que $x \mapsto x^{k+j}$ est continue sur $\mathbb{R}$:
  $$\lim_{N\to\infty} \left(E(Y_N)\right)^{k+j} = \left(e^{-\zeta}\right)^{(k+j)} = e^{-(k+j)\zeta}.$$
- Enfin, par hypothèse : $p_N = z_N N^{-1} \ln N$, et $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ satisfait (i), donc : $\lim_{N\to\infty} z_N = 1$. Par suite :
  $$\lim_{N\to\infty} p_N = 0 \quad (\text{car } \lim_{N\to\infty} N^{-1}\ln N = 0).$$
  Il s'ensuit que $\lim_{N\to\infty} q_N = \lim_{N\to\infty} 1 - p_N = 1$, puis par une composition de limites, licite car, pour tout α réel, $x^\alpha \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, il vient :
  $$\lim_{N\to\infty} q_N^{-(k+j)(k+j-1)+C_{k+j}^2} = 1.$$

<u>**En conclusion**</u>, après calcul de ces trois limites, il vient, k et j étant fixés :

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_{k+j}(Y_N) = \lim_{N\to\infty} \frac{C_N^{k+j}}{N^{k+j}} \left(E(Y_N)\right)^{k+j} q_N^{-(k+j)(k+j-1)+C_{k+j}^2} = \frac{e^{-(k+j)\zeta}}{(k+j)!}.$$

◇ <u>Considérons à nouveau pour $N \geq 2l+k$, les ***inégalités de Bonferroni***</u> :

$$\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) \leq P_N(Y_N = k) \leq \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N).$$

À la lumière des résultats précédents, $l \geq 1$ étant fixé, par les thèorème usuels sur les limites, le **nombre de termes de la somme** étant <u>**fini**</u> et <u>**indépendant de N**</u>, et chaque terme de la somme admettant une limite finie :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) = \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \lim_{N\to\infty} \sigma_{k+j}(Y_N),$$

ou encore, en explicitant pour tout $0 \leq j \leq 2l$, la limite de $\sigma_{k+j}(Y_N)$:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) = \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \frac{e^{-(k+j)\zeta}}{(k+j)!}.$$

Notons, en prévision de la suite, pour tout $m \in \mathbb{N}$: $u_m^{(k)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_{k+j}^j \frac{e^{-(k+j)\zeta}}{(k+j)!}$

et remarquons que $C_{k+j}^j \cdot \frac{1}{(k+j)!} = \frac{1}{k!.j!}$, d'où il découle : $u_m^{(k)} = \frac{e^{-k.\zeta}}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{m} \frac{\left(-e^{-j.\zeta}\right)^j}{j!}$.

Avec cette notation, le résultat précédent s'écrit :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) = u_{2l}^{(k)},$$

En procédant avec le minorant dans les inégalités de Bonferroni de même que l'on vient de le faire avec le majorant, on obtient cette fois :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) = u_{2l-1}^{(k)}.$$

Il n'est pas possible de passer directement à la limite pour $N \to \infty$, sur les ***inégalités de Bonferroni***, car le minorant de $P_N(Y_N = k)$ a pour limite $u_{2l-1}^{(k)}$, tandis que son majorant admet, lui, une limite différente, à savoir $u_{2l}^{(k)}$. Comme ces limites sont différentes, le théorème d'encadrement ne s'applique pas, et par suite ***rien ne permet d'affirmer que*** $\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k)$ ***existe***.
En résumé, un passage à la limite donnant : $u_{2l-1}^{(k)} \leq \lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k) \leq u_{2l}^{(k)}$ est proscrit.

Il faut donc contourner cette difficulté. Et **voici la façon de procéder**.

◇ Pour tout $l \geq 1$: $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) = u_{2l}^{(k)}$, (comme il a été vu).

Dans ces conditions, **il découle de la définition de la limite d'une suite réelle** (*) que, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier $N_1^{(l,\epsilon)}$ (dépendant de ϵ, et de la suite considérée donc de l) tel que :

(7) pour tout $N \geq N_1^{(l,\epsilon)}$, $\quad \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N) \leq u_{2l}^{(k)} + \epsilon.$

En français (!) : il existe un rang à partir duquel le terme général de la suite est éloigné de la limite de moins de ϵ.

De même, pour le minorant des inégalités de Bonferroni, $\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N)$,

dont la limite est $u_{2l-1}^{(k)}$, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un entier $N_2^{(l,\epsilon)}$ tel que :

(8) pour tout $N \geq N_2^{(l,\epsilon)}$, $\quad u_{2l-1}^{(k)} - \epsilon \leq \sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j C_{k+j}^j \sigma_{k+j}(Y_N).$

(*) si $\lim_{N\to\infty} v_N = l \in \mathbb{R}$, alors : $\left(\forall\epsilon>0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tel que : } \forall N \geq n_0,\ |v_N - l| \leq \epsilon \text{ i.e. } -\epsilon \leq v_n - l \leq \epsilon\right)$.

