.PARTIE II.

Question préliminaire Puisque $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, les X_i ayant même loi que X, d'espérance m et de variance $(\sigma)^2$, **par linéarité de l'espérance** :

$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n E(X_i) = \sum_{k=1}^n E(X) = nm$, et $E(S_n) = E(\frac{Y_n}{n}) = \frac{1}{n}E(Y_n) = m$.

et par ailleurs, les V.A. X_i étant de plus **indépendantes** :

$V(Y_n) = \sum_{k=1}^n V(X_i) = n\sigma^2$, et $V(S_n) = V(\frac{Y_n}{n}) = \frac{1}{n^2}V(Y_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

On a donc montré que : $\boxed{E(S_n) = m}$ et $\boxed{V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$.

◇ On constate donc que : $\lim_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$, ce qui permet de donner une interprétation «**en termes probabilistes**» du résultat précédent, ***via* l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**. Pour $S_n = \frac{Y_n}{n} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$, cette dernière s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Ce qui donne :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\textit{Loi faible des}\\ \textit{grands nombres}\end{array}\right).$$

De façon moins précise, on pourra faire remarquer que :

La probabilité que S_n prenne une valeur proche de m augmente avec n. *Parce que* $E(S_n) = m$ *et* $V(S_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on dit que : la V.A.* S_n *est un* ***estimateur*** *de* m.

II.A.1. Parce que toutes les V.A. X_i $(1 \leq i \leq n)$, suivent la **même** loi de Bernoulli, de paramètre m, et sont **indépendantes**, on sait que :

$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, m)$.

Par suite, $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $P(Y_n = k) = C_n^k m^k (1-m)^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$. Or, $P(Y_n = k) = P(nS_n = k) = P(S_n = \frac{k}{n})$, on a donc pour $S_n = Y_n/n$:

$$\boxed{S_n(\Omega) = \{0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}, 1\},\ \text{et},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(S_n = \tfrac{k}{n}) = C_n^k m^k (1-m)^{n-k}}.$$

II.A.2.a. Toujours par la **formule de transfert** pour la réécriture de $E[u(S_n)]$:

$$E[u(S_n)] - u(m) = \sum_{s_k \in S_n(\Omega)} u(s_k).P(S_n = s_k) - u(m) = \left[\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right).C_n^k m^k (1-m)^{n-k}\right] - u(m).$$

Pour obtenir l'expression de $E[u(S_n)] - u(m)$ sous la forme globale d'une somme, l'idée est alors d'**utiliser l'identité** : **(6)** $\boldsymbol{\sum_{k=0}^n C_n^k m^k (1-m)^{n-k} = 1}$ (développement du binôme de $(p + (1-p))^n$, c'est un point de passage obligé de la démonstration, qui permet d'écrire :

$u(m) = u(m).1 = u(m).\sum_{k=0}^n C_n^k m^k (1-m)^{n-k} = \sum_{k=0}^n u(m) C_n^k m^k (1-m)^{n-k}$.

La **dernière expression** de $E[u(S_n)] - u(m)$ apparaît donc comme la différence de deux sommes indexées par un entier k variant de 0 à n :

$$E[u(S_n)] - u(m) = \left[\sum_{k=0}^n u\left(\frac{k}{n}\right).C_n^k m^k (1-m)^{n-k}\right] - \sum_{k=0}^n u(m) C_n^k m^k (1-m)^{n-k}.$$

On peut dans ces conditions **fusionner ces deux sommes**, ce qui donne :

$$\textbf{(7)}\quad \boxed{E[u(S_n)] - u(m) = \sum_{k=0}^n \left[u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right].C_n^k.m^k (1-m)^{n-k}}.$$

$\boxed{\textbf{II.A.2.b.}}$ *C'est sans commentaire.* Puisque u est continue sur $[0,1]$, et que $m \in [0,1]$, l'**existence d'un** $\alpha > o$ tel que l'implication proposée soit vraie, résulte de la simple l'**application** de la définition de la **con-tinuité de la fonction u en m** avec $\varepsilon/2>0$, au lieu de $\varepsilon>0$ comme dans le cours. ***C.Q.F.D.***

◇ De par leur définition, les ensembles I_1 et I_2 sont **complémentaires** dans $[\![0,n]\!]$. Ils réalisent une **partition** de $[\![0,n]\!]$: $I_1 \cup I_2 = [\![0,n]\!]$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Par suite, une **somme sur** un indice k prenant toutes les valeurs **dans** $[\![o,n]\!]$ peut être **scindée en une somme sur les valeurs dans I_1 et une somme les valeurs dans I_2**, ici l'égalité (7) s'écrira :

$$E\left[u(S_n)\right] - u(m)$$
$$= \sum_{k\in I_1}\left[u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right].C_n^k m^k(1-m)^{n-k} + \sum_{k\in I_2}^{n}\left[u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right].C_n^k m^k(1-m)^{n-k}.$$

On a alors, par application de l'**inégalité triangulaire** :

(8)
$$\left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right|$$
$$\leq \sum_{k\in I_1}\left|u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right|.C_n^k m^k(1-m)^{n-k} + \sum_{k\in I_2}^{n}\left|u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right|.C_n^k m^k(1-m)^{n-k},$$

Or :

- pour $k \in I_1$: **par définition de I_1**, $\left|\frac{k}{n} - u(m)\right| < \alpha$, et α a été choisi tel que : $\forall x \in [0,1]$, $\left(|x-m| < \alpha\right) \Longrightarrow \left(|u(x) - u(m)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$, donc, pour k élément de I_1 et $x = \frac{k}{n} \in [0,1]$: $\forall k \in I_1,\ \left|u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$,
ce qui permet de majorer la première somme.
- pour $k \in I_2$: on se contentera, pour la seconde somme, (*jettez un œil sur la formule à obtenir*), de la majoration grossière suivante, par l'inégalité triangulaire : $\forall k \in I_2,\ \left|u\left(\frac{k}{n}\right) - u(m)\right| \leq \left|u\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |u(m)| \leq 2K.$
(on a utilisé aussi l'hypothèse selon laquelle u est bornée par K sur $[0,1]$)

Ces deux majorations, suivant l'appartenance de k à I_1 ou I_2, permettent, les cœfficients $C_n^k m^k(1-m)^{n-k}$ étant positifs, de prolonger (8) en :

(9) $$\left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right| \leq \sum_{k\in I_1} \underline{\tfrac{\varepsilon}{2}}.C_n^k m^k(1-m)^{n-k} + \sum_{k\in I_2}^{n} \underline{2K}.C_n^k m^k(1-m)^{n-k}.$$

- La première somme, **par ajout de termes positifs**, pour $k \in [\![0,n]\!] \setminus I_1 (= I_2)$, se majore comme suit :

(10) $$\sum_{k\in I_1}\frac{\varepsilon}{2}.C_n^k m^k(1-m)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.\sum_{k\in I_1} C_n^k m^k(1-m)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}.\underbrace{\sum_{0\leq k\leq n} C_n^k m^k(1-m)^{n-k}}_{=1 \text{ c.f. identité (6)}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

- En reconnaissant que : $\sum_{k\in I_2} C_n^k m^k(1-m)^{n-k} = \sum_{k \text{ tel que } \left|\frac{k}{n}-m\right|\geq\alpha} P\left(S_n = \frac{k}{n}\right)$,
où la somme est une somme de probabilités d'événements incompatibles, et vaut donc :

$$P\left(\cup_{k \text{ tel que } \left|\frac{k}{n}-m\right|\geq\alpha}\left(S_n = \frac{k}{n}\right)\right) = P\left(|S_n - m| \geq \alpha\right)$$

on obtient la majoration suivante de la seconde somme :

(11) $$\sum_{k\in I_2}^{n} 2K.C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = 2K.\sum_{k\in I_2}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \leq 2K.P\left(|S_n - m| \geq \alpha\right).$$

La majoration (9) se pronlonge alors, grâce à (10) et (11), en :

$$\textbf{(12)} \quad \boxed{\left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} + 2K.P\big(|S_n - m| \geq \alpha\big)}.$$

II.A.2.c. *On note bien sûr que le résultat demandé est une dernière majoration de* $\left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right|$*, prolongeant (12), en jouant cette fois sur la valeur de* n. .

◇ Ayant déjà établi (12), **il s'agit de montrer que**, pour $\varepsilon > 0$ fixé, et n assez grand :

$$\textbf{(13)} \quad 2K.P\big(|S_n - m| \geq \alpha\big) < \varepsilon.$$

Or, puisque $m = E(S_n)$, sachant que $V(S_n)$ existe et vaut $\frac{\sigma^2}{n}$, on dispose d'une **majoration naturelle** de $P\big(|S_n - m| \geq \alpha\big)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P\big(|S_n - m| \geq \alpha\big) \leq \frac{\sigma^2}{n\alpha^2}$, et puisque le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, **pour tout** $\varepsilon > 0$ **donné,** α **étant fixé et choisi comme spécifié au A.2.b.** :

$$\textbf{(14)} \quad \text{il existe un rang } n_0, \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \ 0 \leq P\big(|S_n - m| \geq \alpha\big) \leq \frac{\sigma^2}{n\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{4K}.$$

(par la **définition** *(epsilonesque !)* **du cours** de $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{n\alpha^2} = 0$, pour $\varepsilon/4K$, au lieu de ε)

• On a bien sûr choisi $\varepsilon/4K > 0$ au lieu de $\varepsilon > 0$ pour que la majoration dans (14) coïncide avec (13). Par (12), il vient alors :

$$\boxed{\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un rang } n_0, \text{ tel que : } \left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right| < \varepsilon}.$$

ce qui est l'égalité demandée si on explicite $E\left[u(S_n)\right] - u(m)$ (*c.f.* **A.2.a.**)

II.B.1.a. Pour $m > 0$, si X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/m)$, **d'après le cours** :

$$E(X) = (1/m)^{-1} = \underline{m} \quad \text{et} \quad \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\left[(1/m)^{-1}\right]^2} = \underline{m}.$$

On en déduit, comme en **A.1.a.**, par **linéarité de l'espérance**, et pour le calcul de l'écart-type de S_n, par **indépendance des variables** $\boldsymbol{X_i}$ $(1 \leq i \leq n)$:

$$E(S_n) = \tfrac{1}{n}.\left[nE(X)\right] = m, \quad \text{et} \quad V(S_n) = V\left(\tfrac{Y_n}{n}\right) = \tfrac{1}{n^2}.V(Y_n) = \tfrac{1}{n^2}.\left[nV(X)\right] = \tfrac{m}{n}.$$

On a donc :

$$\boxed{E(S_n) = m, \ \text{et} \ \ V(S_n) = \tfrac{m}{n}}.$$

II.B.1.b. Le résultat s'établit, **par récurrence**, en utilisant la **formule de convolution**, donnant la fonction de densité, f_{X+Y}, d'une V.A. $X + Y$, en fonction des densités, f_X et f_Y, de X et de Y : $\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(t - x)\,dt.$

La démonstration est sans difficulté, mais un peu longue, aussi renvoie-t-on le lecteur à la page ***, où la propriété a été déjà démontrée. Il suffit d'adapter en remplaçant λ par $1/m$. **On obtient alors le résultat demandé.**

II.B.2. **Dans la mesure où** la fonction u est continue, la V.A. $u(Z)$ est définie et :

> $u(Z)$ admet une espérance **si et seulement si** l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t).f(t)\,dt$ est convergente, *i.e.* si et seulement si $\lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A u(t).f(t)\,dt$ existe.

et en ce cas : $\quad E\left[u(Z)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).f(t)\,dt.$

◇ *La démonstration est **exemplaire***: Tout d'abord, Z **étant à valeurs dans** $\mathbb{R}_+$, sa fonction de densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$, donc l'intégrale à considérer est $\int_0^{+\infty} u(t).f(t)\,dt$, et le problème de convergence n'est qu'en $+\infty$.

Pour régler ce problème, *en l'absence de tout critère de convergence dans le programme*, on doit considèrer la **limite**, pour x tendant vers $+\infty$, de $\int_0^x u(t).f(t)\,dt$.
Et deux cas sont à distinguer.

- ***le cas simple*** **où u est positive** : on considère une primitive W de la fonction $u.f$ (W existe car $u.f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme produit de fonctions continues).
Puisque u est positive par hypothèse et f aussi, en tant que fonction de densité :
$$W' = u.f \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \text{ donc } W \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$
Par suite, $x \mapsto \int_0^x u(t).f(t)\,dt = W(x) - W(0)$, est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs, $|u|$ étant, par hypothèse, bornée par K sur $\mathbb{R}_+$, et f étant positive :
$$\forall x \geq 0,\ \int_0^x u(t).f(t)\,dt \leq K.\int_0^x f(t)\,dt \leq K.\int_0^{+\infty} f(t)\,dt,$$
et f étant la densité d'une V.A. Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.
Ainsi, la fonction $x \mapsto \int_0^x u(t).f(t)\,dt$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et majorée par K, donc, par le **théorème de la limite monotone pour les fonctions** :
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x u(t).f(t)\,dt \text{ existe et appartient à } \mathbb{R}, \text{ donc } E[u(Z)] \text{ existe.}$$
- ***le cas*** **où u est de signe quelconque** : on considère les fonctions, u_+ et u_- définies sur $\mathbb{R}_+$, par :
$$u_+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ et } u_-(x) = \begin{cases} -u(x) & \text{si } u(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Ces définitions assurent que $\boldsymbol{u_+}$ et $\boldsymbol{u_-}$ sont **positives sur $\mathbb{R}_+$**, et **bornées sur $\mathbb{R}_+$ par $\boldsymbol{K}$** (car $u_+ \leq |u| \leq K$ et $u_- \leq |u| \leq K$). De plus, que, pour tout x positif :
$u(x) = u_+(x) - u_-(x)$, et aussi, par linéarité de l'intégrale :
$$\textbf{(15)}\quad \int_0^x u(t).f(t)\,dt = \int_0^x u_+(t).f(t)\,dt - \int_0^x u_-(t).f(t)\,dt.$$
Enfin, on peut vérifier que : $\forall x \geq 0,\ u_+(x) = \frac{u(x)+|u(x)|}{2},\ u_-(x) = \frac{u(x)-|u(x)|}{2}$,
donc, comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ et, par hypothèse, u est continue sur $\mathbb{R}_+$, par composition puis sommation de fonctions continues, les fonctions $\boldsymbol{u_+}$ et $\boldsymbol{u_-}$ sont **continues sur $\mathbb{R}_+$**.
Dans ces conditions, on peut appliquer la démonstration précédente (pour u positive), en remplaçant u par u_+ puis u_-, car u_+ et u_- satisfont aux hypothèses requises (continues, positives, bornées sur $\mathbb{R}_+$), ce qui donne que :
$$\int_0^{+\infty} u_+(t).f(t)\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} u_-(t).f(t)\,dt \text{ existent et sont finies.}$$
On achève alors par un **passage à la limite sur (15)**, par lequel il apparaît que :
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x u(t).f(t)\,dt \text{ existe et appartient à } \mathbb{R}, \text{ donc } E[u(Z)] \text{ existe.}$$

Ainsi, que u soit positive ou de signe quelconque, si par ailleurs les hypothèses de l'énoncé sont satisfaites par u : $\boxed{\text{la V.A. } u(Z) \text{ admet une espérance}}$.

