Et $N(a)$ suivant la loi de Poisson de paramètre λa, son espérance et sa variance sont connues, et l'on conclut :

$$\boxed{E\big(N(a)\big) = \lambda a + 1 \text{ , et } V\big(N(a)\big) = \sigma^2\left(N(a)\right) = \lambda a}.$$

PARTIE II

II.1. *Posons d'abord clairement le problème,* ***compte-tenu de la nouvelle définition des V.A.*** *Y_k :*

> $n > 0$ étant fixé, les variables Y_k ainsi définies ($k \in \mathbb{N}$) gardent mémoire uniquement des n "*premières*" variables X_i ($0 \leq i < n$) ; plus précisément :
> Y_i "*enregistrent*" ($Y_i = X_i$) pour $0 \leq i < n$, tandis que les Y_i, $i \geq n$, sont fixées arbitrairement à la valeur 2, de sorte que : $P(Y_i \leq a) = 0$ pour $i \geq n$ car $a \in \left]0,1\right]$. **Ainsi**, $N_n(a)$ est une V.A. comptant le nombre de V.A. X_i parmi $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, prenant leur valeur dans $[0, a]$.

◇ Loi de $N_n(a)$ ($n \geq 0$, $0 < a \leq 1$) : compte-tenu de la dernière remarque, et sachant que les variables X_i prennent leurs valeurs dans $[0,1]$: $\boxed{N_n(a) = [\![0, n]\!]}$. Par ailleurs, pour $k \in [\![0, n]\!]$:

> $P\big(N_n(a) = k\big)$ est la probabilité pour que k variables Y_i prennent une valeur dans $[0, a]$, et, puisque pour $j \geq n$, Y_j est une V.A. certaine égale à 2, **on peut préciser** : $P\big(N_n(a) = k\big)$ est la probabilité pour que k variables Y_i, **parmi** $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ prennent une valeur dans $[0, a]$.

En conséquence, utilisons l'outil approprié pour ce comptage et introduisons les n V.A. de Bernoulli T_i ($0 \leq i \leq n-1$) : T_i valant 1 si $\big(Y_i \in [0,a]\big)$ est réalisé et 0 sinon. On a alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, puisqu'aussi $Y_i = X_i$ si $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$P(T_i = 1) = P\big(Y_i \in [0,a]\big) = P\big(X_i \in [0,a]\big) = a.$$

la valeur finale découlant de ce que X_i suit une loi uniforme sur $[0,1]$, tandis que $a \in \left]0,1\right]$.

• L'indépendance de X_i ($0 \leq i \leq n-1$) impliquant celle des Y_i et enfin celles des $\{T_i\}_{0 \leq i < n-1}$, $N_n(a)$ apparaît comme la somme des n V.A. **indépendantes** T_i ($0 \leq i < n$), suivant chacune une loi de Berrnoulli de même paramètre $p = a \in \left[0,1\right[$. Donc, **d'après le cours** :

$$\boxed{N_n(a) \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } a \text{ et par suite : } E\big(N_n(a)\big) = na}.$$

II.2. *Précisons de nouveau les conséquences des définitions :*

> Cette fois, c'est un nombre **aléatoire** de V.A. X_i que le compteur $N(a)$ prend en compte, à savoir : les k premières, k étant la valeur prise par la V.A. Z à l'issue d'une réalisation de l'expérience aléatoire.

II.2.i. *Il s'agit ici de se ramener à l'étude précédente (**II.1.**), en effet, si la loi de $\tilde{N}(a)$ est inconnue (seule l'inclusion $\tilde{N}(a)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ est évidente)*, en revanche, les probabilités $P\big(\tilde{N}(a) = k \mid Z = n\big)$ sont connues, car :

> si l'on sait que $(Z = n)$ est réalisé, alors on sait que seules les n variables $\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_{n-1}$ (aucune si $n = 0$) sont candidates à prendre leur valeur dans $[0, a]$ puisque les autres prennent la valeur $2(> a)$ de façon certaine (en conséquence de la valeur prise par Z), de plus, si Z prend la valeur n, alors les V.A. $\tilde{Y}_i$, pour $0 \leq i < n$, prennent la même valeur que X_i.

Ainsi, dans une expérience aléatoire dont l'issue est telle $(Z = n)$ soit réalisé, alors, **si $n \geq 1$** : la V.A. $\tilde{N}(a)$ prend la même valeur que la V.A. $N_n(a)$, ce qui se traduit par l'égalité :

(23) $\forall n \geq 0,\ \forall n \geq 1,\quad P(\tilde{N}(a) = k \mid Z = n) = P(N_n(a) = k \mid Z = n)$

et comme la V.A. $N_n(a)$ est fonction des X_i $(0 \leq i < n)$, comme l'indépendance de Z et des V.A. $\{X_i\}_{0 \leq i < n}$ est posée par hypothèse, on a encore **indépendance de Z et $N_n(a)$**, donc (23) se simplifie en :

(24) $\forall k \geq 0,\ \forall n \geq 1,\quad P(\tilde{N}(a) = k \mid Z = n) = P(N_n(a) = k)$.

Et si c'est $Z = 0$ qui est réalisé : alors, toutes les V.A. $\tilde{Y}_i$ $(i \geq 0)$ prennent la valeur 2, et par suite $\tilde{N}(a)$ prend de façon certaine la valeur 0, d'où la conclusion :

(25) pour $n = 0$: $P(\tilde{N}(a) = k \mid Z = n)$ vaut 1 si $k = 0$, et 0 sinon.

On tire parti de ces résultats, en utilisant le système complet d'événements $\{(Z = n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Par la **formule des probabilités totales** :

$\forall k \geq 0,\quad P(\tilde{N}(a) = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\tilde{N}(a) = k \mid Z = n).P(Z = n)$

Et on en déduit par (24) et (25) :

- pour $k = 0$: en isolant le premier terme de la somme pour lequel la probabilité conditionnelle vaut 1 :

  (26) $\boxed{P(\tilde{N}(a) = 0) = P(Z = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N_n(a) = 0).P(Z = n)}$.

- pour $k \geq 1$: en éliminant le premier terme de la somme pour lequel la probabilité conditionnelle vaut 0, mais en notant aussi que, dans la mesure où N_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, a)$, $P(N_n(a) = k)$ vaut 0 dès lors que $n < k$:

  (27) $\boxed{\forall k \geq 1,\quad P(\tilde{N}(a) = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N_n(a) = k).P(Z = n)}$.

◇ Loi de $\tilde{N}(a)$ $(0 < a \leq 1)$: sachant que $N_n(a)$, pour $n \geq 1$ et $a \in]0, 1]$ suit une loi $\mathcal{B}(n, a)$ et que Z, par hypothèse, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

- pour $k = 0$: (26) s'écrit encore : $P(\tilde{N}(a) = 0) = e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty}(1-a)^n.\frac{\lambda^n}{n!}.e^{-\lambda}$, où l'on reconnaît dans la somme, après factorisation par $e^{-\lambda}$, le développement en série de $\exp\big((1-a)\lambda\big)$, privé de son terme de rang 0, égal à 1, de sorte que :

  $$P(\tilde{N}(a) = 0) = e^{-\lambda} + \left(e^{(1-a)\lambda} - 1\right).e^{-\lambda} = e^{(1-a)\lambda}.e^{-\lambda} = e^{\lambda a}.$$

- pour $k \geq 1$: (26) s'écrit encore : $P(\tilde{N}(a) = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k.a^k(1-a)^{n-k}.\frac{\lambda^n}{n!}.e^{-\lambda}$. Somme sur laquelle, (***c'est un classique***), on effectue le **changement d'indice $n' = n - k$** (on a alors $n = n' + k$), afin de reconnaître, après avoir extrait de la somme les facteurs constants, un **développement de l'exponentielle en série** :

  $$\begin{aligned} P(\tilde{N}(a) = k) &= \sum_{n'=0}^{+\infty} C_{n'+k}^k.a^k(1-a)^{n'}.\frac{\lambda^{n'+k}}{(n'+k)!}.e^{-\lambda}, \quad \text{où } C_{n'+k}^k = \frac{(n'+k)!}{k!n'!} \\ &= \frac{\lambda^k.a^k}{k!}.e^{-\lambda}.\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{(n'+k)!}{n'!}.(1-a)^{n'}.\frac{\lambda^{n'}}{(n'+k)!} \\ &= \frac{(\lambda a)^k}{k!}.e^{-\lambda}.\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda(1-a)\right)^{n'}}{n'!} = \frac{(\lambda a)^k}{k!}.e^{-\lambda}.e^{(1-a)\lambda} = \frac{(\lambda a)^k}{k!}.e^{-\lambda a}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'examen des valeurs $P(\tilde{N}(a) = k)$ pour tout $k \in \tilde{N}(a)(\Omega)$ révèle que :

$\boxed{\text{pour tout } a \in]0, a],\quad \tilde{N}(a) \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda a}$.

II.2.*ii*. Pour tout $m \geq 1$, **par définition de la suite $(T_m(\omega))_{m \geq 1}$**, la réalisation de l'événement $(T_m \leq a)$ signifie que, parmi les valeurs prises par les V.A. Y_k $(k \geq 0)$, la $m^{\text{ème}}$ valeur, **en rangeant ces valeurs dans l'ordre croissant**, est inférieure ou égale à a. Il est donc équivalent qu'à l'issue de l'expérience aléatoire, le nombre de valeurs $\tilde{Y}_k(\omega)$ inférieures ou égales à a est supérieur ou égal à m ; ce qui se traduit par l'égalité d'événements : $(T_m \leq a) = (\tilde{N}(a) \geq m)$, d'où il découle, puisque $\tilde{N}(a) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda a)$: **(28)** $\boxed{\forall m \geq 1, \quad P(T_m \leq a) = P(\tilde{N}(a) \geq m) = \sum_{n=m}^{+\infty} e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!}}$.

◇ Afin d'obtenir une réexpression de la somme à l'aide d'intégrales, comme dans le résultat attendu, on invoquera les formules (22) et (23) par lesquelles, pour $a \geq 0$:

$$\forall n \geq 1, \quad e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!} = F_n(a) - F_{n+1}(a) = \int_0^a \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^a \frac{\lambda^n t^n}{n!}.e^{-\lambda t}\,dt$$

(on remplace n par $n+1$ ($n+1 \geq 1$ ici) dans (22) et (23))

Il s'ensuit que la somme $\sum_{n=m}^{+\infty} e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!}$ se calcule par «***télescopage***».