Par suite, pour tout $l \geq 1$, et tout $\epsilon > 0$, il existe $N_1^{(l,\epsilon)} \geq 0$ et $N_2^{(l,\epsilon)} \geq 0$, vérifiant (7) et (8), de sorte que l'on déduit des ***inégalités de Bonferroni*** que :

(9) pour tout $N \geq \max(N_1^{(l,\epsilon)}, N_2^{(l,\epsilon)}, 2l+k)$,
$$u_{2l-1}^{(k)} - \epsilon \leq P_N(Y_N = k) \leq u_{2l}^{(k)} + \epsilon.$$

On peut alors noter que $u_{2l}^{(k)}$, $u_{2l-1}^{(k)}$ sont, au facteur multiplicatif $\frac{e^{-k.\zeta}}{k!}$ près, les termes généraux des suites des sommes partielles, respectivement de rangs pair et impair, de la série convergente $\sum_{j\geq 0} \frac{(-e^{-\zeta})^j}{j!}$, série dont la somme vaut $\exp\left(-e^{-\zeta}\right)$. On en déduit, passage à la limite pour l tendant vers $+\infty$, que :

$$\lim_{l\to+\infty} u_{2l}^{(k)} = \lim_{l\to+\infty} u_{2l-1}^{(k)} = \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right).$$

Mais, parce que $N_{1,l}$ et $N_{2,l}$ dépendent de l, on ne peut passer à la limite pour l tendant vers $+\infty$ sur l'encadrement (8). Il faut préalablement choisir l.

◇ **Reprenons et concluons** :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\epsilon > 0$, puisque $\lim_{m\to+\infty} u_m^{(k)} = \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right)$, il existe $m_0^{(\epsilon)} \geq 0$ tel que pour tout $m \geq m_0^{(\epsilon)}$, on ait :

(10) $$\frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right) - \epsilon \leq u_m^{(k)} \leq \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right) + \epsilon.$$

Dès lors, pour l_ϵ tel que $\min\left(2l_\epsilon, 2l_\epsilon - 1\right) \geq m_0^{(\epsilon)}$, on a, **par (9)**, en posant $N_\epsilon = \max(2l_\epsilon + k, N_1^{l_\epsilon,\epsilon}, N_2^{l_\epsilon,\epsilon})$, avec $N_1^{l_\epsilon,\epsilon}$, $N_2^{l_\epsilon,\epsilon}$ définis comme précédemment, pour tout $N \geq N_\epsilon$:

(11) $$u_{2l_\epsilon-1}^{(k)} - \epsilon \leq P_N(Y_N = k) \leq u_{2l_\epsilon}^{(k)} + \epsilon.$$

où, parce que l_ϵ est tel que $2l_\epsilon, 2l_\epsilon - 1 \geq m_0^{(\epsilon)}$, $u_{2l_\epsilon}^{(k)}$ et $u_{2l_\epsilon-1}^{(k)}$ satisfont (10), ce qui permet de majorer $u_{2l_\epsilon}^{(k)}$ et de minorer $u_{2l_\epsilon-1}^{(k)}$, pour en tirer le nouvel encadrement :

$$(\forall N \geq N_\epsilon) \quad \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right) - 2\epsilon \leq P_N(Y_N = k) \leq \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right) + 2\epsilon.$$

ce qui donne encore :

$$(\forall N \geq N_\epsilon) \quad \left|P_N(Y_N = k) - \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right)\right| \leq 2\epsilon.$$

On a donc montré, pour tout $k \in \mathbb{N}$, que :

$\forall \epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \geq 0$ tel que :
$$\forall N \geq N_\epsilon, \quad \left|P_N(Y_N = k) - \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right)\right| \leq 2\epsilon.$$

(**remarque** : pour $\epsilon > 0$, choisir $N_{\epsilon/2}$ plutôt que N_ϵ si l'on veut remplacer 2ϵ par ϵ)

D'après le cours (définition de la limite d'une suite), cette propriété traduit que :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P_N(Y_N = k) = \frac{e^{-k.\zeta}}{k!}.\exp\left(-e^{-\zeta}\right)}.$$

.PARTIE II.

