IV.4.a. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$V(\varepsilon(t), \eta(t)) = [1 + \varepsilon(t) - \ln(1 + \varepsilon(t))] + \gamma\beta\Delta\,[1 + \eta(t) - \ln(1 + \eta(t))].$$

En dérivant par rapport à t, il vient donc, pour tout t de $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t)) &= \left[\frac{d\varepsilon}{dt}(t) - \frac{1}{1+\varepsilon(t)}.\frac{d\varepsilon}{dt}(t)\right] + \gamma\beta\Delta\left[\frac{d\eta}{dt}(t) - \frac{1}{1+\eta(t)}.\frac{d\eta}{dt}(t)\right]\\ &= \frac{\varepsilon(t)}{1+\varepsilon(t)}.\frac{d\varepsilon}{dt}(t) + \gamma\beta\Delta.\frac{\eta(t)}{1+\eta(t)}.\frac{d\eta}{dt}(t)\end{aligned}$$

Or, (ε, η) désignant une solution de (5), les fonctions ε et η vérifient les équations :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma\beta\Delta(\varepsilon + \eta + \varepsilon\eta), \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon(1+\eta).$$

Donc, on peut poursuivre et donner, sur $\mathbb{R}_+$, une expression de $\frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t))$, uniquement à l'aide de $\varepsilon(t)$ et de $\eta(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t)) &= \frac{\varepsilon(t)}{1+\varepsilon(t)}.\left[-\gamma\beta\Delta(\varepsilon(t) + \eta(t) + \varepsilon(t)\eta(t))\right] + \gamma\beta\Delta.\frac{\eta(t)\varepsilon(t)}{1+\eta(t)}.(1+\eta(t))\\ &= -\gamma\beta\Delta\frac{\varepsilon(t)}{1+\varepsilon(t)}.\left[\varepsilon(t) + \eta(t)(1+\varepsilon(t))\right] + \gamma\beta\Delta.\varepsilon(t)\eta(t)\end{aligned}$$

puis en distribuant le facteur dans le crochet :

$$\frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t)) = -\gamma\beta\Delta\frac{\varepsilon^2(t)}{1+\varepsilon(t)} - \gamma\beta\Delta.\varepsilon(t)\eta(t) + \gamma\beta\Delta.\varepsilon(t)\eta(t) = -\gamma\beta\Delta\frac{\varepsilon^2(t)}{1+\varepsilon(t)}.$$

En admettant encore que $S(t) > 0$, comme il a été demandé au début de cette partie (*c.f.* **IV.1**), **mais avec le regret que l'énoncé ne le précise pas**, on déduit de $S(t) = (1 + \varepsilon(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, que : $1 + \varepsilon(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

(de toute façon l'hypothèse est nécessaire pour que l'expression $V(\varepsilon(t), \eta(t))$ ait un sens)

Comme d'après les hypothèses sur γ, β et Δ : $\gamma\beta\Delta > 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{dt}V(\varepsilon(t), \eta(t)) = -\gamma\beta\Delta\frac{\varepsilon^2(t)}{1+\varepsilon(t)} \le 0}.$$

• La fonction $t \longmapsto V(\varepsilon(t), \eta(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et sa dérivée est négative sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Y-est-elle minorée ?

La réponse à cette question n'est pas immédiate et le meilleur moyen d'y répondre, compte-tenu du peu de connaissances que l'on a sur les fonctions en jeu, est de remarquer que $V(x, y)$ et de la forme :

$$V(x, y) = \varphi(x) + \gamma\beta\Delta.\varphi(y), \quad \text{avec } \varphi : \ x \mapsto 1 + x - \ln(1+x).$$

L'énoncé définit $V(x, y)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, mais cela semble une bizarrerie de plus, car ne serait-ce qu'en considérant les conditions initiales, on se doit d'admettre au moins que ε et η sont toutes deux à valeurs dans $]-1, 1[$. Et comme on a rien montré sur les valeurs prises par les fonctions ε et η, on considèrera par précaution qu'elles sont à valeurs dans $]-1, +\infty[$. C'est arbitraire, mais il faut bien, une fois de plus, pallier les lacunes de l'énoncé.

En conséquence et **désormais**, on s'intéressera à $V(x, y)$ pour $(x, y) \in\ ]-1, +\infty[^2$, c'est donc sur son ensemble de définition complet, $]-1, +\infty[$, que la fonction φ nous intéresse.