• Pour n variant de $m \geq 1$ à $M > m$, **tout d'abord** :

$$\sum_{n=m}^{M-1} e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!} = \sum_{n=m}^{M-1} F_n(a) - F_{n+1}(a) = \sum_{n=m}^{M-1} F_n(a) - \sum_{n=m}^{M-1} F_{n+1}(a),$$

et par le décalage d'indice habituel, en éliminant ensuite les termes communs aux deux sommes :

$$\sum_{n=m}^{M-1} e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!} = \sum_{n=m}^{M-1} F_n(a) - \sum_{n=m+1}^{M} F_n(a) = F_m(a) - F_M(a).$$

puis en revenant aux intégrales (expression des $F_n(a)$ du **I.5.a.** pour $n \geq 1$) :

$$\sum_{n=m}^{M-1} e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!} = \int_0^a \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt.$$

Comme il est acquis que $\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=m}^{M-1} e^{-a\lambda}.\frac{(a\lambda)^n}{n!}$ existe (elle vaut $P(T_m \leq a)$), on peut **passer à la limite** sur cette dernière égalité, ce qui donne :

$$\textbf{(29)} \quad \begin{aligned} P(T_m \leq a) &= \lim_{M\to+\infty} \left(\int_0^a \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt \right) \\ &= \int_0^a \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt - \lim_{M\to+\infty} \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt. \end{aligned}$$

Reste alors à **déterminer** $\lim_{M\to+\infty} \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt$:

puisque la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$, pour $\lambda > 0$ et $t \in [0, a]$:

$$0 \leq \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t} \leq \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.$$

Il s'ensuit par intégration sur $[0, a]$ et croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt \leq \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt,$$

i.e. : **(30)** $0 \leq \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt \leq \frac{\lambda^M a^M}{M!}$,

où le majorant tend vers 0 en tant que terme général de la série convergente $\sum_{m\geq 0} \frac{(\lambda a)^m}{m!}$, de sorte que, **par le théorème d'encadrement**, on tire de (30) que :

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^a \frac{\lambda^M t^{M-1}}{(M-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt = 0.$$

On déduit alors de (29) :

$$P(T_m \leq a) = \int_0^a \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-\lambda t}\,dt.$$

puis, par le **changement de variable $t = \lambda u$**, (clairement de classe C^1) :

$$\boxed{P(T_m \leq a) = \int_0^{\lambda a} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-t}\, dt.}$$

◇ Fonction de répartiton, G_m, de T_m, pour $x \notin [0,1[$, et $m \geq 1$: on a vient d'obtenir l'expression de $G_m(x)$ $(m \geq 1)$, pour $x \in [0,1[$: $G_m(x) = \int_0^{\lambda a} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-t}\, dt$.

- pour $x < 0$: en revenant à la **définition de T_m**, la réalisation de $(T_m \leq x)$ signifie que la $m^{\text{ème}}$ plus petite valeur dans la liste obtenue en ordonnant l'ensemble $\left\{\tilde{Y}_i(\omega)\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement négative, ce qui est un événement impossible puisque les V.A. $\tilde{Y}_i$ prennent des valeurs **positives**. Donc :

$$\boxed{\text{pour } x < 0, \quad G_m(x) = P(T_m \leq x) = 0}.$$

- pour $x \in [1,2[$: pour x élément de $[1,2[$, la réalisation de $(T_m \leq x)$ équivaut à celle de $(T_m \leq 1)$ car les V.A. $\tilde{Y}_i$ **ne prennent pas de valeur dans $]1,2[$**. Donc :

$$\boxed{\text{pour } x \in [1,2[, \quad G_m(x) = P(T_m \leq x) = G_m(1) = \int_0^{\lambda} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.e^{-t}\, dt}.$$

- pour $x \geq 2$: $(T_m \leq x)$ est un **événement certain** car toutes les V.A. $\tilde{Y}_i$ $(i \in \mathbb{N})$ prennent leur valeur dans $[0,2]$. Donc :

$$\boxed{\text{pour } x \geq 2, \quad G_m(x) = P(T_m \leq x) = 1}.$$

ÉPREUVE A

Durée 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

PROBLÈME I

Les parties A et B sont largement indépendantes. Seule la question B.3.c. utilise les résultats de la partie A.

Rappel : on note $o(x^n)$ toute expression qui peut s'écrire sous la forme : $x^n \times \varepsilon(x)$, où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Partie A. *Développement limité d'une fonction réciproque.*

Dans cette partie, n est un entier strictement supérieur à 1, f est une application bijective de I sur J, où I et J sont des intervalles contenant un intervalle ouvert centré en 0, qui vérifie : $f(0) = 0$. De plus, f admet en 0 un développement limité à l'ordre n, de la forme :

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + x^n \times \varepsilon(x)$$

où a_1 est un réel non nul et ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

1. On pose : $\begin{cases} P(x) & = & a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \\ Q(x) & = & b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n \end{cases}$

où les $b_1, .., b_n$ sont des réels quelconques.

1.a. Calculer les coefficients des termes de degré 1 et 2 de $QoP(x)$.

1.b. On appelle c_i $(2 \leq i \leq n)$ le coefficient du terme de degré i de $QoP(x)$. Vérifier qu'il est de la forme :

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j}b_j + b_i{a_1}^i$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des réels dépendant des coefficients de P et qu'on ne cherchera pas à déterminer.

2.a. Montrer que l'on a pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq n$:

$$[f(x)]^i = (a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n)^i + x^n \times \varepsilon_i(x)$$

où ε_i est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

2.b. En déduire : $Q(f(x)) = Q(P(x)) + o(x^n)$

Puis : $Q(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i + o(x^n)$.

3. Pour x élément de I, on pose $y = f(x)$.

3.a. Montrer que y^n est équivalent à $a_1^n x^n$ au voisinage de 0.

3.b. En déduire que $f^{-1}(y) - Q(y)$ est de la forme $o(x^n)$ si les $b_1, .., b_n$ sont solutions d'un système linéaire triangulaire dont les coefficients des termes de la diagonale sont non nuls.

3.c. Conclure que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n et donner une méthode de calcul de sa partie régulière.

Partie B.

Dans toute cette partie on note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. On pourra pour cela étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe :

$$u(t) = (2t - 1)\exp(t) + 1$$

En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.

3.a. Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

3.b. Écrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5.

3.c. En utilisant la partie A, donner un développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

PROBLÈME II

Dans tout ce problème, A désigne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On lui associera l'endomorphisme f, relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Partie A. *Réduction de la matrice.*

1. Montrer que A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Déterminer les vecteurs propres associés ε_1 et ε_2, dont la première composante est égale à 1. La matrice est-elle diagonalisable ?

2. F désigne ici le plan d'équation : $ax + by + cz = 0$ et on considère la matrice ligne (supposée **non nulle**) : $N = (a \quad b \quad c)$

2.a. Montrer que les vecteurs (x, y, z) dont l'image par f est élément de F vérifient la relation : $a'x + b'y + c'z = 0$

où l'on a posé : $(a' \quad b' \quad c') = N \times A$

En déduire qu'ils constituent un plan ou l'espace tout entier.

2.b. On dira que F est stable par f, si on a : $f(F) \subset F$. Montrer que, si F est stable par f, il existe un scalaire k tel que : $N \times A = k \cdot N$.

2.c. Déduire de ce qui précède que F est stable par f si et seulement si (a, b, c) est un vecteur propre de ${}^tA$.

2.d. Montrer qu'il existe deux plans vectoriels stables par f et les déterminer. En déduire l'existence d'un vecteur ε_3, dont la deuxième composante est égale à 1, tel que la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ soit :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de passage P correspondante et sa matrice inverse.

Partie B. *Résolution de l'équation* : $(E)\ M^2 = A$.

1. On dit d'une matrice réelle X carrée d'ordre 3 qu'elle commute avec A' si on a :

$$A' \times X = X \times A'$$

Montrer que X commute avec A' si et seulement si il existe un triplet de réels (α, β, γ) tels que :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

2. À toute matrice carrée réelle M d'ordre 3, on associe :

$$M' = P^{-1} \times M \times P$$

2.a. Montrer que M est solution de (E) si et seulement si : $(E')\ M'^2 = A'$.

2.b. Vérifier que si M' est solution de (E'), alors M' commute avec A'.

2.c. En déduire que (E') admet 4 solutions que l'on explicitera, puis les solutions de (E) que l'on exprimera en fonction de P, de P^{-1} et des solutions de (E').

Corrigé

PROBLÈME I

.PARTIE A.

I.A.1.a. Considérons la composée du polynôme P par le polynôme Q :

(1) $Q \circ P(x) = b_1 P(x) + b_2 [P(x)]^2 + b_3 [P(x)]^3 + \ldots + b_n [P(x)]^n.$

$Q \circ P(x)$ est un **polynôme,** donc, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la somme de ses termes de degré inférieur ou égal à i coïncide avec la partie régulière de son développement limité à l'ordre i en 0.

Du fait que $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, avec $a_1 \neq 0$:

$$\mid P(x) \text{ est équivalent en } 0 \text{ à } a_1x.$$

Par suite, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $[P(x)]^k \sim_0 a_1^kx^k$, et donc : $\|$ si $k>i$, $[P(x)]^k = o(x^i)$, et l'on en déduit, pour tout i, $2 \leq i \leq n$:

$$\textbf{(2)} \quad \| \; Q \circ P(x) = b_1P(x) + b_2[P(x)]^2 + \ldots + b_i[P(x)]^i + o(x^i) \,.$$

- Pour $i = 2$, en utilisant des développements limités au bon ordre en 0 pour $P(x)$, il découle de (2) que :

$$\begin{aligned} Q \circ P(x) &= b_1P(x) + b_2[P(x)]^2 + o(x^2) \\ &= b_1[a_1x + a_2x^2 + x^2.\varepsilon_2(x)] + b_2[a_1x + x.\varepsilon_1(x)]^2 + o(x^2) \\ &= b_1a_1x + b_1a_2x^2 + b_1.x^2.\varepsilon_2(x) + b_2a_1^2x^2 + 2b_2a_1x^2.\varepsilon_1(x) + b_2x^2.\varepsilon_1^2(x) + o(x^2) \\ &= b_1a_1x + b_1a_2x^2 + b_2a_1^2x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

On en conclut alors que :

$$\boxed{\text{les termes de degré 1 et 2 de } Q \circ P(x) \text{ sont respectivement : } a_1b_1x \text{ et } b_1a_2 + b_2a_1^2}.$$

I.A.1.b. Comme on l'a déjà indiqué, pour tout $i \geq 2$, on tire le cœfficient c_i de x^i dans $Q \circ P(x)$ de son développement limité à l'ordre i en 0, obtenu à partir de (2) :

$$\| \; Q \circ P(x) = b_1P(x) + b_2[P(x)]^2 + \ldots + b_i[P(x)]^i + o(x^i).$$

Or, pour tout k, $0 \leq k \leq i$, $[P(x)]^k = [a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n]^k$ est un polynôme de degré nk, dont le terme de plus bas degré est $a_1^kx^k$, et que l'on peut écrire :

$$[P(x)]^k = \sum_{l=k}^{nk} \alpha_{l,k}x^l \quad \text{où} \quad \begin{cases} \text{pour } l = k, & \alpha_{k,k} = a_1^k \\ \text{pour } k < l \leq nk, & \alpha_{l,k}, \text{ est fonction des } \{a_l\}_{1 \leq l \leq n} \end{cases},$$

Donc, dans (2), pour tout $0 \leq k \leq i$, le terme de degré i de $b_k[P(x)]^k$ est $b_k\alpha_{i,k}x^i$, et il s'ensuit que :

$$\boxed{c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j}b_j + b_ia_1^i}.$$

I.A.2.a. Avec les notations de l'énoncé, pour tout $x \in I$:

$$\| \; f(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + x^n + x^n.\varepsilon(x) = P(x) + x^n.\varepsilon(x).$$

Ainsi, pour tout entier i, compris entre 1 et n, par la **formule du binôme** :

$$\begin{aligned} [f(x)]^i &= \big(P(x) + x^n.\varepsilon(x)\big)^i = \textstyle\sum_{j=0}^{i} C_i^j\,(x^n.\varepsilon(x))^j\,(P(x))^{i-j} \\ &= (P(x))^i + \textstyle\sum_{j=1}^{i} C_i^jx^{nj}.\varepsilon^j(x)(P(x))^{i-j}, \quad \text{en sortant le terme pour } j = 0 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit, en posant : $\varepsilon_i(x) = \sum_{j=1}^{i} C_i^j\,(P(x))^{i-j}x^{n(j-1)}.\varepsilon^j(x)$:

$$\| \; [f(x)]^i = (P(x))^i + x^n.\varepsilon_i(x).$$

Et, pour $1 \leq j \leq i$, l'on peut constater, concernant les fonctions ε_i, que :

- $C_i^j(P(x))^{i-j}x^{n(j-1)}$ est un **polynôme** car $i - j \geq 0$ et $j - 1 \geq 0$. Donc, cette expression a une **limite finie en 0**,
- $\varepsilon^j(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, car $j \geq 1$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Il s'ensuit, par les **opérations usuelles sur les limites**, que : $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$. Donc on obtient bien :

$$\boxed{\forall\, 1 \leq i \leq n, \quad [f(x)]^i = [P(x)]^i + x^i.\varepsilon_i(x) \text{ , où } \lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0}.$$

$\boxed{\textbf{I.A.2.b.}}$ Par définition de la composée : $Q(f(x)) = b_1 f(x) + b_2[f(x)]^2 + \ldots + b_n[f(x)]^n$, donc, par **substitution**, en vertu du résultat de **A.2.a.** :

$$Q(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} b_i.\Big[[P(x)]^i + x^n.\varepsilon_i(x)\Big] = \sum_{i=1}^{n} b_i[P(x)]^i + x^n.\sum_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i(x).$$

où, $\sum_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i(x)$, notée $\hat{\varepsilon}(x)$, est une **somme finie** de termes de limite nulle pour $x \to 0$, donc :

$$Q(f(x)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i[P(x)]^i\Big) + x^n.\hat{\varepsilon}(x) = QoP(x) + x^n.\hat{\varepsilon}(x), \text{ où } \hat{\varepsilon}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

ce qui s'écrit encore : $\boxed{Q(f(x)) = Q(P(x)) + o(x^n)}$.