Remarque préliminaire : Dans cette partie, on utilisera le principe de récurrence, sous une forme que l'on qualifie de ***récurrence forte***. Dans une récurrence forte, on montre qu'une propriété $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \geq k_0$, en établissant les deux points suivants :

- $(\mathcal{H}_{k_0})$ est vraie.
- pour tout $k \geq k_0$, si $(\mathcal{H}_j)$ est vraie pour tout $j \in \{k_0, \ldots, k\}$ alors $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

Ce faisant, on aura donc établi que $(\mathcal{H}_{k_0})$ est vraie et que si $(\mathcal{H}_j)$ est vraie du rang k_0 jusqu'à un certain rang k alors elle est vraie du rang k_0 jusqu'au rang $k+1$. C'est pourquoi cette méthode de démonstration se ramène en fait à une récurrence usuelle avec pour hypothèse de récurrence : $(\mathcal{H}'_k)$ $\big(\forall j \in \{k_0, \ldots, k\},\ (\mathcal{H}_j)$ est vraie$\big)$.

C'est ce principe de démonstration que l'on utilisera, en l'invoquant sous le nom de ***principe de la récurrence forte***.

$\boxed{\textbf{II.1.}}$ Degrés des polynômes $Q_k(x;\mathcal{U})$:

Au vu de la définition des polynômes $Q_k(x;\mathcal{U})$, au besoin en explicitant $Q_1(x;\mathcal{U})$, et $Q_2(x;\mathcal{U})$, il est raisonnable de poser comme hypothèse de récurrence pour $k \geq 0$:

$$(\mathcal{H}_k) : \quad d^\circ Q_k(x;\mathcal{U}) = k.$$

- Au rang $k=0$: $Q_0(x;\mathcal{U}) = 1$ donc l'hypothèse est vraie au rang $k=0$.
- Si l'on suppose, pour un entier $k \geq 0$, que $(\forall j \in [\![0,k]\!])$, $(\mathcal{H}_j)$ est vraie :

  alors $\sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{k-i}}{(k-i)!} Q_i(x;\mathcal{U})$ est une combinaison linéaire de polynômes de degré inférieur ou égal à k, donc est lui-même de degré au plus k. En conséquence, $Q_{k+1}(x;\mathcal{U}) = \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{k+1-i}}{(k+1-i)!} Q_i(x;\mathcal{U})$, est la différence d'un polynôme de degré $k+1$ et d'un polynôme de degré au plus k, donc $Q_{k+1}(x;\mathcal{U})$ est de degré $k+1$ exactement. Ainsi, $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

En conclusion, on a montré que $(\mathcal{H}_0)$ est vraie et que $(\forall j \in [\![0,k]\!],\ (\mathcal{H}_j)$ vraie$) \Longrightarrow$ $\big((\mathcal{H}_{k+1})$ vraie$\big)$, donc, par le principe de ***récurrence forte*** :

$(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \geq 0$, *i.e.* $\boxed{\text{pour tout } k \geq 0,\ d^\circ Q_k(x;\mathcal{U}) = k}$.

◇ Propriété des dérivées r-ièmes des polynômes $Q_k(x;\mathcal{U})$:

On formule l'hypothèse de récurrence suivante, pour $k \geq 0$:

$$(\mathcal{H}'_k) : \quad \forall r \in \mathbb{N},\ Q_k^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \delta_{k,r}.$$

- Au rang $k=0$: $Q_0(x;\mathcal{U})$ est un polynôme constant, donc pour tout $r \geq 1$, $Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})$ est le polynôme nul, tandis que pour $r=0$, par définition, $Q_0^{(0)}(x;\mathcal{U}) = Q_0(x;\mathcal{U}) = 1$, donc pour tout $r \geq 0$, pour tout x réel, et ***a fortieri*** **pour $x = u_r$** :

$$Q_0^{(r)}(x;\mathcal{U}) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Q_0^{(r)}(x;\mathcal{U}) = \delta_{0,r}.$$

  Ainsi, l'hypothèse est vraie au rang $k=0$.
- Si l'on suppose, pour un entier $k \geq 0$, que $(\forall j \in [\![0,k]\!])$, $(\mathcal{H}'_j)$ est vraie :

  Par définition de $Q_{k+1}(x;\mathcal{U})$, et par linéarité de la dérivation, pour tout $r \geq 0$:

$$\textbf{(12)} \quad \begin{aligned} Q_{k+1}^{(r)}(x;\mathcal{U}) &= \left(\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{(k+1)-i}}{((k+1)-i)!} Q_i(x;\mathcal{U})\right)^{(r)} \\ &= \frac{\left(x^{k+1}\right)^{(r)}}{(k+1)!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{(k+1)-i}}{((k+1)-i)!} Q_i^{(r)}(x;\mathcal{U}). \end{aligned}$$