◇ La fonction φ est dérivable sur]-1,+∞[, et sa dérivée y est donnée par :
$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. L'étude du signe de $\varphi'(x)$ est rapide et donne que :

φ est décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

D'autre part, les limites en -1^+ et en $+\infty$ sont assez faciles à obtenir :

$$\lim_{x\to -1^+} \varphi(x) = +\infty \quad \text{(par composition et car } \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty\text{)}$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty \quad \text{(car } \ln(1+x) = o(x) \text{ quand } x \to +\infty\text{)}$$

Par suite, on a pour φ le tableau de variations suivant sur]-1,+∞[:

x	-1		0		$+\infty$
φ	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(0) = 1$	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent, comme résultat de cette étude, on a que la fonction φ est minorée par 1 sur]-1,+∞[, et l'on en déduit que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, (étant admis que ε et η sont à valeurs dans]-1,+∞[) :
$$V(\varepsilon(t), \eta(t)) = \varphi(\varepsilon(t)) + \gamma\beta\Delta.\varphi(\eta(t)) \geq 1 + \gamma\beta\Delta.$$

On a donc montré que la fonction $t \longmapsto V(\varepsilon(t), \eta(t))$ est décroissante et minorée sur $\mathbb{R}_+$ par $1 + \gamma\beta\Delta$, donc, d'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions : $\boxed{\lim_{t\to\infty} V(\varepsilon(t), \eta(t)) \text{ existe et est supérieure ou égale à } 1 + \gamma\beta\Delta}$.

◇ ***Encore une bizarrerie***: *il n'y a manifestement pas de moyen simple de déterminer à ce stade la limite de la fonction $t \mapsto V(\varepsilon(t), \eta(t))$. Et nous demanderons au même lecteur que celui de la question **IV.2.c.**, ou au rédacteur du problème de nous éclairer en vue d'une réédition !.*

IV.4.b. Notons déjà, (ce qui n'est pas demandé), que pour $c < 1 + \gamma\beta\Delta$, l'équation $V(x,y)$ n'admet aucun couple (x,y) solution car quelque soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour lequel $V(x,y)$ existe : $V(x,y) \geq 1 + \gamma\beta\Delta$.

Ceci étant, pour $c \geq 1 + \gamma\beta\Delta$, examinons les couples solutions de $V(x,y) = c$.

*Il semble exclu d'obtenir explicitement les couples solutions ou d'arriver à paramétrer la courbe. **En revanche**, on a quelques ressources pour donner des informations pertinentes sur la courbe :*

• pour une valeur donnée de x, notée x_0, examinons s'il existe des valeurs de y telles que le point M de coordonnées (x_0, y) appartienne à la courbe :
$M(x_0, y)$ appartient à la courbe si et seulement si $V(x_0, y) = c$,

i.e. $\varphi(x_0) + \gamma\beta\Delta.\varphi(y) = c$, ou encore : $\varphi(y) = \frac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta}$.

Or, d'après l'étude des variations de φ, φ réalise d'une part une bijection de]-1,0[sur]1,+∞[, et d'autre part une bijection de]0,+∞[sur]1,+∞[, (*c.f.* tableau de variations), enfin l'équation $\varphi(x) = 1$ admet pour unique solution 0, donc :

* si $\frac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta} > 1$, alors il existe deux valeurs de y telles que $\varphi(y) = \frac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta}$, $y_{0,1}$ et $y_{0,2}$, telles que : $y_{0,1} \in]-1,0[$ et $y_{0,2} \in]0,+\infty[$.

$*$ si $\frac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta} = 1$, alors il existe une unique valeur de y telle que :

$$\varphi(y) = \tfrac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta}, \quad \text{et c'est :} \quad y = 0.$$

$*$ si $\frac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta} < 1$, alors il n'existe aucune valeur de y telle que :

$$\varphi(y) = \tfrac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta}.$$

Enfin, comparer $\frac{c-\varphi(x_0)}{\gamma\beta\Delta}$ à 1, revient à comparer $\varphi(x_0)$ à $c - \gamma\beta\Delta$, et en reprenant l'étude précédente, il vient, pour $c \geq \gamma\beta\delta$:

- $*$ si $\varphi(x_0) < c - \gamma\beta\Delta$: alors il existe exactement deux points d'abscisse x_0 appartenant à la courbe, $M(x_0, y_{0,1})$ et $M(x_0, y_{0,2})$, avec $y_{0,1} \in]-1,0[$ et $y_{0,2} \in]0,+\infty[$
- $*$ si $\varphi(x_0) = c - \gamma\beta\delta$: alors il existe un unique point d'abscisse x_0 appartenant à la courbe, $M(x_0, y_0)$, avec $y_0 = 0$.
- $*$ si $\varphi(x_0) > c - \gamma\beta\delta$: alors il n'existe aucun point de la courbe ayant x_0 pour abscisse.