◇ Enfin, rappelons que, ***QoP* étant un polynôme**, la partie régulière de son développement limité à l'ordre n en 0, est égal à la somme de ses termes de degré inférieur ou égal à n, dont les cœfficients c_i ont été calculés au **A.1.b.**. Donc, **en remplaçant $Q(P(x))$ par son développement limité à l'ordre n en 0** :

$$\boxed{Q(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i + x^n.o(x)}.$$

$\boxed{\textbf{I.A.3.a.}}$ Pour tout $x \in I$, on dispose, **par hypothèse**, d'un D.L. à l'ordre n de $f(x)$ en 0, à savoir : $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n.\varepsilon(x)$. Donc, pour tout $x \in I$, si on pose $y = f(x)$, en ne gardant que le premier terme de ce D.L. :

$$y = f(x) \sim_0 a_1 x, \text{ ce qui est } \textbf{licite} \text{ car } a_1 \neq 0.$$

puis, par **compatibilité de la relation d'équivalence avec les fonctions puissances** : $\boxed{y^n \sim_0 a_1^n x^n}$.

$\boxed{\textbf{I.A.3.b.}}$ Dans la mesure où f est une application bijective de I sur J, f admet une application réciproque f^{-1}, et, $x \in I$ étant donné : si $y = f(x)$, alors $x = f^{-1}(y)$, et l'on a, en vertu du **A.1.2.b.** :

$$f^{-1}(y) - Q(y) = x - Q[f(x)] = x - \sum_{i=1}^{n} c_i x^i + o(x^n),$$

et **par suite** :

$$f^{-1}(y) - Q(y) = o(x^n) \quad \text{si et seulement si} \quad x - \sum_{i=1}^{n} c_i x^i \text{ est égal au polynôme nul.}$$

$$\text{c'est-à-dire, si et seulement si} \quad c_1 = 1 \text{ et } c_i = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq n.$$

Compte-tenu de l'expression des c_i $(1 \leq i \leq n)$ obtenue aux **A.1.a.** et **A.1.b.** :

$$c_1 = a_1 b_1 \text{ et } c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} b_j + b_i a_1^i \text{ pour } i \in [\![2, n]\!],$$

L'**implication** : $(c_1 = 1, \forall i \in [\![2, n]\!] : c_i = 0) \Longrightarrow (f^{-1}(y) - Q(y) = o(x^n))$, donne :

si les $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont solutions du système triangulaire inférieur suivant (dont les cœfficients diagonaux sont égaux à $a_1^i \neq 0$) :

$$(S)\left\{\begin{array}{llllll} a_1 b_1 & & & & & = 1 \\ \alpha_{2,1} b_1 + & a_1^2 b_2 & & & & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \alpha_{i,1} b_1 + & \ldots & + \alpha_{i,i-1} b_{i-1} + & a_1^i b_i & & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n,1} & + \alpha_{n,2} b_2 + & \ldots & + \alpha_{n,n-1} b_{n-1} & + a_1^n b_n & = 0 \end{array}\right.$$

alors :

$$f^{-1}(y) - Q(y) = o(x^n).$$

$\boxed{\textbf{I.A.3.c.}}$ Existence d'un DL à l'ordre n pour f^{-1} : **connaissant** la partie régulière $P(x)$ du développement limité à l'ordre n de f, les cœfficients $\alpha_{i,j}$ du système (S), s'obtiennent à l'aide des D.L. à l'ordre n en 0 des polynômes $[P(x)]^k$ pour $1 \leq k \leq n$ (*c.f.* **A.1.b.** : $\alpha_{i,k}$ est le cœfficient de degré i de $P^k(x)$). Il est alors possible de déterminer un n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ solution de (S). En effet :

le système (S) est **triangulaire inférieur** avec **tous ses pivots non nuls** ($a_1^i \neq 0$), donc il existe un (unique) n-uplet solution de (S), $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, avec les b_i qui s'expriment à l'aide des cœfficients du sytème, *i.e.* à l'aide des $\alpha_{i,j}$ et des a_1^i, les b_i sont donc fonction des cœffcients de P.

Dans ces conditions :

si l'on choisit pour cœfficients de Q le n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ solution de (S), on a, d'après le **A.1.b.** :

$$f^{-1}(y) - Q(y) = o(x^n), \text{ ou encore } f^{-1}(y) = Q(y) + o(x^n) = \sum_{i=1}^{n} b_i y^i + o(x^n).$$

Et comme $y^n \sim_0 a_1^n x^n$, on a, dans l'expression précédente : $o(x^n) = o(\frac{y^n}{a_1^n}) = o(y^n)$, et donc :

$$\boxed{f^{-1}(y) \text{ admet en 0 un DL à l'ordre } n \text{ dont la partie régulière est } \sum_{i=1}^{n} b_i y^i}.$$

.PARTIE B.

$\boxed{\textbf{I.B.1.}}$ Imparité de f : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, on vérifie immédiatement que $f(-x) = f(x)$, donc : $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

◇ Continuité de f sur $\mathbb{R}$:

- sur $\mathbb{R}^*$, f est continue en tant que quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas.
- en 0, la limite de f s'examine à l'aide du *D.L.* à l'ordre 1 de l'exponentielle au voisinage de 0 : $\exp u = 1 + u + o(u)$.
  En posant $u = x^2$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0, il vient :
  $\exp(x^2) - 1 = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 = x^2 + o(x^2)$, et donc : $\exp(x^2) - 1 \sim_0 x^2$,
  puis $f(x) = \frac{exp(x^2)-1}{x} \sim_0 x$, d'où l'on tire : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
  donc f **est continue en 0.**

Par conséquent : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

$\boxed{\textbf{I.B.2.}}$ Étude de la dérivabilité de f : sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable en tant que composée et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{2x\exp(x^2).x - (\exp(x^2) - 1).1}{x^2} = \frac{(2x^2 - 1)\exp(x^2) + 1}{x^2}.$$

donc, u désignant la fonction définie dans l'énoncé :

pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x^2 - 1)\exp(x^2) + 1 = u(x^2)$.

◇ Étude de u : $t \mapsto (2t - 1)\exp(t) + 1$, sur $\mathbb{R}^+$ et du signe de f' sur $\mathbb{R}^*$:

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \geq 0$:

$$u'(t) = 2\exp(t) + (2t - 1)\exp(t) = (2t + 1)\exp(t) > 0.$$

Il s'ensuit que $\boldsymbol{u}$ est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+$, et comme on vérifie par le calcul que $\boldsymbol{u}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, on en déduit que : u est positive sur $\mathbb{R}^+$, nulle seulement en 0.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puisque $x^2 > 0$: $u(x^2) > 0$ et $f'(x) = \frac{u(x^2)}{x^2} > 0$. D'où la **conclusion** :

f' est positive sur $\mathbb{R}^*$.

◇ Dérivabilité de f en 0 : puisque $f(0) = 0$, le **taux d'accroissement de f en 0** est donné par la fonction : $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$. **Or** : $f(x) \sim_0 x$ (*c.f.* **I.B.1.**), donc : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et vaut 1. Par conséquent : f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

• **En conclusion** de l'étude de la dérivabilité de f, sur $\mathbb{R}_+$ et en 0, on peut affirmer que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0}.$$

Par suite, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc, **d'après le cours** :

$$\boxed{f \text{ admet une application réciproque } f^{-1} \text{ définie sur } f(\mathbb{R})}.$$

De plus, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et f continue, on sait que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle d'extrémités $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Ici, ces limites sont opposées car f est impaire, et :

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = x.\frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

◇ Imparité de f^{-1} : f^{-1} est définie sur $\mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $-y \in \mathbb{R}$.
Et si on note $x = f^{-1}(y)$, puisque f est elle-même impaire :

$$f(-x) = -f(x) = -y, \text{ et par conséquent : } f^{-1}(-y) = -x.$$

Il est donc établi que :

$$\boxed{f^{-1} \text{ est impaire}}.$$

I.B.3.a. La fonction exponentielle est **développable en série entière en 0**, donc elle admet un DL_0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, de plus ce développement limité est connu et s'écrit :

$\exp x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Par **substitution de x^2 à x**, on a encore :

$$\exp(x^2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n}) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n}).$$

Et l'on en déduit, pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{exp(x^2)-1}{x} = x + \frac{x^3}{2} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1}), \text{ tandis que } f(0) = 0.$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ admet un développement limité à tout ordre } n \text{ en } 0}.$$

I.B.3.b. En écrivant le développement ci-dessus pour $n = 3$, on obtient le DL suivant à l'ordre 5 en 0 :

$$\boxed{f(x) = \frac{exp(x^2)-1}{x} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3!} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)}.$$

I.B.3.c. Tout d'abord, on doit constater que **f satisfait bien au conditions de la PARTIE A.** (f définit une bijection de $I = \mathbb{R}$ sur $J = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, et dans les $\mathrm{DL}_n(0)$ de f : $a_0 = 0$). Par conséquent, comme il est expliqué au **I.A.3.c.**, pour obtenir le DL de f^{-1} à l'ordre 5 en 0, on donne d'abord les **développements limités à l'ordre 5** des polynômes $[\boldsymbol{P(x)}]^{\boldsymbol{k}}$ pour $1 \leq k \leq 5$:

tout d'abord, on tire du $\text{DL}_5(0)$ de f (*c.f.* **I.B.3.b.**) : $\;P(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}$.
puis : $\quad [P(x)]^2 = \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right)\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$
donc : $\quad [P(x)]^2 = x^2 + x^4 + o(x^5)$
• $[P(x)]^3 = [P(x)]^2 . P(x) = \left(x^2 + x^4 + o(x^5)\right)\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right) = x^3 + \frac{x^5}{2} + x^5 + o(x^5)$
donc : $\quad [P(x)]^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)$
• $[P(x)]^4 = [P(x)]^3 . P(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)\right)\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right)$
donc : $\quad [P(x)]^4 = x^4 + o(x^5)$
et enfin : $\quad [P(x)]^5 = x^5 + o(x^5) \quad$ car $P^5(x) \sim_0 a_1^5 x^5 = x^5$

En conséquence, les cœfficients $b_1, b_2, \ldots, b_5$ de Q sont solutions du système :

$$\begin{cases} b_1 & & & & = 1 \\ & b_2 & & & = 0 \\ \frac{1}{2}b_1 & & b_3 & & = 0 \\ \frac{1}{6}b_1 & + & \frac{3}{2}b_3 & + \; b_5 & = 0 \end{cases}.$$

Système dont la résolution est immédiate et donne :

$$b_1 = 1,\; b_2 = b_4 = 0,\; b_3 = -\frac{b_1}{2} = -\frac{1}{2},\; b_5 = -\frac{b_1}{6} - \frac{3b_3}{2} = -\frac{1}{6} - \frac{3b_3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}.$$

On obtient donc comme DL de f^{-1} à l'ordre 5 en 0 :

$$\boxed{f^{-1}(x) = x - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{7}{12}x^5 = o(x^5)},$$

où l'on constate qu'il n'y a que des termes de degré impair, puisque f^{-1} est impaire.