* Si $r > k+1$, de façon directe, $Q_{k+1}^{(r)}(x;\mathcal{U})$ est le polynôme nul, car $Q_{k+1}(x;\mathcal{U})$ est de degré $k+1$. Donc : $Q_{k+1}^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = 0$.
* Si $r \leq k+1$, $(x^{k+1})^{(r)}$ vaut $\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!}.x^{(k+1)-r}$ (*) et pour tout i compris entre 0 et k, d'après l'hypothèse de récurrence, $Q_i^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \delta_{i,r}$, donc, pour $x = u_r$, on tire de (12) :

$$Q_{k+1}^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \frac{u_r^{k+1-r}}{(k+1-r)!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{(k+1)-i}}{((k+1)-i)!}.\delta_{i,r}.$$

Or, dans cette expression de $Q_{k+1}^{(r)}(u_r;\mathcal{U})$:

** pour $r = k+1$, tous les termes de la somme sont nuls (car $\delta_{i,k+1}$ est nul pour tout i compris entre 0 et k), et $u_r^{k+1-r} = u_{k+1}^0 = 1$, tandis que $(k+1-r)! = 0! = 1$, donc : $Q_{k+1}^{(k+1)}(u_{k+1};\mathcal{U}) = 1$.

** pour $r < k+1$, il y a un unique terme non nul dans la somme, pour $i = r$ (*c.f.* définition de $\delta_{i,r}$), donc :

$$Q_{k+1}^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \frac{u_r^{k+1-r}}{(k+1-r)!} - \frac{u_r^{(k+1)-r}}{((k+1)-r)!} = 0.$$

Ainsi, on a montré que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $Q_{k+1}^{(r)}(u_r;\mathcal{U})$ vaut 1 si $r = k+1$ et 0 sinon, c'est-à-dire que l'on a montré que $(\mathcal{H}'_{k+1})$ est vraie *i.e.* $Q_{k+1}^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \delta_{k+1,r}$.

En conclusion, on a montré que $(\mathcal{H}'_0)$ est vraie et que $\big(\forall j \in [\![0,k]\!],\ (\mathcal{H}'_j) \text{ vraie}\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{H}'_{k+1}) \text{ vraie}\big)$, donc, par le principe de ***récurrence forte***, $(\mathcal{H}'_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, et par conséquent : $\boxed{\forall (k,r) \in \mathbb{N}^2, \quad Q_k^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \delta_{k,r}}$.

◇ Soit $\big(R_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes d'indéterminée x, telle que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\quad \text{d}^\circ R_k(x) = k, \quad \text{et} \quad \big(\forall (k,r) \in \mathbb{N}^2\big)\ \ R_k^{(r)}(u_r) = \delta_{k,r}.$$

On peut penser à montrer par récurrence que pour tout $k \geq 0$, $R_k(x) = Q_k(x;\mathcal{U})$, ou penser à montrer que les polynômes $\{R_k(x)\}_{k\geq 0}$ vérifient la même relation de récurrence que les polynômes $\{Q_k(x;\mathcal{U})\}_{k\geq 0}$.

Mais il est préférable de procéder comme suit.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- Puisque pour tout l entier naturel, $\text{d}^\circ Q_l(x;\mathcal{U}) = l$,

  la famille $\{Q_0(x;\mathcal{U}), Q_1(x;\mathcal{U}), \ldots, Q_{k-1}(x;\mathcal{U}), x^k\}$, est une famille de polynômes échelonnés en degré.

  Il s'agit donc d'une famille libre.

  De plus, c'est une famille de vecteurs de l'espace vectoriel des polynômes d'indéterminée x et de degré inférieur ou égal à k, $\mathbb{R}_k[x]$, de dimension $k+1$, et elle est constituée de $k+1$ vecteurs, par conséquent : c'est une base de $\mathbb{R}_k[x]$.

  Il existe donc $k+1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, tels que :

$$\textbf{(13)} \quad R_k(x) = \alpha_k x^k + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Q_i(x;\mathcal{U}).$$

(*) on considère connu que la dérivée k-ième d'un monôme x^n est égale à $(n)(n-1)\ldots(n-k+1).x^{n-k}$, ce qui s'écrit encore $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.x^{n-k}$, ou $(x^n)^{(k)} = n_{[k]}.x^{n-k}$ (avec les notations de l'énoncé), ceci pour $1 \leq k \leq n$ (on le démontre par récurrence sur k), et vaut 0 si $k > n$.

