de sorte que f est une densité conjointe de la forme étudiée à la **PARTIE II** avec $\rho = 0$. Or pour une telle densite et $\rho = 0$, la formule définissant k donne : $k = 1/2\pi$ (*c.f.* **II.1.**), donc on peut conclure :

$$\boxed{\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \tfrac{1}{2\pi}.e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}.$$

III.1.b. Si A est diagonale, alors A s'écrit $\mathrm{Diag}\,[\alpha, d]$, et, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$${}^tMAM = a.x^2 + d.y^2 \quad \text{et} \quad f(x,y) = k.e^{-\frac{1}{2}(a.x^2+d.y^2)} = k.e^{-\frac{a.x^2}{2}}.e^{-\frac{b.y^2}{2}}.$$

◇ Puisque ***f* se factorise** en le produit d'une fonction de x et d'une fonction de y, la convergence des intégrales étant acquise car f est une fonction de densité (*hypothèse de l'énoncé*), il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = k.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a.x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b.y^2}{2}}\,\mathrm{d}y.$$

Pour le calcul de ces intégrales, afin de justifier l'application du préliminaire, on doit déterminer le signe de a et d. **Or**, A étant **diagonale** et supposée **définie positive**, en vertu du **I.2.** : a et d sont strictement positifs.

Renommons maintenant $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ les paramètres a et b du **Préliminaire** (pour éviter les confusions avec les cœfficients de A

On peut considérer les racines carrées de a et d, puisque $a, d > 0$, et **constater** que les deux intégrales sont des intégrales du type (1) défini au **Préliminaire**, pour $\tilde{a} = \sqrt{a} > 0$, $\tilde{a} = \sqrt{d} > 0$ respectivement, et $b = 0$. On en déduit qu'elles valent respectivement $\sqrt{2\pi}/\sqrt{a}$ et $\sqrt{2\pi}/\sqrt{d}$, et par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = k.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{d}} = k.\frac{2\pi}{\sqrt{ad}},$$

et pour que f représente bien une fonction de densité, il faut que : $\boxed{k = \frac{\sqrt{ad}}{2\pi}}$.

◇ Lois marginales : la loi marginale de X_1 a pour densité, **par définition**, f_1, définie, pour tout x réel, par :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k.e^{-\frac{a.x^2}{2}}.e^{-\frac{b.y^2}{2}}\,\mathrm{d}y.$$

En sortant le facteur $k.e^{-\frac{a.x^2}{2}}$, **indépendant de *y***, de l'intégrale (par linéarité), puis en remplaçant k par sa valeur, $\sqrt{ad}/2\pi$, on retrouve l'une des intégrales calculée ci-dessus : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b.y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}/\sqrt{d}$, ce qui donne :

$$\forall\,x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = k.e^{-\frac{a.x^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b.y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{ad}}{2\pi}.e^{-\frac{a.x^2}{2}}.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{a.x^2}{2}}.$$

Par la même démonstration, **en échangeant *x* et *y*, *a* et *d***, on obtient la loi de X_2, de densité f_2 ; ainsi :

$$\boxed{f_1 : x \longmapsto \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{a.x^2}{2}}, \quad \text{et :} \quad f_2 : y \longmapsto \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{d.x^2}{2}}}.$$

◇ On reconnaît donc que :

$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent respectivement les lois centrées } \mathcal{N}(0, 1/\sqrt{a}) \text{ et } \mathcal{N}(0, 1/\sqrt{d})}$.

De plus, on vérifie que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$, ce qui établit que :

$\boxed{\text{les V.A. à densité } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes}}$.

$\boxed{\textbf{III.1.c.}}$ *Il s'agit d'établir ici une **réciproque** au **III.1b.**.* Si U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant respectivement deux lois normales centrées $\mathcal{N}(0,\sigma_1)$ et $\mathcal{N}(0,\sigma_2)$, alors, **parce que U et V sont indépendantes**, la densité conjointe f du couple (U,V) est égale au produit des densités marginales, donc :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{\sigma_1}}.\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{y^2}{\sigma_2}}=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi}.e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{x^2}{\sigma_1}+\frac{y^2}{\sigma_2}\right)}$$

on reconnaît donc que $f(x,y)$ est de la forme :

$$f(x,y)=k.e^{-\frac{1}{2}.{}^tMAM},\ \text{avec :}\ k=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi}\ \text{et}\ A=\text{Diag}\left[1/\sigma_1^2,1/\sigma_2^2\right],$$

ce qui établit que : $\boxed{\text{le couple } (U,V) \text{ est un couple normal}}$.

$\boxed{\textbf{III.2.a.}}$ *Il s'agit, là encore, de calculer l'intégrale double* $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, *égale à 1, pour trouver la valeur de k.*

◇ Pour A quelconque, de la forme $A\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}$: ${}^tMAM=a.x^2+2b.xy+d.y^2$.

Mais l'expression de $f(x,y)$ qui s'ensuit ne permet pas un calcul direct de l'intégrale. **Pour amorcer le calcul**, il faut encore utiliser une **identité** semblable à celle proposée au **II.1.** :

$$\begin{aligned} a.x^2+2b.xy+d.y^2 &= a.(x^2+2.\tfrac{b}{a}.xy)+d.y^2=a.\left[\left(x+\tfrac{b}{a}.y\right)^2-\left(\tfrac{b}{a}\right)^2.y^2\right]+d.y^2\\ &= a.\left(x+\tfrac{b}{a}.y\right)^2+\left(d-\tfrac{b^2}{a}\right).y^2=a.\left(x+\tfrac{b}{a}.y\right)^2+\tfrac{ad-b^2}{a}.y^2\end{aligned}$$

où la division par a est licite, car, A étant supposée définie positive : $a>0$ (*c.f.* **I.2.** si $b=0$, ou **I.3.b.** si $b\neq 0$.

Ainsi, en réécrivant le cœfficient de y^2 à l'aide de $\Delta(A)=ad-b^2$, on obtient pour tout couple de réels (x,y) :

$$[7]\quad f(x,y)=k.e^{-\frac{1}{2}.\left(a.\left(x+\frac{b}{a}.y\right)^2+\frac{ad-b^2}{a}.y^2\right)}=k.e^{-\frac{1}{2}.a.\left(x+\frac{b}{a}.y\right)^2}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}$$

On effectue l'intégration par rapport à x, en sortant d'abord, par linéarité de l'intégrale, des facteurs indépendants de x :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=k.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.a.\left(x+\frac{b}{a}.y\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, on l'a rappelé, $a>0$, donc on peut considérer $\sqrt{a}$, et reconnaître, pour $\tilde{a}=\sqrt{a}>0$ et $\tilde{b}=b/a$, que l'intégrale est de type (1) et vaut, **d'après le Préliminaire** : $\sqrt{2\pi}/\tilde{a}=\sqrt{2\pi}/\sqrt{a}$.

• On peut alors envisager la seconde intégration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} k.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}\,\mathrm{d}y=k.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}\,\mathrm{d}y$$

Et cette fois, on a affaire avec une intégrale de type (1) pour $\tilde{a}=\sqrt{\Delta(A)}/\sqrt{a}>0$ et $\tilde{b}=0$ (ce qui de nouveau est licite car, puisque A est définie positive : $\Delta(A)=ad-b^2>0$ que b soit nul ou non (*c.f.* **I.2** et **I.3.b.**) ; on a ainsi, d'après le **Préliminaire** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=k.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.\frac{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\Delta(A)}}=k.\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta(A)}},$$

et une fois de plus, l'intégrale devant être égale à 1 : $\boxed{k=\frac{\sqrt{\Delta(A)}}{2\pi}}$.

III.2.b. Matrice de covariance du couple X : *on détermine les lois marginales en vue de calculer $E(X_1^2)$ et $E(X_2^2)$, puis l'on s'occupera de déterminer* $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$.
On réutilise la réexpression précédente de f, et elle est plus propice au calcul de la densité marginale relative à X_2.

◇ La densité de X_2 est donné par : $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$. Or, cette intégrale a été calculée ci-dessus et vaut : $k.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}$, ce qui, compte-tenu de la valeur de k (*c.f.* **III.2.a.**) donne :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_2(y) = \frac{\sqrt{\Delta(A)}}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}.$$

Dans ces conditions, $E(X_2^2)$ existe et vaut :

$$E(X_2^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\Delta(A)}}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} y^2.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}\,\mathrm{d}y$$

où l'on reconnaît une intégrale de type (3), pour $\tilde{a} = \sqrt{\Delta(A)}/\sqrt{a}$; d'où :

$$E(X_2^2) = \frac{\sqrt{\Delta(A)}}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}.\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta(A)}}\right)^3.\sqrt{2\pi} = \frac{a}{\Delta(A)}, \quad \text{donc : } \quad \boxed{E(X_2^2) = \frac{a}{\Delta(A)}},$$

et puisqu'il suffit d'échanger a et d dans l'expression de la densité conjointe f pour faire jouer à X_1 le rôle de X_2, on a aussi : $\boxed{E(X_1^2) = \frac{a}{\Delta(A)}}$.

◇ Par ailleurs, puisque X_1 et X_2 suivent des lois **centrées** : $E(X_1) = E(X_2) = 0$, donc, par la **formule d'Huyghens** pour la covariance :

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

Pour profiter de la réécriture [7] de f déjà utilisée au **III.2.b.**, on effectuera d'abord l'intégration par rapport à x :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}x = k.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}.\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{1}{2}.a.\left(x+\frac{b}{a}.y\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

C'est une intégrale de type (2), pour $\tilde{a} = \sqrt{a}$ et $b = \frac{b}{a}.y$: elle vaut $\frac{b}{a}.y.\sqrt{2\pi}/\sqrt{a}$.

Ainsi, en remplaçant k par sa valeur : $\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}x = -\frac{b.\sqrt{\Delta(A)}}{a\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}$.

• La seconde intégration se présente donc ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-b.\sqrt{\Delta(A)}}{a\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{-b.\sqrt{\Delta(A)}}{(\sqrt{a})^3\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.\frac{\Delta(A)}{a}.y^2}\,\mathrm{d}y$$

où l'intégrale a été calculée précédemment et vaut : $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta(A)}}\right)^3.\sqrt{2\pi}$.

On obtient donc, après simplification :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\frac{b}{\Delta(A)}}.$$

• **Ainsi**, avec les expressions trouvées pour $E(X_1^2)$, $E(X_2^2)$ et $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$, égale à $\operatorname{cov}(X_2, X_1)$, il s'avère que la matrice de covariance du couple $X = (X_1, X_2)$ vaut :

$$V_X = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta(A)} & \frac{-b}{\Delta(A)} \\ \frac{-b}{\Delta(A)} & \frac{a}{\Delta(A)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

et **enfin**, *soit on sait déjà,* ***d'expérience*** *(ce résultat est utile), que, pour une matrice Q, d'ordre 2 :*

si $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *est* ***inversible****, alors :* $Q^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

(la démonstration consiste à résoudre l'équation : $QM = M'$, d'inconnue M, c.f. ***II.2.c.****),*
soit :

on vérifiera, par le calcul direct du produit $V_X.A$, que : V_X est l'**inverse** de A.

En tout état de cause, on conclut que :

$$\boxed{V_X = A^{-1}}.$$

$\boxed{\textbf{III.3.}}$ *Il s'agit de montrer que Y est un* ***couple normal****, donc,* ***d'après la définition****, il s'agit de vérifier* ***qu'il existe*** *un réel k et une matrice A', symétrique, définie positive, telle que, pour tout couple de réels (x', y'), de matrice colonne associée M', la densité g du couple Y s'écrive :* $g(x', y') = k.\exp\left(-\frac{1}{2}.{}^tM'AM'\right)$.

◇ D'après le **résultat admis** du **Préliminaire**, la densité conjointe g du couple Y est liée à f par la relation : $f(x, y) = |uz - vw|.g(ux + vy, wx + zy)$

On ne connaît donc pas explicitement $g(x', y')$ pour (x', y') quelconque. *Mais is l'on arrive à écrire tout couple (x', y') sous la forme $(ux + vy, wx + zy)$, alors on disposera d'une telle écriture permettant de reconnaître en Y un couple normal.* ***On poursuit dans ce sens.***

■Pour un couple (x', y') quelconque de $\mathbb{R}^2$, **on résout le système** :

$$\begin{cases} ux + vy = x' \\ wx + zy = y' \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } (x, y).$$

- pour $u \neq 0$: parce que u est supposé non nul, on peut commencer la résolution ainsi : $\begin{cases} ux + vy = x' \\ wx + zy = y' \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow uL_2 - wL_1}{\iff} \begin{cases} ux + vy = x' \\ (uz - wv)y = uy' - wx' \end{cases}$

  Et le système obtenue équivaut encore, car, **par hypothèse**, $uz - wv \neq 0$, à :

$$\begin{cases} ux + vy = x' \\ y = \frac{u}{uz - wv}.y' - \frac{w}{uz - wv}.x' \end{cases},$$

  puis, **en remplaçant y** dans la première équation, le système initial équivaut à :

$$\begin{cases} x = \frac{-v}{uz - wv}.y' + \frac{z}{uz - wv}.x' \\ y = \frac{u}{uz - wv}.y' - \frac{w}{uz - wv}.x' \end{cases}, \text{ soit : } [8] \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{uz - wv}.\begin{pmatrix} z & -w \\ -w & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- pour $u = 0$: le système s'écrit directement :

$$\begin{cases} vy = x' \\ wx + zy = y' \end{cases} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\iff} \begin{cases} wx + zy = y' \\ vy = x' \end{cases}$$

  or, l'hypothèse : $uz - wv \neq 0$, si $u = 0$, donne : $wv \neq 0$ et donc $w \neq 0$ et $v \neq 0$, donc ce système triangulaire est **de Cramer** (pivots non nuls), *i.e.* il admet une unique solution, obtenue en « *remontant* » le système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{v}.x' \\ x = \frac{1}{w}.y' - \frac{z}{wv}.x' \end{cases}.$$

  Ce qui **coïncide avec [8]** si l'on y pose $u = 0$.

En considérant la matrice C de l'énoncé, **on aura remarqué** que le système résolu ci-dessus s'écrit : $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, et par conséquent, l'**existence** d'un **unique** couple (x, y) solution, (x', y') étant donné, établit l'**inversibilité de** $\boldsymbol{C}$, et puisque ce couple est donné, que u soit nul non, par :

[8] $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{uz-wv}.\begin{pmatrix} z & -w \\ -w & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a : $C^{-1} = \frac{1}{uz-wv}.\begin{pmatrix} z & -w \\ -w & u \end{pmatrix}$.

En conséquence :

pour tout couple $(x', y') \in \mathbb{R}^2$: $g(x', y') = g(ux + vy, wx + zy)$ où (x, y) est lié à (x', y') par la relation précédente ([8]).

Donc, par le **résultat admis du Préliminaire**, on a encore, pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$g(x', y') = \frac{1}{uz-vw}.f(x, y) = \frac{1}{uz-vw}.k.\exp\left(-\frac{1}{2}.{}^tMAM\right)$ (définition de f)

où M est la matrice colonne associée au couple (x, y), lié à (x', y') par $M = C^{-1}M'$.

▪La valeur de k ayant été par ailleurs déterminée (*c.f.* **III.2.a.**), on a donc :

$$\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad g(x', y') = \frac{\Delta(A)}{(uz-vw)2\pi}.\exp\left(-\frac{1}{2}.{}^t(C^{-1}M')AC^{-1}M'\right).$$

Utilisant enfin les **propriétés de la transposition** : pour tout couple (Q, R) tel que le produit QR ait un sens : ${}^t(QR) = {}^tR{}^tQ$, et, si Q est carrée, inversible : ${}^t(Q^{-1}) = ({}^tQ)^{-1}$, il vient :

$${}^t(C^{-1}M') = {}^tM'.{}^t(C^{-1}),$$

et enfin :

$$\boxed{\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad g(x', y') = \frac{\Delta(A)}{(uz-vw)2\pi}.\exp\left(-\frac{1}{2}.{}^tM'.{}^t(C^{-1})AC^{-1}M'\right)}.$$

__En conclusion__ :

la densité g du couple Y a la forme propre aux couples normaux avec $k' = \frac{\Delta(A)}{2\pi}$ et $A' = {}^t(C^{-1})AC^{-1}$, où A' est symétrique, définie positive, en vertu du **I.4.** car C^{-1} est inversible et A est définie positive.

Donc :

$$\boxed{Y \text{ est un couple normal}}.$$

◇ __Matrice de covariance pour Y__ : puisque Y est un **couple normal** pour k' et A' définis ci-dessus, en vertu du **III.2.b.**, sa matrice de covariance est donnée par :

$V_Y = A'^{-1} = \left({}^t(C^{-1})AC^{-1}\right)^{-1} = C.A^{-1}.{}^tC$, et comme : $A^{-1} = V_X$ (*c.f.* **III.2.b.**) :

$$\boxed{\text{la matrice de covariance du couple } Y \text{ vaut : } V_Y = C.V_X.{}^tC}.$$

III.4. La matrice V_X étant symétrique réelle, définie positive, elle admet, (*c.f.* **I.3.b.** si V_X n'est pas diagonale), deux valeurs propres strictement positives λ_1 et λ_2, et d'après **I.5.**, **il existe** une matrice B, symétrique et inversible, telle que : $V_X = B^2$, et :

- comme B est **symétrique**, on peut encore écrire : **[9]** $V_X = B.B = B.{}^tB$.
- B est **inversible**, donc on peut poser : **[10]** $C = B^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$.

On a alors : $uz - wv \neq 0$, car C est inversible (reprendre la réduction du **III.3.**), et l'on peut définir un couple Y comme au **III.3.**, par : $Y = (uX_1 + vX_2, wX_1 + zX_2)$.