PROBLÈME II

.PARTIE A.

II.A.1. Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si il existe $X \neq 0$, matrice colonne dont les cœfficients seront notés x, y et z, telle que $AX = \lambda X$, ou, ce qui est équivalent, telle que $(A - \lambda.I)\,X = 0$ (I désignant la matrice unité, $I \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

◇ Résolution de $(A - \lambda.I)\,X = 0$:
En explicitant A, on obtient :

$$(A - \lambda.I)\,X = 0 \iff (S) : \begin{cases} (4-\lambda).x & + & 1.y & - & 1.z & = 0 \\ -6.x & - & (1+\lambda).y & + & 2.z & = 0 \\ 2.x & + & 1.y & + & (1-\lambda).z & = 0 \end{cases}$$

On va résoudre le système par la méthode du pivot de Gauss, c'est-à-dire en effectuant des opérations sur les lignes du système.

Rappelons enfin que les ***opérations élémentaires licites*** *(c'est-à-dire transformant le système en un système* ***équivalent****) sont au nombre de* ***trois*** :

- échange de deux lignes, codée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- multiplication d'une ligne par un réel a non nul, codée $L_i \leftarrow a.L_i$.
- addition à une ligne donnée de n'importe quelle autre ligne, multipliée par un réel b (éventuellement nul), codée $L_i \leftarrow L_i + b.L_j$.

Pour moins de lourdeur dans les écritures, et **parce que le système est homogène,** *on n'écrira que les cœfficients de x, de y et de z, en omettant x, y et z et en gommant les seconds membres, qui de toute façon restent nuls lorsque l'on travaille sur les lignes.*

◊ **En prenant garde à ne choisir que des pivots ne dépendant pas de la valeur de** λ, pour limiter les discussions, et non nuls, on peut mener la réduction ainsi :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -(1+\lambda) & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-\lambda \\ -6 & -(1+\lambda) & 2 \\ 4-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3-(4-\lambda)L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+3L_1}{\iff}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 5-3\lambda \\ 0 & -2+\lambda & \underbrace{-2-(4-\lambda)(1-\lambda)}_{-\lambda^2+5\lambda-6} \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_2+L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 5-3\lambda \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

où : $f(\lambda) = (-\lambda^2+5\lambda-6)+5-3 = -\lambda^2+5\lambda-6)+5-3 = -(\lambda-1)^2$.

Ainsi, le système (S) : $(A-\lambda.I)\,X = 0$ est finalement équivalent à :

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2.x & + & y & + & (1-\lambda).z & = & 0 \\ & & (2-\lambda).y & + & (5-3\lambda).z & = & 0 \\ & & & - & (\lambda-1)^2.z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Or, on sait que :

un système triangulaire supérieur admet une unique solution si et seulement si tous ses pivots (*i.e.* ses cœfficients diagonaux, ici égaux à 2, $2-\lambda$ et $-(\lambda-1)^2$), sont non nuls. Et si de plus le système est homogène, cette unique solution est la solution nulle.
Et si au contraire le système triangulaire a des pivots nuls, alors il admet une infinité de solutions.

En conséquence :

le système (S'), équivalent à (S), admet d'autres solutions que $X = {}^t(0,0,0)$ si et seulement si $2-\lambda = 0$ ou $(\lambda-1)^2 = 0$, *i.e.* si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$.

En conclusion, par la définition des valeurs propres de A :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ admet exactement deux valeurs propres } \lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 1}.$$

(on a noté $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$, pour respecter la consigne : $\lambda_1 \geq \lambda_2$).

◊ Sous-espaces propres relatifs à λ_1 et λ_2 :

Les vecteurs propres relatifs à λ_1 sont les vecteurs propres $\varepsilon = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est $X = {}^t(x, y, z)$, tel que : $(A - \lambda_1.I)\,X = 0$, ce qui, A étant la matrice de f dans la base canonique, équivaut à $(f - \lambda_1.Id)\,(\varepsilon) = 0$, ($Id$: endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$), ou encore à : $f(\varepsilon) = \lambda_1.\varepsilon$.

Ainsi $\varepsilon = (x, y, z)$ est propre pour la valeur propre $\lambda_1 = 2$ si et seulement si le triplet (x, y, z) vérifie le système (S'), équivalent à (S), écrit pour $\lambda = \lambda_1 = 2$, c'est-à-dire :

$$(S') \quad \begin{cases} 2.x + y - z = 0 \\ \quad\quad - z = 0 \\ \quad\quad - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2.x + y = 0 \\ \quad\quad z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Le sous-espace propre E_{λ_1}, relatif à λ_1 est donc constitué des vecteurs ε de la forme $(x, -2x, 0)$, $(x \in \mathbb{R})$, tous colinéaires au vecteur $(1, -2, 0)$ (dont la première composante vaut 1). **Ainsi** :

$$E_{\lambda_1} = VECT(\varepsilon_1), \text{ avec } \boxed{\varepsilon_1 = (1, -2, 0)}.$$

• De la même façon, un vecteur $\varepsilon = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, est propre pour λ_2 si et seulement si le triplet (x, y, z) est solution de (S') pour $\lambda = \lambda_2 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{cases} 2.x + y \quad\quad = 0 \\ \quad\quad y + 2.z = 0 \\ \quad\quad\quad 0.z = 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2.x + y = 0 \\ -2.x + 2.z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2.x \\ z = x \end{cases}.$$

Le sous-espace propre E_{λ_2} est donc constitué des vecteurs $(x, -2x, x)$, $(x \in \mathbb{R})$, tous colinéaires au vecteur $(1, -2, 1)$ (dont la première composante vaut 1).
Ainsi :

$$E_{\lambda_2} = VECT(\varepsilon_2), \text{ avec } \boxed{\varepsilon_2 = (1, -2, 1)}.$$

◇ Diagonalisabilité de A : puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de A, égale à : $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2}$, vaut 2 et n'est pas égale à 3, le **critère de diagonalisabilité du cours** sur la dimension des *s.e.v.* propres **n'étant pas vérifié**, on peut conclure que : $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

II.A.2.a. Puisque, **par les règles du produit matriciel** :

$$ax + by = cz = (a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N.X,$$

en posant : $X = {}^t(x, y, z)$, **(3)** l'équation de F s'écrit aussi $N.X = 0$.

• **Ainsi**, pour tout vecteur $\varepsilon = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, **si on note** (x', y', z') son image par f, si on appelle respectivement X et X', la matrice colonne des coordonnées de ε et $f(\varepsilon)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$, puisque A est la matrice de l'endomorphisme f dans $\mathcal{B}$, on a, **d'après le cours** : $X' = AX$, et, par (3) :

$$(f(\varepsilon) \in F) \iff (NX' = 0) \iff (NAX = 0)$$

Donc, puisque l'on pose : $(a' \quad b' \quad c') = N \times A$:

$$\boxed{f(\varepsilon) \text{ appartient à } F \text{ si et seulement si } a'x + b'y + c'z = 0}.$$

◇ Dans $\mathbb{R}^3$, la dernière équation : $a'x + b'y + c'z = 0$, est d'interprétation immédiate :
• si $NA = (a' \quad b' \quad c') \neq 0$: $a'x + b'y + c'z = 0$ est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$.
(noyau de la "forme linéaire", non nulle, $\varphi : (x, y, z) \longmapsto a'x + b'y + c'z$, de dim. 2)
• si $NA = (a' \quad b' \quad c') = 0$: l'équation $a'x + b'y + c'z = 0$ est vérifiée par tous les vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi : l'ensemble des vecteurs dont l'image par f appartient à F est : soit un plan (si $NA \neq 0$), soit $\mathbb{R}^3$ (si $NA = 0$).

II.A.2.b. Les vecteurs (x, y, z), de coordonnées X dans $\mathcal{B}$, dont l'image par f est élément de F vérifient , en vertu du résultat précédent : $NAX = 0$.
Or, si F est stable par f ($f(F) \subset F$), tous les vecteurs de F ont leur image par f dans F, donc : $\big($ si $(x, y, z) \in F$, *i.e.* si $NX = 0\big)$ alors : $\big(NAX = 0\big)$.
Si on note : $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid NAX = 0\}$, on a donc :

$$\big(x \in F\big) \Longrightarrow \big(x \in G\big), \text{ ou encore : } F \subset G.$$

D'où la **discussion suivante** :

- si G est un plan vectoriel *i.e.* si $NA \neq 0$: alors, F étant lui-même un plan, $F \subset G$ implique $F = G$ (par égalité des dimensions), de sorte que nécessairement les équations définissant F et G :

  $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$, sont équivalentes,

  i.e. il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que : $k.\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix}$, *i.e.* $NA = k.N$.

- si $G = \mathbb{R}^3$ *i.e.* si $NA = 0$: alors, il suffit de poser $k = 0$, pour avoir :

  $NA = kN \,(= 0)$.

On peut alors conclure, **que NA soit nul ou non** :

$$\boxed{\text{si } F \text{ est stable par } f, \text{ alors il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que : } NA = k.N}.$$

II.A.2.c. Par les **propriétés de la transposition**, $({}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA\,, {}^t(k.I) = k.I)$:

$$\big(NA = k.N\big) \Longleftrightarrow \big({}^tA\,{}^tN = k.{}^tN\big).$$

Donc, l'existence d'un réel k tel que : $NA = k.N$, (*c.f.* **II.A.2.b.**) équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{R}$, tel que : ${}^tA\,{}^tN = k.{}^tN$, ce qui, **par définition**, puisque par hypothèse $\boldsymbol{N \neq 0}$, signifie que :

(a, b, c), de coordonnées N dans $\mathcal{B}$, est un vecteur propre de ${}^tA$.

Et l'on peut donc conclure, par **II.A.2.b.**, que :

(4) si F est stable par f, alors (a, b, c) est un vecteur propre de ${}^tA$.

- **Réciproquement**, si (a, b, c) est un vecteur propre de ${}^tA$, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $NA = kN$, et, par suite, si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *i.e.* si $NX = 0$, alors $NAX = 0$, ce qui traduit que $f\big((x, y, z)\big)$, de coordonnées AX dans $\mathcal{B}$, appartient à F. Donc :

(5) si (a, b, c) est un vecteur propre de ${}^tA$, alors F est stable par f.

On peut alors conclure, par (4) et (5) :

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } (a, b, c) \text{ est un vecteur propre de } {}^tA.}.$$

II.A.2.d. En vertu du résultat précédent, **la recherche des plans stables par f passe par la recherche des vecteurs propres de ${}^tA$.**

◇ Éléments propres de la matrice ${}^tA$: *bien que le résultat ne soit pas inscrit au programme, le lecteur pourra se rappeler que* ***une matrice carrée A et sa transposée ont les mêmes valeurs propres****. De toute façon,* par une **réduction de Gauss**, (*c.f.* **II.A.1.**), de ${}^tA - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -6 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_1}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3}}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \\ 4-\lambda & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-(4-\lambda)L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 & \lambda-2 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & g(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

où dans la dernière matrice, que l'on notera R_λ : $g(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda-1)^2$.

Parce que **l'ordre des colonnes n'influe pas sur le rang d'une matrice**, la dernière matrice obtenue, R_λ, n'est pas triangulaire, mais à même rang que la matrice :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$, donc est non-inversible si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

On constate donc, *comme annoncé*, que : ‖ ${}^tA$ a mêmes valeurs propres que A.