II.B.2.b. *On procède effectivement comme au* ***A.2.b.****, en considérant d'abord une partition* $\mathbb{R}$ *en les deux ensembles :*
$$J_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-m| < \alpha\}, \text{ et } J_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-m| \geq \alpha\},$$
où le réel $\alpha > 0$ est choisi comme spécifié dans l'énoncé et comme au **A.2.b.**, en utilisant la continuité de u en $m > 0$.
À la différence du **A.2.b.**, l'ensemble J_1 et J_2 sont cette fois des intervalles de $\mathbb{R}$.
Des **propriétés de la valeur absolue**, il découle que :
$$\textbf{(16)}\quad J_1 =]m-\alpha, m+\alpha[, \text{ et } J_2 =]-\infty, m-\alpha] \cup [m+\alpha, +\infty[.$$

• On recherche un analogue de (7) (*version variable à densité* - ***les sommes laissent la place à des intégrales***), et cette fois on utilise **la propriété** suivante **de la fonction de densité de Z** : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Sachant que $u(Z)$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ (*c.f.* B.2.a.), on a, **par linéarité de l'intégrale** :

(17) $$E\,[u(Z)] - u(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).f(t)\,\mathrm{d}t - u(m).\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) - u(m)].f(t)\,\mathrm{d}t.$$

• L'analogue de (8) vient ensuite en scindant la dernière intégrale dans (17), suivant les trois intervalles définis par J_1 et J_2, par application de la **relation de Chasles** :

(18) $$E\,[u(Z)] - u(m) = \int_{-\infty}^{m-\alpha} [u(t) - u(m)]\,.f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m-\alpha}^{m+\alpha} [u(t) - u(m)]\,.f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m+\alpha}^{+\infty} [u(t) - u(m)]\,.f(t)\,\mathrm{d}t,$$

puis, on applique l'**inégalité triangulaire** :

$$\left|E\,[u(Z)] - u(m)\right| \leq \left|\int_{m-\alpha}^{m+\alpha} [u(t) - u(m)]\,.f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{-\infty}^{m-\alpha} [u(t) - u(m)]\,.f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{m+\alpha}^{+\infty} [u(t) - u(m)]\,.f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

et enfin la **propriété de l'intégrale** : $\left|\int g\right| \leq \int |g|$. Ce qui donne, f, (fonction de densité de Z), étant positive, un analogue de (8) :

(19) $$\left|E\,[u(Z)] - u(m)\right| \leq \int_{m-\alpha}^{m+\alpha} |u(t) - u(m)|.f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{m-\alpha} |u(t) - u(m)|.f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m+\alpha}^{+\infty} |u(t) - u(m)|.f(t)\,\mathrm{d}t,$$

• La dernière intégrale ayant lieu sur J_1, **on y majore $|u(t) - u(m)|$ par $\varepsilon/2$**, tandis que dans les deux premières, **on majore $|u(t) - u(m)|$ par $|u(t)| + |u(m)|$** (inégalité triangulaire), **puis** finalement on majore $\left[\,|u(t)| + |u(m)|\right].f(t)$ **par $2K.f(t)$** :

en effet, si $x \geq 0$, on a : $|u(t) - u(m)|\,.f(t) \leq \left[\,|u(t)| + |u(m)|\,\right].f(t) \leq 2K.f(t)$,
(on utilise que $|u\,|$ est majorée par K sur $\mathbb{R}$)
et si $x < 0$: $|u(t) - u(m)|\,.f(t) = 0$, donc $|u(t) - u(m)|\,.f(t) \leq 2K.f(t)$.
(on utilise que Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc f est nulle sur $\mathbb{R}_-$)

Ainsi, la majoration proposée, par $2K.f(t)$, est valable pour tout x réel.
Par ces deux sortes de majorations, on obtient l'analogue suivant de (9) :

(20) $$\left|E\,[u(Z)] - u(m)\right| \leq \int_{m-\alpha}^{m+\alpha} \tfrac{\varepsilon}{2}.f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{m-\alpha} 2K.f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m+\alpha}^{+\infty} 2K.f(t)\,\mathrm{d}t \leq \tfrac{\varepsilon}{2}.\int_{m-\alpha}^{m+\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t + 2K.\left[\int_{-\infty}^{m-\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{m+\alpha}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

puis en majorant, grâce à la **positivité de** la fonction de densité f, la première intégrale par $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et en **réexprimant** les intégrales entre crochets **en termes de probabilités** et :

(21) $$\left|E\,[u(Z)] - u(m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.1 + 2K.\Big[P(Z \leq m - \alpha) + P(Z \geq m + \alpha)\Big].$$

• Enfin, la réunion des événements $\big(Z \leq m - \alpha\big)$ et $\big(Z \leq m - \alpha\big)$ étant disjoints et de réunion égale à $\big(|Z - m| \geq \alpha\big)$, (21) est équivalente à :

(22) $$\left|E\,[u(Z)] - u(m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2K.P\big(|Z - m| \geq \alpha\big).$$

On a donc établi pour Z, l'analogue de (12) (*c.f.* **A.2.b.**).

Ensuite, comme au **A.2.c.**, on invoque l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** pour Z et le seuil α. En rappelant qu'on a noté $m = E(Z)$ et $V = V(Z)$, elle s'écrit :

$P(|Z-m| \geq \alpha) \leq \frac{V}{\alpha^2}$. Ce qui permet de conclure à partir de (22) :

$$\textbf{(23)} \quad \boxed{\left|E\left[u(Z)\right] - u(m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2K.\frac{V}{\alpha^2}}.$$

II.B.2.c. Avec les valeurs de $E(S_n)$ et $V(S_n)$ trouvées en **B.1.a.**, (23) pour $Z = S_n$ s'écrit :

$$\textbf{(24)} \quad \left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2K.\frac{m}{n\alpha^2}.$$

Et pour la convergence de la suite de terme général $E\left[u(S_n)\right]$ vers $u(m)$, on revient à la **définition de la limite d'une suite**.

◇ Pour $\varepsilon > 0$ donné, **la majoration (24) est acquise**. Dans un deuxième temps, par la définition « ***avec les*** ε » de la limite d'une suite, le fait que : $\lim_{n\to+\infty} 2K.\frac{m}{n\alpha^2} = 0$, donne l'existence d'un un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $2K.\frac{m}{n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, **pour cet entier n_0**, on a le prolongement suivant de (24) :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2K.\frac{m}{n\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que : } \quad (n \geq n_0) \Longrightarrow \left(\left|E\left[u(S_n)\right] - u(m)\right| \leq \varepsilon\right).$$

Ce qui, **par définition**, traduit que : $\boxed{\text{la suite } \left(E\left[u(S_n)\right]\right)_{n\geq 1} \text{ converge vers } u(m)}$.

II.B.2.d. *L'expression proposée renvoie à la fois à la densité, f_n, de Y_n et au résultat de **B.2.c.** sur* $E\left[u(S_n)\right]$. Le lien est à faire *via* la relation $S_n = Y_n/n$.

◇ Puisque $S_n = Y_n/n$, on a : $E\left[u(S_n)\right] = E\left[u(\frac{Y_n}{n})\right]$. Or cette dernière expression est **de la forme $E\left[v(Y_n)\right]$**, où v est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\boldsymbol{v(t) = u(t/n)}$. Et la fonction v ainsi définie est, par composition de fonctions continues, continue sur $\mathbb{R}_+$, bornée par K (la majorant de $|u|$) et positive (car u l'est). Donc, f_n désignant une densité de Y_n (f_n déterminée au **B.1.b.**), d'après **B.2.a.**, $E\left[v(Y_n)\right]$ est donnée par la formule :

$$E\left[v(Y_n)\right] = \int_0^{+\infty} v(t).f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(en rappelant que f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et en utilisant la définition de v à l'aide de u)

En rappelant que : $\int_0^{+\infty} u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t)\,\mathrm{d}t$, en effectuant sur $\int_0^A u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t)\,\mathrm{d}t$, le **changement de variable linéaire défini par $x = t/n$**, pour lequel on a :

$u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t) = u(x).f_n(nx)$, $\mathrm{d}t = n\mathrm{d}x$, et pour nouvelles bornes 0 et A/n,

il vient :

$$\int_0^A u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{nA} u(x).f_n(nx).n.\,\mathrm{d}t.$$

Comme le membre de gauche admet une limite pour A tendant vers $+\infty$, il en est de même pour le membre de droite et **les limites sont égales**. En conséquence :

$$E\left[u(S_n)\right] = E\left[v(Y_n)\right] = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A u\left(\frac{t}{n}\right).f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{nA} u(x).f_n(nx).n.\,\mathrm{d}x.$$

En explicitant l'expression $u(x).f_n(nx).n$ et puisque $\lim_{A\to+\infty} nA = +\infty$, en remplaçant $\lim_{A\to+\infty}\int_0^{nA}\ldots\,\mathrm{d}x$ par $\int_0^{+\infty}\ldots\,\mathrm{d}x$, on a donc :

$$E\left[u(S_n)\right] = \int_0^{+\infty} u(x).\frac{1}{(n-1)!}.\frac{(nx)^{n-1}}{m^n}.\exp\left(-\frac{nx}{m}\right).n\,\mathrm{d}x.$$

Puis, en réécrivant $\frac{(nx)^{n-1}}{m^n}.n = \left(\frac{nx}{m}\right)^{n-1}.\frac{n}{m}$, et en sortant le facteur $\frac{1}{(n-1)!}$, par linéarité de l'intégrale, on obtient une réécriture de $E\left[u(S_n)\right]$ et cette expression tend vers $u(m)$ (*c.f.* **B.2.c.**). Ce qui s'écrit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E\left[u(S_n)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}.\int_0^{+\infty} u(x).\left(\frac{nx}{m}\right)^{n-1}.\exp\left(-\frac{nx}{m}\right).\frac{n}{m}\,\mathrm{d}x\right] = u(m)}.$$

.PARTIE III.

$\boxed{\textbf{III.1.a.}}$ *C'est, avec l'application à la convergence d'une intégrale à la question suivante, une méthode* ***incontournable***.

◊ Pour tout entier $n \geq 0$ et $\lambda > 0$ fixés, $e^{-\lambda x}x^n = \frac{x^n}{e^{-\lambda x}} = \frac{1}{\lambda^n}.\frac{(\lambda x)^n}{e^{\lambda x}}$, λ^n étant constant, il vient donc, avec le changement de variable $X = \lambda x$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}x^n = \frac{1}{\lambda^n}.\lim_{x\to+\infty}\frac{X^n}{e^X} = 0, \text{ (résultat de comparaison de } X^n \text{ et } \exp X).$$

Par la définition de $\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}x^n = 0$, $x \mapsto e^{-\lambda x}x^n$ étant positivesur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\boxed{\text{l'existence d'un réel } A > 0, \text{ tel que : } \quad \forall x \geq A,\ \ 0 \leq e^{-\lambda x}x^n \leq 1}.$$

$\boxed{\textbf{III.1.b.}}$ Pour tout $n \geq 0$ et tout $\lambda > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions continues, donc elle y admet des primitives, et :

le réel $I_n(\lambda)$ défini par l'énoncé **existe si et seulement si** pour l'une de ces primitives, F, $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe. Et le cas échéant, on a : $I_n(\lambda) = F(x) - F(0)$.

Or, F a pour dérivée la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}x^n f(x)$, positive sur $\mathbb{R}_+$, donc F est une fonction **croissante**, et par le **théorème de la limite monotone pour les fonctions** :

F admet une limite en $+\infty$ si et seulement si F est majorée.