▪Pour ce couple, on aura donc, en vertu du **III.3.**, dont les hypothèses sont satisfaites, par [9] et [10] :

$V_Y = C.V_X.{}^tC = B^{-1}.(B.{}^tB).{}^t(B^{-1}) = B^{-1}.B.{}^t(B^{-1}.B = I.{}^tI = I.$

Ainsi, on a montré que :

$$\boxed{\text{pour tout couple normal } (X_1, X_2)\text{, il existe } u,\ v,\ w,\ z\text{, des réels, tels que le couple } Y = (uX_1 + vX_2, wX_1 + zX_2) \text{ soit un couple normal standard de matrice de covariance I}}.$$

Remarque : voici donc le but ultime de ce problème, montrer que l'étude de tout couple normal peut se ramener à l'étude d'un couple normal de matrice de covariance I, c'est-à-dire un couple normal standard avec $\rho = 0$. en effet, la définition de la desnité d'un couple normal, si $A = I$, coïncide avec celle d'un couple normal standard (*c.f.* **II.**) avec $\rho = 0$.
Tout couple normal peut donc se ramener, par un changement de variables linéaire, à un couple de V.A. indépendantes suivant des lois normales centrées réduites.

ÉPREUVE C

Durée 3 h

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Remarques préliminaires :

Le but de ce problème est d'étudier des méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ en mettant en évidence des suites dont il est la limite. On pourra utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées des termes successifs des suites, mais évidemment pas pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ lui-même... On pourra par contre, utiliser, en les justifiant des encadrements usuels comme :

$$1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

<u>PARTIE I</u> *Première approximation de $\sqrt{2}$*

On définit la fonction f qui à tout réel x positif ou nul associe : $x^2 - 2$. On notera C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, B son point d'intersection avec (Ox) et A le point de C d'abscisse a, où a désigne un réel strictement positif. On supposera de plus que les points A et B sont distincts.

1. Montrer qu'on peut définir par récurrence une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de C de la manière suivante :

▷ M_0 est un point quelconque de C distinct de A et B.

▷ Pour tout n entier naturel, M_{n+1} est le point de C de même abscisse que le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la droite (AM_n)

On notera u_n l'abscisse de M_n et u la suite de terme général u_n. Montrer que l'on a, pour tout n entier naturel, la relation :

$$u_{n+1} = \frac{2 + au_n}{a + u_n}$$

et que M_{n+1} est distinct de A, de B et de M_n.

2.a. Justifier, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a - \sqrt{2}}{a + u_n} \times (u_n - \sqrt{2})$$

2.b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right| \times |u_n - \sqrt{2}|$$

puis que : $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times |u_0 - \sqrt{2}|$

2.c. Comment peut-on choisir a pour pouvoir en déduire que la suite u converge ? On précisera sa limite.

3. Dans cette question on suppose : $a = 1$, $u_0 = 2$.

3.a. Montrer qu'on a, pour tout entier naturel n non nul : $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

En déduire un rang n_0 à partir duquel u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Justifier l'encadrement :

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

3.b. Cette question est destinée à préciser la rapidité de convergence de la suite u. Pour cela on considère la suite v définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$$

Montrer que c'est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le terme de rang 0.

En déduire :

$$v_n = (-1)^n(\sqrt{2} - 1)^{2n+2}$$

Puis la majoration :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq 4 \times (0,3)^{n+1}$$

On dira que la convergence de u vers sa limite est géométrique.

PARTIE II *La méthode de Newton (Algorithme de Babylone)*

On reprend la courbe C définie dans la partie précédente.

1.a. Montrer qu'il est possible de définir par récurrence une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les deux conditions :

▷ a_0 est un réel strictement positif .

▷ a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente en P_n à C, P_n désignant le point de C d'abscisse a_n. Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n.

1.b. On considère la fonction g définie, pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{*+}$.

1.c. Montrer que, pour n non nul, a_n est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$. En déduire que, à partir du rang 1, la suite a est décroissante et admet une limite réelle.

Vérifier que cette limite est $\sqrt{2}$.

2. Cette question est destinée à préciser la rapidité de convergence de la suite a.

Pour cela, on prend : $a_0 = 1,5$ et on consière la suite b définie par : $b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$

2.a. Justifier la relation : $b_{n+1} = {b_n}^2$, pour tout entier naturel n. Déterminer une expression de b_n en fonction de n et de b_0.
2.b. Vérifier : $b_0 \leq 0,04$
2.c. En déduire l'encadrement :

$$0 < a_n - \sqrt{2} \leq 3,5 \times (0,04)^{2^n}$$

On dira que la convergence de a est quadratique.

2.d. En déduire un rang n, à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

PARTIE III *Un problème de point fixe.*
Dans cette partie, on se propose de généraliser certains résultats mis en évidence dans les parties précédentes. On considèrera une fonction φ définie et de classe C^1 sur un intervalle réel $I = [a, b]$. On note m un réel strictement inférieur à 1. Enfin, on supposera qu'il existe α élément de I vérifiant la condition :

$$\varphi(\alpha) = \alpha$$

On se propose de trouver des valeurs approchées de α comme limite d'une suite et d'examiner la rapidité de convergence de cette suite.

1. On définit par récurrence la suite u par les conditions :
▷ u_0 est un élément d'un intervalle centré en α et inclus dans I.
▷ Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
En utilisant convenablement l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est élément de I et justifier la relation, pour tout n entier naturel :

$$\left|u_n - \alpha\right| \leq (m)^n \left|u_0 - \alpha\right|$$

En déduire que la suite u converge vers α.
2. On suppose désormais que φ est de classe C^2 sur I et que K est un réel tel que, pour tout x de I, on ait : $\left|\varphi'(x)\right| \leq K$. Dans cette question, on fera de plus les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$\varphi'(\alpha) = 0 \text{ et } \varphi''(\alpha) \neq 0$$

2.a. En écrivant une formule de Taylor-Lagrange en α pour φ, justifier :

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq K \times \left(u_n - \alpha\right)^2$$

puis, pour tout n entier naturel : $\left|u_n - \alpha\right| \leq K^{2^n - 1} \times \left|u_0 - \alpha\right|^{2^n}$
2.b. En déduire que l'on peut choisir u_0 de manière à ce qu'il existe un réel strictement positif A et un réel q strictement compris entre 0 et 1 tel que :

$$|u_n - \alpha| \leq A q^{2^n}$$

2.c. Application : En utilisant l'approximation de $\sqrt{2}$ trouvée dans la partie I.3.a. et en appliquant les résultats précédents à la fonction g définie dans la partie II, donner un indice n_2 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

Corrigé

.PARTIE I.

I.1. *Le procédé proposé permet effectivement de définir une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, après que l'on a construit M_n, la construction de M_{n+1} est possible.*

• Examinons d'abord si la construction de M_1 est possible :

Considérons d'abord les hypothèses faites sur M_0, et notons u_0 l'abscisse de M_0.

M_0 est un point de $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ a pour équation : $y = f(x)$, où f est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc : **C1** $u_0 \geq 0$.
Par ailleurs, **M_o est distinct de A et B**, donc : **C2** $u_0 \neq a$, et **C3** $u_0 \neq \sqrt{2}$.

(en effet : B est le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la courbe $\mathcal{C}$, d'équation : $y = x^2 - 2$, $x \geq 0$; donc, B a pour coordonnées : $(\sqrt{2}, 0)$ (d'où **C3**).)

On remarque ainsi tout d'abord que, parce que **M_o est distinct de A** (*c.f.* condition notée **C2**) :

(AM_0) désigne bien une droite.

▪Examinons maintenant s'il existe un point m_1 de (Ox) appartenant à AM_0 :

si on note (α, β) les coordonnées du point m_1 cherché :

$$\Big(m_1 \in (Ox) \cap (AM_0)\Big) \iff \big(\ \beta = 0\ \textbf{(1)} \text{ et } \overrightarrow{Am_1} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{AM_0}\ \big).$$

A, M_0 et m_1 ont pour coordonnées respectives : $(a, f(a))$, $(u_0, f(u_0))$ et $(\alpha, 0)$ (en prenant : $\beta = 0$, *c.f.* (1)), donc les coordonnées de $\overrightarrow{Am_1}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ sont :

$$\overrightarrow{Am_1} : \begin{pmatrix} \alpha - a \\ -f(a) \end{pmatrix}, \quad \text{et :} \quad \overrightarrow{AM_0} : \begin{pmatrix} u_0 - a \\ f(u_0) - f(a) \end{pmatrix}.$$

La **condition de colinéarité** (CNS) de deux vecteurs de coordonnées (x, y) et (x', y'), à savoir : $xy' - x'y = 0$, s'écrit donc, pour $\overrightarrow{Am_1}$ et $\overrightarrow{AM_0}$:

$$(\alpha - a).\big(f(u_0) - f(a)\big) - \big(-f(a)\big).(u_0 - a) = 0,$$

ou encore, puisque, **par définition de f** : $f(u_0) = u_0^2 - 2$, et $f(a) = a^2 - 2$,

$$(\alpha - a).\big(u_0^2 - a^2\big) - \big(a^2 - 2\big).(u_0 - a) = 0,$$

et $u_0^2 - a^2$ **se factorisant en** $(u_0 - a)(u_0 + a)$, **$u_o - a$ étant non nul** (*c.f.* **C2**), ce qui permet de simplifier, la condition de colinéarité s'écrit aussi :

$$(\alpha - a).(u_0 + a) + (a^2 - 2) = 0,$$

Comme enfin : $u_o \geq o$ (*c.f.* **C2**) et $a > o$, on peut diviser par $u_0 + a$, d'où la nouvelle condition équivalente :

$$\alpha = \frac{2 - a^2}{u_0 + a} + a = \frac{2 - a^2 + au_0 + a^2}{u_0 + a} = \frac{2 + au_0}{u_0 + a}.$$

Ainsi, on peut conclure :

$$\Big(m_1 \in (Ox) \cap (AM_0)\Big) \iff \Big(m_1 \text{ a pour coordonnées : } \big(\tfrac{2 + au_0}{u_0 + a}, 0\big)\Big)$$

Il apparaît donc que : sous les hypothèses faites sur M_0 (en fait : **C1** et **C2** seules),

$m_1 \in (Ox) \cap (AM_n)$ existe et est unique.

De ce fait, comme $\boldsymbol{m_1}$ **a une abscisse positive,** il existe un point M_1, de $\boldsymbol{C}$ de même abscisse que m_1, car f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Et ce point est unique car $\boldsymbol{C}$ est la courbe représentative d'une fonction et ne possède donc pas deux points de même abscisse.

Ainsi : il est établi que le procédé permet de construire un nouveau point à partir de tout point de $\boldsymbol{C}$ distinct de A.

Mais **pour affirmer que le procédé être itéré une infinité de fois**, il importe de savoir si l'abscisse de ce nouveau point vérifie elle-même les conditions **C1** et **C2** dont on a vu par l'étude précédente sur l'existence de M_1, qu'elles sont suffisantes pour qu'un nouveau point existe et soit unique.

▪ En généralisant l'étude précédente : on pourra poser comme hypothèse de récurrence au rang n :

$$(\mathcal{H}_n) : \left(\begin{array}{c} M_n \text{ existe et est unique, et son abscisse,} \\ \text{notée } u_n, \text{ satisfait les conditions : } \mathbf{C1}, \text{ et } \mathbf{C2} \end{array} \right)$$

L'hypothèse est vraie au rang 0, comme le requiert l'énoncé et **si** $(\mathcal{H}_n)$ **est vraie pour un entier** $\boldsymbol{n \geq 0}$, alors il a été montré (en changeant M_0 par M_n dans l'étude de l'existence de M_1) que le procédé définit un point M_{n+1}, unique, dont l'abscisse, u_{n+1} est donnée par : $u_{n+1} = \frac{2+au_n}{u_n+a}$.

Or, **d'une part**, parce que $M_1 \in C$, la condition **C2** est vérifiée : $u_{n+1} \geq 0$. Et, **d'autre part**, **C3** est satisfaite si et seulement si M_1 est distinct de A, ce qui est acquis si et seulement si $u_{n+1} \neq a$. Or :

$$\textbf{(2)} \quad (u_{n+1} = a) \iff \left(\frac{2+au_n}{u_n+a} = a\right) \iff (2 + au_n = au_n + a^2) \iff (2 = a^2).$$

Donc, a étant positif :

$$(u_{n+1} \neq a) \iff (a \neq \sqrt{2}),$$

Par conséquent : u_{n+1} vérifie **C2** car on suppose $\boldsymbol{A}$ **distinct de** $\boldsymbol{B}$. Étant acquis que si $(\mathcal{H}_n)$ est satisfaite, M_{n+1} existe et son abscisse vérifie **C2** et **C3**, il est démontré que : $((\mathcal{H}_n)$ vraie $) \Longrightarrow ((\mathcal{H}_{n+1})$ vraie $)$.

Ainsi, puisqu'aussi $(\mathcal{H}_0)$ est vraie, par récurrence, il est établi que : $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, donc **le processus peut être itéré une infinité de fois** et :

le procédé définit une suite de points de $\boldsymbol{C}$, $(M_n)_{n \geq 0}$, pour tout $n \geq 0$:
$u_{n+1} = \frac{2+au_n}{u_n+a}$, et M_{n+1} est distinct de A

◇ De même, **pour montrer que**, pour tout $n \geq 0$:

$(\mathcal{H}'_n)$: M_{n+1} est distinct de M_n et de B,

on procèdera par récurrence, en remarquant tout d'abord que, par des successions d'équivalences semblables à (2), il vient, pour tout $n \geq 0$:

$$\textbf{(3)} \quad (u_{n+1} = u_n) \iff \left(\frac{2+au_n}{u_n+a} = u_n\right) \iff (2 + au_n = u_n^2 + au_n) \iff (u_n^2 = 2).$$

et de même, $(u_{n+1} = \sqrt{2})$ équivaut à :

$$\left(\frac{2+au_n}{u_n+a} = \sqrt{2}\right) \iff \left(2 + au_n = u_n.\sqrt{2} + a\sqrt{2}\right) \iff \left((a - \sqrt{2}).u_n = (a - \sqrt{2}).\sqrt{2}\right),$$

d'où l'on tire **enfin**, parce que : $a - \sqrt{2} \neq 0$ (car $A \neq B$) :

$$\textbf{(4)} \quad (u_{n+1} = \sqrt{2}) \iff (u_n = \sqrt{2}).$$

S'agissant des abscisses de points de C, B étant le point de C d'abscisse $\sqrt{2}$, on peut traduire, respectivement, (3) (car : $u_n \geq 0$) et (4), de façon équivalente, par :

(5) $(M_{n+1} = M_n) \Longleftrightarrow (M_n = B)$, et : **(6)** $(M_{n+1} = B) \Longleftrightarrow (M_n = B)$.

Ainsi : l'hypothèse $M_0 \neq B$ assure par (5) que : $M_1 \neq M_0$, et la même hypothèse assure, par (6), que : $M_1 \neq B$. Par suite : $\mathcal{H}'_0$ est vraie.
Puis, si $(\mathcal{H}'_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, alors, par (5) : $(M_{n+1} \neq M_n)$ implique $(M_{n+2} \neq M_{n+1})$, et par (5) : $(M_{n+1} \neq B)$ implique $(M_{n+2} \neq B)$, donc, il est établi que : $((\mathcal{H}'_n) \text{ vraie}) \Longrightarrow ((\mathcal{H}'_{n+1}) \text{ vraie})$.
On peut par conséquent conclure, par le **principe de récurrence**, que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 0 : \quad M_{n+1} \text{ est distinct de } M_n \text{ et de } B}.$$

I.2.a La formule précédente est valable pour tout entier naturel n, et en retranchant $\sqrt{2}$ aux deux membres :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{2+au_n}{a+u_n} - \sqrt{2} = \frac{2+au_n-\sqrt{2}a-\sqrt{2}u_n}{a+u_n} = \frac{a.(u_n-\sqrt{2})-\sqrt{2}.(u_n-\sqrt{2})}{a+u_n},$$

d'où l'on tire, ***parce que l'on a pris soin de préparer la factorisation*** :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a-\sqrt{2}}{a+u_n} \times (u_n - \sqrt{2})}.$$

I.2.b. Il s'ensuit tout d'abord, pour tout entier naturel n, l'égalité des valeurs absolues :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a-\sqrt{2}|}{|a+u_n|} \times |u_n - \sqrt{2}|,$$

dans laquelle il n'y a plus qu'à majorer la fraction au second membre.
Ceci se fait simplement en minorant le dénominateur de ce quotient de nombres positifs :

u_n est positif, donc : $a < a + u_n$ et $a + u_n = |a + u_n|$

Par conséquent le dénominateur est minoré par a, et comme $a > 0$, on peut écrire :

$$\frac{|a-\sqrt{2}|}{a} \leq \frac{|a-\sqrt{2}|}{|a+u_n|}.$$

En réintégrant le dénominateur a (> 0) dans la valeur absolue :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{1\sqrt{2}}{a}\right| \times |u_n - \sqrt{2}|}.$$

◇ La relation proposée suivante s'établit bien évidemment **par récurrence** :

- Elle est vraie au rang 0 : en effet, il est vrai que $|u_0 - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^0 \times |u_0 - \sqrt{2}|$.
- Si l'inégalité est vraie à un rang $n \geq 0$: alors, en conjuguant la relation au rang n et la majoration précédente de u_{n+1} (*c.f.*) :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right| \times |u_n - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right| . \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times |u_0 - \sqrt{2}|,$$

où le majorant s'écrit aussi : $\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^{n+1} \times |u_0 - \sqrt{2}|$, donc la relation est vérifiée au rang $n + 1$.

Ainsi, par le principe de récurrence, il vient que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times |u_0 - \sqrt{2}|}$$

I.2.c. La différence $|u_n - \sqrt{2}|$ est majorée par le terme général d'une suite géométrique de raison positive, égale à $\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|$. Il suffit donc que la raison de cette suite soit strictement inférieure à 1 pour que : $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, *i.e.* pour que la suite de terme général u_n converge vers $\sqrt{2}$.

Ainsi, si on choisit, par exemple, $a > \sqrt{2}$, alors :

$$0 < \tfrac{\sqrt{2}}{a} < 1 \text{ et par suite } 0 < 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{a} < 2.$$

et la convergence est acquise.