Par ailleurs, puisque, du fait d'un travail effectué exclusivement sur les lignes :

‖ le système $(A - \lambda I)X = 0$ **équivaut** au système $R_\lambda X = 0$,

les vecteurs propres pour A et les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ s'obtiennent en résolvant, respectivement, les sytèmes :

$$R_{\lambda_1}X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -y + 0.z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est de la forme } (x,0,-x), \\ \text{avec } x \text{ réel quelconque} \end{array} \right)$$

et

$$R_{\lambda_2}X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0.y + 1.z = 0 \\ 0.y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est de la forme } (2y,y,0), \\ \text{avec } y \text{ réel quelconque} \end{array} \right)$$

D'où la **conclusion intermédiaire**, relativement à $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_1 = 1$, respectivement :

‖ les *s.e.v.* propres de ${}^tA$ sont $\tilde{E}_{\lambda_1} = VECT[(1,0,-1)]$ et $\tilde{E}_{\lambda_2} = VECT[(2,1,0)]$

• En vertu du **II.A.2.c.**, il s'ensuit qu'il existe **deux plans stables par f**, obtenus en considérant les deux vecteurs propres pour ${}^tA$, $n_1 = (1,0,-1)$ et $n_2 = (2,1,0)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} F_1 \text{ d'équation : } x - z = 0, \text{ associé au vecteur } (a_1,b_1,c_1) = (1,0,-1), \text{ et} \\ F_2 \text{ d'équation : } 2x + y = 0, \text{ associé au vecteur } (a_2,b_2,c_2) = (2,1,0) \end{array}}.$$

Et les deux triplets $(1,0,-1)$ et $(2,1,0)$ correspondant à des vecteurs propres d'une même matrice relativement à deux valeurs propres distinctes, ils forment une famille libre, donc les équations définissant les plans F_1 et F_2 sont indépendantes, ce qui assure que :

(6) ‖ F_1 et F_2 sont **distincts**.

De plus, tout vecteur propre pour ${}^tA$ étant colinéaire, soit à $(1,0,-1)$, soit à $(2,1,0)$, il s'ensuit, puisque, d'après **II.A.2.c.** :

| F, d'équation $ax + by + cz = 0$, stable par f **équivaut** à (a,b,c) propre pour ${}^tA$,

que :

(7) ‖ F_1 et F_2 sont les **seuls** plans stables par f,

(tout autre plan stable par f ayant une équation dont les cœfficients sont proportionnels à ceux de l'équation de F_1 ou de F_2).

◇ Recherche du vecteur ε_3 : la forme attendue pour la matrice de f dans la **nouvelle** base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, est :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \end{array}$$

où : la forme des deux premières colonnes est cohérente avec le fait que ε_1 et ε_2 sont propres pour f et les valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement (*c.f.* **II.A.1.**)

L'**examen de la troisième colonne**, permet de dégager la **condition nécessaire** suivante sur le vecteur cherché ε_3, à savoir : $f(\varepsilon_3) \in VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Conjuguée au fait que : $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, on en déduit que **nécessairement** :

pour tout élément de $VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, *i.e.* tout vecteur de la forme $\alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_3$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, par **linéarité de f**, et parce que $VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est un ***s.e.v.*** de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\alpha\varepsilon_2 + \beta\varepsilon_3) = \alpha f(\varepsilon_2) + \beta f(\varepsilon_3) \in VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Par conséquent, le plan vectoriel $VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ doit être stable par f, *i.e.* , par (7), doit être égal à F_1 ou F_2. Donc : ε_3 appartient à F_1 ou à F_2.

Or, en considérant les équations de F_1 et de F_2, on peut constater que : $\varepsilon_1 = (1, -2, 0)$ appartient à F_2 et non à F_1, et que : $\varepsilon_2 = (1, -2, 1)$ appartient à F_2 et à F_1. On en déduit que : $VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \subset F_2$, et puisque ces deux *s.e.v.* sont tous deux pour dimension 2 (en effet la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est libre car ε_1 et ε_2 sont propres pour A pour deux valeurs propres distinctes), on vérifie que :

$$VECT(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = F_2.$$

Il est donc **exclu** que ε_3 appartienne à F_2, car alors la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, en tant que famille de 3 vecteurs de F_2, *s.e.v.* de dimension 2, serait liée, et par suite $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ne saurait être une base $\mathbb{R}^3$. En conséquence, **nécessairement** :

ε_3 appartient à F_1, d'équation : $x - z = 0$, *i.e.* ε_3 est de la forme : $(\gamma, 0, \gamma)$ où $\gamma \in \mathbb{R}$.

• **Enfin**, comme l'examen de la troisième colonne de A' le requiert, on a comme **seconde condition nécessaire** pour ε_3 :

$$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \lambda_2.\varepsilon_3, \ i.e. : \ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 1.\varepsilon_3.$$

Matriciellement, si on note X_3 et X_2 les coordonnées de ε_3 et ε_2 dans la base canonique $\mathcal{B}$, les deux conditions nécessaires précédentes imposent respectivement que :

$$X_3 = {}^t(\gamma \quad 0 \quad \gamma), \text{ avec } \gamma \in \mathbb{R}, \text{ et : } \quad AX_3 = X_2 + X_3,$$

ce qui donne, puisque : $X_2 = {}^t(1 \quad -2 \quad 1)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3\gamma \\ -4\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + 1 \\ -2 \\ \gamma + 1 \end{pmatrix} \iff (2\gamma = 1).$$

Ainsi, **nécessairement**, le vecteur cherché ε_3 est égal à : $\tilde{\varepsilon} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Et comme on peut vérifier que **ce vecteur convient**, puisque :

$f(\tilde{\varepsilon}) = \lambda_2.\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}$, et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car :

- $\varepsilon_3 \notin F_1$, tandis que F_1 contient ε_2 et ε_3
- $\{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est libre car ε_2 et ε_3 ne sont pas colinéaires.

D'où la conclusion, puisque, rappelons-le, ε_1 et ε_2 sont propres pour A, pour les valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement :

$$\boxed{\text{dans la base } \mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \text{ où } \varepsilon_3 = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}), \ f \text{ a pour matrice } A'}.$$

◇ Connaisant les coordonnées respectives de ε_1,ε_2 et ε_3 dans la base canonique $\mathcal{B}$, la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}, \text{ ce qui traduit que : } \begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 - 2.e_2 \\ \varepsilon_2 = e_1 - 2.e_2 + e_3 \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2}.e_1 + \frac{1}{2}.\varepsilon_3 \end{cases}.$$

Des **combinaisons linéaires** bien choisies des lignes de ce dernier système, donnent : $e_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, et : $-2e_2 = \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$ puis **par substitution** dans la dernière équation, il vient : $e_1 = 2e_2 + \varepsilon_3 = -(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) + \varepsilon_1$. Et finalement, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 &=& \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2.\varepsilon_3 \\ e_2 &=& -\tfrac{1}{2}.\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ e_3 &=& -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{array}\right.$$, ce qui se traduit par : $$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

.PARTIE B.

II.B.1. *Sans plus d'astuce*, si l'on remplace la condition : $A'X = XA'$ par la **condition équivalente $A'X - XA' = \mathbf{o}$**, alors en effectuant les produits et la soustraction matriciels, si l'on considère une matrice X, carrée, d'ordre 3, quelconque, notée :

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ alors : } A'X - XA' = 0 \text{ équivaut à } \begin{pmatrix} 0 & b & -b+c \\ -d+g & h & -e+i \\ -g & 0 & -h \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi : X commute avec A' si et seulement si $\big(b = g = h = d = c = 0$ et $e = i\big)$.
Ce qui donne, en renommant a, e et i : α, β et γ, respectivement :

$$\boxed{X \text{ commute avec } A' \text{ si et seulement si il existe } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que : } X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}}.$$

II.B.2.a. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, si l'on note : $M' = P^{-1}MP$, on a aussi, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} : $M = PM'P^{-1}$, et donc :

(8) $\big(M$ solution de $(E)\big)$, *i.e.* $\big(M^2 = A\big)$, équivaut à : $\big(PM'P^{-1}\big)^2 = A$.

Or, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, cette dernière égalité équivaut à : $P^{-1}.(PM'P^{-1}).(PM'P^{-1}).P = P.A.P^{-1}$, soit : **(9)** $M'^2 = P.A.P^{-1}$,
en effectuant les simplifications des trois produits $P^{-1}P$ égaux à I.

Puis, parce que, en vertu du **II.A.2.d.**, A et A' sont les matrices de f, respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a encore :

$P.A.P^{-1} = A'$, et donc on déduit de (8) et (9), que :

$$\boxed{\big(M \text{ solution de } (E)\big) \text{ si et seulement si } \big((E') : (M')^2 = A'\big)}.$$

II.B.2.b. *Ceci est* ***classique*** *et de vérification immédiate* : **toute matrice commute avec ses puissances.**

◇ Si M' est solution de (E'), alors : $M'^2 = A'$ et donc :

$M'.A' = M'.(M')^2 = M'.M'.M' = (M')^2.M' = A'.M'$.

On a donc vérifié que :

$$\boxed{\text{si } M' \text{ est solution de } (E'), \text{ alors : } M' \text{ commute avec } A'}.$$

II.B.2.c. En vertu du **II.B.2.b.**, les solutions M de (E) s'obtiennent à partir des solutions M' de (E'), par la correspondance : $M = PM'P^{-1}$, et par le **II.B.2.c.**, les solutions de (E') sont à chercher parmi les matrices commutant avec A'.

Or, les matrices commutant avec A', sont de la forme explicitée au **II.B.1.**, donc :

M' est solution de (E') si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ et vérifie : } M'^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 2\beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En **identifiant les cœfficients** des deux matrices dans la dernière égalité, il vient donc :

M' est solution de (E') si et seulement si M' est de la forme $M' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$,

avec : $\alpha^2 = 2$, $\beta^2 = 1$ et $\gamma = \frac{1}{2}.\beta$, *i.e.* : $\alpha = \pm\sqrt{2}$, $\beta = \pm 1$ et $\gamma = \frac{1}{2}.\beta$

Enfin, en vertu de **II.B.2.a.**, on en déduit les solutions de (E) en multipliant les quatre solutions obtenues à gauche par P et à droite par P^{-1}, **ainsi** :

(E) admet quatre solutions, M_1, M_2, M_3 et M_4, définies par :

$$M_1 = P.\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} \; ; \quad M_2 = P.\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.P^{-1} \; ;$$

$$M_3 = P.\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} \; ; \quad M_4 = P.\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.P^{-1}.$$

ÉPREUVE B

Durée 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les parties I et II sont indépendantes.

Notations et rappels

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à la base $B = ((1,0);(0,1))$. A tout vecteur (x,y), on associera la matrice colonne $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On rappelle que la norme d'un vecteur (x,y) est donnée par : $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{{}^tM \times M}$ et que le produit scalaire des vecteurs (x,y) et (x',y') vérifie : $xx'+yy' = {}^tM' \times M$.

Par ailleurs, on considèrera des matrices carrées d'ordre 2 et à coefficients réels ; elles pourront être associées, à l'aide de la base B, à des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. En particulier, on désignera par I la matrice unité, associée à l'endomorphisme identité.

Enfin, si A désigne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on notera : $\Delta(A) = ab - dc$.