• f étant positive (fonction de densité), par la majoration établie au **III.1.a.** :

$\forall x \geq A,\quad e^{-\lambda x}x^n f(x) \leq f(t)$, et donc, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x \geq A,\quad \int_A^x e^{-\lambda x}x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_A^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent, si on choisit, par exemple, pour F, la primitive de $x \mapsto e^{-\lambda x}x^n f(x)$ qui s'annule en A :

$$\textbf{(25)}\quad \forall x \geq A,\quad F(x) \leq \int_A^x f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(la dernière majoration étant due au fait que f, fonction de densité, est positive, continue, donc $x \mapsto \int_A^x f(x)\,\mathrm{d}x$ existe, est croissante et majorée par sa limite en $+\infty$, $x \mapsto \int_A^x f(x)\,\mathrm{d}x$, qui existe car $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1)

En conclusion, par (25), F admet une limite en $+\infty$, donc :

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\quad I_n(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^n f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existe}}.$$

$\boxed{\textbf{III.2.a.}}$ *Ce type d'inégalité suggère l'utilisation d'une* ***formule de Taylor***. Rappelons que pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a, par la **formule de Taylor-Lagrange**, à l'ordre 2, pour tous a et b dans I, l'existence d'un réel c, strictement compris entre a et b, tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + f''(c).\frac{(b-a)^2}{2}.$$

Pour $x > 0$ et $\lambda_0 > 0$ fixés, l'application de cette formule à la **fonction exponentielle** (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$), avec $I = \mathbb{R}$, $a = -\lambda_0 x$, $b = -\lambda x$, pour $\lambda > \lambda_0/2$, donne :

l'existence d'un réel c, strictement compris entre $-\lambda_0 x$ et $-\lambda x$, tel que :

$$e^{-\lambda x} = e^{-\lambda_0 x} + e^{-\lambda_0 x}.[(-\lambda x) - (-\lambda_0 x)] + e^c.\frac{[(-\lambda x)-(-\lambda_0 x)]^2}{2}.$$

Soit, en isolant les termes convenables, et en passant aux valeurs absolues :

$$\textbf{(26)}\quad \left|e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0).e^{-\lambda_0 x}\right| = x^2.\frac{|\lambda-\lambda_0|^2}{2}.e^c.$$

Enfin, dans la mesure où $x > 0$, $\lambda > \lambda_0/2$: $-\lambda x, -\lambda_0 x \in \left]-\infty, \lambda_0/2\right]$, et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$: $e^{-c} \leq e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}$.

On tire donc de (26), pour λ, $\lambda_0 > 0$, tels que $\lambda > \lambda_0/2$, la majoration suivante :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \left|e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0).e^{-\lambda_0 x}\right| \leq x^2.\frac{|\lambda-\lambda_0|^2}{2}.e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}}.$$

et l'inégalité est encore valable pour $x = 0$, comme on le vérifie de façon directe.

III.2.b. Pour tout $A \geq 0$, par application de l'**inégalités des valeurs absolues** sur l'intervalle [0,A], à la fonction : $x \mapsto \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0).e^{-\lambda_0 x}\right).f(x)$, **continue** sur $\mathbb{R}$, on a, f étant positive sur $\mathbb{R}$:

$$\left|\int_0^A \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0).e^{-\lambda_0 x}\right).f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leq \int_0^A \left|e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0).e^{-\lambda_0 x}\right|.f(x)\,\mathrm{d}x,$$

puis, par **linéarité de l'intégrale** pour la réécriture du membre de gauche, et grâce à la majoration du **III.2.b.** et à la **croissance de l'intégrale** pour celle du membre de droite, il vient :

$$|\lambda - \lambda_0|.\left|\int_0^A \frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda_0 x}}{\lambda-\lambda_0}.f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A x.e^{-\lambda_0 x}.f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^A x^2.\frac{|\lambda-\lambda_0|^2}{2}.e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}.f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Enfin, en sortant, par linéarité, le facteur $\frac{|\lambda-\lambda_0|^2}{2}$ de l'intégrale, au membre de droite, puis en divisant les deux membres par $|\lambda - \lambda_0|$, on obtient, pour tout $A \geq 0$:

$$\textbf{(27)}\quad \boxed{\left|\int_0^A \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x}}{\lambda - \lambda_0}.f(x)\mathrm{d}x + \int_0^A x.e^{-\lambda_0 x}.f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2}.\int_0^A x^2.e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}f(x)\mathrm{d}x}.$$

◇ Dérivabilité de L : pour tout $\lambda_0 > 0$ fixé, pour tout $\lambda > 0$ et différent de λ_0, en notant $L_A(\lambda) = \int_0^A e^{-\lambda x}.f(x)\,\mathrm{d}x$, on a, pour tout $A \geq 0$, par linéarité de l'intégrale :

$\frac{L_A(\lambda)-L_A(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \int_0^A \frac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda_0 x}}{\lambda-\lambda_0}.f(x)\,\mathrm{d}x$, et par (27) :

$$\left|\frac{L_A(\lambda)-L_A(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} + \int_0^A x.e^{-\lambda_0 x}.f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.\int_0^A x^2.e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}.f(x)\,\mathrm{d}x$$

Alors, parce que d'après **III.1.b.**, **toutes les intégrales sont convergentes**, on peut en **passer à la limite $A \to +\infty$**, ce qui donne, avec les notations du **III.1.b.** :

$\left|\frac{L(\lambda)-L(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} + I_1(\lambda_0)\right| \leq \frac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.I_2\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)$, puis par le **théorème d'encadrement**, puisque $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.I_2\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = 0$: $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{L(\lambda)-L(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = -I_1(\lambda_0)$, ce qui traduit que : $\boxed{L \text{ est dérivable en tout } \lambda_0 > 0, \text{ avec } L'(\lambda_0) = -I_1(\lambda_0)}$.

III.2.c. Le résultat se démontre par récurrence, avec, pour hypothèse de rang n :

$(\mathcal{H}_n)$: L admet une dérivée d'ordre n définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par : $L^{(n)}(\lambda_0) = (-1)^n I_n(\lambda_0)$.

- Au rang $n = 0$: $(\mathcal{H}_0)$ est vraie, c'est la définition de L.

- Si on suppose que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$: alors, en multipliant l'inégalité du **III.2.a.** par x^n, on a, pour λ, $\lambda_0 > 0$, tels que $\lambda > \lambda_0/2$:

$$\forall x > 0, \quad \left|e^{-\lambda x}.x^n - e^{-\lambda_0 x}.x^n + (\lambda - \lambda_0).e^{-\lambda_0 x}\right|.x^{n+1} \leq x^{n+2}.\tfrac{|\lambda-\lambda_0|^2}{2}.e^{-\frac{\lambda_0}{2}x},$$

puis, par une argumentation suivant **les mêmes étapes qu'au III.2.b.**, on établit, pour tout $A \geq 0$, l'analogue de (27) :

$$\left|\int_0^A \tfrac{e^{-\lambda x}-e^{-\lambda_0 x}}{\lambda-\lambda_0}.x^n.f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A e^{-\lambda_0 x}.x^{n+1}.f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \tfrac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.\int_0^A x^{n+2}.e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}.f(x)\mathrm{d}x$$

puis, en posant cette fois $L_{A,n}(\lambda) = \int_0^A e^{-\lambda x}.x^n.f(x)\,\mathrm{d}x$, de même qu'au **III.2.b.** :

$$\textbf{(28)} \quad \left|\tfrac{L_{A,n}(\lambda)-L_{A,n}(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} + L_{A,n+1}(\lambda)\right| \leq \tfrac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.L_{A,n+2}\left(\tfrac{\lambda_0}{2}\right).$$

De nouveau, parce que d'après **III.1.b.** : $\forall m \geq 0$, $\lim_{m\to+\infty} L_{A,n}(\lambda) = I_n(\lambda)$, on peut en **passer à la limite $A \to +\infty$** sur (28), ce qui donne :

$$\left|\tfrac{I_n(\lambda)-I_n(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} + I_{n+1}(\lambda_0)\right| \leq \tfrac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.I_{n+2}(\lambda_0)\left(\tfrac{\lambda_0}{2}\right),$$

puis par le **théorème d'encadrement**, puisque $\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{|\lambda-\lambda_0|}{2}.I_{n+2}\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) = 0$, il vient : $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \frac{I_n(\lambda)-I_n(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} + I_{n+1}(\lambda_0) = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \frac{I_n(\lambda)-I_n(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = -I_{n+1}(\lambda_0)$.

En multipliant par $(-1)^n$, et en utilisant l'**hypothèse de récurrence** : $L^{(n)}(\lambda_0) = (-1)^n I_n(\lambda_0)$, on a donc : $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \frac{L^{(n)}(\lambda)-L^{(n)}(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = (-1)^{n+1}.I_{n+1}(\lambda_0)$.

Ce qui traduit que :

$L^{(n)}$ est dérivable en tout $\lambda_0 > 0$, avec $L^{(n+1)}(\lambda_0) = (-1)^{n+1}.I_{n+1}(\lambda_0)$.

et **établit que** $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

En conclusion, $(\mathcal{H}_0)$ est vraie et, pour tout $n \geq 0$, $(\mathcal{H}_n)$ vraie implique $(\mathcal{H}_{n+1})$ vraie. Donc, par le principe de récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 0,\ L \text{ admet en tout } \lambda_0 > 0 \text{ une dérivée à l'ordre } n, \text{ donnée par la formule : } L^{(n)}(\lambda_0) = (-1)^n.I_n(\lambda_0)}.$$

III.3. Pour $x > 0$, et $n \geq 1$, auquel cas $n/x > 0$, on peut utiliser le **III.2.C.** pour réexprimer $L^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)$, et réécrire ensuite le terme général de la suite considérée :

$$w_n(x) = \tfrac{(-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}.\left(\tfrac{n}{x}\right)^n.L^{(n-1)}\left(\tfrac{n}{x}\right) = \tfrac{1}{(n-1)!}.\left(\tfrac{n}{x}\right)^n.I_{n-1}\left(\tfrac{n}{x}\right).$$

En revenant alors à la **définition de I_{n-1}**, $I_{n-1}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}t^n f(t)\,\mathrm{d}t$, on a finalement :

$$\textbf{(29)} \quad w_n(x) = \tfrac{1}{(n-1)!}.\left(\tfrac{n}{x}\right)^n.I_{n-1}\left(\tfrac{n}{x}\right) = \tfrac{1}{(n-1)!}.\left(\tfrac{n}{x}\right)^n.\int_0^{+\infty} e^{-\frac{n}{x}.t}.t^{n-1}.f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puis, en rentrant le facteur $\left(\frac{n}{x}\right)^n = \frac{n}{x}.\left(\frac{n}{x}\right)^{n-1}$ sous le signe d'intégration, par linéarité :

$$w_n(x) = \tfrac{1}{(n-1)!}.\int_0^{+\infty} e^{-\frac{nt}{x}}.\left(\tfrac{nt}{x}\right)^{n-1}.f(t).\tfrac{n}{x}\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors reconnaître en $w_n(x)$ l'expression dont la limite a été calculée au **II.B.2.d.** (pour ce faire, il suffit de nommer "t" la variable d'intégration nommée "x" au **II.B.2.d.**, et de changer dans **IIB.2.d.** "m" en "x", et "u" en "f"), et dans cette mesure, puisque f est, **par hypothèse**, continue, bornée sur $\mathbb{R}_+$, et satisfait de ce fait les hypothèses du **II.B.2.d.** sur u, on a d'après **II.B.2.d.**, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} w_n(x) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{(-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}.\left(\tfrac{n}{x}\right)^n.L^{(n-1)}\left(\tfrac{n}{x}\right) = f(x)}.$$

ÉPREUVE C

Durée 3 h 00

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

PARTIE I L'objet de cette partie est la détermination d'un équivalent de n! à l'infini.

1. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \ln(1+x)$$

1.a. Déterminer $f^{(n)}(x)$, pour tout entier naturel n non nul et x strictement supérieur à -1.

1.b. En déduire, pour tout x strictement positif, l'existence d'un réel $\alpha(x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^4} \leq \alpha(x) < 1 \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\alpha(x) \end{cases}$$

2. Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$g(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

2.a. Justifier, pour n non nul, l'encadrement :

$$0 < g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

2.b. Montrer que, pour n supérieur ou égal à 4, on a :

$$\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{3}$$

2.c. En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 4 :

$$0 < g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right]$$

puis :

$$0 < g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$$

3. On considère la suite u définie, pour tout n entier naturel non nul, par son terme général :

$$u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$$

3.a. Exprimer $v_n = u_n - u_{n+1}$ en fonction de g et de n. Montrer que l'on a pour $n > 4$:

$$\sum_{k=4}^{n-1} v_k = u_4 - u_n$$

3.b. Justifier l'encadrement, pour tout $n > 4$:

$$0 < \sum_{k=4}^{n-1} v_k \leq \frac{1}{36}$$

En déduire que la suite u converge vers un réel C qui vérifie :

$$u_4 - \frac{1}{36} \leq C \leq u_4$$

4. Montrer (en considérant son logarithme) que la quantité :

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

admet une limite strictement positive K lorsque n tend vers l'infini. En déduire l'équivalent :

$$n! \sim Kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

5. En utilisant la question **3.b.** donner un encadrement de K avec 2 décimales.

PARTIE II Quelques résultats préliminaires.

A. Somme de n variables de Poisson indépendantes.

On considère $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi de Poisson de paramètre 1. On note : $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

1. Déterminer la loi de S_2.

2. Justifier par récurrence la relation, pour k entier naturel :

$$P[S_n = k] = \frac{e^{-n}n^k}{k!}$$

3. Donner en fonction de n l'espérance et la variance de S_n.

B. Des inégalités.

1. Justifier, pour tout réel x positif ou nul, la relation :

$$1 - x \leq e^{-x}$$

2. Dans cette question, n et k sont des entiers naturels non nuls. En utilisant la question 1, justifier l'inégalité :

$$\prod_{i=0}^{k}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)$$

3. Dans toute la suite du problème, pour n et k entiers naturels non nuls vérifiant :

$$1 \leq k \leq n+1$$

on posera :

$$a(k, n) = \frac{n^k}{(k-1)!}$$

3.a. Exprimer $a(1,n)$ en fonction de n.
En mettant en œuvre, après l'avoir justifiée, la relation pour tout i $(1 \leq i \leq k-1)$:

$$a(1+1,n) = \frac{n}{i} \times a(i,n)$$

écrire une suite d'instructions en langage Pascal, permettant, k et n étant des entiers fixés de déterminer $a(k,n)$.