- Pour tout $r \in [\![0, k]\!]$, par linéarité de la dérivation, il découle de (13) que :

$$\textbf{(14)} \quad R_k^{(r)}(x) = \alpha_k (x^k)^{(r)} + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Q_i^{(r)}(x;\mathcal{U}).$$

On a déjà rappelé que $(x^k)^{(r)} = \frac{k!}{(k-r)!}x^{k-r}$, pour $0 \leq r \leq k$ et on a montré que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $Q_i^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \delta_{k,r}$, donc, pour $x = u_r$, suivant que $r = k$ ou $0 \leq r \leq k-1$, par (14) :

$$\underline{\text{pour } r = k,} \quad R_k^{(k)}(u_k) = \alpha_k k! \quad \text{et} \quad \underline{\text{pour } r \leq k-1,} \quad R_k^{(r)}(u_r) = \alpha_k \tfrac{k!}{(k-r)!}u_r^{k-r} + \alpha_r.$$

Or, par les hypothèses faites sur la suite $(R_k(x))_{k \geq 0}$:

$$R_k^{(k)}(u_k) = \delta_{k,k} = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour } r \leq k-1 : \quad R_k^{(r)}(u_r) = \delta_{k,r} = 0,$$

donc :

$$\alpha_k k! = 1 \text{ et pour } 0 \leq r \leq k-1, \; \alpha_k \tfrac{k!}{(k-r)!}u_r^{k-r} + \alpha_r = 0,$$

puis :

$$\alpha_k = \tfrac{1}{k!}, \quad \text{et} \quad \forall r \in [\![0, k-1]\!], \quad \alpha_r = -\alpha_k \tfrac{k!}{(k-r)!}u_r^{k-r} = -\tfrac{u_r^{k-r}}{(k-r)!}.$$

Ainsi,

$$R_k(x) = \alpha_k x^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Q_i(x;\mathcal{U}) = \frac{x^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{u_i^{k-i}}{(k-i)!} Q_i(x;\mathcal{U}) = Q_k(x;\mathcal{U}).$$

Il est donc établi que :

$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad R_k(x) = Q_k(x;\mathcal{U})}.$$

II.2. De façon analogue à la démonstration précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- La famille $\{Q_l(x;\mathcal{U})\}_{0 \leq l \leq k}$ constitue une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k, et par conséquent, tout polynôme $R_k(x)$ de degré k et d'indéterminée x, s'écrit (de façon unique) :

$$R_k(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \beta_i Q_i(x;\mathcal{U}).$$

- Il vient alors, pour tout $r \in [\![0, k]\!]$, par linéarité de la dérivation :

$$R_k^{(r)}(u_r) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i Q_i^{(r)}(x;\mathcal{U}),$$

puis pour $x = u_r$:

$$\underline{R_k^{(r)}(u_r)} = \sum_{i=0}^{k} \beta_i Q_i^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i \delta_{i,r} = \underline{\beta_r}.$$

<u>En conclusion</u>:

$$\boxed{\text{tout polynôme } R_k(x), \text{ de degré } k, \; k \geq 0, \text{ s'écrit } R_k(x) = \sum_{i=0}^{k} R_k^{(i)}(u_i) Q_i(x;\mathcal{U})}.$$

II.3. *Il s'agit de trouver une réécriture du polynôme $Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})$, or c'est à la question* **II.2.** *que l'on établit un résultat de ce type :* ***on pensera donc à utiliser le II.2.***

◊ Pour k et $r \in \mathbb{N}$, considérons le polynôme $Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})$. $Q_k(x;\mathcal{U})$ est un polynôme de degré k, donc :

$$\textbf{(15)} \quad Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U}) \text{ est un polynôme de degré } k - r.$$

Considérons maintenant, la suite de polynômes $(Q_i(x;\nu_r(\mathcal{U})))_{i \geq 0}$, et pour plus de clarté, notons, pour tout entier naturel i : $\tilde{u}_i$ le terme de rang i de la suite $\tilde{\mathcal{U}} = \nu_r(\mathcal{U})$.
Notons encore : $\tilde{k} = k - r$ et $\tilde{R}_{\tilde{k}}(x) = Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})$.
En invoquant le **II.2.**, avec $\tilde{\mathcal{U}}$ au lieu de $\mathcal{U}$, avec la suite $((Q_i(x;\tilde{\mathcal{U}}))_{i \geq 0}$ au lieu de la suite $((Q_i(x;\mathcal{U}))_{i \geq 0}$, il vient, puisque d'après (15), d°$\tilde{R}_{\tilde{k}} = \tilde{k}$:

$$\tilde{R}_{\tilde{k}}(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{\tilde{k}} \tilde{R}_{\tilde{k}}^{(i)}(\tilde{u}_i) Q_i(x;\tilde{\mathcal{U}}),$$

ce qui, en revenant aux notations de l'énoncé, s'écrit :

$$\textbf{(16)}\quad Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{k-r} \Big(Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})\Big)^{(i)}(u_{r+i})Q_i(x;\nu_r(\mathcal{U})).$$