Plus, précisément :

$$\left|1 - \tfrac{\sqrt{2}}{a}\right| < 1 \iff -1 < 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{a} < 1 \iff 0 < \tfrac{\sqrt{2}}{a} < 2$$

équivalent encore, en multipliant par a, qui est strictement positif, à :

$$\sqrt{2} < 2.a \quad \text{ou encore à : } a > \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

En conclusion :

$\boxed{\text{si } a \text{ est supérieur strictement à } \sqrt{2}/2, \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{2}}$.

I.3.a. On choisit maintenant $a = 1$ et $u_0 = 2$. A et M_0 sont donc distincts de B et tous les résultats déjà établis s'appliquent. En particulier, la majoration de $|u_n - \sqrt{2}|$ du **I.2.b.**, qui pour $a = 1$ et $u_0 = 2$ s'écrit :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq |1 - \sqrt{2}|^n \times |2 - \sqrt{2}|.$$

En considérant l'encadrement proposé dans les **remarques préliminaires** :

$$1 \leq \sqrt{2} \leq \tfrac{3}{2} \text{ (*)}$$

il vient que :

$$1 - \tfrac{3}{2} < 1 - \sqrt{2} < 1 - 1 \quad \text{soit : } -\tfrac{1}{2} < 1 - \sqrt{2} < 0, \text{ ou encore : } |1 - \sqrt{2}| < \tfrac{1}{2}.$$

Puis, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $n \geq 0$:

$$|u_n - \sqrt{2}|^n < \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \text{ et par suite, pour tout } n \geq 0 : |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n . |2 - \sqrt{2}|.$$

pour tout $n \geq 1$ maintenant, on peut écrire l'inégalité sous la forme :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n . |2 - \sqrt{2}| \quad \text{(en rentrant 1/2 dans la valeur absolue)}.$$

et constater, par l'étude faite au **I.2.c.** que $\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, (il s'agit de $\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{\tilde{a}}\right|$ pour $\tilde{a} = 2 < \sqrt{2}/2$).

On obtient donc la majoration proposée :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}}.$$

(au passage, le lecteur ne devra pas s'étonner s'il en a trouvé une meilleure ; il y avait effectivement de meilleures majorations, assez naturelles à obtenir).

◇ En conséquence, u_n sera proche de $\sqrt{2}$ de moins de 10^{-3}, dès lors que n sera tel que : $(1/2)^{n-1} \leq 10^{-3}$, ce qui, en composant par la fonction logarithme népérien, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, équivaut à :

$$(n-1).\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq -3.\ln 10, \text{ ou encore à : } n - 1 \geq 3.\tfrac{\ln 10}{\ln 2}.$$

(*) Il est demandé dans l'énoncé une justification de cet encadrement. En voici une : $1 < 2 < \frac{9}{4}$ (en effet : $9/4 = 2 + 1/4 = 2,25$) et en composant par la fonction racine carrée, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: $1 \leq \sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$.

Ainsi, on a la précision d'approximation voulue, dès que n dépasse le plus petit entier, noté n_0, supérieur à $1+3.\frac{\ln 10}{\ln 2}$. Et n_0 est égal à la partie entière de $3.\frac{\ln 10}{\ln 2}$ plus 2.
Numériquement : $\left[3.\frac{\ln 10}{\ln 2}\right]=9$ ($\left[3.\frac{\ln 10}{\ln 2}\right]$ désignant la partie entière de $\left[3.\frac{\ln 10}{\ln 2}\right]$).
Donc :

$$\boxed{u_n \text{ est une approximation de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-3} \text{ près dès le rang } n=11}.$$

◇ L'encadrement proposé arrive avec peu d'à propos. En effet, le lecteur curieux pourra ramarquer que : $u_2=\frac{10}{7}\simeq 1,43$, mais pour $n=2$, le majorant de l'erreur vaut $0,5$, et c'est seulement pour $n=8$ que l'algorithme, avec la majoration de l'erreur du **I.3.a.** donne un encadrement propre à affirmer que : $1,4<\sqrt{2}<1,5$.
Ainsi, très trivialement, il sera raisonnable de se contenter de constater que :

$$1,4^2=1,96, \text{ et } 1,5^2=2,25, \text{ et donc : } 1,4^2<2<1,5^2.$$

en composant la double inégalité par la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient que :

$$\boxed{1,4<\sqrt{2}<1,5}.$$

I.3.b. Pour montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, on va chercher une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
Par définition de (v_n), et en utilisant la relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite (u_n) (*c.f.* **I.1.**), pour tout $n\geq 0$:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{(2+au_n)-\sqrt{2}(a+u_n)}{(2+au_n)+\sqrt{2}(a+u_n)}.$$

Il s'agit alors de reconnaître v_n dans le membre de droite. Cela peut se faire en remplaçant les occurrences de u_n par l'expression de u_n en focntion de v_n, que l'on pourrait déduire de $v_n=\frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}$, mais il est plus judicieux de chercher à factoriser respectivement le numérateur par $u_n-\sqrt{2}$, et le dénominateur par $u_n+\sqrt{2}$, pour faire apparaître le quotient égal à v_n :

$$v_{n+1}=\frac{2+au_n-\sqrt{2}a-\sqrt{2}u_n}{2+au_n+\sqrt{2}a+\sqrt{2}u_n}=\frac{u_n.(a-\sqrt{2})-\sqrt{2}.(a-\sqrt{2})}{u_n.(a+\sqrt{2})+\sqrt{2}.(a+\sqrt{2})}=\frac{(a-\sqrt{2})}{(a+\sqrt{2})}.\frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}.$$

Ainsi, il est établi que :

$$\forall n\geq 0,\quad v_{n+1}=\frac{(a-\sqrt{2})}{(a+\sqrt{2})}.v_n,\quad \text{(la suite est donc géométrique).}$$

Le calcul du premier terme est sans problème. en multipliant par la quantité conjuguée :

$$u_0=2, \text{ donc : } v_0=\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_O+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2}).(2-\sqrt{2})}=\frac{6-4\sqrt{2}}{4-2}=3-2\sqrt{2},$$

et de même celui de la raison :

$$a=1, \text{ donc : } \frac{(a-\sqrt{2})}{(a+\sqrt{2})}=\frac{(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})}=\frac{(1-\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2})}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1-2}=2\sqrt{2}-3,$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique, de premier terme } v_0=3-2\sqrt{2}, \text{ et de raison } 2\sqrt{2}-3}.$$

◇ Par conséquent, pour tout $n\geq 0$: $v_n=(3-2\sqrt{2}).(2\sqrt{2}-3)^n=(-1)^n.(3-2\sqrt{2})^{n+1}$.
Or, on vient de voir que : $3-2\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^2=(\sqrt{2}-2)^2$, donc, par les propriétés des focntions puissances :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\quad v_n=(-1)^n.(\sqrt{2}-1)^{2n+2}}.$$

◇ Puisque $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$, on a aussi : $u_n - \sqrt{2} = (u_n + \sqrt{2}).v_n$.
L'égalité précédente donne donc, en passant aux valeurs absolues :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| = \left|u_n + \sqrt{2}\right| . \left|\sqrt{2} - 1\right|^{2n+2},$$

et si l'on reprend l'égalité : $(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, on a :

$$\textbf{(7)} \quad \left|u_n - \sqrt{2}\right| = \left|u_n + \sqrt{2}\right| . \left|3 - 2\sqrt{2}\right|^{n+1}.$$

• L'encadrement demandé au **I.3.a.** : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, donne par décroissance de la fonction $x \mapsto 3 - 2x$:

$$3 - 2 \times \underline{1,5} < 3 - 2\underline{\sqrt{2}} < 3 - 2 \times \underline{1,4}, \text{ c'est-à-dire : } \textbf{(8)} \ \ 0 < 3 - 2\sqrt{2} < 0,2.$$

• Et par ailleurs, pour majorer le facteur $\left|u_n + \sqrt{2}\right|$, on pourra utiliser la majoration suivante de $\left|u_n - \sqrt{2}\right|$, obtenue par l'astuce que voici (courante en analyse) :

$$u_n + \sqrt{2} = (u_n - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2}$$

Ainsi, par l'**inégalité triangulaire** pour la valeur absolue :

$$\left|u_n + \sqrt{2}\right| \leq \left|u_n - \sqrt{2}\right| + \left|2\sqrt{2}\right|,$$

puis, par la majoration de $\left|u_n - \sqrt{2}\right|$ obtenue au **I.3.a.**, valable pour $n \geq 1$:

$$\forall n \geq 1, \quad \left|u_n + \sqrt{2}\right| \leq (\tfrac{1}{2})^{n-1} + 2\sqrt{2}$$

La majoration de $\sqrt{2}$ par 1,5, et celle de $(\frac{1}{2})^k$ par 1 pour tout $k \geq 0$, on obtient :

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad \left|u_n + \sqrt{2}\right| \leq 1 + 3,$$

et pour $n = 0$:

$$\left|u_0 + \sqrt{2}\right| = u_0 + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \leq 1 + 1,5.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $\quad \left|u_n + \sqrt{2}\right| \leq 4$.
En conclusion, d'après (7) et (8), l'égalité (6) se prolonge en :

$$\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq 4 \times (0,2)^{n+1}, \text{ et } \textit{a fortieri} : \ \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq 4 \times (0,3)^{n+1}}.$$

.PARTIE II.

II.1. De la même façon qu'à la **Partie I**, le procédé décrit permet de définir une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si et seulement si pour tout entier naturel n, la donnée de a_n permet de construire géométriquement a_{n+1}.

Une **condition nécessaire** naturelle est la **positivité stricte de a_n**. En effet :

d'une part, si a_n est strictement négatif, alors il n'existe pas de point de $\boldsymbol{C}$ dont l'abscisse soit égale à a_n. Et, d'autre part, si a_n nul, alors la tangente à $\boldsymbol{C}$ au point P_n d'abscisse $a_n = 0$ est horizontale et ne rencontre donc pas (Ox) : la construction de a_{n+1} est donc impossible.

Cette condition nécessaire s'étant dégagée, on examine si elle est suffisante en montrant, par récurrence, que a_n est défini pour tout entier naturel n :

• <u>au rang $n = 0$</u> : a_0 existe (*on se le donne !*), et est strictement positif par hypothèse.

• <u>supposons que pour un entier $n \geq 0$, a_n existe et est strictement positif</u> : dans ces conditions, la tangente à $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse a_n, notée $\mathcal{T}_n$, a pour équation :

$$(\mathcal{T}_n) : \ y = f'(a_n).(x - a_n) + f(a_n)$$

soit, en remplaçant $f'(a_n)$ et $f(a_n)$ par leur expression en fonction de a_n :

$$y = 2.a_n.(x - a_n) + a_n^2 - 2, \text{ ou enocre : } y = 2a_n.x - a_n^2 - 2.$$

$\mathcal{T}_n$ n'est pas parallèle à $(0x)$ car son cœfficient directeur a_n est différent de 0. Elle admet donc un point d'intersection (unique!) avec $(0x)$, noté p_{n+1}, dont les coordonnées (α, β) satisfont simultanément les équations de $(0x)$ et de $\mathcal{T}_n$, soit :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = 2.a_n.\alpha - a_n^2 - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2.a_n.\alpha - a_n^2 - 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \frac{a_n^2+2}{2a_n} \end{cases}$$

(on a substitué 0 à β dans la seconde équation et on a utilisé que a_n est non nul).

On constate ainsi que le point p_{n+1} existe et que son abscisse vaut : $\alpha = \frac{a_n^2+2}{2a_n}$, strictement positive car $a_n > 0$ par hypothèse.

a_{n+1} existe donc $(a_{n+1} = \alpha)$ et $a_{n+1} > 0$, de sorte que P_{n+1} existe et le procédé de construction peut être itéré une infinité de fois.

<u>En conclusion</u> :

$\boxed{\text{si } M_0 \text{ a pour abscisse } a_0 > 0, \text{ alors le procédé décrit défini une suite de réels } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et cette suite est une suite à valeurs strictement positives}}$.

De plus, on a obtenu que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n}}.$$

II.1.b. La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et pour tout $x > 0$, on a : $\quad g'(x) = \frac{1}{2}.\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{x^2-2}{x^2} = \frac{1}{2}.\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2}$.

x étant strictement positif, le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $x - \sqrt{2}$, d'où les variations de g :

$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]0, \sqrt{2}], \text{ strictement croissante sur } [\sqrt{2}, +\infty[}$.

II.1.c. Le lecteur aura remarqué que la fonction g est introduite parce qu'elle intervient dans la définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*c.f.* **I.1.a.**) ; en effet :

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = g(a_n) \end{cases}.$$

Pour tout $n \geq 1$, $a_n = g(a_{n-1})$. Or, d'après les variations de g : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g(x) \geq g(\sqrt{2})$, et comme : $g(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}.\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n \geq 2}.$$

◇ <u>Monotonie de la suite (a_n)</u> : pour tout $n \geq 1$:

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) - a_n = \frac{1}{2}.\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = -\frac{1}{2}.a_n + \frac{1}{a_n} = \frac{2-a_n^2}{2a_n}.$$

Ainsi, pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = -a_n = \frac{1}{2a_n}.(\sqrt{2} + a_n)(\sqrt{2} - a_n) \leq 0, \text{ car } a_n > 0 \text{ et } a_n \geq \sqrt{2}.$$

D'où l'on déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante à partir du rang 1}}.$$

◇ <u>Étude de la convergence de (a_n)</u> : La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1 et est minorée par 0 (car positive), donc, d'après le **théorème de la limite monotone** : $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

• On développe ensuite l'***argumentation classique*** pour les suites de type "$u_{n+1} = f(u_n)$" :

> Si on note l la limite de la suite (a_n), alors, par passage à la limite pour n tendant vers $+\infty$ sur l'inégalité : $\sqrt{2} \leq a_n$, il vient : $0 < \sqrt{2} \leq l$.
> Par continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc en $l > 0$: $\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(l)$.
> comme d'autre part, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, il vient, par passage à la limite sur l'égalité $a_{n+1} = g(a_n)$: $\underline{g(l) = l}$.

Or, **puisque $l >$ o** : $\left(g(l) = l\right) \iff \left(\frac{1}{2}.(l + \frac{2}{l})\right) \iff (l^2 = 2) \iff (l = \sqrt{2})$

Ainsi : $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{2}}$.

II.2.a. On va chercher, comme au **I.3.b.**, une relation de récurrence pour la suite auxiliaire (b_n).
En utilisant la relation de récurrence du **II.1.a.** liant a_{n+1} et a_n et deux identités remarquables, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}} = \left(\frac{a_n^2+2}{2a_n} - \sqrt{2}\right).\left(\frac{a_n^2+2}{2a_n} + \sqrt{2}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{a_n^2+2-2\sqrt{2}a_n}{2a_n}\right).\left(\frac{a_n^2+2+2\sqrt{2}a_n}{2a_n}\right)^{-1} \\ &= \frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{(a_n+\sqrt{2})^2} = \left(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\right)^2 = b_n^2 \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ b_{n+1} = b_n^2}$.

◇ En recherchant l'expression de b_1, b_2,... en fonction de b_0, à l'aide de la relation ci-dessus, ou de façon directe, le lecteur montrera par récurrence (*nous lui en laissons le soin*) que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ b_n = b_0^{2^n}}.$$

II.2.c. Comme au **I.3.b.**, l'égalité précédente et la définition de b_n permettent d'écrire :

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq |a_n + \sqrt{2}| \, . \, |b_0|^{2^n}.$$

Et l'on peut prolonger la majoration par les observations suivantes :

• Puisque la suite (a_n) est à termes positifs et décroissante :

$$|a_n + \sqrt{2}| = a_n + \sqrt{2} \leq a_0 + \sqrt{2}$$

et comme : $a_0 = 1,5$ et $\sqrt{2} \leq 1,5$, on en déduit :

$$|a_n + \sqrt{2}| \leq 3.$$

• ensuite, sachant que $a_0 = 1,5$: $b_0 = \frac{1,5-\sqrt{2}}{1,5+\sqrt{2}}$, et en utilisant l'encadrement de $\sqrt{2}$ prescrit par l'énoncé : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; il vient que : b_0 est positif, majoré par $\frac{1,5-1,4}{1,5+1,4} = \frac{0,1}{2,9} = \frac{1}{29} \leq \frac{1}{25}$.

Ainsi, puisque $1/25 = 0,04$ (*on a choisi le majorant à dessein*), on montre que :

pour tout entier naturel n, $|a_n + \sqrt{2}| \leq 3.(0,04)^{2^n}$.

Et comme on il est établi que, pour $n \geq 1$, $a_n \geq \sqrt{2}$ (*c.f.* **II.1.c.**), et qu'ici : $a_0 = 1,5 \geq \sqrt{2}$, on vérifie donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < a_n - \sqrt{2} < 3.(0,04)^{2^n}}$$

(on obtient ici aussi une majoration plus précise que la majoration proposée).

II.2.d. En conséquence, a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près, dès que : $3.(0,04)^{2^n} \leq 10^{-10}$, ce qui équivaut à : $\ln 3 + \ln 0,04 \leq -10. \ln 10$.

Par une succession d'équivalences, on aboutit alors à : $2^n \geq \frac{10 \ln 10 + \ln 3}{-\ln 0{,}04}$,

puis par une deuxième composition par le logarithme, à : $n \geq \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{10 \ln 10 + \ln 3}{10 \ln 10 - \ln 4}\right)$.

Comme, numériquement, on constate que : $\frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{10 \ln 10 + \ln 3}{10 \ln 10 - \ln 4}\right) \geq 2,91$:

$$\boxed{a_n \text{ est une approximation de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-10} \text{ près dès le rang } n_0 = 3}.$$

.PARTIE III.