3.b. Montrer que l'on a :

$$\frac{a(n-k,n)}{a(n+1,n)} \leq \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)$$

<u>PARTIE III</u> *Une méthode de détermination de la constante K.*

M désigne dans toute la suite de ce problème un réel strictement positif. On rappelle que, pour tout réel x strictement positif, $[x]$ (partie entière de x) désigne l'unique entier naturel p qui vérifie :

$$p \leq x < p+1$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x & \text{si} \quad x \in [-M,0] \\ h(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Représenter graphiquement la fonction h. Étudier sa continuité sur $\mathbb{R}$.

1.b. Justifier l'existence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

et l'exprimer en fonction de M.

1.c. On reprend ici les notations de II.A. et on pose, pour n entier naturel non nul :

$$Y_n = h\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)$$

Justifier pourquoi on peut approximer la loi de $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ par la loi normale centrée réduite. On admettra alors que l'espérance de la variable aléatoire Y_n admet comme limite, lorsque n tend vers l'infini, l'espérance d'une variable $h(N)$, où N suit une loi normale centrée réduite. Exprimer cette limite en fonction de M.

2.a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1, tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_1, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$n - M\sqrt{n} \geq 1$$

On supposera dans toute la suite de ce problème que $n \geq n_1$.

On pose : $\beta = [M\sqrt{n}]$

En remarquant que, si k est un entier naturel, on a :

$$h\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n-k}{\sqrt{n}}$$

si et seulement si : $n - \beta \leq k \leq n$, vérifier qu'on a dans ce cas : $k \geq 1$.

En déduire la relation :

$$E[Y_n] = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n-\beta}^{n} \left(\frac{n^{k+1}}{k!} - \frac{n^k}{(k-1)!}\right)$$

Puis :

$$E[Y_n] = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}(a(n+1,n) - a(n-\beta,n))$$

où les notations sont celles de la partie II.B.

3.a. Justifier la suite d'inégalités :

$$E[Y_n] \leq \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}(a(n+1,n)) \leq E[Y_n] + \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}(a(n-\beta,n))$$

3.b. En déduire, en utilisant II.B. :

$$E[Y_n] \leq \frac{e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} \leq E[Y_n] + \frac{e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}e^{\frac{-\beta^2}{2n}}$$

3.c. En utilisant, après l'avoir justifié, l'encadrement :

$$M\sqrt{n} - 1 < \beta \leq M\sqrt{n}$$

déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini de :

$$e^{-\frac{\beta^2}{2n}}$$

3.d. Démontrer l'encadrement :

$$\frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{K} \leq \frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{K}$$

puis, à l'aide d'un passage à la limite que l'on justifiera, déterminer la valeur de K. On aura alors démontré la formule de Stirling, donnant, à l'infini, l'équivalent :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

Corrigé

.PARTIE I.

$\boxed{\text{I.1.a.}}$ f est de **classe C^∞ sur** $]-1,+\infty[$, comme **composée** de la fonction affine, $x \longmapsto x+1$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ pour $x \in]-1,+\infty[$, par ln, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$).

◇ *Le calcul des quatre premières dérivées de la fonction f (ceci est laissé à vos soins), suggère de* ***formuler, pour $n \geq 1$, l'hypothèse de récurrence suivante*** :

$$(HR_n) \quad : \quad \left(\forall x \in]-1,+\infty[: \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}.(n-1)!}{(1+x)^n}\right)$$

- Au rang $n=1$: la formule de dérivation des fonctions composées donne que : $\forall x > -1, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Donc, en rappelant la convention $0! = 1$, $(\mathcal{H}_1)$ **est vraie**.
- Si on suppose que pour un entier $n \geq 1$, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie : alors, pour tout $x > -1$, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$, vaut, **en vertu de l'hypothèse de récurrence** :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{(-1)^{n+1}.(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' = (-1)^{n+1}.(n-1)!.\left(\frac{1}{(1+x)^n}\right)'$$
$$= (-1)^{n+1}.(n-1)!.\frac{-n.(1+x)'}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2}.n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Ainsi, **on a montré que** : $((\mathcal{H}_n) \text{ vraie }) \Longrightarrow ((\mathcal{H}_{n+1}) \text{ vraie })$.

En conclusion, on a montré que $\big((HR_1)$ est vraie, et $\forall n \geq 1$, $(HR_n$ vraie$) \Rightarrow (HR_{n+1}$ vraie$)\big)$ donc, **par le principe de récurrence** l'hypothèse est vraie pour tout $n \geq 1$, *i.e.* : $\boxed{\forall n \geq 1,\ \forall x > -1, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}.(n-1)!}{(1+x)^n}}$.

I.1.b. *La formule proposée suggère bien sûr l'utilisation pour f de la* ***formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 3***. Les hypothèses en sont vérifiées, en effet :

pour tout $x > 0$, f est de classe C^4 sur l'intervalle $[0, x]$ (car C^∞ sur $\mathbb{R}_+$), donc, il existe $c_x \in]0, x[$, tel que :

(1) $f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(0).(x-0) + \ldots + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0).(x-0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c_x).(x-0)^4$.

En reprenant l'expression des dérivées successives de f (*c.f.* **I.1.a.**), on a :

$\frac{1}{n!}.f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}.\frac{(-1)^{n+1}.(n-1)!}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.\frac{1}{(1+x)^n}$, puis en remplaçant dans (1), avec $x = 0$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ et $x = c_x$ pour $n = 4$, il vient :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{1+c_x}\right)^4 x^4,$$

ou encore : $$\boxed{\forall x > 0, \quad f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.\alpha(x), \text{ avec } \alpha(x) = \left(\tfrac{1}{1+c_x}\right)^4}.$$

◇ Encadrement de $\alpha(x)$: pour tout $x > 0$, $c_x \in]0, x[$, or la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, x]$, en tant que composée de $x \mapsto 1+x$, croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $[1, +\infty[$ (si $x \in \mathbb{R}_+$), et de $x \mapsto \frac{1}{x}$, décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+c_x} \leq \frac{1}{1+0}$, et, s'agissant d'une **inégalité portant sur des réels positifs**, on obtient l'inégalité demandée en composant l'inégalité par la fonction $t \mapsto t^4$, croissante sur $\mathbb{R}_+$: $$\boxed{\frac{1}{(1+x)^4} \leq \alpha(x) \leq 1}.$$

I.2.a. Minoration de $g(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$:

Il est connu que : **(2)** $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$. *Pour retrouver ce résultat,* ***plusieurs démonstrations sont possibles*** :

- la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est **concave** sur son domaine de définition, donc sa courbe représentative est **au-dessus de sa tangente en 0**, d'équation $y = x$.
- **inégalité des accroissements finis** appliquée à la même fonction, sur un intervalle d'extrémités 0 et x, inclus dans $]-1, +\infty[$.
- simple **étude des variations** de $\varphi : x \mapsto \ln(1+x) - x$, sur $]-1, +\infty[$.

On préferera la première démonstration, puisqu'il y a juste à calculer la dérivée seconde de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, et à invoquer le théorème. Le résultat (2) étant acquis, pour $n > 0$ et $x = \frac{1}{n} > 0$, on a par (2) : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, ce qui fournit pour $g(n)$, $(n \geq 1)$, la minoration suivante : **(3)** $g(n) > \frac{1}{2n} > 0$.

◇ Majoration de $g(n)$: le développement de $\ln(1+x)$ obtenu au **I.1.b.**, pour $n > 0$ et $x = \frac{1}{n} > 0$, permet d'écrire :

$$\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) - 1 = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\left[\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + \tfrac{1}{3n^3} - \tfrac{1}{n^4}.\alpha\left(\tfrac{1}{n}\right)\right] - 1$$

Puis en développant, et en regroupant ensuite les termes suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, on obtient : $$g(n) = \tfrac{1}{12n^2} + \tfrac{1}{n^3}.\left[\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{2n}\right).\alpha\left(\tfrac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin, comme $1 + \frac{1}{2n} \geq 1$ $(n > 0)$, il vient :

(4) pour tout $n > 0$, $g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^3}.\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4}.\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

En conclusion, par (3) et (4), on obtient :

$$\boxed{\forall n > 0, \quad 0 < g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^3}.\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4}.\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right]}.$$

I.2.b. En reprenant, la minoration de $\alpha(x)$ obtenue au **I.1.b**, celle-ci s'écrit, pour $x = \frac{1}{n} > 0$: $\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-4}$. **Or,** $t \mapsto 1/(1+t)^4$ est une fonction **décroissante** de t sur $\mathbb{R}_+$, donc, par **composition avec la fonction inverse**, décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, il vient que : $x \mapsto 1/(1+\frac{1}{n})^4$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. **Par suite** :

(5) $\forall n \geq 4, \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^4} \geq \frac{1}{(1+\frac{1}{4})^4}$, or : $\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^4} = \frac{4^4}{(4+1)^4} = \frac{256}{625} \geq \frac{250}{750}$ et $\frac{250}{750} = \frac{1}{3}$

donc, (5) donne encore :

$$\textbf{(6)} \quad \boxed{\forall n \geq 4 : \quad \alpha\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{3}}.$$

I.2.c La majoration de $\alpha\left(\frac{1}{n}\right)$, pour $n \geq 4$, obtenue au **I.2.b.**, permet de revenir sur l'encadrement de $g(n)$ donné au **I.2.a.**, encadrement qui après développement s'écrit :

$$\textbf{(7)} \quad \forall n > 0, \quad 0 < g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{4n^3}.\alpha\left(\frac{1}{n}\right).$$

◇ Pour $n \geq 4$, **en multipliant (6) par $-1/4n^3$**, il vient : $-\frac{1}{4n^3}.\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{12n^3}$, puis en reportant dans (7) :

$$\forall n \geq 4, \quad 0 < g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{12n^3}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier le second membre pour obtenir le résultat demandé :

$$\textbf{(8)} \quad \boxed{\forall n \geq 4, \quad 0 < g(n) \leq \frac{1}{12}.\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right]}.$$

La majoration suivante proposée n'ayant rien d'évident a priori, *aussi la méthode la plus adaptée consiste à **former la différence du majorant précédent et du majorant proposé, pour en examiner le signe**.*

◇ Pour tout $n \geq 2$, par des **réductions successives au même dénominateur** :

$$\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] - \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right] = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{n+1}{n^3} = \frac{n^2-(n+1)(n-1)}{n^3(n-1)} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n^3(n-1)} = \frac{1}{n^3(n-1)}.$$

Il apparaît ainsi que, pour $n \geq 2$:

$$\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] - \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right] \geq 0,$$

et, en reprenant (8), et la minoration du **I.2.a.**, valable pour $n > 0$, on conclut que :

$$\boxed{\forall n \geq 4, \quad 0 < g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right] \leq \frac{1}{12}.\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]}.$$

I.3.a. D'après les définitions de u_n et v_n, $(n \geq 1)$:

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - u_{n+1} \\ &= \left[\ln(n!) - \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right] - \left[\ln((n+1)!) - \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) + n + 1\right] \\ &= \ln\left(\tfrac{(n+1)!}{n!}\right) - \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{n}{n+1}\right) - \ln(n+1) + n - (n+1) \\ &= \ln(n+1) + \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\tfrac{n}{n+1}\right) - \ln(n+1) - 1. \end{aligned}$$

Et donc, après élimination de $\ln(n+1)$: $\boxed{\forall n \geq 1, \quad v_n = g(n)}$.

◇ Pour $n > 4$, la somme demandée se calcule par **télescopage** :

$$\sum_{k=4}^{n-1} v_k = \sum_{k=4}^{n-1}(u_k - u_{k+1}) = \left(\sum_{k=4}^{n-1} u_k\right) - \left(\sum_{k=4}^{n-1} u_{k+1}\right) = \left(\sum_{k=4}^{n-1} u_k\right) - \left(\sum_{k=5}^{n} u_k\right)$$

(on a fini en décalant de 1 l'indice de la deuxième somme).

Les termes communs aux deux sommes s'éliminant, il s'ensuit que :

$$\boxed{\forall n > 4, \quad \sum_{k=4}^{n-1} v_k = u_4 - u_n}.$$

Plus prosaïquement :

$$\sum_{k=4}^{n-1} v_k = (u_4 - u_5) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{n-2} - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_n)$$
$$= u_4 - u_5 + u_5 - u_6 + \ldots + u_{n-2} - u_{n-1} + u_{n-1} - u_n = \underline{u_4 - u_n}.$$

I.3.b. *Considérant que la majoration va servir, à terme, à majorer u_4, il s'agit de majorer directement $\sum_{k=4}^{n} v_k$, sans utiliser le dernier résultat.*

◇ On invoquera donc **I.3.a.** et **I.2.c.**, pour affirmer que :

$$\forall k \geq 1, \; v_k = g(k), \quad \text{et : } \quad \textbf{(9)} \quad \forall k \geq 4, \quad 0 < g(k) \leq \tfrac{1}{2}.\left[\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\right].$$

En **sommant la double inégalité (9), pour k variant de 4 à $n-1$** ($n > 4$), on obtient ainsi :

$$\textbf{(10)} \quad 0 < \sum_{k=4}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=4}^{n-1} \tfrac{1}{2}.\left[\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\right].$$

puis, **par télescopage** encore :

$$\sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{12}.\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{12}\left[\sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{12}\left[\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n-1} \frac{1}{k}\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right] \quad \left(\begin{array}{c}\text{les termes communs aux}\\ \text{deux sommes s'éliminent}\end{array}\right).$$

Comme <u>pour $n > 4$</u> (*i.e.* $n \geq 5$) : $\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right] < \frac{1}{3}$. On déduit, de cette réécriture du majorant dans (10), que :

$$\textbf{(11)} \quad \boxed{\forall n > 4, \qquad 0 < \sum_{k=4}^{n-1} v_k \leq \frac{1}{36}}.$$

◇ Par l'égalité du **I.3.a.**, cette double inégalité fournit **deux renseignements** sur le **comportement de la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$**, à partir du rang $n = 5$:

i) $0 < u_4 - u_n$, ou encore : $u_n < u_4$
ii) $u_4 - u_n \leq \frac{1}{36}$, ou encore : $u_4 - \frac{1}{36} \leq u_n$

Ainsi, on « *retourné* » l'encadrement (11) ($0 < u_4 - u_n \leq \frac{1}{36}$), pour obtenir :

$$\textbf{(12)} \quad \forall n \geq 5, \; u_4 - \frac{1}{36} \leq u_n < u_4.$$

Reste à montrer que la suite u converge vers un réel C, pour obtenir le résultat par passage à la limite sur (12).