Résultat admis

Dans tout le problème on admettra le résultat suivant : si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles, admettant sur $\mathbb{R}^2$ une densité conjointe f, alors, pour tout quadruplet de réels (u,v,w,z) vérifiant la condition : $uz - vw \neq 0$, $(uX_1 + vV_2, wX_1 + zX_2)$ est un couple de variables aléatoires réelles, admettant sur $\mathbb{R}^2$ une densité conjointe g liée à f par la formule :

$$f(x,y) = \mid uz - vw \mid g(ux+vy, wx+zy)$$

Question préliminaire

On rappelle qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale de paramètres m et σ (où σ est un réel strictement positif), si elle admet une densité φ définie, pour tout x réel par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

On notera cette loi : $N(m,\sigma)$. L'espérance de X est alors m et sa variance σ^2.

Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et b un réel. En utilisant les propriétés des lois normales, justifier les relations :

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2)\mathrm{d}t = -b\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\frac{1}{2}a^2x^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}$$

PARTIE I

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que A est une matrice symétrique réelle de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Pour tout couple de réels (x, y) on posera :

$$Q_A(x, y) = {}^tM \times A \times M$$

On dira que A est *définie positive* si, pour tout couple (x, y) non nul, $Q_A(x, y)$ est un réel strictement positif.

1. Montrer que la relation : $A \times M = 0$ implique : $Q_A(x, y) = 0$
En déduire qu'une matrice définie positive est nécessairement inversible.

2. Dans cette question, on suppose que b est nul. Expliciter $Q_A(x, y)$ et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit définie positive est que a et d soient strictement positifs.

3. On suppose dans cette question que b est non nul.

3.a. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3.b. Montrer que, pour un réel λ, $A - \lambda I$ est non inversible si et seulement si :

$$(1) \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

En déduire qu'elle admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 qui vérifient (1). Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les deux valeurs propres soient strictement positives est que a, d et $ad - b^2$ soient strictement positifs.

3.c. Montrer que l'on peut choisir deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2, unitaires (de norme 1), notés v_1 et v_2. On notera P la matrice de passage de B vers la base (v_1, v_2), V_1 et V_2 les matrices colonnes associées aux vecteurs v_1 et v_2 dans la base B. Après avoir justifié l'égalité :

$${}^tV_1 \times A \times V_2 = {}^tV_2 \times A \times V_1$$

montrer que l'on a : $\quad {}^tV_1 \times V_2 = 0$

et enfin que : $\quad {}^tP \times P = I.$

3.d. On pose :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Justifier la relation : $\qquad Q_A(x,y) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$

En déduire que A est définie positive si et seulement si λ_1 et λ_2 sont strictement positives.

4. Montrer que si A est définie positive, alors, pour toute matrice C inversible, ${}^tC \times A \times C$ est encore une matrice symétrique, définie positive.

5. Montrer que, si A est définie positive, il existe une matrice B symétrique et inversible telle que :

$$A = B^2$$

Indication : on pourra introduire la matrice :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

et utiliser la realtion : ${}^tP \times P = I$

PARTIE II

Dans cette partie, $X = (X_1, X_2)$ désigne un couple de variables aléatoires réelles de densité conjointe définie, pour tout couple (x,y) de réels par :

$$f(x,y) = k\exp\Big(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\Big)$$

où ρ est un élément de $]-1,1[$. On dira que X est un *couple normal standard.*

1. Déterminer k en fonction de ρ. On pourra pour cela remarquer l'identité :

$$x^2 - 2\rho xy + y^2 = (x - \rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2$$

et utiliser la question préliminaire.

2.a. Déterminer et reconnaître les lois marginales de X_1 et de X_2.

2.b. Calculer la matrice de covariance de X définie par la formule :

$$V_X = \begin{pmatrix} E(X_1^2) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_1) & E(X_2^2) \end{pmatrix}$$

Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

2.c. Justifier la formule :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Delta(V_X)|}} \exp\Big(-\frac{1}{2}.{}^tM \times V_X^{-1} \times M\Big)$$

M désignant toujours la matrice colonne associée au couple (x,y).

PARTIE III

Dans cette partie, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

et on notera $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires réelles dont une densité conjointe est donnée par :

$$f(x, y) = k \exp\Big(- \frac{1}{2}.{}^t M \times A \times M\Big)$$

On dira que X est un *couple normal.*

1. Étude d'un cas particulier.

1.a. Expliciter $f(x, y)$ lorsque A est égale à I (on donnera en particulier la valeur de k).

1.b. Déterminer k et les lois marginales du couple lorsque A est diagonale. Que peut-on dire de X_1 et X_2 ?

1.c. Démontrer que si U et V sont deux variables indépendantes réelles suivant chacune une loi normale centrée, alors (U, V) est un couple normal.

2.Étude du cas général.

2.a. Exprimer k en fonction de $\Delta(A)$.

2.b. Déterminer la matrice de covariance V_X du couple et l'exprimer en fonction de A^{-1}

3. Dans cette question, on considère le couple : $Y = (uX_1 + vX_2, wX_1 + zX_2)$, avec la condition :

$$uz - vw \neq 0.$$

Montrer que Y est un couple normal dont on exprimera la matrice de covariance en fonction de la matrice V_X qui a été définie dans la partie II et de la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$$

4. En utilisant les résultats précédents et ceux de la question I.5, montrer que l'on peut choisir C tel que y soit un couple normal standard de matrice de covariance I.

Corrigé

.Préliminaire.

Il s'agit ici de calculer, (c'est un ***classique****), des intégrales en les ramenant à des* **intégrales de référence***, dont les valeurs sont ici celles de différents moments de la loi de Laplace-Gauss.*

Rappelons ainsi que si une V.A. X suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$, de densité notée φ :

◇ $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (**propriété des fonctions de densité**), ce qui explicitement s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x, \text{ ou encore : } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x,$$

par linéarité de l'intégrale. Pour une V.A. suivant une loi $\mathcal{N}(-b,\frac{1}{a})$, (ce qui a un sens car par hypothèse $a>0$), on aura :

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a^2}{2}.(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = 1, \text{ ou encore : } \boxed{(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{a^2}{2}.(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}}.$$

◇ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}x.e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x,$

et de même, pour $m=-b$ et $\sigma = 1/a$, (avec $b\in\mathbb{R}$ et $a>0$), comme alors $E(X) = m = -b$, il vient :

$$-b = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}x.e^{-\frac{a^2}{2}.(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = 1, \text{ soit : } \boxed{(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}x.e^{-\frac{a^2}{2}.(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = -b.\frac{\sqrt{2\pi}}{a}}.$$

◇ $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$, et, cette fois, pour $m=0$ et $\sigma = 1/a$, on a :

$$E(X^2) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.e^{-\frac{1}{2}.a^2x^2}\,\mathrm{d}x,$$

mais aussi, par définition de la loi $\mathcal{N}(0,1/a)$: $V(X) = \sigma^2 = 1/a^2$ et $E(X) = m = 0$, et, par la **formule d'Huyghens** : $V(X) = E(X^2) - E(X)$. Donc ici, puisque $E(X)=0$: $E(X^2) = V(X) = 1/a^2$, et par l'expression intégrale de $E(X^2)$ pour $m=0$ et $\sigma = 1/a^2$, on obtient :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.e^{-\frac{1}{2}.a^2x^2}\,\mathrm{d}x = 1, \text{ soit : } \boxed{(3)\ \int_{-\infty}^{+\infty}x^2.e^{-\frac{1}{2}.a^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}}.$$

.PARTIE I.

I.1. Pour tout couple (x,y) de réels, et M la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, si $A\times M = 0$, alors par simple multiplication à gauche de cette égalité par ${}^tM$, il vient : ${}^tM\times A\times M = 0$, soit : $\boxed{Q_A(x,y)=0}$.

I.2. On suppose ici que $b=0$, donc A est la matrice diagonale : $D = \mathrm{Diag}\,[a,d]$ et par suite, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$${}^tM\times A\times M = (x\quad y)\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x\quad y)\begin{pmatrix}ax\\dy\end{pmatrix} = a.x^2+d.y^2.$$

Ainsi : $\boxed{\underline{\text{si } b=0} :\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad Q_A(x,y) = a.x^2+d.y^2}$.

◇ A est dite *définie positive* si pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $Q_A(x,y)>0$. Donc, si $b=0$, par le résultat précédent, il apparaît immédiatement comme **condition nécessaire** du caractère défini, positif, de A : $a>0$ et $d>0$.

En effet, <u>si</u> A est définie positive, on doit avoir **en particulier** $Q_A(x,y) > 0$ pour les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, **or**, par la formule précédemment trouvée, si $b = 0$: $Q_A(e_1) = a$ et $Q_A(e_2) = d$.

• <u>**Réciproquement**</u> : si $a > 0$ et $d > 0$, $Q_A(x,y) = a.x^2 + d.y^2$ est strictement positif dès lors que x ou y est différent de 0, donc, dès que $(x,y) \neq (0,0)$. La condition nécessaire est donc **suffisante**, et l'on peut conclure :

$$\boxed{\underline{\text{si } b = 0} : A \text{ est définie positive si et seulement si } a > 0 \text{ et } d > 0}.$$

I.3.a. De façon immédiate, **d'après le cours** :

$$\boxed{A \text{ étant carrée, symétrique, réelle, } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}.$$

I.3.b. Pour tout λ réel, la matrice carrée $A - \lambda.I$ est non-inversible si et seulement si elle admet une réduite de Gauss dont au moins l'un des pivots est nul.

• En notant que, **par hypothèse**, $b \neq 0$, on peut mener ainsi la réduction :

$$A - \lambda.I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} b & d-\lambda \\ a-\lambda & b \end{pmatrix}$$

puis, en effectuant la substitution : $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-\lambda)L_1$, on obtient que :

$$A - \lambda.I \text{ a même rang que } \begin{pmatrix} b & d-\lambda \\ 0 & b^2 - (a-\lambda)(d-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Puisque $b \neq 0$, la réduite de Gauss obtenue est non-inversible si et seulement si son deuxième pivot est nul. **Or**, celui-ci, après développement et réduction, s'écrit : $-\lambda^2 + (a+d)\lambda - ad + b^2 = -(\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad + b^2)$, **donc** :

$$\boxed{A - \lambda.I \text{ est non-inversible si et seulement si } \underline{(1)} : \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad + b^2 = 0}.$$

◇ Puisque ***A* est diagonalisable** sur $\mathbb{R}$ (*c.f.* **I.3.a.**), il existe deux réels λ_1 et λ_2, éventuellement égaux, (ce sont les valeurs propres de A), et une matrice inversible P, tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

• De plus, λ_1 et λ_2 sont **distincts**, car (*et l'argument est* ***classique***) si tel n'est pas le cas, c'est-à-dire si l'on suppose que $\lambda_1 = \lambda_2$, alors :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P.(\lambda_1.I).P^{-1} = \lambda_1.P.I.P^{-1} = \lambda_1.P.P^{-1} = \lambda_1.I$$

Or : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ne saurait être égale à : $\lambda_1.I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ car $b \neq 0$.

• **Enfin**, les valeurs propres de λ d'une matrice A étant caractérisées par le fait que $A - \lambda.I$ est non-inversible, **λ_1 et λ_2 sont des solutions de <u>(1)</u>**, en vertu de l'équivalence précédente.

<u>**On peut alors conclure**</u> :

[1] $\boxed{A \text{ admet deux valeurs propres réelles, distinctes, } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ vérifiant } \underline{(1)}}$.

◇ En conséquence, λ_1 et λ_2 sont strictement positives si et seulement si le polynôme $\pi(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ (dont λ_1 et λ_2 sont les racines d'après **[1]**) admet deux racines réelles strictement positives.

Or, pour un polynôme de la forme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$, la somme et le produit de ses racines sont égaux, respectivement à $-\beta/\alpha$ et à γ/α, donc, pour π et ses deux racines λ_1 et λ_2, on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad \text{et} \quad \lambda_1.\lambda_2 = ad - b^2.$$

On constate ainsi que :

- $(a > 0,\ d > 0,\ ad - b^2 > 0)$ est une **condition suffisante** pour que λ_1 et λ_2 soient strictement positives. En effet, cette condition donne : $\lambda_1.\lambda_2 > 0$, de sorte que λ_1 et λ_2 sont de même signe et non nulles. Et elle impose aussi : $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, de sorte que λ_1 et λ_2 sont de plus nécessairement positives (strictement car $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).