III.1. φ est continue sur $I = [a,b]$, dérivable sur I, et la valeur absolue de sa dérivée est majorée par m sur I, donc, l'**inégalité des accroissements finis** s'applique et s'énonce :

$$\textbf{(9)} \ \forall (x,y) \in [a,b], \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq m. |x-y|.$$

On peut alors montrer l'inégalité par récurrence :

- au rang $n = 0$: $m^0 = 1$ et l'inégalité est manifestemetn vérifiée :
$$|u_0 - \alpha| \leq m^0. |u_0 - \alpha|$$
- si l'inégalité est vérifiée à un rang $n \geq 0$: alors il convient d'appliquer (9) avec $x = u_n$ et $y = \alpha$ et pour cela s'assurer de ce que u_n et α appartiennent à I.
  Or, par l'hypothèse de récurrence : $|u_n - \alpha| \leq m^n. \mid u_0 - \alpha \mid$, et $m^n < 1$, puisque $m < 1$, donc, la distance de u_n à α est inférieure à la distance de u_0 à α.
  Comme u_0 est élément d'un intervalle centré en α et inclus dans I, u_n appartient donc encore à cet intervalle, et par suite, on est assuré de ce que u_n appartient à I.
  Ainsi, (9) s'applique à u_n et $\alpha \in I$ et l'on a :
$$|\varphi(u_n) - \alpha| \leq m. |u_n - \alpha|$$
  on utilise alors que : $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$ (*toute la méthode repose sur ces égalités*), et l'hypothèse de récurrence, pour obtenir :
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq m. |u_n - \alpha| \leq m.m^n. |u_0 - \alpha|.$$
  On obtient donc l'égalité cherchée au rang $n+1$.

En conclusion, il vient, par le **principe de récurrence**, que :
$$\boxed{|u_n - \alpha| \leq m^n. |u_0 - \alpha|}.$$

◊ Puisque $0 \leq m < 1$, $\lim_{n \to +\infty} m^n = 0$, et par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$, sur l'inégalité précédente, on a : $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, ce qui traduit que :
$$\boxed{\text{la suite } u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha}.$$

III.2.a. Puisque φ est supposée C^2 sur $I =]a,b[$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 s'applique donc (on a rappelé ci-avant ses hypothèses minimales) sur I ou sur tout intervalle inclus dans I.

Par exemple, on va appliquer l'**inégalité de Taylor Lagrange** à l'ordre 2 sur l'intervalle fermé d'extrémités u_n et α, qui, comme on l'a vu est inclus dans I. Elle donne l'existence d'un réel c compris strictement entre u_n et α, tel que :
$$\varphi(u_n) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha).(u_n - \alpha) + \varphi''(c).(u_n - \alpha)^2.$$

Rappelons que : $\varphi(u_n) = u_{n+1}$, $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\varphi(\alpha) = 0$, de sorte que l'égalité peut s'écrire :
$$u_{n+1} - \alpha = \varphi''(c).(u_n - \alpha)^2.$$
Comme enfin φ est de classe C^2 sur I, φ'' est continue sur $[a, b]$, et, **d'après le cours**, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, dons φ'' est majorée et minorée sur $[a, b]$. On peut encore dire qu'il existe un réel K (celui de l'énoncé), tel que :
$$\forall x \in I, : kc\,|\varphi''(x)| \leq K.$$
Cette majoration, valable en particulier pour c qui appartient à I, permet d'obtenir à partir de l'égalité précédente :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq K.\,|u_n - \alpha|^2}.$$
◇ Par une récurrence que l'on laissera au soin du lecteur (il connaît ses formules sur les puissances), il s'ensuit que :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq K^{2^n-1}.\,|u_0 - \alpha|^{2^n}}.$$
III.2.b. Le majorant dans l'inégalité précédente, se réécrit : $k^{-1}.(K.\,|u_0 - \alpha|)^{2^n}$.
Par conséquent, pour obtenir la majoration proposée, on posera : $A = 1/K > 0$ (on sait que K est non nul car $\varphi''(\alpha) \neq 0$ et positif car c'est un majorant de $|\varphi''|$), et on cherchera à choisir une valeur de u_0 telle que : $K.\,|u_0 - \alpha| < 1$.
Or : $$(K.\,|u_0 - \alpha| < 1) \iff (\tfrac{-1}{K} < u_0 - a < \tfrac{1}{K}) \iff (\alpha - \tfrac{1}{K} < u_0 < \alpha + \tfrac{1}{K})$$
Il faut donc choisir u_0 dans l'intervalle $J =]\alpha - \frac{1}{K}, \alpha + \frac{1}{K}[\cap I$. Ce choix assure que : $q = K.\,|u_0 - \alpha| \in]0, 1[$. De plus, parce que $\alpha \in I$: $J \neq \emptyset$; donc, on peut choisir u_0 comme convenu, et alors il existe un intervalle centré en α et inclus dans J, donc dans I, et qui contient u_0 (par exemple : $[\alpha - |u_0 - \alpha|, \alpha + |u_0 - \alpha|]$) de sorte que u_0 satisfait les hypothèses de cette **Partie III.** dont, en conséquence, les résultats obtenus s'appliquent.

En conclusion :

si on choisit $u_0 \in]\alpha - \frac{1}{K}, \alpha + \frac{1}{K}[\cap I$, et si l'on pose $A = 1/K$ et $q = K.\,|u_0 - /a|$, alors : $$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \alpha| \leq A.q^{2^n}, \quad \text{avec } A > 0 \text{ et } 0 < K < 1$$.

III.2.c. On va rechercher une approximation de $\sqrt{2}$ à l'aide des résultats précédents.
On peut choisir: $I = [1,4\,;1,5]$, puisque l'on sait que $\sqrt{2} \in I$ (d'après l'approximation du **I.3.a.**).
Posons : $\varphi = g$. Alors φ est la somme de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec, pour tout $x > 0$: $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{x^2}) = \frac{1}{2}.\frac{x^2-2}{x^2}$ (*c.f.* **II.1.b.**) et $\varphi''(x) = \frac{2}{x^3}$.
Vérifions successivement les hypothèses nécessaires sur φ :

- φ est de classe C^2 sur I.
- $\varphi(\alpha) = \alpha$ (*c.f.* **II.1.c.**), et $\varphi'(\alpha) = 0$.
- $\varphi'' : x \longmapsto \frac{2}{x^3}$. Donc φ'' est décroissante sur $I = [1,4\,;1,5]$ et majorée par $\varphi''(1,4) = \frac{2}{1,4^3} = \frac{250}{343}$. On a donc : $K = 250/343$, et $A = 343/250 = 1,372$.

Dans ces conditions, , les hypothèses du **III.2.** sont satisfaites et il faut choisir u_0 dans l'intervalle $]\alpha - \frac{1}{K}, \alpha + \frac{1}{K}[\cap I =]\sqrt{2} - 1,372, \sqrt{2} + 1,372[\cap [1,4\,;1,5]$, dont on constate qu'il est inclus dans $[1,4\,;1,5]$.

On peut donc choisir $u_0 = 1,5$, et en ce cas, la suite (u_n) coïncide avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du **II.2.**.
Le majorant de l'approximation s'écrit : $A.q^{2^n} = 1,372.\left(\frac{250}{343}.\left|u_0 - \sqrt{2}\right|\right)^{2^n}$, et si on utilise l'encadrement du **I.3.a.**, alors :

$$1,5 - 1,5 < u_0 - \sqrt{2} < 1,5 - 1,4, \quad \text{et donc : } \left|u_0 - \sqrt{2}\right| < 0,1$$

et :

$$A.q^{2^n} = 1,372.\left(\tfrac{25}{343}\right)^{2^n}.$$

On dispose donc en u_n d'une approximation de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-10}, dès que : $A.q^{2^n} \leq 10^{-10}$, ce qui, en effectuant des manipulations analogues à celles du **II.2.d.**, équivaut à :

$$n \geq \frac{1}{\ln 2}.\ln\left(\frac{10\ln 10 - \ln 1,372}{\ln 343 - \ln 25}\right).$$

<u>**Numériquement**</u> : $\frac{1}{\ln 2}.\ln\left(\frac{10\ln 10 - \ln 1,372}{\ln 343 - \ln 25}\right) \simeq 3,15$, à 10^{-2} près, **donc** :

$$\boxed{\text{si on choisit } u_0 = 1,4,\ a_n \text{ est une approximation de } \sqrt{2} \text{ à } 10^{-10} \text{ près à partir du rang } n_2 = 4}.$$

Géologie de NANCY 97 — Résolution d'une équation matricielle, Équations différentielles, Problème d'urne — Durée 4 h 00

L'épreuve comporte trois problèmes indépendants qui seront également notés. Le problème n°1 contrôle les connaissances d'Algèbre Linéaire, le problème n°2 les techniques de calcul analytique, tandis que le problème n°3 est là pour s'assurer de l'acquisition des notions de base de Probabilité : la rédaction de ce dernier problème devra être particulièrement soignée. La qualité de la rédaction et le soin seront appréciés. On conseille aux candidats de revenir sur la dernière question de chaque problème à la fin de l'épreuve.

Problème n° 1

On désigne par u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique (au départ et à l'arrivée).

$\boxed{1}$ Caractériser le noyau et l'image de u (: en donnant une base de chacun de ces sous espaces vectoriels).

$\boxed{2}$ La matrice A est-elle diagonalisable ? (: on justifiera la réponse !).

$\boxed{3}$ Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u est représentée par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ Résoudre l'équation récurrente

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(-x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n + z_n) \end{cases}$$

avec la donnée initiale

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

$\boxed{5}$ Étant donnée une matrice Y (: carrée de dimension 3), montrer que l'équation matricielle

$$X.B - B.X = Y$$

possède une solution si et seulement si la trace des matrices B^jY est nulle pour j=0,1,2. Donner alors la forme de la solution générale de l'équation. (On rappelle que la trace d'une matrice carrée est définie comme la somme de ses éléments diagonaux).

Problème n° 2

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad (x^2-1).y'' + 3x.y' + y = 0$$

$\boxed{1}$ Montrer que si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ est une solution série entière de rayon de convergence positif, il existe entre les coefficients a_n et a_{n+2} une relation à expliciter.

$\boxed{2}$ Donner la solution y_1 de (E) qui satisfait la condition initiale : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ (: on utilisera la formule du binôme pour identifier la somme de la série entière).

$\boxed{3}$ Donner la solution y_2 de (E) qui satisfait la condition initiale: $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ sous la forme d'une série entière (dont on précisera le rayon de convergence).

$\boxed{4}$ Si y est solution de (E), à quelle équation différentielle obéit la fonction $z(x) = \sqrt{1-x^2}.y(x)$? Intégrer cette nouvelle équation différentielle et en déduire la forme de la solution générale de (E).

$\boxed{5}$ Déduire de ce qui précède la relation suivante

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4...2n}{3.5...(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\text{Arcsinx}$$

valable pour x compris entre -1 et 1.

$\boxed{6}$ On désigne par X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!}$$

Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.

Problème n° 3

Une urne contient n boules noires et 2 boules blanches B1 et B2. On tire les boules les unes après les autres au hasard et sans remise. On désigne par N1 le rang de la première boule blanche tirée, par N2 celui de la seconde boule blanche. On désigne par R1 le rang de la boule B1, par R2 celui de B2.

[1] Proposer une modélisation des expériences (c'est-à-dire un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui rende compte des expériences).

[2] Exprimer N1 et N2 en fonction de R1 et R2.

[3] Montrer que R1 et R2 ont même loi, et déterminer cette loi.

[4] Déterminer la loi du couple (R1,R2), puis celle du couple (N1,N2).

[5] Déterminer la loi de N1 et calculer l'espérance de N1.

[6] Calculer l'espérance de N2.

[7] Quelle serait la loi de N1 si le tirage avait lieu avec remise ?

Corrigé

.Problème n°1.

[1.1.] Noyau de u : **par définition**, un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient au noyau de l'endomorphisme u si : $u[(x,y,z)] = (0,0,0)$. Dans la mesure où A est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, puisque ses coordonnées dans cette base sont, en colonne, données par : ${}^t(x \quad y \quad z)$, on a :

$$((x,y,z) \in \ker u) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant cette équation matricielle par 2, les éléments du noyau sont obtenu en résolvant le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_3,\ L_2 \leftarrow L_1}{\iff}} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

En "*remontant*" le système obtenu, celui-ci apparaît équivalent à : $x = y$ et $z = 0$. Ainsi, les éléments du noyau sont les **triplets de la forme** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \mathbf{0})$, où x est un réel quelconque, ou encore, l'**ensemble des vecteurs** de la forme : $\boldsymbol{x}.(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, $x \in \mathbb{R}$.

On en conclut que : $\boxed{\ker u = VECT[(1,1,0)]}$.

◇ Image de u : comme c'est le cas pour toute application linéaire définie sur un espace de dimension finie, l'image de u est engendrée par les images par u des vecteurs d'une base quelconque de $\mathbb{R}^3$, par exemple la base canonique, que l'on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, auquel cas on a : **(1)** $\text{Im}u = VECT[u(e_1), u(e_2), u(e_3)]$.

Or, puisque $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}[u]$ (matrice de u dans $\mathcal{B}$), par **examen des colonnes de A** :

$u(e_1) = \frac{1}{2}.(-1.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3)$ (première colonne),
$u(e_2) = \frac{1}{2}.(1.e_1 + 0.e_2 - 1.e_3)$; $u(e_3) = \frac{1}{2}.(1.e_1 + 2.e_2 + 1.e_3)$ (2ème et 3ème colonnes)

et comme $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, on peut encore écrire :

(2) $u(e_1) = \frac{1}{2}.(-1,0,1)$; $u(e_2) = \frac{1}{2}.(1,0,-1)$; $u(e_3) = \frac{1}{2}.(1,2,1)$.

Ainsi, puisque l'on constate aussi que $u(e_1) = -u(e_2)$, de (1) et (2), on tire :

$$\text{Im}u = VECT[u(e_1), u(e_2), u(e_3)] = VECT[u(e_2), u(e_3)]$$

Et comme multiplier un vecteur d'une famille génératrice par un scalaire (un réel) non nul n'altère pas le caractère générateur de la famille, on a encore :

$$\text{Im}u = VECT[2u(e_2), 2u(e_3)] = VECT[(1,0,-1),(1,2,1)].$$

Enfin, le lecteur vérifiera que : $\alpha(1,0,-1) + \beta(1,2,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$, de sorte que la famille génératrice précédente est **libre**.

<u>**En conclusion**</u> : $\boxed{\text{une base de Im}u \text{ est } \{(1,0,-1),(1,2,1)\}}$.

$\boxed{\textbf{1.2.}}$ <u>Recherche des valeurs propres de A</u> :

λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda.I$ est non-inversible, c'est-à-dire, ici, si A est de rang < 3.

Par des opérations élémentaires licites sur les lignes de la matrice (**méthode du Pivot de Gauss**) :

$$A - \lambda.I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\overset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} -1-2\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_2}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1}}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2\lambda \\ -1-2\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + (1+2\lambda)L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2\lambda \\ 0 & -2\lambda & 2-4\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2\lambda \\ 0 & \lambda & 2\lambda^2-1 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-2\lambda \\ 0 & \lambda & 2\lambda^2-1 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \end{pmatrix},$$

où $A - \lambda.I$ a le même rang que la dernière matrice obtenue. Celle-ci étant triangulaire supérieure, son rang est égal au nombre de ses cœfficients diagonaux non nuls.

<u>**En conséquence**</u> : $A - \lambda.I$ est non-inversible si et seulement si $\lambda = 0$,

de sorte que : A admet une unique valeur propre, égale à 0.

Le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est le noyau de A, et l'on a vu que celui-ci est de dimension 1. **Donc** la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 1 et non à la dimension de $\mathbb{R}^3$: **la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité n'est donc pas satisfaite**. Par suite :

$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

1.3. **Par lecture des colonnes de la matrice B**, on peut constater que :

la matrice de u dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est égale à B si et seulement si :
$$u(e'_1) = 0 \quad ; \quad u(e'_2) = e'_1 \quad ; \quad u(e'_3) = e'_2.$$

- Puisque l'on a vu que : $u\,[(1,1,0)] = (0,0,0)$, on peut choisir : $e'_1 = (1,1,0)$.
- e'_1 étant choisi, on doit choisir e'_2 parmi les antécédents de e'_1 car $u(e'_2) = e'_1$. Si on note $e'_2 = (x', y', z')$, l'équation se traduit matriciellement dans la base canonique par :
$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ou encore, ce qui est équivalent, par : } 2A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Il s'agit donc, pour déterminer e'_2 de résoudre le système :
$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$
qui équivaut, après avoir effectué les mêmes manipulations sur les lignes que lors de la recherche des éléments du noyau de A, à :
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2z = 2 \\ 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 1 \\ z = 1 \end{cases}$$
Les antécédents de e'_1 par u sont donc tous les éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(y-1, y, 1)$ où y est un réel quelconque.
Par exemple, on pourra choisir de prendre $y = 2$, auquel cas on a : $e'_2 = (1,2,1)$.
- Dans ces conditions, il faut, pour $e'_3 = (x'', y'', z'')$, que :
$$u\,[(x'', y'', z'')] = e'_2 = (1,2,1).$$
On doit donc (après multiplication par 2 encore, pour éviter de devoir travailler avec des fractions), trouver une solution du système :
$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 2z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$
on effectue toujours les mêmes manipulations sur les lignes pour obtenir le système équivalent suivant :
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2z = 4 \\ 2z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$$
En imposant $y = 1$, on obtient l'un des antécédents de $e'_1 + e'_2$: $e'_3 = (1,1,2)$.

Après avoir vérifié que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$, on peut affirmer que :

$$\boxed{\text{dans la base } \mathcal{B}' = \{(1,1,0), (1,2,1), (1,1,2)\}, \text{ la matrice de } u \text{ est : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

1.4. *L'énoncé propose de déterminer trois suites, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par une donnée initiale : $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, et une relation de récurrence dont on*

remarque que l'on peut l'écrire matriciellement : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n,$
en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:* $X_n = {}^t(x_n \quad y_n \quad z_n)$.