Compte-tenu des variations de φ, il n'y a donc pas de points de la courbe dont l'abscisse ne soit comprise entre α_1 et α_2, les deux antécédents de $c - \gamma\beta\delta$ par φ, qui vérifient $\alpha_1 \in]-1,0[$ et $\alpha_2 \in]0,+\infty[$, ($\alpha_1 = \alpha_2$ dans le seul cas où $c = 1 + \gamma\beta\Delta$).

Une étude analogue, où l'on fixerait cette fois la valeur de y, en remarquant que pour un point de la courbe, on doit avoir : $\varphi(x) = c - \gamma\beta\Delta\varphi(y)$,
donne qu'il existe des points de la courbe d'ordonnée y si et seulement si y est compris entre β_1 et β_2 les antécédents de $\frac{c-1}{\gamma\beta\Delta}$ par φ ($\beta_1 = \beta_2$ dans le seul cas où $c = 1+\gamma\beta\Delta$).

En conclusion, pour tout $c \geq 1 + \gamma\beta\Delta$:

on peut affirmer que la courbe est incluse dans l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $(x, y) \in [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2] \subset]-1,+\infty[\times]-1,+\infty[$.

Il est possible de donner d'autres informations sur la courbe, par exemple en examinant le vecteur tangent à la courbe, mais une de plus ***cela dépasse plus que largementle programme****. Aussi nous en tiendrons-nous à ce résultat de « confinement».*

IV.4.c. *Nous sommes de nouveau bien seuls,* ***sauf à subodorer que*** la limite démandée au **IV.4.a.** est égale à $1 + \gamma\beta\Delta$. En effet, alors, parce le couple $(0, 0)$ est l'unique solution de l'équation $V(x, y) = 1 + \gamma\beta\Delta$, par continuité de la fonction (*de deux variables !*) V, on peut déduire de $\lim_{t\to+\infty} V(\varepsilon(t), \eta(t)) = 1 + \gamma\beta\Delta$ que :

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 0.$$

puis, par définition de ε et η :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} S(t) = S^* \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} I(t) = I^*}.$$

Banque Agro 99 — Une méthode de calcul approché d'intégrale Pseudo-solutions d'un système linéaire — Durée 3 h 30
Épreuve A

ÉPREUVE A

Durée 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

PROBLÈME I *Étude d'un endomorphisme*

Notations : E désignera l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales (qu'on appelera aussi simplement polynômes) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si n est un entier naturel, on notera :

- E_n le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $f^{(n)}$ la dérivée n-ième d'une fonction numérique réelle f.
- X^n la fonction qui à tout x réel associe x^n.
- On désignera par Δ l'application qui à tout élément P de E associe $\Delta(P)$, défini, pour tout x réel par :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

PARTIE A.

A.1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E et que, pour tout n entier naturel, sa restriction à E_n définit un endomorphisme Δ_n de E_n.

A.2. Dans cette question on suppose : $n = 3$.
Ecrire la matrice de Δ_3 dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Déterminer son image et son noyau.

A.3. n désigne dans cette question un entier naturel non nul.

A.3.a. Justifier les relations : $\Delta_n(E_n) = E_{n-1}$ et $\ker(\Delta_n) = E_0$.

A.3.b. En déduire que, pour tout polynôme Q de E_{n-1}, il existe un unique polynôme P vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \Delta_n(P) = Q \\ \int_0^1 P(x)dx = 0 \end{cases}$$

PARTIE B. *Étude d'une famille de polynômes*

Dans toute la suite du problème, on posera : $B_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, on désignera par B_n l'unique polyôme vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta_n(B_n) = nX^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \end{cases}$$

B.1. Calculer B_1 et B_2.

B.2. Déterminer le degré et le cœfficient du terme de plus haut degré de B_n.