• Par (12), il apparaît que **la suite u est bornée,** *ce qui est* ***insuffisant*** *pour établir sa convergence. Heureusement (!), la suite u est aussi* *décroissante. En effet :*

$$\forall k \geq 4, \quad u_k - u_{k+1} = v_k = g(k) > 0 \text{ (c.f. \textbf{I.2.c.})}.$$

La suite u étant **décroissante à partir d'un certain rang** ($n = 4$), **minorée** par $u_4 - \frac{1}{36}$ (*c.f.* **(12)**), d'après le **théorème de la limite monotone** :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers une limite réelle}}.$$

Et, si on note C sa limite, on a, **par passage à la limite sur l'inégalité (12)** :

$$\boxed{u_4 - \frac{1}{36} \leq C \leq u_4}.$$

I.4. Notons, pour $n \geq 1$, $w_n = \frac{n!}{n^{1+\frac{1}{2}}.e^{-n}}$, et **calculons le logarithme** de cette expression :

$$\begin{aligned}\ln(w_n) &= \ln(n!) - \ln\left[n^{1+\frac{1}{2}}.e^{-n}\right] = \ln(n!) - \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\ln(n) - \ln(e^{-n}) \\ &= \ln(n!) - \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\ln(n) + n = u_n.\end{aligned}$$

La conclusion est alors immédiate, puisque, $(\forall\, n \geq 1)$, $w_n = u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(w_n) \text{ existe et vaut } \lim_{n\to+\infty} u_n = C.$$

Puis, **par composition par la fonction exponentielle, continue** sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier **en C** :
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\ln(w_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp(u_n) = e^C,$$

et la fonction exponentielle étant **strictement positive sur** $\mathbb{R}$, on constate que la limite de w_n, notée K, est strictement positive : $K = e^C > 0$.

Enfin, puisque $w_n = \dfrac{n!}{n^{1+\frac{1}{2}}.e^{-n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K = e^C > 0$, on a aussi : $\dfrac{n!}{Kn^{1+\frac{1}{2}}.e^{-n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

et donc, **par définition de l'équivalence de deux suites réelles** :

$$\boxed{n! \sim_{+\infty} Kn^{1+\frac{1}{2}}.e^{-n}}.$$

I.5. D'après **I.3.b.**, $u_4 - \frac{1}{36} \leq C \leq u_4$, ce qui, en composant par la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, donne, pour $K = e^C$: $e^{u_4 - \frac{1}{36}} \leq K \leq e^{u_4}$.et comme, par définition (*c.f.* **I.3.**), $u_4 = \ln(4!) - \left(4 + \frac{1}{2}\right) + 4 \simeq 0.939729$, on a donc :

$$e^{0{,}93972 - \frac{1}{36}} \leq K \leq e^{0{,}93973}, \quad \text{soit l'encadrement suivant :} \quad \boxed{2{,}48 \leq K \leq 2{,}56}.$$

Ceci étant, *qu'est-ce qu'un* ***encadrement à deux décimales*** *?*

> *En effet,* $1{,}09 \leq K \leq 24.75$ *est aussi un encadrement à deux décimales de K ! Au cas où l'on s'attendrait à un encadrement, à la précision* 10^{-2} *(ce qui en revanche aurait un sens)* **on peut proposer un encadrement plus précis de K** *:*

Voici, les grandes lignes du raisonnement : en remplaçant l'entier 4 par un entier $k_0 \geq 4$, on peut montrer un **résultat plus général, pour tout $n > k_0$**, par les mêmes techniques qu'au **I.3.a.**, on a :

- d'une part : $\sum_{k=k_0}^{n-1} v_k = \sum_{k=k_0}^{n-1} u_k - u_{k+1} = u_{k_0} - u_n$ (par télescopage),
- et d'autre part : $0 < \displaystyle\sum_{k=k_0}^{n-1} v_k = \sum_{k=k_0}^{n-1} g(k) \leq \sum_{k=k_0}^{n-1} \tfrac{1}{12}\left[\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\right] = \tfrac{1}{12}\left[\tfrac{1}{k_0-1} - \tfrac{1}{n-1}\right]$.

(où la majoration de $g(k)$, établie au **I.2.c.** ne vaut que si $k \geq 4$)

Ce qui donne :
$$\forall n > k_0 \geq 4, \quad 0 < u_{k_0} - u_n \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{k_0 - 1} - \frac{1}{n-1}\right] \leq \frac{1}{12}.\frac{1}{k_0 - 1}.$$

Puis, en «*retournant*» l'encadrement, comme au **I.3.b.** pour (12), il vient :

$\forall n > k_0 \geq 4, \quad u_{k_0} - \frac{1}{12}.\frac{1}{k_0-1} \leq u_n < u_{k_0}$, puis, par passage à la limite pour n tendant vers l'infini, en composant ensuite par la fonction l'exponentielle, on aboutit à :

$$\textbf{(13)} \quad \forall n > k_0 \geq 4, \quad e^{u_{k_0} - \frac{1}{12}.\frac{1}{k_0-1}} \leq K < e^{u_{k_0}},$$

ce qui équivaut à :

$$|K - e^{u_{k_0}}| \leq e^{u_{k_0}}.\left[1 - e^{-\frac{1}{12}.\frac{1}{k_0-1}}\right].$$

Dans ces conditions :

la valeur de $e^{u_{k_0}}$ fourni un encadrement à la précision 10^{-2} de K, pour tout $k_0 \geq 4$ tel que :

$$\textbf{(14)} \quad 0 \leq e^{u_{k_0}}.\left[1 - e^{-\frac{1}{12}.\frac{1}{k_0-1}}\right] \leq 0,5.10^{-2}.$$

Compte-tenu de la décroissance de u, on peut encore majorer $e^{u_{k_0}}$ par $e^{u_0} = e$ (car on vérifie, par la définition de u_n $(n \geq 1)$ (*c.f.* **I.3.**), que $u_0 = 1$). La condition (14) peut donc être remplacée par la majoration plus large :

$$1 - e^{-\frac{1}{12}.\frac{1}{k_0-1}} \leq 0,5.10^{-2}/e, \quad \text{ce qui équivaut à :} \quad k_0 \geq 1 - \frac{1}{12.\ln\left(1 - \frac{0,005}{e}\right)}$$

Numériquement : $1 - \frac{1}{12.\ln\left(1-\frac{0,005}{e}\right)} \simeq 46.263$, donc :

pour $k_0 = 47$, $u_{k_0} = u_{10} = \ln(10!) - \left(10 + \frac{1}{2}\right).\ln(10) + 10 \simeq 2,51$, est une approximation de C à la précision 10^{-2}, ce qui donne aussi : $2,50 \leq K \leq 2,52$

(la détermination de la valeur exacte de K $(K = \sqrt{2\pi})$ est l'objet des deux parties suivantes).

.PARTIE II.

A.1. X_1 et X_2 sont deux V.A. **indépendantes** suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres respectifs $\lambda_1 = 1$, et $\lambda_2 = 1$, donc ,**d'après le cours**, par **stabilité de la loi de Poisson pour la somme**, leur somme $S_2 = X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2$, *i.e.* :

$$\boxed{S_2(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 0, \; P(S_2 = k) = e^{-2}.\frac{2^k}{k!}}.$$

A.2. *On propose de généraliser le résultat de* ***A.1.***, en montrant que, la propriété :

$(\mathcal{P}_n)$: $\big(S_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\big)$, est vraie pour tout $n \geq 1$.

On procède par récurrence.

- $(\mathcal{P}_1)$ est vraie par hypothèse ($S_1 = X_1$ suit une loi de Poisson de paramètre 1).
- Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ vraie à un rang $n \geq 1$: alors puisque,

  i) $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$,
  ii) l'indépendance des variables $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ entraîne l'indépendance des variables aléatoires $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et X_{n+1},
  iii) X_{n+1} suit une loi de Poissson de paramètre 1, et S_n, d'après l'hypothèse de récurrence, une loi de Poisson de paramètre n.

  par **stabilité de la loi de Poisson pour la somme**, S_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n + 1$, ce qui établit que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Ainsi, $(\mathcal{P}_1)$ est vraie, et pour tout $n \geq 1$, $\big((\mathcal{P}_n)$ vraie $\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{P}_{n+1})$ vraie $\big)$, donc, d'après le **principe de récurrence** :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } n \geq 1, \quad S_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } n, \\ i.e. \quad S_n(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \forall\, k \geq 0,\ P\big(S_n = k\big) = e^{-n}.\dfrac{n^k}{k!}\end{array}}.$$

A.3. Pour tout $n \geq 1$, S_n suivant une loi de Poisson de paramètre n, **d'après le cours** : $\boxed{E\big(S_n\big) = n, \quad \text{et} \quad V\big(S_n\big) = n}$.

B.1. *On a, pour établir cette inégalité (**à connaître impérativement, avec sa démonstration**), le même choix de méthodes qu'au* **I.2.a.**.
Parce que c'est la méthode la plus simple à mettre en œuvre, on utilisera la ***convexité de la fonction exponentielle sur*** $\mathbb{R}$.

◇ La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée seconde ($\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(\exp)''(x) = \exp(x) > 0$) y est positive, donc :

la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, *i.e.* sa courbe représentative est « *au-dessus* » de ses tangentes, en particulier, au-dessus de sa tangente en 0.

Cette tangente en 0 ayant pour équation : $y = \exp(0) + \exp'(0).(x - 0)$, *i.e.* $y = 1 + x$, la **convexité** se traduit par le fait que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) \geq 1 + x$. L'inégalité étant valable pour tout x réel, en changeant x en $-x$, on obtient aussi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel, et } \textit{a fortieri} \text{ pour } x > 0 : \quad \exp(-x) \geq 1 - x}.$$

B.2. En vertu de l'inégalité précédente, pour tout $n > 0$, et $i \geq 0$: $1 - \frac{i}{n} \leq \exp\left(-\frac{i}{n}\right)$.
Tous les facteurs du produit $\prod_{i=0}^{k}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$ étant **positifs**, en déduit, pour tout $k > 0$, la majoration :

$$\textbf{(15)} \quad \prod_{i=0}^{k}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \prod_{i=0}^{k}\exp\left(-\frac{i}{n}\right), \quad \left(\begin{array}{c}\text{la démonstration détaillée consistant à} \\ \text{procéder par récurrence, en utilisant que :} \\ \big(0 \leq a \leq c \text{ et } 0 \leq b \leq d\big) \Longrightarrow \big(0 \leq ab \leq cd\big)\end{array}\right)$$

Or, par les propriétés de l'exponentielle :

$$\textbf{(16)} \quad \prod_{i=0}^{k}\exp\left(-\frac{i}{n}\right) = \exp\left(\sum_{i=0}^{k} -\frac{i}{n}\right) = \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} i\right),$$

et, parce qu'il s'agit de la **somme des $k + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0**, on sait que : $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, puis, en vue d'obtenir l'inégalité annoncée, on peut minorer $k(k+1)/2$ par $k^2/2$.
On a ainsi :

$$-\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{k} i = -\tfrac{1}{n}.\tfrac{k(k+1)}{2} \leq -\tfrac{k^2}{2n},$$

puis par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$\exp\left(-\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{k} i\right) \leq \exp\left(-\tfrac{k^2}{2n}\right).$$

On en tire alors, par (15) et (16) que :

$$\boxed{\prod_{i=0}^{k}\left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)}.$$

B.3.a. Par la définition des $a(k, n)$, et en rappelant que $0! = 1$: $\boxed{a(1, n) = n}$.

◇ Pour tout i, compris entre 1 et $k - 1$, par la définition des $a(k, n)$ $(1 \leq k \leq n + 1)$:
$a(i + 1, n) = \frac{n^{i+1}}{i!} = \frac{n.n^i}{i.(i-1)!} = \frac{i}{n}.\frac{n^i}{(i-1)!}$, donc, en effet : $\boxed{a(i + 1, n) = \frac{i}{n}.a(i, n)}$.

• Cette relation rend possible, pour n et k donnés, un calcul de $a(k,n)$ **par récurrence sur k**, qui se programme ainsi :

a. l'opérateur saisit les valeurs de n et k.
b. on définit une variable notée " *alpha* ", que l'on initialise à la valeur $a(1,n) = n$.
c. on calcule les valeurs $a(i,n)$, $(i \geq 2)$, dans une boucle "FOR" indexée sur i, qui doit s'arrêter avec le calcul de $a(k,n) = \frac{n}{k-1}.a(k-1,n)$.