La méthode est connue *: puisque l'on dispose d'une matrice* B*, semblable à* A *et* ***plus simple****, l'on va changer de suites inconnues et simplifier le problème à résoudre.*

◇ A et B sont les matrices du même endomorphisme u, dans deux bases différentes, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ étant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\text{obtenue par juxtaposition des colonnes des} \\ \text{coordonnées de } e_1', e_2' \text{ et } e_3', \text{ dans la base } \mathcal{B}'.\end{pmatrix}$$

Dans ces conditions : $A = PBP^{-1}$, et si l'on pose, pour tout entier naturel n :

$$X_n' = \begin{pmatrix} x_n' \\ y_n' \\ z_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ alors, en multipliant par } P, \text{ on a : } X_n = PX_n'.$$

Et pour tout entier naturel n : $(X_{n+1} = AX_n)$ équivaut à : $(PX_{n+1}' = APX_n')$, ou encore, en multipliant par P^{-1}, à : $(X_{n+1}' = P^{-1}APX_n')$, soit à : $(X_{n+1}' = BX_n')$.

Il s'agit donc de résoudre l'équation récurrente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1}' = BX_n' \text{ et } X_0' = P^{-1}X_0,$$

pour en déduire ensuite les valeurs de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sachant que : $\forall n \geq 0,\ X_n = PX_n'$.

Puisque : $X_{n+1}' = BX_n'$, s'écrit : **(3)** $\begin{cases} x_{n+1}' = y_n' \\ y_{n+1}' = z_n' \\ z_{n+1}' = 0 \end{cases}$, il apparaît que l'on peut déterminer successivement les suites $(z_n')_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n')_{n\in\mathbb{N}}$, puis $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$:

(4)
- D'après (3), valable pour tout $n \geq 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1}' = 0$, *i.e.* :
  $$\forall n \geq 1,\ z_n' = 0.$$
- Comme aussi, $\forall n \geq 0$, $y_{n+1}' = z_n'$, et $x_{n+1}' = y'n$, il vient :
  $$y_1' = z_0', \quad y_n' = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 2,$$
  et
  $$x_1' = y_0', \quad x_2' = y_1' = z_0', \quad x_n' = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 3.$$

Reste à déterminer le premier terme de chaque suite, et pour cela, il s'agit d'inverser l'égalité $X_n = PX_n'$ pour $n = 0$:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad PX_0' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient (x_0', y_0', z_0') en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x_0' + y_0' + z_0' = 1 \\ x_0' + 2y_0' + z_0' = 1 \\ \quad y_0' + 2z_0' = 1 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_0' + y_0' + z_0' = 1 \\ \quad y_0' = 0 \\ \quad y_0' + 2z_0' = 1 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_0' + y_0' + z_0' = 1 \\ \quad y_0' = 0 \\ \quad 2z_0' = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_0' = \frac{1}{2} \\ y_0' = 0 \\ x_0' = 1 - z_0' = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

<u>**Ainsi**</u> :

$$\textbf{(5)} \quad x_0' = \tfrac{1}{2},\ y_0' = 0 \text{ et } z_0' = \tfrac{1}{2}.$$

On détermine alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en sachant que pour tout $n \geq 0$:

$$X_n = PX'_n, \text{ c'est-à-dire : } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_n + y'_n + z'_n \\ x'_n + 2y'_n + z'_n \\ y'_n + 2z'_n \end{pmatrix}.$$

Il vient, compte-tenu des relations (4) :

$$\left| \begin{aligned} x_0 &= x'_0 + y'_0 + z'_0 \\ y_0 &= x'_0 + 2y'_0 + z'_0 \\ z_0 &= y'_0 + 2z'_0 \end{aligned} \right., \quad \left| \begin{aligned} x_1 &= x'_1 + y'_1 + z'_1 = y'_0 + z'_0 \\ y_1 &= x'_1 + 2y'_1 + z'_1 = y'_0 + 2z'_0 \\ z_1 &= y'_1 + 2z'_1 = z'_0 \end{aligned} \right., \quad \left| \begin{aligned} x_2 &= x'_2 + y'_2 + z'_2 = z'_0 \\ y_2 &= x'_2 + 2y'_2 + z'_2 = z'_0 \\ z_2 &= y'_2 + 2z'_2 = 0, \end{aligned} \right.$$

et pour $n \geq 3$, puisque : $X'_n = 0$, on a : $X_n = PX'_n = 0$.

Avec les valeurs trouvées pour x'_0, y'_0 et z'_0 (*c.f.* **(5)**), **on peut alors conclure** :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 = 1, & x_1 = \frac{1}{2}, & x_2 = \frac{1}{2} \\ y_0 = 1, & y_1 = 1, & y_2 = \frac{1}{2} \\ z_0 = 1, & z_1 = \frac{1}{2}, & z_2 = 0 \end{cases} \text{ et pour tout } n \geq 3 : \begin{cases} x_n = 0 \\ y_n = 0 \\ z_n = 0 \end{cases}}.$$

1.5. Une matrice Y, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, étant donnée, on s'intéresse à l'équation matricielle :

$$X.B - B.X = Y.$$

L'on se doit de remarquer que l'inconnue X de cette équation, pour que les produits matriciels $B.X$ et $X.B$ aient un sens, doit être élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, l'énoncé faisant appel à le notion de ***trace*** d'une matrice, il faut, pour aborder la question, avoir à l'esprit les propriétés usuelles (***à connaître***) de cette opération, à savoir, pour deux matrices quelconques, $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ et $N = (n_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- **(6)** $\mathrm{Tr}\,(M+N) = \mathrm{Tr}\,M + \mathrm{Tr}\,N$: par définition : $\mathrm{Trace}\,(M) = \mathrm{Tr}\,M = \sum_{i=1}^n m_{ii}$, et comme on sait que le cœfficient, ligne i, colonne j, de la somme $M+N$ vaut $(M+N)_{ij} = m_{ij} + n_{ij}$, on en déduit que :
$$\mathrm{Tr}\,(M+N) = \sum_{i=1}^n (M+N)_{ij} = \sum_{i=1}^n m_{ii} + n_{ii} = \sum_{i=1}^n m_{ii} + \sum_{i=1}^n n_{ii} = \mathrm{Tr}\,M + \mathrm{Tr}\,N.$$
- **(7)** $\mathrm{Tr}\,(MN) = \mathrm{Tr}\,(NM)$: on sait que le cœfficient, ligne i, colonne j, du produit MN vaut $(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}n_{kj}$, tandis que : $(NM)_{ij} = \sum_{k=1}^n n_{ik}m_{kj}$. Ainsi :
$$\mathrm{Tr}\,(MN) = \sum_{i=1}^n (MN)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n m_{ik}n_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}n_{ki},$$
où l'on constate qu'**en échangeant les deux sommations** - ce qui est possible car les sommes sont finies et immédiat car les domaines de variations des deux indices sont indépendants l'un de l'autre :
$$\mathrm{Tr}\,(MN) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}n_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n n_{ki}m_{ik} = \sum_{k=1}^n (NM)_{kk} = \mathrm{Tr}\,NM.$$

Si maintenant $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est solution de (E), alors constatons qu'en multipliant à gauche les deux membres de (E) par B^j $(j \geq 1)$:

$$X.B - B.X = Y \implies B^j.X.B - B^j.B.X = B^j.Y,$$

ce qui implique encore, en utilisant la propriété (6) de la trace :

$$\mathrm{Tr}\,(B^j.X.B) - \mathrm{Tr}\,(B^{j+1}.X) = \mathrm{Tr}\,(B^j.Y).$$

et comme, par la seconde propriété (7) :

$$\mathrm{Tr}\,(B^j.X.B) = \mathrm{Tr}\,\big((B^j.X)B)\big) = \mathrm{Tr}\,\big(B(B^j.X)\big) = \mathrm{Tr}\,(B^{j+1}.X),$$

il vient finalement :

$$\mathrm{Tr}\,(B^j.Y) = \mathrm{Tr}\,(B^j.X.B) - \mathrm{Tr}\,(B^{j+1}.X) = \mathrm{Tr}\,(B^{j+1}.X) - \mathrm{Tr}\,(B^{j+1}.X) = 0.$$

<u>**En conclusion**</u> :

$$\boxed{\text{s'il existe } X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } X.B - B.X = Y \text{ alors } \forall j \geq 0,\ \mathrm{Tr}\,B^j.Y = 0}.$$

◇ **Pour établir la réciproque,** *c'est un passage obligé que d'examiner les produits B^jY. Il sera utile en plus de savoir que,* ***parce que B est triangulaire supérieure stricte, B est une matrice nilpotente,*** *c'est-à-dire une matrice dont les puissances sont nulles à partir d'un certain rang.* Constatons (le lecteur fera les calculs) :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \forall n \geq 3,\ B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

($B^n = 0$ dès que $n \geq 3$, c'est pourquoi l'énoncé n'évoque les produits B^jY que pour $j \in [\![0, 2]\!]$).

Si on pose : $Y = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$, et que l'on calcule BY et B^2Y, on obtient :

$$\mathrm{Tr}\,Y = a' + e' + i', \quad \mathrm{Tr}\,BY = d' + h', \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,B^2Y = g'.$$

Ainsi, **si la condition nécessaire $\mathrm{Tr}\,Y = \mathrm{Tr}\,BY = \mathrm{Tr}\,B^2Y = 0$ est réalisée**, il vient :

$$i' = -a' - e', \quad g' = 0 \quad \text{et} \quad h' = -d'.$$

La matrice Y est donc, si la condition est réalisée, est de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ 0 & -d' & -a' - e' \end{pmatrix}.$$

D'autre part, si la matrice inconnue est notée : $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors :

$$X.B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B.X = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc l'équation $X.B - B.X = Y$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} -d & a - e & b - f \\ -g & d - h & e - i \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ 0 & -d' & -a' - e' \end{pmatrix},$$

ce qui, écrit sous forme de système, donne :

$$\begin{cases} \quad - d = a' \\ a - e = b' \\ b - f = c' \\ \quad - g = d' \\ d - h = e' \\ e - i = f' \\ \quad 0 = 0 \\ \quad g = -d' \\ \quad h = -a' - e' \end{cases} \iff \begin{cases} a - e = b' & (L_1) \\ b - f = c' & (L_2) \\ \quad - d = a' & (L_3) \\ d - h = e' & (L_4) \\ e - i = f' & (L_5) \\ \quad - g = d' & (L_6) \\ \quad g = -d' & (L_7) \\ \quad h = -a' - e' & (L_8) \\ \quad 0 = 0 & (L_9) \end{cases},$$

En éliminant les équations redondantes (L_9, L_6 égale à $-L_7$ et L_4 égale à $-L_3 - L_8$) et en changeant L_3 en son opposée et L_1 en $L_1 + L_5$, le système équivaut encore à :

$$\begin{cases} a \qquad\qquad\qquad\qquad - i = b' + f' \\ \quad b \qquad\quad - f \qquad\quad = c' \\ \qquad d \qquad\qquad\qquad\quad = a' \\ \qquad\quad e \qquad\qquad - i = f' \\ \qquad\qquad\qquad g \qquad = -d' \\ \qquad\qquad\qquad\quad h \quad = -a' - e' \end{cases}$$

On a donc un système équivalent triangulaire composé de 6 équations et à 9 inconnues.

• Les équations "manquantes" étant celles correspondant aux inconnues c, f et i (non présentes sur la diagonale), on peut considérer que celles-ci sont quelconques, tandis que les autres inconnues s'expriment en fonction d'elles.

Ce qui revient concrètement à énoncer que :

$$\left(\begin{array}{l} X \text{ est solution de :} \\ \quad X.B - B.X = Y \end{array} \right) \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} a = i + b' + f' \\ b = f + c' \\ d = a' \\ e = i + f' \\ g = -d' \\ h = -a' - e' \\ c \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

• On constate donc que, si on considère une matrice Y vérifiant la condition nécessaire $\operatorname{Tr} B^j Y = 0$ ($j = 0, 1, 2$), alors le système d'inconnues a, b, c, d, e, f, g, h et i, admet des solutions (et même une infinité), **donc** on peut affirmer que : :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } Y \text{ est telle que : } \operatorname{Tr} Y = \operatorname{Tr} BY = \operatorname{Tr} B^2 Y = 0, \text{ alors} \\ \text{l'équation : } \quad X.B - B.X = Y \text{ admet des solutions} \end{array}}.$$

• La condition nécessaire s'est donc avérée **suffisante**. D'où la conclusion ultime :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{l'équation : } X.B - B.X = Y \text{ admet des solutions si et seulement si :} \\ \forall j \in \{0, 1, 2\}, \quad \operatorname{Tr} B^j Y = 0 \end{array}}.$$

De plus, grâce au dernier système obtenu, on peut donner la **forme générale des solutions de** (E) :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} i+b'+f' & f+c' & c \\ a' & i+f' & f \\ -d' & -a'-e' & i \end{pmatrix}, \quad \text{où } (c,i,f) \in \mathbb{R}^3}.$$

ou encore, en observant bien :

$$\boxed{X = i.I + f.B + c.B^2 + X_0, \quad \text{où } (c,i,f) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} b'+f' & c' & 0 \\ a' & f' & 0 \\ -d' & -a'-e' & 0 \end{pmatrix}}.$$

.Problème n°2.

$\boxed{2.1.}$ Si $y : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ est une série entière de rayon de convergence R strictement positif, alors y est indéfiniment dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, et ses dérivées se calculent en dérivant directement le terme général, de sorte que, pour tout $x \in \,]-R, R[$:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n.x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^{n-2}.$$

Si de plus y est solution de (E), alors, on a, **en substituant** :

$$\forall\, x \in \,]R, R[, \quad (x^2-1).\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^{n-2} + 3x.\sum_{n=1}^{\infty} na_n.x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n.$$

Ce qui équivaut, en distribuant et en *rentrant* les facteurs dans les sommes, à :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^2.x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^{n-2} + 3x.\sum_{n=1}^{\infty} na_n.x.x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^{n-2} + 3.\sum_{n=1}^{\infty} na_n.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = 0.$$

puis **en décalant l'indice de la deuxième somme** de sorte que dans toutes les sommes l'exposant de x soit égal à l'indice de sommation, et **en extrayant des sommes les termes de rang 0 et 1** pour pouvoir les rassembler toutes ensuite :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}.x^n + 3.\sum_{n=1}^{\infty} na_n.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = 0$$

$$\iff \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n.x^n\right) - 2a_2 - 6a_3.x - \left(\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}.x^n\right)$$

$$+3a_1.x + \left(\sum_{n=2}^{\infty} 3na_n.x^n\right) + a_0 + a_1.x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n.x^n = 0.$$

On regroupe alors les quatre sommes de séries en une seule (*c'est toujours possible dès lors que les sommes existent, i.e. convergent*), et aussi les termes de degré 0 et 1 :

$$a_0-2a_2+2(2a_1-3a_3).x+\sum_{n=2}^{\infty}\big[n(n-1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}+3na_n+a_n\big].x^n=0$$

et en simplifiant le cœfficient de x^n dans la somme :

$$a_0-2a_2+2(2a_1-3a_3).x+\sum_{n=2}^{\infty}\big[(n^2+2n+1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}\big].x^n=0$$

ou encore, en utilisant que : $n^2+2n+1=(n+1)^2$, et en factorisant dans la somme :

$$a_0-2a_2+2(2a_1-3a_3).x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\big[(n+1)a_n-(n+2)a_{n+2}\big].x^n=0.$$

La série entière au membre de gauche est donc la série entière nulle, et comme il y a unicité de l'écriture d'une série entière sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ au voisinage de 0, l'égalité précédente valable pour tout $x\in\,]-R,R[$ (avec R supposé strictement positif), équivaut à la nullité des cœfficients des termes de chaque degré.

__Ainsi__ :

$$\begin{pmatrix}y\text{ solution}\\ \text{de }(E)\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{l}a_0\ -\ 2a_2\ =\ 0\\ 2a_1\ -\ 3a_3\ =\ 0\\ \text{et pour tout } n\geq 2 :\\ (n+1)a_n-(n+2)a_{n+2}=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}a_2=\frac{1}{2}a_0\\ a_3=\frac{2}{3}a_1\\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}.a_n\ (\forall\, n\geq 2).\end{array}\right.$$

Et parce qu'un rapide examen permet d'observer que la relation pour $n\geq 2$ s'étend à tout entier naturel, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall\, n\geq 0,\quad a_{n+2}=\tfrac{n+1}{n+2}.a_n}\,.$$

2.2. Cherchons une solution y_1 de (E) sous la forme d'une série entière et telle que : $y_1(0)=1$ et $y'(0)=0$.

• On suppose que y_1 admet un DSE_0, donc si l'on écrit, pour tout x de son intervalle ouvert de convergence : $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, alors les conditions initiales donnent :

$$y_1(0)=\big(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\big)(0)=b_0=1\quad\text{ et }\quad y_1'(0)=\big(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}nb_nx^{n-1}\big)(0)=b_1=0,$$

et les cœfficients vérifient la relation de récurrence précédemment obtenue, ce qui donne, en distinguant les termes de rang pair et les termes de rang impair :

$$\forall\, p\geq 0,\ \ b_{2p+2}=\tfrac{2p+1}{2p+2}.b_{2p},\ \ b_0=1,\quad\text{ et }\quad b_{2p+3}=\tfrac{2p+2}{2p+3}.b_{2p+1},\ \ b_1=0.$$

Il apparaît donc que **les cœfficients pour les rangs impairs sont tous nuls**, tandis qu'en itérant, il vient :

$$\forall\, p\geq 0,\ \ b_{2p+2}=\tfrac{2p+1}{2p+2}.\tfrac{2p-1}{2p}\cdots\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{2},\ \text{(où l'on a utilisé que } b_0=1).$$

Et l'on peut écrire encore, en décalant l'indice (on remplace p par $p-1$) :

$$\forall\, p\geq 1,\quad b_{2p}=\tfrac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3.1}{(2p)(2p-2)\ldots 4.2},\quad b_0=1.$$

On a donc, pour tout x de l'intervalle ouvert de convergence, nécessairement :

$$\boxed{y_1(x)=x+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3.1}{(2p)(2p-2)\ldots 4.2}.x^{2p}}\,.$$

et cette solution est acceptable si son rayon de convergence R_1 est strictement positif.