B.3.a. Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $B_n(0) = B_n(1)$.

B.3.b. Établir que pour n non nul, la dérivée notée $B_n^{(1)}$ de la fonction polynômiale B_n vérifie la relation :

$$B_n^{(1)} = nB_{n-1}$$

Indication : on pourra, par exemple, calculer $\Delta\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big)$.

B.3.c. On pose, pour tout x réel : $S_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$
Après avoir calculé, pour tout x réel, $\Delta(S_n)(x)$ en fonction de $\Delta(B_n)(-x)$, justifier l'égalité :

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

En déduire que, pour tout k entier naturel non nul, B_{2k+1} s'annule en 0, 1 et 1/2.

B.3.d. En s'inspirant de la méthode utilisée en B.3.c., justifier, pour n non nul et x réel :

$$B_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

En déduire pour k entier naturel non nul :

$$B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1 + 2^{1-2k})B_{2k}(0)$$

B.4.a. Montrer que B_3 n'a pas d'autre racines que 0, 1/2 et 1, en déduire qu'il ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$; montrer ensuite, sans calculer B_4 et B_5 et à partir des tableaux de variations de B_2 et B_3, que B_4 s'annule une et une seule fois sur $]0, 1/2[$ et que B_5 ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.

B.4.b. Plus généralement, montrer par récurrence que, pour tout entier k non nul, B_{2k} s'annule une et une seule fois sur $]0, 1/2[$ et que B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0, 1/2[$.

B.4.c. En déduire en particulier que, pour k non nul, $|B_{2k}(x)|$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en 0.

PARTIE C. *Application au calcul approché d'une intégrale*
Dans toute cette partie f désigne une fonction numérique de classe C^{2n} sur $[0, 1]$, avec n un entier naturel non nul.

C.1. En intégrant deux fois par parties, justifier la relation :

$$\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)dx = B_2(0)\left[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)\right] - (f(0) + f(1)) + 2\int_0^1 f(x)dx$$

C.2. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] + R_n$$

où :

$$R_n = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)B_{2n}(x)dx$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur k en exprimant R_k en fonction de R_{k+1} après avoir effectué deux intégrations par parties successives.

C.3 Justifier l'égalité :

$$|R_n| \leq M \frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$$

où M désigne la borne supérieure de $\left|f^{(2n)}\right|$ sur $[0, 1]$.

PROBLÈME II

Notations :

• Si c et d sont deux entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à cœfficients réels ayant c lignes et d colonnes. Usuellement ${}^tM$ sera la matrice transposée de M.

• On conviendra d'utiliser la même notation pour une matrice colonne X ayant c lignes et le vecteur de $\mathbb{R}^c$ qu'elle représente dans la base canonique. De plus, on notera $||X||$ le réel positif défini par :

$$||X|| = \sqrt{{}^tXX}$$

• On appelle respectivement image et noyau d'un élément A de $\mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$:
$\mathrm{Im}A = \{Y \in \mathcal{M}_{c,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), Y = AX\}$ et $\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$.

PARTIE A. *Questions préliminaires*

A.1.a. Montrer que $||X|| = 0$ si et seulement si $X = 0$.

A.1.b. Justifier, pour tout λ réel et tout couple (X, Y) de matrices colonnes ayant r lignes l'égalité :

$$||X + \lambda.Y||^2 = ||X||^2 + \lambda^2 ||Y||^2 + 2\lambda {}^tY.X$$

A.2. Montrer que si M est élément de $\mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$, N un élément de $\mathcal{M}_{d,c}(\mathbb{R})$ et si $P = M.N$ (produit des deux matrices), alors l'image de P est incluse dans l'image de M.

PARTIE B. *Un résultat d'existence*

Dans toute la fin du problème, r et s sont des entiers non nuls, A est un élément de $\mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$.

B.1.a. Justifier l'existence du produit ${}^tA.A$. Quelle est la dimension de la matrice ainsi obtenue ?

B.1.b. Vérifier l'inclusion : $\ker(A) \subset \ker({}^tA.A)$.

B.1.c. Montrer que si X est élément de $\ker({}^tA.A)$, on a alors : $||A.X|| = 0$.

B.1.d. En déduire : $\mathrm{rg}({}^tA.A) = \mathrm{rg}(A)$.