Voici, ce qu'il est possible de proposer :

(Programme affichant la valeur de $a(k,n)$)

```
program Calcul_de_alpha;
var k, n, i : integer;
var alpha : real;
begin
  writeln( 'Entrer la valeur de n' ) ;
  readln( n ) ;
  writeln( 'Entrer la valeur de k' ) ;
  readln( k ) ;
  alpha := n; {Initialisation de alpha à la valeur alpha(1, n)}
  for i := 1 to k - 1 do
    alpha := alpha * n/i; {Calcul de alpha(i + 1, n) à partir de alpha(i, n)}
  writeln( 'La valeur de alpha(',n,',',k,') est : ', alpha ) ;
  end ;
end ;
```

B.3.b. En itérant la relation, $a(i+1,n) = \frac{n}{i}.a(i,n)$, à partir du rang $i = n$ jusqu'à un rang $i = n-k \geq 1$ (i décroissant), il vient :

$$a(n+1,n) = \frac{n}{n}.\frac{n}{n-1}.\cdots.\frac{n}{n-k+1}.\frac{n}{n-k}.a(n-k,n).$$

Ce qui amène à :

$$\frac{a(n-k,n)}{a(n+1,n)} = \frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}.\cdots.\frac{n-k+1}{n}.\frac{n-k}{n} = 1.\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right).\cdots.\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

Ainsi :

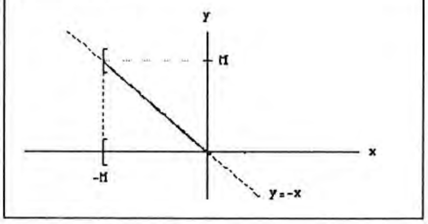
$$\forall\, k \leq n-1,\quad \frac{a(n-k,n)}{a(n+1,n)} = \prod_{i=0}^{k}\left(1-\frac{i}{n}\right),$$ majoré (*c.f.* **B.2.**) par : $\exp\left(-\frac{k}{2n^2}\right)$.

D'où le résultat :

$$\boxed{\forall\, 0 \leq k \leq n-1,\quad \frac{a(n-k,n)}{a(n+1,n)} \leq \exp\left(-\frac{k}{2n^2}\right)}.$$

.PARTIE III.

III.1.a. La représentation graphique de h s'obtient sans difficulté, en remarquant que h est affine sur l'intervalle $[-M,0]$, nulle sur $]-\infty,-M[\cup]0,+\infty[$, $(M>0)$.



Représentation graphique de h

◇ Continuité de h : Sur chacun de ces trois intervalles **dont la réunion est égale à $\mathbb{R}$**, h est affine, donc **continue**. Reste donc à examiner la continuité de h **à la jonction de ces intervalles**, en $-M$ et en 0.

Or, puisque h est nulle sur $]-\infty,-M[$ et $]0,+\infty[$:

$\underline{\lim_{x\to -M^-} h(x)} = 0 \neq \underline{h(-M)}$ et $\underline{\lim_{x\to 0^+} h(x)} = 0 = \underline{h(0)}$.

et, puisque h coïncide sur $[-M,0]$, avec la fonction $x \mapsto -x$:

$\underline{\lim_{x\to -M^+} h(x)} = -M = \underline{f(-M)}$ et $\underline{\lim_{x\to 0^-} h(x)} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 = \underline{h(0)}$.

Ainsi :
- en $x=-M$: h est continue à droite, discontinue à gauche.
- en $x=0$: h est continue à droite et à gauche, donc y est continue.

Par conséquent, puisque par ailleurs, h est continue sur $\mathbb{R} - \{-M,0\}$, h est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points en lesquels h admet une limite à droite et à gauche, donc **on conclura que** : $\boxed{h \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}}$.

III.1.b. La fonction $h : x \longmapsto h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est **continue par morceaux sur** $\mathbb{R}$ (produit de h, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, par une fonction continue), donc, pour tout couple $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$: $\int_X^Y h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt$ existe, et, par suite, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ existe si et seulement si $\lim_{\substack{Y\to+\infty\\X\to-\infty}} \int_X^Y h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ existe.

Or, pour tous $X>0$ et $Y<-M$, h étant nulle en dehors de $[-M,0]$:

$$\int_X^Y h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_{-M}^0 h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_{-M}^0 -t.e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-m}^0 = 1-e^{-\frac{M^2}{2}}.$$

Par conséquent :

$\lim_{\substack{Y\to+\infty\\X\to-\infty}} \int_X^Y h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ existe et vaut : $\lim_{\substack{Y\to+\infty\\X\to-\infty}} \int_{-M}^0 h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1-e^{-\frac{M^2}{2}}$.

On conclut donc que : $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt \text{ existe et vaut : } 1-e^{-\frac{M^2}{2}}}$.

III.2.c. Pour tout $n \geq 1$, S_n est la somme de n V.A. **indépendantes, de même loi** (loi de Poisson de paramètre 1), **admettant une espérance et une variance**, donc , le **théorème de la limite centrée** s'applique et donne que :

la V.A. $\mathcal{T}_n = \dfrac{\sqrt{n}.\left[S_n - E(S_n)\right]}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge (*en loi*) vers la loi normale centrée réduite.

Puisque : $E(S_n) = V(S_n) = n$ (*c.f.* **II.A.3.**), on obtient donc que :

$\boxed{\text{la loi de } \frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \text{ peut être approximée par la loi } \mathcal{N}(0,1)}$.

◇ En admettant, comme il est demandé, que dans ces conditions, $E(Y_n)$ tend, lorsque n tend vers $+\infty$, vers l'espérance d'une V.A. $h(N)$, où N est une V.A. suivant une loi normale centrée réduite, loi dont une densité est donnée par $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}$, donc, par la **formule de transfert** : $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = E(h(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt$

(et l'existence de $E(h(N))$ est avérée car h est continue par morceaux, nulle sur $\mathbb{R}$ en dehors du segment $[-M,0]$, donc : $\lim_{\substack{Y\to+\infty\\X\to-\infty}} \int_X^Y h(t).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt$ existe et est finie).

Or, en utilisant la définition de h :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t).\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt = \int_{-M}^0 \frac{(-t)}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-M}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\left[1-e^{-\frac{M^2}{2}}\right].$$

Donc :

$$\boxed{E(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(h(N)) = \frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}.$$

$\boxed{\textbf{III.2.a.}}$ On obtient le résultat par **comparaison des croissances de n et $\sqrt{n}$** au voisinage de $+\infty$: $n - M\sqrt{n} = n.\left(1 - \frac{M}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

Par suite, **par définition de la divergence d'une suite vers** $+\infty$, pour tout $A \geq 0$, **ici pour $A = 1$** :

$$\boxed{\text{il existe } n_A \geq 0 \text{ (ici } n_1 \geq 0 \text{ car } A = 1\text{), tel que : } \forall n \geq n_A, \quad n - M\sqrt{n} \geq A}.$$

$\boxed{\textbf{III.3.a.}}$ *Le premier résultat s'obtient en situant* $\frac{k-n}{\sqrt{n}}$ *par rapport à* $-M$ *et* 0. En effet, **par définition de h** :

$$\textbf{(17)} \quad \left(h\left(\tfrac{k-n}{\sqrt{n}}\right) = -\left(\tfrac{k-n}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ si et seulement si } \left(-M \leq \tfrac{k-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right),$$

ce qui s'écrit encore :

$$\textbf{(18)} \quad \left(h\left(\tfrac{k-n}{\sqrt{n}}\right) = \left(\tfrac{n-k}{\sqrt{n}}\right)\right) \iff \left(-M\sqrt{n} \leq k-n \leq 0\right).$$

Or, par définition de la partie entière, β, de $M\sqrt{n}$: β est l'unique entier tel que $\beta \leq M\sqrt{n} < \beta + 1$, **ou encore**, de façon équivalente :

β est le plus grand entier tel que : $\beta \leq M\sqrt{n}$.

Ce qui, **en passant aux opposés**, donne aussi que :

(19) $-\beta$ est le plus petit entier relatif tel que : $-M\sqrt{n} \leq -\beta$.

Ainsi, β étant le plus petit entier relatif supérieur ou égal à $-M\sqrt{n}$, il n'en est pas de plus petit, donc pour **un entier relatif** qui s'écrit $\boldsymbol{k-n}$:

$(-M\sqrt{n} \leq k-n)$ équivaut donc à $(-\beta \leq k-n)$.

En conclusion, par (18) :

$$\textbf{(20)} \quad \boxed{\left(h\left(\tfrac{k-n}{\sqrt{n}}\right) = \left(\tfrac{n-k}{\sqrt{n}}\right)\right) \iff \left(-\beta \leq k-n \leq 0\right) \iff \left(n-\beta \leq k \leq n\right).}$$

• Pour un tel entier k, *i.e.* un entier k tel que : $n \geq k \geq n-\beta$, alors, par (19) : $k \geq n - M\sqrt{n}$, donc, puisque l'on suppose, **pour la fin du problème**, que $\boldsymbol{n \geq n_1}$, où n_1 a été défini au **III.2.a.** et est tel que, si $n \geq n_1$, $n - M\sqrt{n} \geq 1$, il vient que :

$$\textbf{(21)} \quad \boxed{\text{si } k \geq n-\beta, \text{ alors } k \geq 1}.$$

◇ **Par définition**, $Y_n = \varphi(S_n)$ où φ est la fonction $x \mapsto h\left[(x-n)/\sqrt{n}\right]$ et S_n suit une loi de Poisson de paramètre n (*c.f.* **II.A.2.**). Donc, **par la formule de transfert pour les variables discrètes**, $E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k).P(S_n = k)$, c'est-à-dire, en explicitant la loi de S_n et $\varphi(k)$:

$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h\left[\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right].e^{-n}.\frac{n^k}{k!}$ (sous réserve de convergence de la série).

Or, dans cette somme, **par définition de h**, $h\left[\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right]$ est nul, sauf si $\frac{k-n}{\sqrt{n}} \in [-M, 0]$, et l'on a vu (*c.f.* **(20), (21)**) que : $\left((k-n)/\sqrt{n} \in [-M,0]\right) \iff \left(1 \leq n-\beta \leq \boldsymbol{k} \leq n\right)$. Donc, **la somme se réduit à une somme pour $\boldsymbol{k} \in [\![\boldsymbol{n}-\beta, \boldsymbol{n}]\!]$**, il s'agit ainsi en fait d'une somme finie, ce qui règle le problème de convergence, et l'on a :

$$E(Y_n) = \sum_{k=n-\beta}^{n} h\left[\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right].e^{-n}.\frac{n^k}{k!} \overset{c.f.(20)}{=} \sum_{k=n-\beta}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}}.e^{-n}.\frac{n^k}{k!}$$

En **factorisant par les termes indépendants de k**, on poursuit ainsi :

(22) $E(Y_n) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.\sum_{k=n-\beta}^{n}(n-k).\frac{n^k}{k!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.\sum_{k=n-\beta}^{n} n.\frac{n^k}{k!} - k.\frac{n^k}{k!}$.

Ce qui permet de faire **apparaître les nombres $a(k,n) = n^k/(k-1)!$** en simplifiant l'écriture des termes de la différence dans la dernière somme.

Ainsi, puisque : $n.\frac{n^k}{k!} - k.\frac{n^k}{k!} = \frac{n^{k+1}}{k!} - \frac{n^k}{(k-1)!} = a(k+1,n) - a(k,n)$, (22) s'écrit encore :

$$\textbf{(23)}\quad E(Y_n) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.\sum_{k=n-\beta}^{n} a(k+1,n) - a(k,n)$$

Et l'on peut conclure, **en utilisant le «*télescopage*»** : puisque, par élimination des termes communs aux deux sommes :

$$\sum_{k=n-\beta}^{n} a(k+1,n) - \sum_{k=n-\beta}^{n} a(k,n) = \sum_{k=n-\beta+1}^{n+1} a(k,n) - \sum_{k=n-\beta}^{n} a(k,n) = \underline{a(n+1,n) - a(n-\beta,n)},$$

finalement, (23) s'écrit :

$$\textbf{(24)}\quad \boxed{E(Y_n) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.(\,a(n+1,n) - a(n-\beta,n)\,)}.$$

$\boxed{\text{III.3.a.}}$ Par (24) :

$$\textbf{(25)}\quad \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n+1,n) = E(Y_n) + \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n-\beta,n).$$

Donc dans l'encadrement proposé de $\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n+1,n)$, **la majoration est correcte** (c'est même une égalité). Par ailleurs, dans l'égalité précédénte (25), $e^{-n}/\sqrt{n} \geq 0$, et aussi, par définition des $a(k,n)$, $a(n-\beta,n) \geq 0$, donc, **le membre de droite peut être minoré par $E(Y_n)$**. On a donc vérifié que :

$$\textbf{(26)}\quad \boxed{E(Y_n) \leq \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n+1,n) \leq E(Y_n) + \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n-\beta,n)}.$$

$\boxed{\text{III.3.b.}}$ Le terme encadré précédemment se réécrit, par **définition de $a(n+1,n)$** et les **propriétés des fonctions puissances**, en particulier par le fait que $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n+1,n) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.\frac{n^{n+1}}{n!} = e^{-n}.\frac{n^{n+1-\frac{1}{2}}}{n!} = e^{-n}.\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}.$$

• Par ailleurs, puisque **par hypothèse $n \geq n_1$**, d'après **(22)** : $n-\beta \geq 1$, donc, par la majoration établie au **II.B.3.b.**, pour $k=\beta$: $a(n-\beta,n) \leq a(n+1,n).\exp\left(-\frac{\beta^2}{2n}\right)$.

On déduit un nouvel encadrement à partir de (25) :

$$E(Y_n) \leq \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n+1,n) \leq E(Y_n) + \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.a(n+1,n).\exp\left(-\frac{\beta^2}{2n}\right),$$

ou encore, en utilisant (26) :

$$\textbf{(27)}\quad \boxed{E(Y_n) \leq e^{-n}.\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} \leq E(Y_n) + e^{-n}.\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}.\exp\left(-\frac{\beta^2}{2n}\right)}.$$

$\boxed{\text{III.3.c.}}$ Pour établir l'égalité proposée, on reprendra la **définition de β**, selon laquelle : $\beta \leq M\sqrt{n} < \beta+1$. *Comme on a souvent à le faire quand il est question de partie entière*, ***on décompose cet encadrement en deux inégalités*** :

$\beta \leq M\sqrt{n}$, et $M\sqrt{n} < \beta+1$, **pour en déduire un encadrement de β**.