◇ *L'énoncé propose de reconnaître la fonction y_1 grâce à la formule du binôme. Examinons donc la formule du cours donnant le développement en série entière d'une fonction à l'aide de la formule du binôme :*

$$(1-x)^\alpha = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha.(\alpha-1).(\alpha-2)\dots(\alpha-p+1)}{p!}.x^p \quad \left(\begin{array}{c}\textbf{généralisation du}\\ \text{développement du binôme}\end{array}\right).$$

Or, le dénominateur dans l'expression obtenue pour b_{2p} peut s'écrire à l'aide de $p!$, pourvu que l'on factorise chacun de ses facteurs par 2, ce qui donne :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1.3\dots(2p-3)(2p-1)}{2^p.p!}.x^{2p} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2}.\frac{3}{2}\dots\frac{2p-3}{2}.\frac{2p-1}{2}.\frac{x^{2p}}{p!}.$$

On peut alors se rapprocher d'un développement du type $(1-x)^\alpha$, car, de fait, le cœfficient de x^{2p}, est un produit de p facteurs, chacun des facteurs différant de 1 du précédent, ce que l'on met en évidence ainsi :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}+(p-2)\right).\left(\frac{1}{2}+(p-1)\right).\frac{x^{2p}}{p!}.$$

Si maintenant on change le signe de chacun des p facteurs, et que l'on corrige ce changement de signe en remplaçant $x^{2p} = (x^2)^p$ par $(-x^2)^p$, il vient :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(p-2)\right).\left(-\frac{1}{2}-(p-1)\right).\frac{(-x^2)^p}{p!},$$

et l'on reconnaît, car le terme de rang 0 lui aussi convient, le développement de $(1-x)^\alpha$ où à x est substitué $-x^2$ et où $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Et comme on sait que ce développement est convergent si et seulement si $|x| < 1$, on en déduit que le développement en série de $y_1(x)$ est convergent si et seulement si $x^2 < 1$, *i.e.* si et seulement si aussi $|x| < 1$.

En conclusion :

la solution de (E) satisfaisant les conditions initiales : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ est :

$$y_1 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{définie et solution sur }]-1,1[\quad .$$

2.3. De la même façon qu'au **2.**, si y_2 est solution de (E) développable en série entière en 0, et si l'on pose $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, l'examen des conditions initiales, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, impose :

$$c_0 = 0, \quad \text{et} \quad c_1 = 1.$$

La relation de récurrence établie au **2.1.** permet cette fois d'affirmer que :

$$\forall p \geq 0, \quad c_{2p} = 0, \quad \text{et} \quad c_{2p+1} = \tfrac{2p}{2p+1}.\tfrac{2p-2}{2p-1}\dots\tfrac{4}{5}.\tfrac{2}{3}.c_1.$$

De sorte que, c_1 valant 1, on trouve comme forme nécessaire pour $y_2(x)$:

$$y_2(x) = x + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{3}.\frac{4}{5}\dots\frac{2p-2}{2p-1}.\frac{2p}{2p+1}.x^{2p+1}.$$

◇ Rayon de convergence de la solution trouvée : si l'on minore (respectivement si l'on majore) chaque entier au numérateur par l'entier qui le précède (resp. lui succède), on obtient la minoration (resp. la majoration) suivante des termes $\left|c_{2p+1}.x^{2p+1}\right|$:

$$\left|\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\cdots\frac{2p-3}{2p-1}.\frac{2p-1}{2p+1}\right|.|x|^{2p+1}\leq\left|\frac{2}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}.\frac{2p}{2p+1}.x^{2p+1}\right|\leq\left|\frac{3}{3}.\frac{5}{5}\cdots\frac{2p-1}{2p-1}.\frac{2p+1}{2p+1}\right|.|x|^{2p+1}$$

soit, en simplifiant :

$$\frac{1}{2p+1}.|x|^{2p+1}\leq\left|c_{2p+1}.x^{2p+1}\right|\leq|x|^{2p+1}.$$

Ainsi, d'une part :

- pour $|x|<1$: **(8)** $\left|c_{2p+1}.x^{2p+1}\right|\leq|x|.\left|x^2\right|^p$. Or on sait que la série géométrique $\sum_{n\geq 0}x^n$ est convergente pour $|x|<1$, donc aussi $\sum_{p\geq 1}|x|.\left|x^2\right|^p$ converge pour $|x|<1$, et par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs, par la majoration (8), $\sum_{p\geq 1}\left|c_{2p+1}.x^{2p+1}\right|=\sum_{p\geq 1}\left|\frac{2}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}.\frac{2p}{2p+1}.x^{2p+1}\right|$ aussi est convergente.

  Ainsi, $y_2(x)=x+\sum_{p\geq 1}\frac{2}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}.\frac{2p}{2p+1}.x^{2p+1}$ est **absolument convergente** pour $x\in\left]-1,1\right[$, donc son rayon de convergence, R_2, est supérieur ou égal à 1.

D'autre part :

- pour $x=1$: **(9)** $\left|c_{2p+1}.x^{2p+1}\right|\geq\frac{1}{2p+1}\geq\frac{1}{2(p+1)}$. Or on sait que la série harmonique $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ est divergente, donc aussi la série de terme général $\frac{1}{2}.\frac{1}{p+1}$, et, parce que son terme général est minoré par celui d'une série à termes positifs divergente (d'après (9)), $\sum_{p\geq 0}\left|c_{2p+1}.x^{2p+1}\right|$ diverge pour $x=1$ et par conséquent : $R_2\leq 1$.

En conclusion, R_2 est minoré et majoré par 1, donc : $R_2=1$. **On en déduit que** :

la solution de (E) satisfaisant les conditions initiales : $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$ est :

$$y_2 : x\longmapsto x+\sum_{p+1}^{\infty}\frac{2}{3}.\frac{4}{5}\cdots\frac{2p-2}{2p-1}.\frac{2p}{2p+1}.x^{2p+1},\quad\text{définie et solution sur }\left]-1,1\right[.$$

2.4. Si y est solution de (E) sur un $\left]-1,1\right[$ (*on supposera y est définie sur $I=\left]-1,1\right[$, ce qui implicite dans l'énoncé*), alors y est dérivable au moins deux fois sur $\left]-1,1\right[$, et par suite il en est de même pour la fonction $z\longmapsto\sqrt{1-x^2}.y(x)$ (par composition et produit de fonctions dérivables deux fois). Dans ces conditions, on va calculer les dérivées de y (exprimée à l'aide de z) jusqu'à l'ordre 2, puis écrire que y est solution de (E) pour obtenir une équation différentielle satisfaite par z.

◇ Pour tout $x\in\left]-1,1\right[$: $y(x)=\frac{z(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, et $y'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'.z(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)$,

donc : $y'(x)=-\frac{1}{2}.\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)$.

puis : $y''(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)''.z(x)+2.\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'.z'(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z''(x)$ (formule de Leibniz pour la dérivée seconde d'un produit).

ce qui donne, tous calculs faits :

$$y''(x)=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.z(x)+\frac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z'(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z''(x).$$

Si maintenant on exprime que y est solution de (E), on obtient, en substituant :

$$(x^2-1).\left(\tfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.z(x)+\tfrac{2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z'(x)+\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z''(x)\right)$$
$$+3x.\left(\tfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z(x)+\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)\right)+\tfrac{z(x)}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

et en développant :

$$-\tfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z(x)-\tfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)-\sqrt{1-x^2}.z''(x)+\tfrac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z(x)+\tfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)+\tfrac{z(x)}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

puis :

$$-\sqrt{1-x^2}.z''(x)+\tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.z'(x)+\tfrac{-1-2x^2+3x^2+(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.z(x)=0.$$

En notant que le facteur de $z(x)$ est identiquement nul (*i.e.* nul pour tout $x\in J$), et en multipliant par $-\sqrt{1-x^2}$ (qui ne s'annule pas sur J), il vient :

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} y \text{ solution de} \\ (E) \text{ sur }]-1,1[\end{array}\right)\Longleftrightarrow\left(\begin{array}{c} z,\ \text{définie par } z(x)=\sqrt{1-x^2}.y(x), \\ \text{est, sur }]-1,1[, \text{ solution de :} \\ (E')\ \ (1-x^2).z''(x)-x.z'(x)=0 \end{array}\right)}.$$

◇ *L'équation différentielle satisfaite par z et plus précisément par z' est une équation dite **à variables séparables** (car on peut isoler z' et z'' dans un membre de l'équation), que l'on peut donc réécrire ainsi, à condition de se placer sur un intervalle sur lequel z' ne s'annule pas :*

$$\frac{z''(x)}{z'(x)}=\frac{x}{1-x^2}.$$

*On obtiendra alors par deux intégrations successives d'abord une forme nécessaire pour $\ln|z'|$ puis pour $z(x)$. Mais procéder ainsi nécessite une rigueur qui dépasse les ambitions de la classe. C'est pourquoi la méthode **ad hoc** ici, même si elle nécessite quelques astuces de calcul est plutôt la suivante :*

• Si z est solution de (E') : $(1-x^2).z''(x)-x.z'(x)=0$, alors en multipliant par $2.z'(x)$, z est solution aussi de :

$$(E'') :\ (1-x^2).2.z'(x).z''(x)-2x.\big(z'(x)\big)^2=0,$$

où l'on reconnaît que le membre de gauche est la dérivée d'un produit. C'est-à-dire que :

$$(E'')\ \text{ s'écrit }\ (E'') :\ \Big((1-x^2).\big(z'(x)\big)^2\Big)'=0.$$

Ainsi, si z est solution de (E') sur $]-1,1[$, alors : $x\longmapsto(1-x^2).\big(z'(x)\big)^2$ est une fonction constante sur cet intervalle. Et parce que $1-x^2>0$ pour $x\in\,]-1,1[$, cette constante doit être positive, et l'on a :

si z est solution de (E') sur $]-1,1[$, alors il existe $K\in\mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad |z'(x)|=K.\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ajoutons, *dans le but de déterminer z' et non seulement $|z'|$, dans le cas où $K>0$* : que, si z est solution de (E') sur $]-1,1[$, z est au moins deux fois dérivable, et par suite z' est au moins une fois dérivable donc continue sur $]-1,1[$, de sorte que l'image de l'intervalle $]-1,1[$ par z' est un intervalle (noté J). Or, puisque $K/\sqrt{1-x^2}$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$, 0 n'appartient pas à $J=z'(]-1,1[)$, on a :

$$J\in\mathbb{R}_+^*,\ \text{ou } J\in\mathbb{R}_-^*\quad \text{(car } J \text{ est un intervalle).}$$

On en déduit que : $z'(x) = K.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ou $z'(x) = -K.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$. On peut donc énoncer que :

si z est solution de (E) sur $]-1,1[$, alors il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad z'(x) = C_1.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partant de là et en intégrant, il vient :

si z est solution de (E) sur $]-1,1[$, alors il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall x \in]-1,1[, \ z(x) = C_1.\text{Arcsin}(x) + C_2.$$

La forme obtenue est la forme que doit avoir nécessairement une solution z de (E') sur $]-1,1[$.

◇ *Cette forme est **nécessaire mais non suffisante**, car on est passé par l'équation intermédiaire (E'') qui n'est équivalente à (E') que si l'on peut affirmer que z' ne s'annule pas sur I, ce que l'on ne sait pas a priori. Il s'agit donc maintenant de **vérifier si les fonctions de la forme : $x \mapsto C_1.\text{Arcsin}(x) + C_2$, $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ sont solutions de** (E).*

C'est une étape formelle mais obligatoire, néanmoins fastidieuse, aussi nous laisserons au lecteur le soin de justifier la dérivabilité, jusqu'à l'ordre 2, de ces fonctions sur $]-1,1[$, et de vérifier qu'en effet elles sont solutions de (E').

• **Ceci fait** (compte-tenu du lien entre y et z) **on conclut que** :

si y est solution de (E), alors y est de la forme : $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.(C_1.\text{Arcsin}(x) + C_2)$, avec C_1, C_2 deux réels quelconques

.

2.5. La fonction y_2 de la question **3.** en particulier est de la forme ci-dessus (en tant que solution de (E)) et l'on peut déterminer les constantes C_1 et C_2 relatives à y_2 par examen des conditions initiales satisfaites par y_2 :
$$y_2(0) = \Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.(C_1.\text{Arcsin}(x) + C_2)\Big)(0) = C_2 = 0.$$
Et, sachant déjà que $C_2 = 0$:
$$y_2'(0) = \Big[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.C_1.\text{Arcsin}(x)\Big]'(0) = C_1.\Big[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.\text{Arcsin}(x) + \Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2\Big](0) = C_1 = 1.$$
Ainsi, il apparaît que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\text{Arcsin}(x)$$
c'est-à-dire encore, si l'on écrit $y_2(x)$ sous la forme de série :
$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad x + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{3}.\frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1}.\frac{2p}{2p+1}.x^{2p+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\text{Arcsin}(x)}\ .$$

2.6. X étant une variable aléaotoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série de terme général $\mathbb{P}(X = n)$ $(n \in \mathbb{N})$ est convergente, et sa somme vaut 1, *i.e.* : $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.
Ce qui, en extrayant le premier terme de la somme, donne :
$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n).$$

Le terme général $\mathbb{P}(X = n)$, (*il ne faut pas manquer cela*), n'est pas sans rapport avec le cœfficient de x^n dans les séries entières précédentes :

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} = \frac{(2^n.[1.2\ldots(n-1).n])^2}{1.2\ldots(2n+1)(2n+2)} = \frac{\big(2.4\ldots(2n-2)(2n)\big)^2}{1.2\ldots(2n+1)(2n+2)} \quad \left(\begin{array}{c}\text{en intégrant un}\\ \text{2 dans chaque}\\ \text{facteur de } n!\end{array}\right)$$

Si maintenant on simplifie la fraction par $2.4\ldots(2n-2)(2n)$, ce qui laisse au dénominateur le produit des entiers impairs successifs de 1 à $2n+1$ et $(2n+2)$:

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} = \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}.\frac{1}{2n+2}.$$

L'habitude aidant, on reconnaît ici le cœfficients x^n du développement en série entière d'une primitive de y_2 sur $]-1, 1[$.

En effet, y_2 étant développable en série entière sur $]-1, 1[$, elle y admet des primitives, différant toutes d'une constante, développables en série entière, et dont le développement en série entière se calcule en intégrant terme à terme le développement de y_2. Par exemple, pour la primitive qui s'annule en 0 :

$$\textbf{(10)} \quad \int_0^x y_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}.\frac{1}{2n+2}.x^{2n+2}.$$

Or, comme on dispose d'une autre écriture de y_2 :

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}'(x).\mathrm{Arcsin}(x) = \frac{1}{2}.\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{2}.(\mathrm{Arcsin}^2(x))'.$$

On a aussi :

$$\textbf{(11)} \quad \int_0^x y_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{2}.(\mathrm{Arcsin}^2(x))'\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}.\mathrm{Arcsin}^2(x)\right]_0^x = \frac{1}{2}.\mathrm{Arcsin}^2(x).$$

en égalisant les expressions (10) et (11), on a, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\int_0^x y_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.\mathrm{Arcsin}^2(x) = \frac{1}{2}.x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}.\frac{1}{2n+2}.x^{2n+2}.$$

Et puisque la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ est continue à gauche en 1, il vient :

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}.x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}.\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}.\mathrm{Arcsin}^2(x) = \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Mais **attention !**, rien ne permet encore d'affirmer que :

$$\textbf{(12)} \quad \frac{\pi^2}{8} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}.x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}.\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}.\frac{1}{2n+2}.$$

car **on ne peut échanger sans justification une limite et une sommation infinie**. C'est pourtant le résultat qu'il convient d'établir, car compte-tenu du lien trouvé entre les cœfficients du DSE_0 de y_2 et la loi de X, (12) équivaut à :

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n), \text{ dont on tire } \mathbb{P}(X = 0) \text{ sachant que } \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

Pour constourner la difficulté soulevée, ***la technique consiste alors à passer à la limite $x \longrightarrow 1^-$ sur des sommes partielles convenablement choisies.***

◊ Pour clarifier le problème, **posons** :

- $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, et, pour $n \geq 1$: $\alpha_n = \mathbb{P}(X = n) = \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+2}$,
- $S_N(x) = \frac{1}{2}.x^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+2}.x^{2n+2}$
- $A_N = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2.4\ldots(2n-2)(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+2}$.

Avec ces notations, les résultats précédents et le fait que $(\mathbb{P}(X = n))_{n\geq 0}$ est une loi de probabilité (c'est admis dans l'énoncé) donnent :

- puisque pour $n \geq 1$: $\alpha_n = \mathbb{P}(X = n)$, puisque $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge et a pour somme 1, la série de terme général α_n est convergente et a pour somme :

$$L = \lim_{N\to+\infty} A_N = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2} + \big(1 - \mathbb{P}(X = 0)\big).$$

- pour tout $x \in \,]-1, 1[$, $S_N(x)$ converge vers $S(x) = \frac{1}{2}.\text{Arcsin}^2(x)$, et :

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Il s'agit alors de montrer que : $L = \frac{\pi^2}{8}$. Pour cela et pour tirer profit des différents résultats de convergence, on écrit (*c'est une technique fine mais usuelle*), pour tout $x \in \,]-1, 1[$:

$$L - \frac{\pi^2}{8} = L - S(x) + S(x) - \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n + S(x) - \frac{\pi^2}{8}.$$

puis par application de l'inégalité triangulaire :

$$\textbf{(13)} \quad \left|L - \frac{\pi^2}{8}\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n\right| + \left|S(x) - \frac{\pi^2}{8}\right|.$$

- ***On peut alors procéder comme suit,*** pour passer à la limite $x \longrightarrow 1^-$:

pour un tout $x \in \,]-1, 1[$, par des manipulations licites sur les sommes infinies (convergentes), pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n &= \sum_{n=0}^{N} \alpha_n - \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n x^n \\ &= A_N - S_N(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (\alpha_n - \alpha_n x^n)\end{aligned}$$

puis, par application de l'inégalité triangulaire encore :

$$\textbf{(14)} \quad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n\right| \leq |A_n - S_N(x)| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n(1 - x^n)\right|$$

Or, **la série de terme général $\alpha_n(1 - x^n)$ est absolument convergente**, par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs :

$(\forall\, x \in \,]-1, 1[)$, $\forall\, n \geq 0$: $|\alpha_n(1 - x^n)| \leq \alpha_n$, et $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ est convergente.