Réciproquement :

- si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors leur produit, égal à $ad - b^2$, est strictement positif, donc aussi le produit ad, car $ad = \lambda_1\lambda_2 + b^2$ et $b \in \mathbb{R}$. De même, la somme $a + d$, égale à $\lambda_1 + \lambda_2$ est strictement positive. Ainsi, **la somme et le produit** des réels a et d sont **strictement positifs**, ce qui implique (comme on l'a vu ci-dessus pour λ_1 et λ_2) que : $a > 0$ et $d > 0$. Et comme il a été établi aussi que $ad - b^2 > 0$: **la condition** $(a > 0,\ d > 0,\ ad - b^2 > 0)$ **est aussi nécessaire.**

<u>En conclusion</u> :

$$\boxed{\lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 \text{ si et seulement si } a > 0,\ d > 0 \text{ et } ad - b^2 > 0}.$$

I.3.c. En introduisant (*ce qui est **usuel***), f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique **B**, en rappelant que :

■ la diagonalisabilité de A équivaut à celle de f et leurs valeurs propres sont les mêmes.

■ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est propre pour f associé à une valeur propre λ, si et seulement si la matrice associée de ses coordonnées dans la base canonique **B**, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est propre pour A et la valeur propre λ.

Ainsi, ici, à l'instar de A, f est **diagonalisable** et a pour valeurs propres λ_1 et λ_2 (distinctes). En conséquence, (c'est une caractérisation de la diagonalisabilité) :

il existe, pour f, une base de $\mathbb{R}^2$, (w_1, w_2), constituée de vecteurs propres, w_1 et w_2 étant associés respectivement à λ_1 et λ_2.

Ces vecteurs w_1 et w_2, dont l'existence est acquise, ne sont pas nécessairement unitaires, mais si l'on considère les vecteurs v_1 et v_2 définis par :

$$v_1 = \frac{1}{||w_1||}.w_1, \quad \text{et :} \quad v_2 = \frac{1}{||w_2||}.w_2,$$

ceux-ci sont **unitaires** (on dit aussi *normés*), puisque :

par les **propriétés de la norme** : $||v_i|| = \left|\left|\frac{1}{||w_i||}.w_i\right|\right| = \frac{1}{||w_i||}.||w_i|| = 1 \quad (i = 1, 2)$.

Et v_1 et v_2 sont encore **propres pour f**, car colinéaires à des vecteurs propres de f, et étant propres pour deux valeurs propres distinctes, ils forment aussi une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, donc : v_1 et v_2 forment une **base** de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{on peut choisir deux vecteurs propres, unitaires, } v_1 \text{ et } v_2, \text{ associés à } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2}.$$

◇ V_1 et V_2 désignant les matrices colonnes associées à v_1 et v_2, *i.e.* les matrices colonnes de leurs coordonnées dans **B**, le produit matriciel ${}^tV_1 \times A \times V_2$, est le produit, dans cet ordre, d'une matrice 1×2, d'une matrice 2×2 et d'une matrice 2×1, donc, **par les règles du produit matriciel** :

le produit ${}^tV_1 \times A \times V_2$ est une matrice 1×1 (c'est un **réel**).

Or, une matrice 1×1 est égale à sa transposée (*elle est **invariante** par transposition*), donc :

$$\textbf{[2]} \quad {}^tV_1 \times A \times V_2 = {}^t({}^tV_1 \times A \times V_2).$$

où, par les **propriétés de la transposition** (${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$, ${}^t({}^tM) = M$) :

$${}^t({}^tV_1 \times A \times V_2) = {}^t(A \times V_2) \times {}^t({}^tV_1) = {}^tV_2 \times {}^tA \times V_1.$$

Ainsi, [2] équivaut à : ${}^tV_1 \times A \times V_2 = {}^tV_2 \times {}^tA \times V_1$, et comme A est symétrique (*i.e.* ${}^tA = A$), on a finalement :

$$[3] \quad \boxed{{}^tV_1 \times A \times V_2 = {}^tV_2 \times A \times V_1}.$$

◊ Pour $i = 1$ ou 2, $f(v_i) = \lambda_i.v_i$, soit **matriciellement** : $A \times V_i = \lambda_i.V_i$. Les deux membres de l'égalité précédente s'écrivent donc :

$${}^tV_1 \times A \times V_2 = {}^tV_1 \times (\lambda_2 V_2) = \lambda_2.{}^tV_1 \times V_2, \text{ et, de même : } {}^tV_2 \times A \times V_1 = \lambda_1.{}^tV_2 \times V_1.$$

Mais, là encore, ${}^tV_2 \times V_1$ est un réel, donc est égal à sa transposée, qui vaut ${}^tV_1 \times V_2$, donc l'égalité [3] est équivalente à :

$(\lambda_2 - \lambda_1).{}^tV_1 \times V_2 = 0$, ou encore, puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, à : $\boxed{{}^tV_1 \times V_2 = {}^tV_2 \times V_1 = 0}$.

◊ Si P désigne la matrice de changement de base **B** (base canonique de $\mathbb{R}^2$) à (v_1, v_2), et si l'on note :

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}, \text{ de sorte que : } P = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix},$$

alors, par le calcul, on obtient que :

$${}^tPP = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11}^2 + v_{21}^2 & v_{11}v_{12} + v_{21}v_{22} \\ v_{12}v_{11} + v_{22}v_{21} & v_{12}^2 + v_{22}^2 \end{pmatrix},$$

où l'on reconnaît dans les cœfficients de la matrice les carrés des normes de v_1 et v_2, égales à 1 (car v_1 et v_2 ont été choisis unitaires), ainsi que le produit scalaire de v_1 et v_2, dont on vient de montrer qu'il est nul. **De ces remarques, on tire que** :

$${}^tPP = \begin{pmatrix} ||V_1||^2 & {}^tV_1 \times V_2 \\ {}^tV_2 \times V_1 & ||V_2||^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ D'où le résultat attendu : } \boxed{{}^tPP = I}.$$

I.3. Posons : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Puisque ${}^tPP = I$, (ce qui implique que la matrice inversible P a pour inverse : $P^{-1} = {}^tP$, puis que $({}^tP)^{-1}$ existe et vaut P), on a par multiplication à gauche de cette égalité par $({}^tP)^{-1} = P$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, et pour tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$, de matrice associée : $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

si l'on pose encore : $M' = {}^tPM$, on a donc : $M = PM'$ et on est alors à même de réécrire, **par substitution** de PM' à M, l'expression de $Q_A(x, y)$ en fonction de x' et y', en effet :

$$Q_A(x, y) = {}^tM \times A \times M = {}^t(PM') \times A \times PM' = {}^tM' \times ({}^tPAP) \times M'.$$

où, comme ${}^tP = P^{-1}$: ${}^tPAP = P^{-1}AP$.

Par ailleurs, puisque P est la matrice de passage de la base **B** à la base $\mathbf{B}' = (v_1, v_2)$, juxtaposition de V_1 et V_2, dans cet ordre, avec V_i $(i = 1, 2)$ propre pour A et la valeur propre λ_i : $P^{-1}AP = \text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2]$, et donc :

$$Q_A(x, y) = (x' \quad y')\, {}^tPAP \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x' \quad y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x' \quad y') \begin{pmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{pmatrix}$$

et enfin : $\boxed{Q_A(x, y) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2}$.

◇ A est définie positive si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$, $Q_A(x, y) > 0$.
On a montré ici, avec les notations précédentes, que :

$$Q_A(x, y) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2, \text{ avec } x' \text{ et } y' \text{ liés à } x \text{ et } y \text{ par : } M = PM'.$$

Donc, par une démarche analogue à celle adoptée au **I.2.** :

- Si A est définie positive : P étant la matrice de passage de la base **B** à la base $\mathbf{B}' = (v_1, v_2)$, pour tout (x, y), de coordonnées M dans **B**, $M' = P^{-1}M$ représente les coordonnées de (x, y) dans $\mathbf{B}'$. Ainsi, pour v_1 et v_2, premier et deuxième vecteurs de la base $\mathbf{B}'$, on a, respectivement : $(x', y') = (1, 0)$ et $(x', y') = (0, 1)$, et par suite : $Q_A(v_1) = \lambda_1.1^2 + \lambda_2.0^2 = \lambda_1$, et : $Q_A(v_2) = \lambda_1.0^2 + \lambda_2.1^2 = \lambda_2$
Donc, **si A est définie positive**, puisque $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$:
$$Q_A(v_1) = \lambda_1 > 0, \text{ et : } Q_A(v_2) = \lambda_2 > 0.$$
Par conséquent, la stricte positivité de λ_1 et λ_2 est une **condition nécessaire** pour que A soit définie positive.

Et **réciproquement** :

- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: alors, $Q_A(x, y) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 > 0$, sauf si $x' = 0$ et $y' = 0$, auquel cas : $Q_A(x, y) = 0$. **Or,**
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ implique : } (x, y) = (0, 0), \text{ puisque : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$
Donc : si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors : $Q_A(x, y) > 0$, sauf pour $(x, y) = (0, 0)$.
ce qui traduit le caractère défini positif de A.

__En conclusion__, la condition nécessaire mise au jour est suffisante, donc :

$$\boxed{A \text{ est définie positive si et seulement si } \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0},$$

I.4. Supposons A définie positive, et considérons une matrice inversible C. On peut noter successivement, concernant la matrice ${}^tC \times A \times C$ que :

- ${}^tCAC$ est **symétrique**, car égale à sa transposée. En effet :
$${}^t({}^tCAC) = {}^tC.{}^tA.{}^t({}^tC) = {}^tC.{}^tA.C = {}^tC.A.C, \text{ car } A \text{ est symétrique.}$$
- pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, par définition de Q :
$$Q_{{}^tCAC}(x, y) = {}^tM({}^tCAC)M = {}^t(CM)ACM.$$
et comme A est définie positive :
$${}^t(CM)ACM > 0 \text{ sauf si } CM = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ auquel cas : } {}^t(CM)ACM = 0.$$
Or, parce que C est inversible :
$$CM = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff M = C^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
donc : $Q_{{}^tCAC}(x, y) > 0$, sauf si $(x, y) = (0, 0)$, ce qui traduit que :
$${}^tCAC \text{ est définie positive.}$$

D'où la conclusion attendue :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{si } A \text{ est définie positive et si } C \text{ est inversible, alors :} \\ {}^tCAC \text{ est symétrique, définie positive}\end{array}}$$

I.5. *La matrice que l'énoncé suggère d'introduire, a manifestement un intérêt du fait que son carré est égal à* Diag $[\lambda_1, \lambda_2]$ *; c'est une matrice B possible dans le cas où A*

est elle-même diagonale, définie, positive, c'est-à-dire de la forme Diag $[\lambda_1, \lambda_2]$, *avec* $\lambda_1 > 0$ *et* $\lambda_2 > 0$ *(d'après le* **I.2.**).

◇ D'une façon générale, si A est définie positive, alors (*c.f.* **I.3.**) $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, et donc : **considérer $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2}$ a un sens.**
De plus, on sait que A est liée à Diag $[\lambda_1, \lambda_2]$, avec les notations du **I.3.c.**, par :
| Diag $[\lambda_1, \lambda_2] = P^{-1}.A.P$ (*c.f.* **I.3.d.**), ce qui équivaut à : $A = P.\text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2].P^{-1}$,
ou encore à : $A = P.\text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2].{}^tP$, puisque $P^{-1} = {}^tP$.