Or, $\Big(Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U})\Big)^{(i)}(u_{r+i}) = \Big(Q_k^{(r+i)}(x;\mathcal{U})\Big)(u_{r+i}) = Q_k^{(r+i)}(u_{r+i};\mathcal{U}) = \delta_{k,r+i},$

donc, en remarquant que $\delta_{k,r+i} = \delta_{i,k-r}$, l'égalité (16) équivaut à :

$$Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{k-r} \delta_{i,k-r}.Q_i(x;\nu_r(\mathcal{U})).$$

Dans la somme, seul le cœfficient du terme de rang $i = k - r$ est non nul (il vaut 1), ce qui donne :

$$\boxed{\forall\, k \geq 0,\quad Q_k^{(r)}(x;\mathcal{U}) = Q_{k-r}(x;\nu_r(\mathcal{U}))}.$$

II.4. *On reprend la même technique qu'au **II.3.***

D'après le **II.1.** pour toute suite de réels $\tilde{\mathcal{U}}$, ici pour $\tilde{\mathcal{U}} = a\mathcal{U} + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{d}^\circ Q_k(x,\tilde{\mathcal{U}}) = k$, et par composition du polynôme $Q_k(x,\tilde{\mathcal{U}})$ par le polynôme $ax + b$(*):

$$\mathrm{d}^\circ Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}}) = k \;\; (a \neq 0).$$

Il découle alors du **II.2.**, pour $R_k(x) = Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})$:

$$\textbf{(17)}\quad Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}}) = \sum_{i=0}^{k} \Big(Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})\Big)^{(i)}(u_i)Q_i(x;\mathcal{U}).$$

Or, par la formule de dérivation des fonctions composées, valable aussi pour les polynômes : $\Big(Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})\Big)' = a.Q_k'(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})$, ce qui, en itérant les dérivations, donne :

$$\Big(Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})\Big)^{(i)} = a^i.Q_k^{(i)}(ax+b,\tilde{\mathcal{U}}),\quad \text{pour tout entier } i.$$

Ainsi, l'égalité (17) s'écrit :

$$\textbf{(18)}\quad Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}}) = \sum_{i=0}^{k} a^i.Q_k^{(i)}(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})(u_i)Q_i(x;\mathcal{U}).$$

Et en notant de nouveau $\tilde{u}_i$, le terme de rang i de la suite $\tilde{\mathcal{U}}$ (on a donc : $\tilde{u}_i = au_i + b$), le résultat du **II.1.**, appliqué à la suite de polynômes $\big(Q_k(x;\tilde{\mathcal{U}})\big)\big)_{i\geq 0}$, donne :

$$\forall r \in \mathbb{N},\quad Q_k^{(r)}(\tilde{u}_i : \tilde{\mathcal{U}}) = \delta_{k,r},$$

et donc dans (18) :

$$\forall i \in [\![0,k]\!]\,,\quad Q_k^{(i)}(ax+b,\tilde{\mathcal{U}})(u_i) = Q_k^{(i)}(au_i+b,\tilde{\mathcal{U}}) = Q_k^{(i)}(\tilde{u}_i : \tilde{\mathcal{U}}) = \delta_{k,i},$$

de sorte que (18) s'écrit :

$$Q_k(ax+b,\tilde{\mathcal{U}}) = \sum_{i=0}^{k} a^i.\delta_{k,i}Q_i(x;\mathcal{U}) = a^k.Q_k(x;\mathcal{U}).$$

En revenant aux notations de l'énoncé, on a montré que :

$$\boxed{\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ Q_k(ax+b,a\mathcal{U}+b) = \sum_{i=0}^{k} a^i.\delta_{k,i}Q_i(x;\mathcal{U}) = a^k.Q_k(x;\mathcal{U})}.$$

(*) d'après le cours, le composé d'un polynôme P par un polynôme Q , QoP, est de degré nul si $\mathrm{d}^\circ P = 0$ ou $\mathrm{d}^\circ Q = 0$ et de degré $\mathrm{d}^\circ P + \mathrm{d}^\circ Q$, si $\mathrm{d}^\circ P$ et $\mathrm{d}^\circ Q > 0$. Aussi est-il nécessaire ici que a soit différent de 0 pour que le résultat soit vrai pour $k > 0$.

II.5.a. Si la suite $\mathcal{U}$ est une suite constante de terme général u, la suite $\left(Q_k(x;\mathcal{U})\right)_{k\geq 0}$ est caractérisée, d'après **II.1.**, par :

$$(\forall\, k \in \mathbb{N})\ \ d^\circ Q_k(x;\mathcal{U}) = k, \quad \text{et} \quad (\forall (k,r) \in \mathbb{N}^2)\ \ Q_k^{(r)}(u_r;\mathcal{U}) = Q_k^{(r)}(\underline{u};\mathcal{U}) = \delta_{k,r}.$$

Il faut faire appel à vos connaissances, en effet cette suite de polynômes est connue. Il s'agit de la suite de terme général : $Q_k(x;\mathcal{U}) = \frac{(x-u)^k}{k!}$.