Donc, on a aussi, pour le reste de rang N de cette série, la majoration suivante :

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n(1-x^n)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\alpha_n(1-x^n)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n.$$

En posant : $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n$, on a donc, en reprenant (14) :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n\right| \leq |A_N - S_N(x)| + R_N.$$

__À ce stade__, on a donc, par (11), (12) et (14), pour tout $x \in\,]-1,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\textbf{(15)} \quad \left|L - \frac{\pi^2}{8}\right| \leq |A_N - S_N(x)| + R_N + \left|S(x) - \frac{\pi^2}{8}\right|.$$

Or, en prenant __d'abord__ la limite pour x tendant vers 1^-, pour $\boldsymbol{N}$ **fixé** :

- d'une part, puisque : $\lim_{x\to 1^-} \left|S(x) - \frac{\pi^2}{8}\right| = 0.$
- d'autre part, parce que la fonction $S_N(x)$, polynomiale, est continue en 1, on a : $\lim_{x\to 1^-} S_{N_\varepsilon}(x) = S_N(1)$, et comme on vérifie que $S_N(1) = A_N$:

$$\lim_{x\to 1^-} |A_N - S_N(x)| = |A_N - S_N(1)| = 0.$$

Ainsi, **pour tout** $\boldsymbol{N \geq 0}$, par passage à la limite sur (15), pour $x \longrightarrow 1^-$, on obtient :

$$\textbf{(16)} \quad \left|L - \frac{\pi^2}{8}\right| \leq R_N \quad \left(\begin{array}{c}\text{où } \lim_{N\to\infty} R_N = 0 \text{ car } R_N \text{ est le} \\ \text{reste de la série convergente } \sum_{n\geq 0} \alpha_n\end{array}\right).$$

L'inégalité (16) étant valable pour tout entier naturel N, par passage à la limite :

$$\left|L - \tfrac{\pi^2}{8}\right| \leq 0, \quad i.e. : \quad L = \lim_{N\to+\infty} A_N = \tfrac{\pi^2}{8}.$$

C'est-à-dire, en rappelant le lien entre $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et la loi de X :

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) = \tfrac{1}{2} + (1 - \mathbb{P}(X=0)) = \tfrac{\pi^2}{8}.$$

__**D'où la conclusion**__ :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0) = 1 - \frac{\pi^2-4}{8} = \frac{12-\pi^2}{8}}.$$

.Problème n°3.

3.1. Allons au plus simple... et numérotons les $n+2$ boules contenues dans l'urne. On affecte le numéro $n+1$ à la boule B1 et le numéro $n+2$ à la boule B2. Les boules noires sont numérotées de 1 à n.

Puisque l'on tire les boules une par une, sans remise, jusqu'à épuisement de l'urne (on dit que le tirage est *exhaustif*), le résultat obtenu lors d'une réalisation de l'expérience aléatoire est convenablement décrit par la donnée de la $(n+2)$-liste des numéros portés par les boules, ordonnée par le rang de sortie de chacune d'elles.

Dans ces conditions, les **résultats élémentaires** seront de la forme :

$\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_{n+2})$, i_k désignant le numéro porté par la boule tirée au k-ième tirage.

Puisque chaque boule ne peut être tirée qu'une seule fois (tirage sans remise), les i_k $(1 \leq k \leq n)$ sont tous distincts. Et comme les boules sont numérotées de 1 à $n+2$, chaque i_k appartient à $[\![1, n+2]\!]$.

L'univers correspondant à la forme choisie pour les résultats élémentaires est donc :

$$\boxed{\Omega = \left\{(i_1, i_2, \ldots, i_{n+2}) \in [\![1, n+2]\!]^{n+2} \mid \forall (k,l) \in [\![1, n+2]\!]^2,\ k \neq l : \ i_k \neq i_l\right\}}.$$

◇ L'intérêt de ce choix d'univers tient à l'**équiprobabilité des résultats élémentaires** qui le constituent. En effet, le tirage étant fait au hasard, les boules sortent dans n'importe quel ordre, et donc tous les ordonnancements des $n+2$ numéros de boule sont équiprobables.
Dans ces conditions, la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est définie par : $\forall\, \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\text{Card }\Omega}$.
Or l'univers Ω, défini comme ci-dessus, a autant d'éléments qu'il y a de permutations possibles des éléments de $[\![1, n+2]\!]$, donc : Card $\Omega = (n+2)!$, et :

$$\boxed{\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\omega) = \tfrac{1}{(n+2)!}}.$$

$\boxed{\textbf{3.2.}}$ Si les boules B1 et B2 sortent respectivement aux rangs N1 et N2, la première boule blanche est apparue au plus petit de ces rangs et la seconde au plus grand, ce qui permet d'écrire que : $\boxed{N1 = \min(R1, R2) \qquad N2 = \max(R1, R2)}$.

$\boxed{\textbf{3.3.}}$ Les boules B1 et B2 étant indiscernables, elles ont chacune une probabilité égale de sortir à un rang donnélors du vidage de l'urne, donc :

$$\boxed{\text{R1 et R2 suivent la même loi de probabilité}}.$$

◇ La boule B1 peut être sortie de l'urne à n'importe quel tirage, parmi les $n+2$ nécessaires au vidage de l'urne, donc : ▌ $R1(\Omega) = [\![2, n+2]\!]$.

• Pour tout $k \in R1(\Omega)$, de par l'équiprobabilité des résultats élémentaires tels que la boule B1 est sortie au k-ième tirage.

Or, un résultat élémentaire réalise $(R1 = k)$ si et seulement si c'est un $n+2$-uplet avec, en k-ième position, le numéro de la boule B1, à savoir $n+1$, et, aux $n+1$ autres places, les $n+1$ numéros de boules dans un ordre quelconque. Et il existe $(n+1)!$ façons de permuter ces $n+1$ numéros.

<u>**Donc**</u> : ▌ Card $(\text{R1} = k) = (n+1)!$.

de sorte que : ▌ $\mathbb{P}(\text{R1} = k) = \frac{\text{Card }(\text{R1}=k)}{\text{Card }\Omega} = \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2}$.

<u>Ainsi, on peut conclure</u> :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{R1 et R2 suivent la même loi, définie par : } \ \text{R1}(\Omega) = \text{R2}(\Omega) = [\![1, n+2]\!] \\ \text{et : } \qquad \forall\, k \in [\![1, n+2]\!] \ : \ \ \mathbb{P}(\text{R1} = k) = \mathbb{P}(\text{R2} = k) = \dfrac{1}{n+2} \end{array}}.$$

$\boxed{\textbf{3.4.}}$ <u>Loi du couple $(\text{R1}, \text{R2})$</u> : pour le couple de V.A. $(\text{R1}, \text{R2})$, l'ensemble des valeurs possibles est l'ensemble des couples (i, j), avec $i \neq j$ (les boules ne peuvent être sorties de l'urne au même tirage) et $i, j \in [\![1, n+2]\!]$.

◇ Pour un tel couple (i, j), l'ensemble des $(n+2)$-uplets de Ω, réalisant $(\text{R1}, \text{R2}) = (i, j)$ est constitué des résultats ω tels que le numéro de la boule B1, à savoir $n+1$, est en i-ième position, le numéro de la boule B2 en j-ième position, tandis que les n

numéros portés par les boules noires sont répartis dans un ordre quelconque aux n places restantes, ce qui représente $n!$ possibilités.

En conséquence, toujours par équiprobabilité des résultats élémentaires ω :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout couple } (i,j) \text{ tel que : } i \in [\![1,n+2]\!]\,,\ j \in [\![1,n+2]\!]\,,\ i \neq j :\\ \mathbb{P}\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(i,j)\big) = \dfrac{\mathrm{Card}\,\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(i,j)\big)}{\mathrm{Card}\,\Omega} = \dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\end{array}}.$$

◇ Loi du couple $(\mathrm{N1},\mathrm{N2})$: remarquons déjà que, compte-tenu de la définition de N1 et N2, le couple $(\mathrm{N1},\mathrm{N2})$ ne peut prendre que des valeurs (i,j) telles que : $i<j$, $i \in [\![1,n+1]\!]$ et $j \in [\![2,n+2]\!]$.

Pour de telles valeurs du couple (i,j), la réalisation de $\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2})=(i,j)\big)$ équivaut à celle de $\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(i,j)\big)$ ou de $\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(j,i)\big)$. En effet, si la première boule blanche est obtenue au i-ème tirage (*i.e.* si $\mathrm{N1}=i$), il s'agit de B1 (*i.e.* $\mathrm{R1}=i$) ou de B2 (*i.e.* $\mathrm{R2}=i$). De même, la réalisation de $(\mathrm{N2}=j)$ implique celle de $(\mathrm{R1}=j)$, ou celle de $(\mathrm{R2}=j)$. Réciproquement, si $\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(i,j)\cup(\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(j,i)\big)$ est réalisé, la première boule blanche est sortie au i-ième tirage et la seconde au j-ième, et non le contraire car on a supposé que $i<j$.

En résumé : $\quad \big((\mathrm{N1},\mathrm{N2})=(i,j)\big)=\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(i,j)\cup(\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(j,i)\big)$.

Ensuite, puisque la réunion précédente est une réunion d'événements incompatibles (la boule B1, par exemple, ne peut sortir à la fois aux rangs i et j, sachant que $i\neq j$), il vient : $\quad \mathbb{P}\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2})=(i,j)\big)=\mathbb{P}\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(i,j)\big)+\mathbb{P}\big((\mathrm{R1},\mathrm{R2})=(j,i)\big)$.

Ainsi, connaissant la loi du couple $(\mathrm{R1},\mathrm{R2})$, la loi de $(\mathrm{N1},\mathrm{N2})$ est donnée par :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout couple } (i,j) \in\in [\![1,n+2]\!]^2, \text{ tel que } i<j :\\ \mathbb{P}\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2})=(i,j)\big)=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\end{array}}.$$

3.5. Loi marginale de N1 : tout d'abord notons que la première boule blanche peut sortir à l'issue de n'importe quel tirage, sauf le $(n+2)$-ième auquel on vide l'urne de sa dernière boule. Et la seconde boule blanche sera nécessairement tirée après la première ! **En conséquence** : $\quad \mathrm{N1}=[\![1,n+1]\!]$.

Remarquons au passage que, de même, la deuxième boule blanche ne pouvant être tirée qu'après que la première soit sortie : $\quad \mathrm{N2}=[\![2,n+2]\!]$.

• pour tout $i\in \mathrm{N1}(\Omega)$, on calcule $\mathbb{P}(\mathrm{N1}=i)$, par la formule du cours :

$$\mathbb{P}(\mathrm{N1}=i)=\textstyle\sum_{j\in \mathrm{N2}(\Omega)}\mathbb{P}\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2})=(i,j)\big).$$

Comme : $\mathbb{P}\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2})=(i,j)\big)=0$ pour $j\leq i$, et vaut $2/\big[(n+1)(n+2)\big]$ sinon, la somme se réduit à une somme pour j variant de $i+1$ à $n+2$, comporte donc $(n+2)-(i+1)+1=n-i+1$ termes, tous égaux à $2/\big[(n+1)(n+2)\big]$ et donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la loi marginale de N1 est définie par : } \mathrm{N1}(\Omega)=[\![1,n+1]\!]\\ \text{et : } \quad \forall\, i\in \mathrm{N1}(\Omega) : \quad \mathbb{P}(\mathrm{N1}=i)=\dfrac{2(n-i+1)}{(n+1)(n+2)}\end{array}}.$$

◇ <u>On peut alors calculer l'espérance de N1</u> :

$$E(\mathrm{N1}) = \sum_{k\in \mathrm{N1}(\Omega)} k.\mathbb{P}(\mathrm{N1}=k) = \sum_{k=1}^{n+1} k.\tfrac{2(n-i+1)}{(n+1)(n+2)},$$

et en décomposant la somme : $E(\mathrm{N1}) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.\left((n+1).\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right) - \sum_{k=1}^{n+1} k^2\right),$

On connaît, pour tout $N \geq 0$, les valeurs des sommes :

$$\sum_{k=0}^{N} k = \tfrac{N.(N+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N} k^2 = \tfrac{N.(N+1).(2N+1)}{6}$$

(la première formule est celle de la somme des $N+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0, la seconde s'établit par récurrence).

Au premier terme près (mais celui-ci est nul), et pour $N = n+1$, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \tfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

et par suite, en substituant ces expressions aux sommes dans l'expression de $E(\mathrm{N1})$, en simplifiant par $(n+2)(n+1)/2$, et en réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$E(\mathrm{N1}) = \frac{3.(n+1)-(2n+3)}{3}, \quad \text{dont on tire que :} \quad \boxed{E(\mathrm{N1}) = \frac{n}{3}}.$$

3.6. On peut déterminer l'espérance de N2 de la même façon : $\mathrm{N2}(\Omega) = [\![2, n+2]\!]$, et

$$\forall j \in [\![2, n+2]\!]\,,\ \mathbb{P}(\mathrm{N2}=j) = \sum_{i\in \mathrm{N1}(\Omega)} \mathbb{P}\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2}) = (i,j)\big),$$

Cette fois, j étant compris entre 2 et $n+2$, $\mathbb{P}\big((\mathrm{N1},\mathrm{N2}) = (i,j)\big)$ est non nulle si et seulement si $i \leq j-1$, de sorte que :

$$\forall j \in [\![2, n+2]\!]\,,\quad \mathbb{P}(\mathrm{N2}=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \tfrac{2}{(n+1)(n+2)} = \tfrac{2.(j-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

On a ensuite : $E(\mathrm{N2}) = \sum_{j\in \mathrm{N2}(\Omega)} j.\mathbb{P}(\mathrm{N2}=j) = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{2}{(n+1)(n+2)}.j(j-1)$, c'est-à-dire :

$$E(\mathrm{N2}) = \tfrac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{j=2}^{n+2} j^2 - \sum_{j=2}^{n+2} j\right),$$

puis, comme : $\sum_{j=2}^{n+2} j = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$ et $\sum_{j=2}^{n+2} j^2 = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6}$,

il vient, après simplification par $(n+2)/2$ et réduction au même dénominateur :

$$E(\mathrm{N2}) = \tfrac{(n+3)(2n+5)-3(n+3)}{3(n+1)} = \tfrac{2(n+1)(n+3)}{3(n+1)} \quad \text{et finalement :} \quad \boxed{E(\mathrm{N2}) = \frac{2(n+3)}{3}}.$$

3.7. Si les tirages ont lieu avec remise, lors de l'extraction d'une boule, la probabilité d'obtenir au tirage n°i une blanche (événement noté B_i) et celle d'obtenir une noire (événement noté N_i) sont égales respectivement, quelque soit le rang i du tirage, à :

$$\mathbb{P}(B_i) = \tfrac{2}{n+2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(N_i) = \tfrac{n}{n+2}.$$

La première boule blanche est alors obtenue au rang k si et seulement si l'événement $N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap B_i$ est réalisé, or les tirages étant indépendants, puisqu'effectués au hasard et avec remise, on a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{N1}=i) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{i-1} \cap B_i) = \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(N_k)\right).\mathbb{P}(B_i).$$

Compte-tenu de la valeur de la probabilité d'obtention d'une boule noire ou d'une boule blanche, il vient :

$$\mathbb{P}(\mathrm{N1}=i) = \left(\tfrac{n}{n+2}\right)^{n-1}.\tfrac{2}{n+2}.$$

<u>**Ainsi**</u>, on reconnaît que : $\boxed{\text{N1 suit une loi géométrique de paramètre : } p = \frac{2}{n+2}}$.

PARTIE I

On désigne par $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

À tout f dans E, on associe l'application $g = \Phi(f)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$g(0) = f(0)$, et pour tout réel x non nul : $g(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

1°) a) Vérifier que l'application g ainsi définie est un élément de E, ce qui permet d'envisager Φ comme une application de E vers E (pour cela, on pourra utiliser une primitive F de f).

b) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, justifier l'égalité $g(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(xu)\,du$.

Montrer que g est une application paire, et simplifier l'expression de g lorsque f est paire ou lorsque f est impaire.

2°) a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que Φ n'est pas injective, et préciser $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$. En utilisant une primitive F de f, montrer que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$, et préciser $g'(x)$.

d) Montrer que Φ n'est pas surjective.

3°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.

a) Soit f dans E, vérifiant $\Phi(f) = \lambda\, f$.

Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \lambda\, x\, f'(x) = (1-\lambda)\, f(x).$$

b) En déduire l'expression de f(x) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire la forme possible de f selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

d) Conclure en précisant E_λ selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

4°) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$.

On suppose f est développable en série entière (au voisinage de 0), et qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ ou $R = +\infty$ tels que :

$$\forall\, x \in\,]-R, R[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

le rayon de convergence de ce développement étant R.

a) En utilisant une primitive F de f, montrer que g est aussi développable en série entière sur $]-R, R[$, en précisant ce développement.

b) Donner un exemple où le rayon de convergence du développement en série entière de g est strictement supérieur à celui de f (c'est-à-dire R défini ci-dessus).

5°) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$.

Montrer que si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe, alors g admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on précisera. La réciproque est-elle vraie ?

6°) Soient f dans E, $g = \Phi(f)$, et T un réel strictement positif.

On suppose que f est T-périodique, c'est-à-dire que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $g(n,T)$ en fonction de : $I = \displaystyle\int_0^T f(t)dt$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq T$, et soit $m(x)$ la partie entière de $\dfrac{x}{T}$.