• Ceci étant, de par la remarque initialement faite sur le carré de la matrice Diag $[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}]$ (il vaut : Diag $[\lambda_1, \lambda_2]$) :

$$A = P \times \text{Diag}[\lambda_1, \lambda_2] \times {}^tP = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}{}^tP.$$

Si maintenant on utilise que : ${}^tPP = I$, pour **insérer ${}^tPP$** dans le dernier produit, il vient :

$$A = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}.\underbrace{{}^tP.P}_{=I}.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}{}^tP\ ,$$

Ainsi, il apparaît que :

$$A = B^2, \text{ si l'on pose : } B = P \times \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \times {}^tP.$$

Enfin, **la matrice B étant choisie ainsi**, on peut vérifier que :

- B est **inversible**, en tant que produit de matrices inversibles (P, ${}^tP$ sont inversibles, comme on l'a vu, et Diag $[\lambda_1, \lambda_2]$ est inversible car $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2} > 0$)
- B est **symétrique**, en effet :
$${}^tB = {}^t(P.\text{Diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}].{}^tP) = {}^t({}^tP).{}^t(\text{Diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}]).{}^tP$$
et comme une matrice diagonale est égale à sa transposée, on peut conclure :
$${}^tB = {}^t({}^tP).\text{Diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}].{}^tP = P.\text{Diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}].{}^tP, \textit{ i.e. : } {}^tB = B.$$

On peut alors conclure :

$\boxed{\text{si } A \text{ est définie positive, il existe } B, \text{ symétrique et inversible, telle que : } A = B^2}$.

.PARTIE II.

$\boxed{\textbf{II.1.}}$ Étant acquis que : $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ est la densité d'un couple de variables aléatoires réelles, il s'agit de vérifier que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy \text{ vaut } 1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{l'existence de l'intégrale est acquise,} \\ \text{et l'on sait, les domaines d'intégration} \\ \text{en } x \text{ et en } y \text{ étant indépendants,} \\ \text{que l'on peut intégrer indifféremment} \\ \text{d'abord par rapport à } x \text{ ou à } y\end{array}\right).$$

◇ Comme l'intégrale double n'est pas directement calculable, **on utilise**, *pour réécrire* $f(x, y)$, **l'identité proposée**, ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k.\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big((x-\rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2\Big)\right)dx\,dy$$

(on donnera une démonstration rapide de l'identité proposée : elle consiste simplement à développer le membre de droite)

Il est maintenant possible de calculer l'intégrale, en commençant par intégrer par rapport à x, y étant constant : **en extrayant un facteur multiplicatif constant** (*i.e.* indépendant de x), **l'intégrale la plus intérieure s'écrit** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k.\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((x-\rho y)^2+(1-\rho^2)y^2\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$= k.\exp\left(-\frac{(1-\rho^2)y^2}{2(1-\rho^2)}\right).\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right)\mathrm{d}x = k.e^{-\frac{y^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}x$$

• On reconnaît alors dans la dernière intégrale une **intégrale de type (1)**, (*c.f.* **Préliminaire**), pour $a = 1/\sqrt{1-\rho^2}$ et $b = -\rho y$, (en remarquant que ces définitions sont licites car, puique, par hypothèse : $|\rho| < 1$, $a = 1/\sqrt{1-\rho^2}$ existe et est > 0). Par le **Préliminaire**, cette intégrale vaut donc : $k.e^{-\frac{y^2}{2}}.\frac{\sqrt{2\pi}}{a} = k.e^{-\frac{y^2}{2}}.\sqrt{2\pi}.\sqrt{1-\rho^2}$. Et par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} k.e^{-\frac{y^2}{2}}.\sqrt{2\pi}.\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}y = k.\sqrt{2\pi}.\sqrt{1-\rho^2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y.$$

• **Or, d'après le cours**, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$ existe et vaut : $\sqrt{2\pi}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k.2\pi.\sqrt{1-\rho^2}$. Il faut donc, pour que f représente bien une fonction de densité, que : $k.2\pi.\sqrt{1-\rho^2} = 1$, ce qui impose : $\boxed{k = \frac{1}{2\pi.\sqrt{1-\rho^2}}}$.

II.2.a. Lois marginales de X_1 et X_2 : sachant que la loi conjointe du couple (X_1, X_2) est donnée par la densité f, **d'après le cours**, les lois marginales de X_1 et de X_2 admettent pour fonctions de densité, respectivement, f_1 et f_2, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{et :} \quad \forall y \in \mathbb{R},\quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

• On peut remarquer que la seconde intégrale a déjà été calculée et vaut :
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = k.e^{-\frac{y^2}{2}}.\sqrt{2\pi}.\sqrt{1-\rho^2}$. Compte-tenu de la valeur trouvée pour k, il vient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi.\sqrt{1-\rho^2}}.e^{-\frac{y^2}{2}}.\sqrt{2\pi}.\sqrt{1-\rho^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Ainsi :

$$\forall y \in \mathbb{R},\quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

• Compte-tenu du **rôle symétrique joué par x et y** dans la définition de $f(x,y)$ (en effet : l'expression de $f(x,y$, ainsi que le domaine, $\mathbb{R}^2$, auquel appartiennent les couples (x,y), sont invariants si l'on échange x et y), on peut affirmer que la **même démonstration**, où l'on remplace f_2 par f_1 et où l'on échange x et y, donne, de même :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On reconnaît bien sûr ces deux lois ! :

$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent toutes deux la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}(0,1)}$.

II.2.b. Matrice de covariance du couple $X = (X_1, X_2)$: tout d'abord, puisque les V.A. X_1 et X_2 suivent la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (*c.f.* **II.2.a.**), d'espérance nulle et d'écart-type 1 (**par définition**), les **cœfficients diagonaux de V_X** sont de calcul immédiat :

[4] par la **formule d'Huyghens** : $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = 1^2 + 0^2 = 1$.

- pour les **cœfficients extra-diagonaux**, on sait, d'une part, qu'ils sont **égaux** :

$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1)$ (**propriété** connue **de la covariance**),

et d'autre part, par la **formule d'Huyghens pour la covariance** :

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

Et comme ici : $E(X_1) = E(X_2) = 0$, on obtient que :

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Et en utilisant de nouveau l'expression de $f(x,y)$ déduite de l'**identité proposée** à la question **II.1.**, et en **séparant les variables** (*le plus possible*) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} k.y.e^{-\frac{y^2}{2}}.\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

et cette fois, pour les mêmes valeurs qu'au **II.1.**, on reconnaît, dans la parenthèse, l'intégrale (2) du **Préliminaire**, qui vaut $-b.\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$, c'est-à-dire ici : $\rho y.\sqrt{1-\rho^2}.\sqrt{2\pi}$. Il s'ensuit, par **linéarité de l'intégrale**, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k.\rho\sqrt{1-\rho^2}.\sqrt{2\pi}.\int_{-\infty}^{+\infty} k.y.e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y,$$

où l'intégrale restante vaut $\sqrt{2\pi}$ (intégrale (3) du **Préliminaire** pour $a = 1$).

Ainsi, en remplaçant aussi k par sa valeur :

$$[5]\quad \operatorname{cov}(X_1, X_2) = k.\rho\sqrt{1-\rho^2}.(\sqrt{2\pi})^2 = \rho.$$

- On peut alors conclure, par [4] et [5], pour la matrice de covariance du couple $X = (X_1, X_2)$:

$$\boxed{V_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}}.$$

◇ *Pour un couple de variables aléatoires admettant une densité, l'indépendance se caractérise par l'égalité, sur $\mathbb{R}^2$, de la densité conjointe et du produit des densités marginales.* Or, pour les variables X_1 et X_2 de l'énoncé, on sait que :

- si les deux V.A. X_1 et X_2 sont **indépendantes** : alors elles ne sont pas corrélées, *i.e.* $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$. Donc, comme : $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \rho$ (*c.f.* [5]) :

  $\rho = 0$ est donc une **condition nécessaire** pour l'indépendance de X_1 et X_2.

Et **réciproquement** :

- si $\rho = 0$: alors, k vaut $1/2\pi$ (*c.f.* **II.1.**, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en remplaçant k et ρ par leurs valeurs respective dans l'expression générale de f, il vient :

$$f(x,y) = k.e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((x-\rho y)^2+(1-\rho^2)y^2\right)} = \frac{1}{2\pi}.e^{-\frac{1}{2}.(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{y^2}{2}},$$

  et l'**on reconnaît** que : f est alors le produit des densités marginales de X_1 et X_2 (*c.f.* **II.2.a.**), ce qui établit l'**indépendance**de X_1 et X_2 et fait de $\rho = 0$ une **condition suffisante** d'indépendance.

Ainsi : $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées}}$.

II.2.c. *L'on va simplement **vérifier** que la réécriture proposée de $f(x,y)$ est exacte.*

• Tout d'abord, la définition de Δ, donnée au **Préliminaire**, appliquée à la matrice V_X, déterminée au **II.2.b.**, donne : $|\Delta(V_X)| = |1-\rho^2| = 1-\rho^2$ (car $|\rho|<1$), donc :

le facteur multiplicatif $\frac{1}{2\pi\sqrt{|\Delta(V_X)|}}$ est égal à k.

• Pour le reste, il faut **déterminer l'inverse de la matrice V_X**. L'inversibilité de V_X n'étant pas acquise, mais, **d'après le cours** :

(V_X est inversible) si et seulement si (pour tout couple $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, de matrice colonne associée M', l'équation $V_X.M = M'$ admet une unique solution $M = {}^t(x \;\; y) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$)

et si tel est le cas : [6] l'inverse de V_X est la matrice telle que : $M = V_X^{-1}M'$ pour tout M et M' telles que $V_X M = M'$.

D'où les calculs suivants :

$$V_X.M = M' \iff \begin{cases} x + \rho y = x' \\ \rho x + y = y' \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2-\rho L_1}{\iff} \begin{cases} x + \rho y = x' \\ 0 \quad (1-\rho^2)y = y' - \rho x' \end{cases}$$

Le système obtenu est **triangulaire** et tous ses **pivots** sont **non nuls** (car $1-\rho^2>0$, du fait que $|\rho|<1$), donc il est **de Cramer**, *i.e.* il admet une unique solution, donc :

V_X est inversible.

Et si l'**on poursuit la résolution**, en effectuant sur le dernier système la substitution : $L_1 \leftarrow (1-\rho^2)L_1 - \rho L_2$ (licite car $1-\rho^2 \neq 0$), il vient, après calculs :

$$V_X.M = M' \iff \begin{cases} (1-\rho^2).x = \rho x' - \rho y' \\ (1-\rho^2).y = y' - \rho x' \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{1-\rho^2}.x' - \frac{\rho}{1-\rho^2}.y' \\ y = -\frac{\rho}{1-\rho^2}.x' + \frac{1}{1-\rho^2}.y' \end{cases}$$

Et par suite, la résolution étant valable pour tout $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, en vertu de [6], il vient :

$$V_X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{-\rho}{1-\rho^2} \\ \frac{-\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}.\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'on a montré que V_X est inversible et déterminé son inverse. Un simple **calcul matriciel** permet alors de vérifier que, pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de matrice colonne associée M : ${}^tMV_X^{-1}M = \frac{1}{1-\rho^2}.(x^2 - 2\rho xy + y^2)$.

▪ **En conclusion**, compte-tenu de l'expression trouvée pour k et ${}^tMV_X^{-1}M$, on a bien :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Delta(V_X)|}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.{}^tMV_X^{-1}M\right)}.$$

.PARTIE III.

III.1.a. Si $A = I$, alors : ${}^tMAM = {}^tMM = x^2 + y^2$ (on aura reconnu le carré de la norme d'un vecteur (x,y), (*c.f.* **Préliminaire**). Par conséquent :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = k.e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$