Si jamais ce fait a échappé au lecteur, l'examen, par exemple, des conditions du ***II.1.*** *pour les petites valeurs de k et r ($k, r = 0, 1, 2, \ldots$) permet de trouver que $Q_0(x;\mathcal{U}) = 1$, $Q_1(x;\mathcal{U}) = x - u$, $Q_2(x;\mathcal{U}) = \frac{(x-u)^2}{2}$, ... puis de conjecturer le résultat.*

De toute façon, la réponse se rédige en proposant la suite convenable, et en montrant qu'elle satisfait les conditions du **II.1.**.

◇ $\forall k \in \mathbb{N},\ d^\circ \frac{(x-u)^k}{k!} = k,$

$$\text{et}\quad \forall\,(k,r) \in \mathbb{N}^2,\quad \left((x-u)^k\right)^{(r)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-r)!}(x-u)^{k-r} & \text{si } 0 \leq r \leq k \\ 0 & \text{si } r > k \end{cases},$$

(***Ce résultat de dérivation est à connaître.*** Il se montre par récurrence sur r, pour $0 \leq r \leq k$.)

ce qui assure que : $\forall\,(k,r) \in \mathbb{N}^2,\quad \left(\frac{(x-u)^k}{k!}\right)^{(r)}(u_i) = \left(\frac{(x-u)^k}{k!}\right)^{(r)}(u) = \delta_{k,r}.$

Puisqu'il y a unicité de la suite de polynômes satisfaisant la propriété caractéristique du II.1., on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } \mathcal{U} \text{ est une suite réelle constante de terme général } u : \\ \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\quad Q_k(x;\mathcal{U}) = \frac{(x-u)^k}{k!}\end{array}}.$$

II.5.b. *Puisque l'énoncé propose une expression pour le terme général de la suite $(Q_k(x;\mathcal{U}))_{k\geq 0}$, l'on se contentera de montrer que cette suite convient.*

Sans présager du résultat(*),

notons, pour tout $k \geq 0$: $\quad R_k(x) = (x - u_0)\frac{(x-u_k)^{k-1}}{k!}$, où $u_k = ck + d$.

et montrons que la suite de polynômes $\left(R_k(x)\right)_{k\geq 0}$ satisfait la propriété caractéristique de la suite $\left(Q_k(x;\mathcal{U})\right)_{k\geq 0}$ énoncée au **II.1.**.

◇ Pour tout $k \geq 1$, par définition, $R_k(x)$ est le produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré $k-1 \geq 0$, donc est lui-même degré k.

Pour $k = 0$, par définition : $\quad R_0(x) = (x - u_0).\frac{(x-u_0)^{-1}}{0!} = \frac{x-u_0}{x-u_0} = 1.$

Donc :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad d^\circ R_k(x) = k.$$

Ce point étant établi, reste à montrer que la suite $(R_k(x))_{k\geq 0}$ vérifie la propriété :

$$(\mathcal{P}_\mathcal{U}):\quad \forall\,(k,r) \in \mathbb{N}^2,\quad R_k^{(r)}(u_r) = \delta_{k,r}.$$

◇ Montrons que $(\mathcal{P}_\mathcal{U})$ est vraie (***en distinguant convenablement les cas***) :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $r > k$: $R_k(x)$ étant de degré k, ses dérivées d'ordre r, pour r supérieur strictement à k, sont nulles.
  Donc :
  $$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \text{si } r > k,\ \ R_k^{(r)}(u_r) = \delta_{k,r} = 0.$$

(*) en effet, on ne peut nommer $Q_k(x;\mathcal{U})$ le terme général de la suite tant qu'il n'est pas établi que la suite a les bonnes propriétés.