On a ainsi, *et l'équivalence est* ***à connaître*** :

$$\beta = [M\sqrt{n}] \iff \beta \leq M\sqrt{n} < \beta+1 \iff \textbf{(28)}\quad \boxed{M\sqrt{n}-1 < \beta \leq M\sqrt{n}}.$$

◇ On tire facilement de cet encadrement, un encadrement de $e^{-\frac{\beta^2}{2n}}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} M\sqrt{n} = +\infty$, il existe un rang $n_0 \geq 0$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ M\sqrt{n}-1 > 0$.

Et **par conséquent**, pour $n \geq n_0$, l'inégalité (28) est une inégalité entre trois réels **positifs**. Donc, on peut la composer par la fonction carré, **croissante sur** $\mathbb{R}_+$ et l'on obtient ainsi :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left(M\sqrt{n}-1\right)^2 \leq \beta^2 \leq \left(M\sqrt{n}\right)^2.$$

Puis, **en composant par la fonction** $x \mapsto \exp\left(-\frac{x}{2n}\right)$, décroissante sur $\mathbb{R}$ $(n \geq 1)$:

$$\textbf{(29)} \quad \forall n \geq n_0, \quad \exp\left(-\frac{\left(M\sqrt{n}-1\right)^2}{2n}\right) \leq \exp\left(-\frac{\beta^2}{2n}\right) \leq \exp\left(-\frac{\left(M\sqrt{n}\right)^2}{2n}\right).$$

En examinant, pour le majorant et le minorant, l'argument de la fonction exponentielle, on constate que :

$$-\frac{\left(M\sqrt{n}-1\right)^2}{2n} = -\frac{M^2.n-2.M\sqrt{n}+1}{2n} = -\frac{M^2}{2} + M.\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{M^2}{2}$$

$$-\frac{\left(M\sqrt{n}\right)^2}{2n} = -\frac{M^2}{2}$$

Ainsi, **en composant par la fonction exponentielle** :

$$e^{-\frac{(M\sqrt{n})^2}{2n}} = e^{-\frac{M^2}{2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{(M\sqrt{n}-1)^2}{2n}} = e^{-\frac{M^2}{2}},$$

le passage à la limite étant légitimé par la **continuité de l'*exponentielle* en** $-\frac{M^2}{2}$.

• À la lumière de ces résultats, on peut appliquer le **théorème d'encadrement** à la suite de terme général $e^{-\frac{\beta}{2n}}$, en s'appuyant sur (29). ce qui donne :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\beta^2}{n}} = e^{-\frac{M^2}{n}}}.$$

III.3.d. **Ayant établi l'existence de cette dernière limite**, et trouvé sa valeur, sachant que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}}$ existe et vaut $K > 0$ (*c.f.* **I.4.**) et donc que :

$\lim_{n\to\infty} e^{-n}.\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$ existe et vaut $1/K$ (par passage aux inverses),

sachant encore que :

$\lim_{n\to\infty} E(Y_n)$ existe et vaut $\frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$,

on peut passer à la limite sur l'inégalité (27), car il est établi que **les trois membres de l'inégalité admettent une limite finie**. Connaissant ces limites, on obtient :

$$\textbf{(30)} \quad \frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{K} \leq \frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{K}.e^{-\frac{M^2}{n}}.$$

Cette double inégalité est **valable pour tout $M >$ o** (c'est l'hypothèse de travail de cette **Partie II**), on peut donc **envisager de passer à la limite sur (30), pour M tendant vers** $+\infty$.

• Puisque, par composition de limites : $\lim_{M\to+\infty} e^{-\frac{M^2}{2}} = 0$, on obtient, par les théorèmes usuels sur les limites :

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1-e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{et} \quad \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{K}.e^{-\frac{M^2}{2}} = 0.$$

On est donc fondé à passer à la limite pour $M \to +\infty$ **sur (30)** car les trois termes de la double inégalité admettent une limite. On obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{K} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{d'où l'on tire que nécessairement :} \quad \boxed{K = \sqrt{2\pi}}.$$

Si l'on reprend le **I.4.**, on a donc en conséquence atteint l'**objectif fixé** du problème et montré que : $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi}.n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}$, souvent écrit aussi :

$$\boxed{n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}.n^n.e^{-n} \quad \textit{(Formule de Stirling)}}.$$

Géologie NANCY 98 — Produit de convolution — Suites de variables aléatoires discrètes — Durée 3 h 00

Documents et calculatrices interdits

Le problème n°1 et la partie A du problème n°2 sont indépendants. La partie B du problème n°2 utilise certains résultats de la partie A. Le symbole ¶ signale les questions les plus difficiles.

Les réponses devront être entièrement justifiées, et il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Problème n°1

1-1. Montrer que si X est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$, il en est de même de la variable $(1-X)$.

1-2. Si X est une variable aléatoire de densité f, déterminer la densité de la variable aléatoire $(1-X)$.

1-3. Si X est une variable aléatoire positive de densité f, déterminer la densité de la variable aléatoire $\ln(X)$.

On rappelle *que si A et B sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives ϕ et ψ, alors la variable aléatoire $(A+B)$ admet comme densité la fonction $\phi * \psi$ définie par*

$$(\phi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$$

pour x réel.

2. On se donne deux variables aléatoires indépendantes X et Y uniformément réparties sur $[0,1]$: déterminer la loi de la variable aléatoire $X(1-Y)$; tracer le graphe de sa fonction de répartition, et celui de sa densité.

3. ¶ Plus généralement, étant données deux variables aléatoires indépendantes X et Y de densités respectives f et g nulles en dehors du segment $[0,1]$, montrer que la variable aléatoire $X(1-Y)$ admet comme densité la fonction définie par

$$\int_{\lambda}^{1} f(\frac{\lambda}{t})g(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

pour λ compris entre 0 et 1.

On considère désormais une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans le segment $[0,1]$, et on lui associe la suite de segments

$$\left(\left[\prod_1^{n+1} X_j, \prod_1^n X_j\right]\right)_{n\geq 1} \text{ de longueurs } (L_n)_{n\geq 1}.$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $L_n = X_1 Y$, où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et ayant même loi que L_{n-1}.

5. ¶ On suppose, dans cette question, les variables aléatoires X_n uniformément réparties sur $[0,1]$: déterminer la loi de la variable aléatoire L_n, et calculer son espérance.

6. Appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables aléatoires $(\ln L_n)_{n\geq 1}$: quelle conclusion en tirez-vous ?

Problème n°2

Partie A

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Préciser le noyau et l'image de l'application linéaire définie par la matrice A lorsque l'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique.

2. Étudier les valeurs propres de A, et réduire A sous forme diagonale.

3. Étant donnée une matrice B à 2 lignes et 4 colonnes, on forme la matrice carrée d'ordre 6

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

où les deux dernières colonnes sont donc constituées de cœfficients nuls. Montrer que la puissance n-ième de cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} A^n & 0 \\ B_n & 0 \end{pmatrix}$$

et où B_n est une matrice à calculer.

Partie B

On considère des nombres p, q, $r \geq 0$, avec $p+q+r=1$. Étant donnée une pile de trois livres L_1, L_2 et L_3, une expérience consiste à tirer le livre L_1 avec la probabilité p, ou le livre L_2 avec la probabilité q, ou encore le livre L_3 avec la probabilité r pour replacer ensuite le livre choisi sur le haut de la pile.

Par exemple, *en tirant L_2 de la pile $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$, on transforme cette dernière en $\begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix}$ avec la probabilité q.*

Il existe 6 piles possibles, qu'on numérote ainsi :

$$P_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \\ L_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad , \quad P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad , \quad P_6 = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{pmatrix} \quad .$$

1. Écrire la matrice T, carrée d'ordre 6, dont le cœfficient t_{ij} de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est égal à la probabilité de passage de la pile P_i à la pile P_j (en une seule expérience).

On suppose dorénavant que

$$p = \frac{1}{3} \quad , \qquad q = \frac{2}{3}$$

et $r = 0$.

On part de la pile P_5 à l'instant 0, et on réalise l'expérience à des instants successifs, mesurés par des nombres entiers positifs : on désigne par X_n l'état de la pile de livres à l'instant $n \geq 0$. Ainsi X_n est-elle une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

On admet *que la probabilité conditionnelle*

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = P_j \mid X_n = P_i)$$

de l'événement $\{X_{n+1} = P_j\}$ sachant l'événement $\{X_n = P_i\}$ vaut t_{ij}, pour tout n entier ≥ 0, et tous i, j entiers compris entre 1 et 6.

2. On note

$$t_i(n) = \mathbf{P}(X_n = P_i)$$

la probabilité de l'événement $\{X_n = P_i\}$. Montrer que

$$t_i(n+1) = \sum_{j=1}^{6} t_{ji} t_j(n)$$

pour $n \geq 0$, et i entre 1 et 6.

3. Calculer enfin la probabilité

$$\mathbf{P}(X_n = P_1)$$

de l'événement $\{X_n = P_1\}$, pour $n \geq 1$.

Corrigé

.PROBLÈME n°I.

$\boxed{\text{I.1-1.}}$ Une variable X **uniformément répartie sur** $[0,1]$ peut être caractérisée par une **densité de la forme** :

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition de X, F_X, est alors définie sur $\mathbb{R}$, par : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$.

Il s'ensuit que : $F_X(t) = 0$ sur $]-\infty, 0[$, t sur $[0,1]$, et 1 sur $]1, +\infty[$,

et que : F_X est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$, avec $F'_X = f$.

De façon équivalente :

une telle fonction de répartition est caractéristique de la loi uniforme.

Bien que cela ne soit pas explicitement demandé, ***on peut préciser que*** :

dans la mesure où $u : x \mapsto 1 - x$ est une fonction de **classe C^1**, et **strictement monotone**, (ici décroissante), **sur $\mathbb{R}$, et donc sur $X(\Omega)$**, on est assuré, **d'après le cours**, que l'on a bien affaire, en $1 - X = u(X)$, à une V.A. continue.
Cette justification *a priori* vaut encore pour le **I.2.**, mais pour le **I.3.**, on est en dehors du programme car, avec cette fois $u : x \mapsto \ln x$, u est de classe C^1 et strictement monotone, mais <u>seulement</u> sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ <u>privé</u> d'un point, $x = 0$.

- On accède à la **loi de $1 - X$** *via* sa **fonction de répartition**, notée F_{1-X}.

<u>pour tout t réel</u> : $F_{1-X}(t) = P(1 - X \leq t) = P(1 - t \leq X)$. En passant à l'événement contraire de $\{1 - t \leq X\}$, on obtient que :

(1) $P(1 - X \leq t) = 1 - P(X < 1 - t)$, puis : $P(1 - X \leq t) = 1 - P(X \leq 1 - t)$.

car, s'agissant d'une variable continue : $P(X < 1 - t) = P(X \leq 1 - t)$.

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{1-X}(t) = 1 - F_X(1 - t)$.

Par suite, compte-tenu des valeurs prises par F_X :

$$F_{1-X}(t) = 1 - F_X(1-t) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si} \quad (1 - t > 1) \iff (t < 0) \\ 1 - (1 - t) = t & \text{si} \quad (0 \leq 1 - t \leq 1) \iff (0 \leq t \leq 1) \\ 1 - 0 = 1 & \text{si} \quad (1 - t < 0) \iff (t > 1) \end{cases}$$

On a donc montré, **caractérisant la loi par sa fonction de répartition**, que :

$\boxed{1 - X \text{ est une V.A. continue, suivant la loi uniforme sur } [0,1]}$.

I.1-2. Dans cette généralisation du **I.1.**, procédant comme en (1), on obtient encore :

(2) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{1-X}(t) = 1 - F_X(1 - t)$.

En tant que fonction de répartition d'une V.A. à densité, d'après le cours, F_X vérifie les propriétés caractéristiques suivantes :

(3) F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et admet, sauf peut-être en un nombre fini de points, que l'on notera $x_1, x_2, \ldots, x_p$, une dérivée continue, notée f_X (fonction de densité).

D'après (2), il s'ensuit, que, **par différence et composition de fonctions** (composition de la fonction $x \mapsto 1 - x$ par f_X, et différence de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto f_X(1 - x)$) :

la fonction de répartition de $1 - X$, notée F_{1-X}, est continue sur $\mathbb{R}$, et admet, sauf en les éventuels points $1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_p$, une dérivée continue.

Ainsi : la fonction de répartition de $1 - X$ vérifie les propriétés caractéristiques (décrites en (3)) d'une fonction de répartition de variable aléatoire à densité.

Et par les théorèmes usuels de dérivation (différence et composition), sauf en les éventuels points $t \in \mathbb{R}$, tels que F_X est non dérivable en $1 - t$, *i.e.* en les points $1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_p$ (car $(1 - t = x_i) \iff (t = 1 - x_i)$) :

$$F'_{1-X}(t) = [1 - F_X(1 - t)]' = -(1 - t)'.F'_X(1 - t) = f_X(1 - t).$$

On peut alors conclure :

$1 - X$ est une V.A. de densité f_{1-X}, définie par : $f_{1-X}(x) = f_X(1 - x)$, pour tout x réel, sauf éventuellement en un nombre fini de points de la forme $1 - x_i$, avec x_i réel en lequel F_X est non-dérivable

.