B.2.a. En utilisant ce qui précède et les résultats de la partie A, montrer que les matrices ${}^tA$ et ${}^tA.A$ ont la même image.

B.2.b. Montrer qu'il existe X élément de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$${}^tA.A.X = {}^tA.B$$

PARTIE C. *Étude de l'équation matricielle* : (1) $A.X. = B$

On rappelle que la matrice A n'est pas nécessairement carrée.

X élément de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est dite :

- une solution de (1) si : $A.X = B$
- une pseudo-solution de (1) si, pour tout Z de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$:

$$||A.X - B|| \leq ||A.Z - B||$$

C.1. Montrer que si (1) admet au moins une solution, alors X est une pseudo-solution si et seulement si c'est une solution de (1).

C.2. On suppose que X est une pseudo-solution. Montrer alors que, pour tout réel λ et tout élément Y de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^2 \, ||A.Y||^2 + 2\lambda.{}^tY.{}^tA.(A.X - B) \geq 0$$

En déduire que nécessairement : ${}^tA.A.X = {}^tA.B$

C.3. Montrer, en utilisant les résultats de la partie B. qu'il existe toujours une pseudo-solution.

C.4. On suppose ici que : $\text{rg}(A) = r$. Montrer qu'il existe une unique pseudo-solution.

Corrigé

PROBLÈME I

.PARTIE A.

$\boxed{\textbf{A.1.}}$ Pour montrer que Δ est un endomorphisme de E, il s'agit de s'assurer de ce que $\Delta(E) \subset E$ et de la linéarité de Δ :

- pour tout polynôme P, $P(X+1)$ est un polynôme en tant que composé de deux polynômes (P et $X+1 : x \mapsto x+1$), et $\Delta(P)$ est encore un polynôme en tant que différence de deux polynômes.
  Ainsi, on a vérifié que : $\underline{\Delta(E) \subset E}$.
- $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(P,Q) \in E^2$:
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x)$
  $= \lambda P(x+1) + \mu Q(x+1) - \lambda P(x) - \mu Q(x)$
  $= \lambda P(x+1) - \lambda P(x) + \mu Q(x+1) - \mu Q(x)$
  $= \lambda \Delta(P)(x) + \mu \Delta(Q)(x)$.
  donc, les fonctions $\Delta(\lambda P + \mu Q)$ et $\lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)$ sont égales sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, il est avéré que $\underline{\Delta \text{ est linéaire}}$.

En conclusion :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E}.$$

◊ Si l'on considère la restriction d'une application linéaire à un *s.e.v.* de son espace de départ, la restriction obtenue est linéaire et à valeurs dans l'espace d'arrivée de l'application. Donc, ici :

la restriction de Δ à E_n est une application linéaire $\Delta_{|E_n} : E_n \to E$.

Il reste à montrer que $\Delta_n = \Delta_{|E_n}$ est à valeurs dans E_n.

D'après le cours : $\quad d^\circ[P(X+1)-P(X)] \le \max\left(d^\circ P(X+1), d^\circ P(X)\right)$.

Or, $\quad$ | le composé $P\circ Q$ de deux polynômes, a pour degré $d^\circ P.d^\circ Q$,

donc, $d^\circ P(X+1) = d^\circ P$, et par l'inégalité précédente : $d^\circ[P(X+1)-P(X)] \le d^\circ P$.
Ainsi, pour $P\in E_n$, $d^\circ \Delta_n(P) \le d^\circ P \le n$, donc : $\quad$ | Δ_n est à valeurs dans E_n.

En conclusion :

$$\boxed{\Delta_n = \Delta_{|E_n} \text{ est un endomorphisme de } E_n}.$$

A.2. Matrice de Δ_3 dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$:

On sera à même d'écrire la matrice de Δ_3 dans la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ dés lors que l'on disposera des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des images des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Par application de la définition de Δ, pour les polynômes 1, X, X^2 et $X^3 \in E_3$:

$\Delta(1) = 1-1$	$\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = X^2+2X+1-X^2$
$\Delta(1) = 0$	$\Delta(X^2) = 2X+1$
$\Delta(X) = (X+1)-1$	$\Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = X^3+3X^2+3X+1-X^3$
$\Delta(X) = 1$	$\Delta(X^3) = 3X^2+3X+1$

on a donc : $\quad \Delta_3(1) = 0,\quad \Delta_3(X) = 1,\quad \Delta_3(X^2) = 2X+1,\quad \Delta_3(X^3) = 3X^2+3X+1.$