- <u>pour $k=0$, et $0 \le r \le k$</u> : il a été établi ci-dessus que R_0 est le polynôme constant égal à 1, et la seule valeur de r à envisager ($0 \le r \le k$) est $r=0$. Donc,
$$\text{pour } k=0 \text{ et } 0 \le r \le k : \ R_0^{(0)}(u_0) = R_0(u_0) = \delta_{0,0} = 1.$$
- <u>pour $k \ge 1$, et $r=0$</u> : le résultat est immédiat, en effet : $R_k^{(0)}(u_0) = R_k(u_0) = \frac{1}{k!}\left[(x-u_0)(x-u_k)^{k-1}\right]\Big|_{x=u_0} = 0$, donc, puisque $k \ge 1 > r$: $R_k^{(0)}(u_0) = \delta_{k,0}$.
- <u>pour $k \ge 1$, et $1 \le r \le k$</u> : $\qquad R_k^{(r)}(x) = \frac{1}{k!}\left[(x-u_0)(x-u_k)^{k-1}\right]^{(r)}$.
La dérivée r-ième du produit est donnée par la **formule de Leibniz** qui, pour deux fonctions f et g dérivables r fois, sur $\mathbb{R}$, s'énonce :
$$(f.g)^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} C_r^i f^{(i)} g^{(r-i)}.$$
Ainsi, pour $f : x \mapsto x-u_0$, et $g : x \mapsto (x-u_k)^{k-1}$, il vient :
$$\textbf{(19)} \quad \forall r \in [\![1,k]\!] , \quad R_k^{(r)}(x) = \frac{1}{k!}.\sum_{i=0}^{r} C_r^i (x-u_0)^{(i)}\left((x-u_k)^{k-1}\right)^{(r-i)}.^{(*)}$$
Or, le polynôme dérivé $(x-u_0)^{(i)}$ est nul dès que $i \ge 2$, donc la somme se réduit à deux termes non nuls, pour $i=0$ et $i=1$.
Comme $(x-u_0)^{(0)} = x-u_0$ et $(x-u_0)^{(1)} = 1$, l'égalité (19) devient :
$$\textbf{(20)} \quad R_k^{(r)}(x) = \frac{1}{k!}.\left[C_r^0(x-u_0).\Big((x-u_k)^{k-1}\Big)^{(r)} + C_r^1.1.\Big((x-u_k)^{k-1}\Big)^{(r-1)}\right].$$

<u>Il faut alors distinguer deux cas</u> :

* <u>si $r=k$</u> : d'une part, $\left((x-u_k)^{k-1}\right)^{(r)} = 0$, car l'ordre de dérivation dépasse le degré du polynôme, et d'autre part, le résultat suivant (déjà utilisé au **II.5.a.**) : $\Big(\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall l \in [\![0,m]\!] , \ \left((x-\alpha)^m\right)^{l} = \frac{m!}{(m-l)!}.(x-\alpha)^{m-l}\Big)$, donne, pour $\alpha = u_r$, $m=k-1$ et $l=r-1$ (soit ici $l=k-1$, car $r=k$) :
$$\left((x-u_k)^{k-1}\right)^{(r-1)} = \left((x-u_k)^{k-1}\right)^{(k-1)} = (k-1)! \ ,$$
de sorte que l'égalité (20) se réduit à :
$$R_k^{(r)}(x) = \frac{1}{k!}.\left[C_k^1(k-1)!\right] = \frac{1}{k!}.\left[k.(k-1)!\right] = \frac{k!}{k!} = 1.$$
Donc :
$$\forall k \ge 1, \text{ pour } r=k, \ R_k^{(r)}(u_r) = R_k^{(k)}(u_k) = \delta_{k,k} = 1.$$
* <u>si $1 \le r \le k-1$</u> : toujours en utilisant (20) et le même résultat de dérivation,
$$\begin{aligned} R_k^{(r)}(x) &= \frac{1}{k!}.\left[C_r^0(x-u_0).\left((x-u_k)^{k-1}\right)^{(r)} + C_r^1.1.\left((x-u_k)^{k-1}\right)^{(r-1)}\right] \\ &= \frac{1}{k!}.\Big[(x-u_0).\frac{(k-1)!}{(k-1-r)!}(x-u_k)^{k-1-r} \\ &\qquad + r.\frac{(k-1)!}{(k-1-(r-1))!}(x-u_k)^{k-1-(r-1)}\Big] \\ &= \frac{1}{k!}.\left[(x-u_0).\frac{(k-1)!}{(k-r-1)!}(x-u_k)^{k-r-1} + r.\frac{(k-1)!}{(k-r)!}(x-u_k)^{k-r}\right] \end{aligned}$$
puis par des mises en facteur convenables :
$$R_k^{(r)}(x) = \frac{1}{k!}.\frac{(k-1)!}{(k-r)!}.\left[(k-r).(x-u_0) + r.(x-u_k)\right].(x-u_k)^{k-r-1},$$

(*) on notera que les fonctions f et g, (en particulier g !), sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$ <u>car</u> $k \ge 1$ (aussi a-t-on traité à part le cas $k=0$). De toute façon, la définition donnée de R_0 est abusive car $(x-u_k)^{-1}$ n'est pas défini pour $x=u_0$: il aurait fallu poser $R_0 = 1$.