Exprimer $g(x)$ en fonction de $\dfrac{T.m(x)}{x} g(T.m(x))$ et de deux intégrales, et majorer la valeur absolue de chacune de ces deux intégrales au moyen de $\displaystyle\int_0^T |\, f(t)\, |\, dt$.

c) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ en fonction de I.

7°) Exemple 1 : Soit $f_1 = \cos$ (qui à tout réel t associe le cosinus de t), et $G = \Phi(f_1)$.

a) Expliciter $G(x)$ pour tout réel x.

b) Préciser : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ et vérifier le résultat de 6°, c. avec $T = 2\pi$.

8°) Exemple 2 : soit $f_2 = |\sin|$ (qui à tout réel t associe $|\sin(t)|$), et $H = \Phi(f_2)$.

Grâce à 6°, c. avec $T = \pi$, déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^x |\sin(t)|\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$, en fonction de x.

9°) Exemple 3 : Soit $f_3 = \exp$ (qui à tout réel t associe e^t), et $S = \Phi(f_3)$.

a) Expliciter $S(x)$ pour tout réel x.

b) Déterminer le développement en série entière de S, en précisant son rayon de convergence.

c) Donner le tableau des variations de S et de $\dfrac{1}{S}$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE II

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k : t \mapsto t^k$ (en particulier $p_0 : t \mapsto 1$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de E constitué par les applications polynomiales de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle que $\mathcal{B}_n = (p_0, \ldots, p_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

10°) Montrer que si f est dans $\mathcal{P}_n$, alors $g = \Phi(f)$ est aussi dans $\mathcal{P}_n$.

On notera ainsi Φ_n l'endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ induit par Φ, qui à tout $f \in \mathcal{P}_n$ associe : $g = \Phi(f) = \Phi_n(f)$ dans $\mathcal{P}_n$.

11°) Écrire la matrice de Φ_n relativement à la base $\mathcal{B}_n$: on distinguera les cas où n est pair de la forme $n = 2m$, et n impair de la forme $n = 2m+1$.

12°) Préciser les valeurs propres et les différents sous-espaces propres de Φ_n : on distinguera à nouveau les cas n pair ($n = 2m$), et n impair ($n = 2m + 1$).

13°) On suppose $n = 2$.

a) Soit Ψ un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$.

Montrer que : $\Psi \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Psi$ si et seulement si la matrice de Ψ relativement à la base $\mathcal{B}_2$ est diagonale.

b) En déduire tous les endomorphismes Ψ de $\mathcal{P}_2$ tels que : $\Psi \circ \Psi = \Phi_2$, grâce à leur matrice relativement à la base $\mathcal{B}_2$.

PARTIE III

Soit f dans E, supposée paire (c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x) et $g = \Phi(f)$.

On suppose dans cette partie que f est la densité d'une certaine variale aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, et dont la fonction de répartition est notée $\mathbf{F}$.

14°) a) Exprimer $g(x)$, pour tout réel x non nul, en fonction de $F(x)$.

b) Justifier l'existence d'un unique réel $M(f) \geq 0$, et d'un réel $c \geq 0$ tels que : $g(c) = M(f)$ et $g(x) \leq M(f)$ pour tout réel x.

15°) Exemple 4 : On suppose dans cette question que f est définie pour tout réel t par :

$f(t) = 0$ si $t < -1$ ou si $t > 1$; $f(t) = 1 + t$ si $t \in [-1, 0]$; $f(t) = 1 - t$ si $t \in [0, 1]$.

a) Calculer l'espérance mathématique de X.

b) Expliciter g et déterminer $M(f)$.

c) Déterminer une densité de la variable aléatoire réelle $Y = g(X)$, et étudier si elle possède une espérance.

16°) Exemple 5 : On suppose ici que : $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

a) Calculer l'espérance de X, après avoir justifié son existence.

b) Expliciter g et déterminer $M(f)$.

17°) Exemple 6 : On suppose ici que : $f(t) = a. \mid t \mid .e^{-t^2}$, pour tout réel t.

a) Calculer a et l'espérance mathématique de X.

b) Expliciter g.

c) Calculer une valeur approchée de $M(f)$ à 0,1 près.

18°) D'une façon générale, justifier que g ne peut être la densité d'une variable aléatoire.

Corrigé

I.1.a. Toute fonction f de E est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur l'intervalle $\mathbb{R}$, qui diffèrent toutes d'une constante.

• Pour $f \in E$ donnée, notons F l'une d'entre elles. Alors, pour tout x réel :

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_{-x}^{x} = F(x) - F(-x).$$

F, en tant que primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue, est continue et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est égale à f.

Par conséquent, par composition et différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto F(x) - F(-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, puis, il vient qu'en tant que produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$:

$$g = \Phi(f) : x \longmapsto \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\,[F(x) - F(-x)] \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*.$$

Reste, pour avoir que $\Phi(f)$ est élément de E, à montrer la continuité en 0.

◊ C'est assez classique (on le fait pour montrer la continuité en 0 d'une application définie par : $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$), et cela nécessite de faire apparaître le taux d'accroissement en 0 pour la primitive F :

(1) $\left|\ \frac{1}{2x}\,[F(x) - F(-x)] = \frac{1}{2}.\left(\frac{F(x)-F(0)+F(0)-F(-x)}{x-0}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0} + \frac{F(0)-F(-x)}{(-x)-0}\right).\right.$

Comme F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f : $\|$ F est dérivable en 0 et $F'(0) = f(0)$.

Donc, en revenant à la définition de $F'(0)$ comme limite du taux d'accroissement :

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{F(-x)-F(0)}{(-x)-0} = \lim_{x\to 0} \frac{F(-x)-F(0)}{(-x)-0} = f(0).$$

On en déduit, par la définition de g et par (1), que :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\,[F(x) - F(-x)] = \frac{1}{2}.(f(0) + f(0)) = f(0).$$

Comme enfin il est posé que $g(0) = 0$, on peut constater que $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe et vaut $g(0)$, donc :

$\|$ la fonction $g = \Phi(f)$ est continue en 0.

Comme elle l'est aussi sur $\mathbb{R}^*$, elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc :

$\boxed{g \text{ est élément de } E}$.

I.1.b. Pour tout application f de E et tout réel x ($x \neq 0$), on peut effectuer sur $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$,le **changement de variable** défini par : $t = ux$. C'est un changement de varaible licite, car la fonction qui définit l'ancienne varaible en fonction de la nouvelle (notée u), à savoir :

$$\varphi : u \longmapsto \varphi(u) = x.u$$

est une **fonction de classe C^1 sur** $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé d'extrémités $-x$ et x ($[-x, x]$ si $x > 0$, $[x, -x]$ si $x < 0$ - l'ordre des bornes est indifférent pour l'application du théorème)(*).

Pour ce changement de variable, on a :

$\|$ pour $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = -1 \end{cases}$, les bornes attendues : $\begin{cases} t_1 = \varphi(u_1) = x \\ t_2 = \varphi(u_2) = -x \end{cases}$, et : $\mathrm{d}t = x.\mathrm{d}u$

(*) Le lecteur aura noté que tout changement de variable affine, *i.e.* défini par $t = au + b$ est licite, pourvu que $a \neq 0$.

de sorte qu'effectivement, pour tout x réel non nul :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-1}^{1} f(xu).(x\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u$$

(en sortant, par linéarité de l'intégrale, le facteur x, constant vis-à-vis de l'intégration).

Comme pour $x = 0$: $\frac{1}{2}.\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u = 0 = g(0)$, parce qu'alors $u \mapsto f(xu)$ est la fonction nulle, on peut conclure :

$$\boxed{\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \Phi(f)(x) = \tfrac{1}{2}.\int_{-1}^{1}(f(xu)\,\mathrm{d}u}\,.$$

◇ Parité de g : pour établir la parité de g, signalons d'abord que g est définie sur un domaine de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 ($\mathbb{R}$ lui-même !).

Ensuite, pour tout x réel, le changement de variable : $v \mapsto -v$, opéré sur l'intégrale définie $\int_{-1}^{1}(f(xu)\,\mathrm{d}u$, échange les bornes et transforme "$f(xu)\mathrm{d}u$" en "$f(-xv)(-\mathrm{d}v)$", donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_{1}^{-1} -f\big((-x)v\big)\,\mathrm{d}v,$$

ce qui, après avoir changé les bornes, et "sorti le signe" par linéarité de l'intégrale, donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\big((-x)v\big)\,\mathrm{d}v = g(-x).$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall f \in E,\quad g = \Phi(f) \text{ est une fonction paire}}\,.$$

Puis :

- si f est impaire : alors, pour tout réel x :
$$g(-x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} -f(xu)\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u = -g(x).$$
La fonction g est donc, en ce cas, **à la fois** paire et impaire, donc :
$$\boxed{\text{si } f \text{ est impaire, } g \text{ est nécessairement nulle sur } \mathbb{R}}\,.$$
- si f est paire : en utilisant la **relation de Chasles**, on écrira, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(xu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u\right),$$
puis, en effectuant le **changement de variable** $v \mapsto u = -v$ sur la première intégrale :
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{1}^{0} f(-xv)(-\,\mathrm{d}v) + \int_{0}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u\right),$$
et enfin, en échangeant les bornes de la première intégrale, et comme, par parité de f : $f(-xv)(-\mathrm{d}v) = -f(xv)\mathrm{d}v$, il vient :
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(-\int_{0}^{1} -f(xu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u\right).$$
Ainsi :
$$\boxed{\text{si } f \text{ est paire, alors : } \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \Phi(f)(x) = \int_{0}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u}\,.$$

I.2.a. On sait déjà (*c.f.* **1.a.**) que Φ est une application de E dans E.

La linéarité de Φ, elle, découle de la linéarité de l'intégrale :

$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (f,g) \in E^2$, on a, pour tout x réel :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda f + \mu g)(x) &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}[\lambda f + \mu g]\,(xu)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\lambda f(xu) + \mu g(xu)\,\mathrm{d}u \\ &= \lambda.\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u + \mu.\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(xu)\,\mathrm{d}u = \lambda\Phi(f)(x) + \mu\Phi(g)(x)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (f,g) \in E^2 : \ \Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$$

Et en conclusion : $\boxed{\Phi \text{ est un automorphisme de } E}$.

I.2.b. Injectivité de Φ : de par le **1.b.**, on sait que Φ n'est pas injective, car pour toute fonction f de E, **impaire**, $\Phi(f)$ est la fonction nulle. Par exemple, $f : x \mapsto x$, élément de E, appartient à $\ker\Phi$, donc $\ker\Phi$ n'est pas réduit à la fonction nulle, et :

$$\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective}}.$$

◇ Éléments de $\ker\Phi$: (***description exhaustive***) par définition,

$$(f \in \ker\Phi) \text{ si et seulement si } (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \Phi(f)(x) = 0)$$

Or, pour $x = 0$, quelque soit la fonction f de E : $g(x) = g(0) = 0$, et pour $x \neq 0$: $g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$, donc la nullité de g pour $x \neq 0$ équivaut à la nullité de $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$, qui s'écrit encore $F(x)-F(-x)$, si on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En notant : $\mathcal{I}$ la fonction : $x \longmapsto F(x) - F(-x)$, puisque $\mathcal{I}(0) = 0$ par définition (en effet $F(0) - F(-0) = 0$), on peut **caractériser les fonctions du noyau** par :

$$\textbf{(2)}\quad (f \in \ker\Phi) \iff (\mathcal{I} \text{ est nulle sur } \mathbb{R}).$$

Puisque F est une primitive de f, avec f continue sur $\mathbb{R}$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et par composition et différence de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{I} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et a pour dérivée : } \mathcal{I}'(x) = f(x) + f(-x).$$

et par (2), la nullité de $\mathcal{I}$ entraînant celle de sa dérivée :

$$(f \in \ker\Phi) \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)) \iff (f \text{ impaire}).$$

Puisqu'il a été établi, **réciproquement**, que : $(f \text{ impaire},\ f \in E) \Longrightarrow (\Phi(f) = 0)$, $(f \in E)$, il vient donc : $\boxed{\ker\Phi = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}}$.

I.2.c. Pour toute fonction f de E, $g = \Phi(f)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ comme le produit des fonctions $\mathcal{I}$ (*c.f.* **2.b.**) et $x \mapsto 1/(2x)$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$, et sa dérivée y vaut : $g'(x) = \frac{1}{2x}.\mathcal{I}'(x) - \frac{1}{2x^2}.\mathcal{I}(x)$, soit (*c.f.* **2.b.**) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad g'(x) = \frac{1}{2x}.[f(x) + f(-x)] - \frac{1}{2x^2}.[F(x) + F(-x)]}.$$

I.2.d. Pour toute fonction f de E, $\Phi(f)$ est une fonction paire (*c.f.* 1.b.), or **il existe des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui ne sont pas paires**, donc :

$\operatorname{Im}\Phi(E) \neq E$, **par exemple** : $x \mapsto x$ (impaire) appartient à E mais non à $\operatorname{Im}\Phi$.

Ainsi : $\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective}}$.

• *Bien sûr, le lecteur aura noté que E n'est pas de dimension finie et donc que la non-injectivité de Φ, établie au **2.b.**, ne permettait pas de conclure à sa non-surjectivité, bien que Φ soit un endomorphisme de E.*

I.3. Recherche des sous-espaces propres de Φ :

I.3.a. Une fonction $f \in E$ est un vecteur propre pour Φ et la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si, **par définition** : $\Phi(f) = \lambda.f$, ce qui équivaut, λ étant non nulle, à : $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$. Comme pour toute f de E, on a montré que $\Phi(f)$ est **paire** et **dérivable sur** $\mathbb{R}^*$, ces propriétés sont transmises à f, dans le cas où $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$, donc :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est propre pour } \Phi \text{ et } \lambda \neq 0, \text{ alors } f \text{ est paire et dérivable sur } \mathbb{R}^*}.$$

• De plus, de façon explicite, si $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{\lambda}.\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$, ce qui équivaut à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 2\lambda x.f(x) = F(x) - F(-x).$$

Les fonctions $x \mapsto 2\lambda x.f(x)$ et $\mathcal{I} : x \mapsto F(x) - F(-x)$ étant dérivables sur $\mathbb{R}^*$, leur égalité sur $\mathbb{R}^*$ implique celle de leurs dérivées, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 2\lambda.f(x) + 2\lambda x.f'(x) = f(x) + f(-x).$$

ou encore, en utilisant la **parité de** $\boldsymbol{f}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 2\lambda.f(x) + 2\lambda x.f'(x) = 2.f(x).$$

ce qui se réarrange en :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda x.f'(x) = (1-\lambda)f(x)}.$$

I.3.b. Sur $I = \mathbb{R}^*_+$: $f \in E_\lambda$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qui s'écrit (*pour se ramener à la forme étudiée en cours*) :

$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x).f(x) = 0$, avec : $a : x \mapsto -\frac{1-\lambda}{\lambda.x}$ continue sur I.

C'est donc une ED, **linéaire**, **homogène**, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, sur lequel la fonction $\boldsymbol{a}$ est **continue**, donc, **d'après le cours**, ses solutions sont les fonctions, définies sur I, de la forme :

$$y : x \longmapsto y_1.\exp\left(-\int_{x_1}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

où x_1 et $y_1 = y(x_1)$ sont deux réels quelconques, éléments respectivement de I et de $\mathbb{R}$.
Dans une écriture moins précise, les solutions de (2) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}^*_+$ par une expression de la forme :

$y(x) = K_1 e^{-A_1(x)}$, où K_1 est un réel quelconque, et A_1 une primitive de a sur $\mathbb{R}^*_+$.

Une primitive de a sur $\mathbb{R}^*_+$ étant : $x \longmapsto -\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x$, il vient que :

$$\boxed{\text{sur } \mathbb{R}^*_+,\ f(x) \text{ est de la forme : } f(x) = K_1\exp\left(-\tfrac{1-\lambda}{\lambda}\ln x\right) = K_1.x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}},\ K_1 \in \mathbb{R}}.$$

• Par la même argumentation, dans laquelle on remplace $I = \mathbb{R}^*_+$ par $J = \mathbb{R}^*_+$, on obtient que, sur $\mathbb{R}^*_-$, f est de la forme :

$f(x) = K_2 e^{-A_2(x)}$, où K_2 est un réel quelconque, et A_2 une primitive de a sur $\mathbb{R}^*_-$.

Sur $\mathbb{R}^*_-$, on peut choisir pour A_2 : $x \longmapsto -\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln|x|$, donc :

$$\boxed{f(x) \text{ s'écrit, sur } \mathbb{R}^*_- : f(x) = K_2\exp\left(-\tfrac{1-\lambda}{\lambda}\ln|x|\right) = K_2.(-x)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}},\ K_2 \in \mathbb{R}}.$$

I.3.c. On a obtenu au **I.3.b.**, pour toute $f \in E_\lambda$ ($\lambda \neq 0$), les seules formes possibles de $f(x)$, sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$.
La parité de f, (si $f \in \ker(\Phi - \lambda.Id)$, $\lambda \neq 0$), impose de plus que : $K_1 = K_2$(*)(le lecteur vérifiera), de sorte que :

(3) sur $\mathbb{R}^*$, la forme nécessaire de $f(x)$, pour $f \in E_\lambda$ ($\lambda \neq 0$) est : $f(x) = K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$.

La **nécessité pour** $\boldsymbol{f}$ **d'être continue en 0** (car élément de E) impose encore des **restrictions supplémentaires**. En effet, pour α réel :

$\lim\limits_{x \xrightarrow{x\neq 0} 0} |x|^\alpha$ est finie si et seulement si $\alpha \geq 0$, et vaut 0 si $\alpha > 0$, 1 si $\alpha = 0$.

D'où la discussion ci-après, suivant, ici, la valeur de λ, à partir de (3) :

• si $\lambda = 1$: alors $\frac{\lambda-1}{\lambda} = 0$, et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = K$, donc :

$$\lim_{x \xrightarrow{x\neq 0} 0} K.|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = K.$$

(*) On aurait pu, à cause de la parité, donner, dès le **I.3.b.**, cette forme nécessaire de f sur $\mathbb{R}^*_-$.