I.1-3. On caractérise $Z = \ln X$ par sa fonction de répartition : $F_{\ln X}(t) = P(\ln X \leq t)$.
Or, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $(\ln X \leq t) \iff (X \leq e^t)$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{\ln X}(t) = P(\ln X \leq t) = P(X \leq e^t) = F_X(e^t).$$

Ainsi, en tant que composée de la fonction $t \mapsto e^t$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et de F_X, **la fonction de répartition de $Z = \ln X$ est continue sur $\mathbb{R}$** et dérivable en tout point t tel que F_X est dérivable en e^t, donc, si F_X admet des points de non-dérivabilité, notés x_i, (en nombre fini nécessairement), **$F_{\ln X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en les points $t_i = \ln x_i$**. Et en les points où elle est dérivable, en introduisant la densité f de X :

$$F'_{\ln X}(t) = [F_X(e^t)]' = (e^t)'.F'_X(e^t) = e^t.f(e^t).$$

Ainsi, on a montré que :

$$\boxed{\text{$Z = \ln X$ est une V.A. continue de densité $f_{\ln X}$, définie sauf éventuellement en un nombre fini de points, de la forme e^{x_i}, où x_i est un point de non-dérivabilité de F_X, par : $f_{\ln X}(t) = e^t.f(e^t)$}}.$$

I.2. *Compte-tenu des questions préliminaires **I.1-1.**et **I.1-2.**, **on introduira la V.A. U égale à $1 - Y$**, dont la densité a été calculée précédemment.* Notons Z la V.A. égale au produit $X.(1 - Y)$. Z est encore égale au produit $X.U$, et la fonction de répartition de Z est définie, pour tout t réel par :

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X.U \leq t).$$

Et si l'on note $f_{(X,U)}$ la densité du couple (X, U) :

$$\text{(4)} \quad F_Z(t) = P(X.U \leq t) = \iint_{\mathcal{D}_t} f_{(X,U)}(x, u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u,$$

où $\mathcal{D}_t$ est le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\mathcal{D}_t = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid x.u \leq t\}$.

• Puisque X et Y sont <u>indépendantes</u>, **d'après le cours**, les V.A. **X et $U = 1 - Y$ sont <u>indépendantes</u>** et par conséquent :

le couple (X, U) est un couple de V.A. dont la densité $f_{(X,U)}$, est définie par : $\quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X,U)} = f_X(x).f_U(u).$

Par ailleurs, pour cette question, X et Y suivent la loi $\mathcal{U}([0, 1])$, et d'après le **I.1-1.**, il en est encore de même pour $U = 1 - Y$. Si l'on note **f la densité de la loi** $\mathcal{U}([0, 1])$ (définie au **I.1-1.**), on a donc :

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X,U)} = f(x).f(u).$$

<u>**Dans ces conditions**</u> : la densité du couple (X, U) est nulle en dehors du pavé $[0, 1] \times [0, 1]$, donc (4) s'écrit aussi :

$$F_Z(t) = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}_t} f_{(X,U)}(x, u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u, \quad \text{où : } \tilde{\mathcal{D}}_t = [0, 1] \times [0, 1] \cap \mathcal{D}_t.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left((x, u) \in \tilde{\mathcal{D}}_t\right) \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \\ x.u \leq t \end{cases} \iff \begin{cases} u = 0 \text{ et } x \in [0, 1] \\ \text{ou} \\ u \in \left]0, 1\right] \text{ et } 0 \leq x \leq \min\left\{\frac{t}{u}, 1\right\} \end{cases}$$

Donc, on a pour dernière réécriture de (4) :

$$F_Z(t) = \int_0^1 \int_0^{\min\{\frac{t}{u},1\}} f(x)f(u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u.$$

Reste donc à déterminer, suivant les valeurs de t et de u, **la valeur de** $\min\left\{\frac{t}{u}, 1\right\}$, afin de calculer d'abord l'intégrale la plus intérieure.

• Pour t négatif, fixé : l'intégrale la plus intérieure porte sur un intervalle de longueur nulle (car, u étant positif, si $t \leq 0$: $\min\{\frac{t}{u}, 1\} = \frac{t}{u} \leq 0$), donc : $F_Z(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

• Pour $t > 0$, fixé : puisque, dans l'intégrale, u est positif, $(\frac{t}{u} \leq 1) \iff (u \geq t, u \neq 0)$, donc, pour $t \geq 0$, et $u \in]0,1]$:

- si $t > 1$: $\forall u \in]0,1]$, $\frac{t}{u} > 1$ et $\min\{\frac{t}{u}, 1\} = 1$,
- si $0 < t \leq 1$: pour $u < t$, $\min\{\frac{t}{u}, 1\} = 1$, et pour $u \geq t$, $\min\{\frac{t}{u}, 1\} = \frac{t}{u}$.

En conclusion, en utilisant la **relation de Chasles** pour l'intégrale la plus extérieure, afin de pouvoir remplacer la borne supérieure pour u dans l'intégrale intérieure :

(5)
- si $t > 1$: $F_Z(t) = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(u)\,dx\,du$, ■ si $t \leq 0$: $F_Z(t) = 0$,
- et si $0 < t \leq 1$: $F_Z(t) = \int_0^t \int_0^1 f(x)f(u)\,dx\,du + \int_t^1 \int_0^{\frac{t}{u}} f(x)f(u)\,dx\,du.$

En utilisant le **théorème de Fubini** pour le calcul des intégrales, et la définition de f, constante, égale à 1 sur $[0,1]$, il vient :

- si $t > 1$: $F_Z(t) = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right).\left(\int_0^1 f(y)\,dy\right) = 1$, ■ si $t \leq 0$: $F_Z(t) = 0$,
- et si $0 < t \leq 1$:

$$F_Z(t) = \int_0^t 1.\left(\int_0^1 1\,dx\right)du + \int_t^1 1.\left(\int_0^{\frac{t}{u}} 1\,dx\right)du = \int_0^t 1\,du + \int_t^1 \frac{t}{u}\,du$$

Ainsi, $F_Z(t) = [u]_0^t + [t.\ln u]_t^1 = t - t\ln(t).$

Et, **après dérivation de F_Z** (F_Z est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$), il vient que :

la variable $Z = X.(1-Y)$ est une V.A. continue, dont une densité est f_Z, nulle sur $\mathbb{R} - [0,1]$, et telle que : $f_Z(t) = [-t\ln(t) + t]' = -\ln t$ sur $]0,1[$.

I.3. ¶ Sous l'hypothèse que X et Y suivent des lois de densités f et g **nulles en dehors du segment** $[0,1]$, il vient tout d'abord, d'après **I.1-2.**, que :

$1 - Y$ admet pour densité la fonction $f_{1-Y} : t \mapsto f(1-t)$, nulle aussi en dehors du segment $[0,1]$, puisque : $(0 \leq 1 - t \leq 1) \iff (0 \leq t \leq 1)$.

Par conséquent, l'hypothèse d'**indépendance des variables X et Y** étant conservée, on peut reprendre littéralement les étapes suivies au **I.2.**, à l'exception de la substitution de f à f_{1-Y} : on remplace cette fois $f_{1-Y}(u)$ par $g(1-u)$ (en vertu du **I.1-2.**). On aboutit ainsi à l'analogue suivant de (5) :

- si $t \geq 1$: $F_Z(t) = \left(\int_0^1 f_X(x)\,dx\right).\left(\int_0^1 f_{1-Y}(y)\,dy\right) = 1$, ■ si $t < 0$: $F_Z(t) = 0$,
- et si $0 \leq t < 1$:

(6) $$F_Z(t) = \int_0^t g(1-u).\Big(\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I_1}\Big)du + \int_t^1 g(1-u).\Big(\underbrace{\int_0^{\frac{t}{u}} f(x)\,dx}_{I_2}\Big)du.$$

Et, *puisque manifestement la variable u joue le rôle joué par t dans le résultat demandé*, on effectue le **changement de variable affine** $x = \frac{\lambda}{u}$, sur les intégrales I_1 et I_2. Pour ce changement de variable, on a :

$\lambda = xu, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{u}.\mathrm{d}\lambda,$ et en changeant convenablement les bornes :

$$I_1 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^u f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{u}, \text{ et } I_2 = \int_0^{\frac{t}{u}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{u}$$

Ce qui permet de réécrire (6) sous la forme :

$$F_Z(t) = \int_0^t g(1-u).\left(\int_0^u f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{u}\right)\mathrm{d}u + \int_t^1 g(1-u).\left(\int_0^t f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{u}\right)\mathrm{d}u.$$

Enfin, *parce que l'on doit dériver $F_Z(t)$ par rapport à t pour accéder à la fonction de densité de Z, et qu'après dérivation il doit rester une intégrale par rapport à u de la fonction $\frac{1}{u}g(1-u)f(\frac{\lambda}{u})$*, on **intervertit les intégrations** par rapport à u et λ, en invoquant le **théorème de Fubini** :

- pour la première intégrale double de la somme : qui porte sur des variables u et λ liées par la condition : $0 \leq \lambda \leq u \leq t$, il vient :

$$\int_0^t g(1-u).\left(\int_0^u f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{u}\right)\mathrm{d}u = \int_0^t \left(\int_\lambda^t g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}\lambda$$

- pour la seconde intégrale double de la somme : qui porte sur des variables u et λ qu'aucune condition ne lie, il vient :

$$\int_t^1 g(1-u).\left(\int_0^t f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{u}\right)\mathrm{d}u = \int_0^t \left(\int_t^1 g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}\lambda$$

Après ces transformations, on a donc :

$$F_Z(t) = \int_0^t \left(\int_\lambda^t g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}\lambda + \int_0^t \left(\int_t^1 g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}\lambda.$$

Puis par **linéarité de l'intégrale** :

$$F_Z(t) = \int_0^t \left(\int_\lambda^t g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_t^1 g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}\lambda.$$

Et enfin, grâce à la **relation de Chasles** : $F_Z(t) = \int_0^t \left(\int_\lambda^1 g(1-u).f\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}\lambda.$

<u>**Ainsi**</u> :

- <u>pour $0 \leq t \leq 1$</u> :

$$F_Z(t) = \int_0^t f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \quad \text{où } f : \begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda) = \int_\lambda^1 g(1-u).f(\frac{\lambda}{u})\frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{array}$$

- <u>pour $t < 0$ et $t \geq 1$</u> : $F_Z(t) = 0$.

Et, **par dérivation sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ où F_Z est dérivable**, on obtient que :

la variable $Z = X.(1-Y)$ est une V.A. continue, dont une densité est f_Z, nulle sur $\mathbb{R} -]0,1[$, et définie sur $]0,1[$ par : $f_Z(t) = f(t) = \int_t^1 g(1-u).f(\frac{t}{u})\frac{\mathrm{d}u}{u}$.

I.4. *On remarquera tout d'abord cette incohérence de l'énoncé, qui demande de montrer une propriété faisant intervenir, au rang 1 la V.A. L_0, non définie.* **Par extension de la définition de L_n pour $n \geq 1$**, on pourra considérer que L_0 est la longueur de l'intervalle d'extrémités : $\prod_{j=1}^{1} X_j = X_1$ et $\prod_{j=1}^{0} X_j$, et user de la convention, usuelle en mathématique, selon laquelle un produit portant sur un ensemble vide d'indices vaut 1, de sorte que : $\prod_{j=1}^{0} X_j = \prod_{j\in\emptyset} X_j = 1$. Dans ces conditions(*), *i.e.* : ▌$L_0 = 1 - X_1$.

◊ Pour établir la propriété pour tout rang $n \geq 1$, *il est inutile de procéder par récurrence, comme le lecteur pourra le constater par lui-même.* Une **démonstration directe** convient pour montrer que :

$$(\mathcal{P}_n) : \quad \begin{pmatrix} L_n \text{ s'écrit } L_n = X_1.Y, \text{ avec } Y \text{ une V.A. indépendante de } X_1 \\ \text{et de même loi que } L_{n-1} \end{pmatrix}.$$

• Au rang n=1 : L_1 est la V.A. égale à longueur de l'intervalle $[\prod_{j=1}^{2} X_j, \prod_{j=1}^{1} X_j] = [X_1X_2, X_1]$, c'est-à-dire égale à la différence : $X_1 - X_1X_2 = X_1.(1 - X_2)$, ce qui a bien un sens car, puisque X_1 et X_2 prennent leurs valeurs dans $[0,1]$, $L_1 \geq 0$.

Ainsi, en posant $Y = 1 - X_2$, si L_0 est défini comme convenu par : $L_0 = 1 - X_1$, X_1 et X_2 ayant par hypothèse la même loi, on vérifie que **Y et L_0** suivent la **même loi**. Et par ailleurs, puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, **d'après le cours, X_1 et $Y = 1 - X_2$** (fonction de X_2 seul) **sont indépendantes**.

On peut donc conclure que : $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

• Pour un rang $n \geq 2$: alors, par définition, L_n est la longueur de l'intervalle $[\prod_{j=1}^{n+1} X_j, \prod_{j=1}^{n} X_j]$, égale à $\prod_{j=1}^{n} X_j - \prod_{j=1}^{n+1} X_j$, soit encore :

$$\forall n \geq 2, \quad L_n = \left[\prod_{j=1}^{n} X_j\right].(1 - X_{n+1}),$$

ce qui de nouveau à un sens car les X_j prennent leurs valeurs dans $[0,1]$ et donc L_n, ainsi défini, est ≥ 0 comme produit de V.A. positives (autrement dit les bornes de l'intervalle sont dans le bon sens).

En posant cette fois $Y = \prod_{j=2}^{n} X_j.(1 - X_{n+1})$, on a : **(7)** ▌$L_n = X_1.Y$.

Et, **d'après le cours**, puisque Y est fonction de $X_2, X_3, \dots, X_{n+1}$, et non de X_1, avec, **par hypothèse**, $X_2, X_3, \dots, X_{n+1}$ indépendantes de X_1 :

(8) ▌Y est indépendante de X_1.

Par ailleurs, puisque : $\forall j \in [\![2, n+1]\!]$, X_j suit la même loi que X_{j-1} :

(9) ▌$Y = \prod_{j=2}^{n} X_j.(1 - X_{n+1})$ suit la même loi que $L_{n-1} = \prod_{j=1}^{n-1} X_j.(1 - X_n)$.

En conclusion, par (7), (8) et (9), on a montré que : $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$, et si l'on prend en compte la démonstration pour le rang 1 :

pour tout $n \geq 1$: L_n s'écrit $L_n = X_1.Y$, avec Y une V.A. indépendante de X_1 et de même loi que L_{n-1}

.

(*) Sinon, c'est-à-dire si on ne donne pas de sens à L_0, on montrera la propriété à partir du rang 2.