On en tire les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de ces images, pour écrire la matrice de Δ_3 :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_3) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \Delta(1) & \Delta(X) & \Delta(X^2) & \Delta(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

- Image de Δ_3 :

Δ_3 est une application linéaire, donc $\mathrm{Im}\Delta_3$ est engendrée par les images non nulles des vecteurs de $\mathcal{B}$, soit $\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\}$. Or cette famille est une famille **libre**, parce que composée de polynômes **échelonnés en degré**, et c'est une famille de **3 vecteurs** (ici des polynômes) **d'un espace de dimension 3** (ici E_2), donc c'est une base de E_2 : $\quad \boxed{\mathrm{Im}(\Delta_3) = E_2}$.

- Noyau de Δ_3 :

D'après le **théorème du rang**, $\dim\ker(\Delta_3) = \dim E_3 - \dim \mathrm{Im}(\Delta_3)$, donc, d'après le résultat précédent, $\dim\ker(\Delta_3) = 4-3 = 1$. Comme on a montré que $\Delta_3(1) = 0$, *i.e.* $1 \in \ker(\Delta_3)$, il vient : $\boxed{\dim\ker(\Delta_3) = \mathrm{VECT}(1) = E_0}$.

A.3.a. Image de Δ_n, $(n\ge 1)$:

On reprend le raisonnement précédent. Δ_n est une application linéaire donc :

$$\mathrm{Im}\Delta_n = VECT\left[\Delta_n(1), \Delta_n(X), \ldots \Delta_n(X^n)\right].$$

Et l'on peut éliminer $\Delta_n(1)$ car $\Delta_n(1) = 0$, donc :

$$\mathrm{Im}\Delta_n = VECT\left[\Delta_n(X), \ldots \Delta_n(X^n)\right].$$

Or, pour tout k compris entre 1 et n, en utilisant la **formule du binôme** :

$\Delta_n(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l X^l - X^k = \underline{X^k} + \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l X^l \underline{-X^k} = \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l X^l.$

Donc, pour $1\le k\le n$:

$\Delta_n(X^k) = 1 + kX + C_k^2 X^2 + \ldots + \underline{kX^{k-1}}$, et comme $k\ne 0$, $\underline{d^\circ \Delta_n(X^k) = k-1}$.

Par conséquent, la famille $\{\Delta_n(X), \ldots \Delta_n(X^n)\}$, est une famille de n polynômes **de degrés échelonnés**, (du degré 0 au degré $n-1$), donc une famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs libres de l'espace vectoriel de dimension $\boldsymbol{n}$, E_{n-1}. C'est donc une base de E_{n-1}.
Donc,

$$\boxed{\mathrm{Im}\Delta_n = E_{n-1}}.$$

◇ Noyau de Δ_n :
Le théorème du rang donne : $\dim \ker\Delta_n = \dim E_n - \dim \mathrm{Im}\Delta_n = (n+1) - n = 1$. Et comme Δ_n, comme Δ est nul pour les éléments de E_0, $E_0 \subset \ker\Delta_n$. Les deux *s.e.v.* inclus l'un dans l'autre et de même dimension, donc ils sont égaux.
Ainsi,

$$\boxed{\ker\Delta_n = E_0}.$$

A.3.b. Pour tout polynôme $Q \in E_{n-1}$:

$$\begin{cases} \Delta_n(P) = Q \\ \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P \text{ est un antécédent de } Q \text{ par } \Delta_n \\ \text{et } \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases}.$$

$*$ Le polynôme P cherché est donc nécessairement un antécédent de Q par Δ_n. Or, puisque $E_{n-1} = \mathrm{Im}\Delta_n$, Q admet un antécédent (au moins) par Δ_n, *i.e.* il existe $P \in E_n$, tel que $\Delta_n(P) = Q$.

$*$ **Cet antécédent n'est pas unique**. En fait, l'ensemble des antécédents de Q est un ensemble de polynômes qui diffèrent d'une constante(*). Montrons-le.
Soit P_0, l'un des antécédents de Q. P_0 vérifie $\Delta_n(P_0) = Q$, et pour tout $P \in E_n$:

$$\begin{aligned} (P \text{ antécédent de } Q \text{ par } \Delta_n) &\Longleftrightarrow (\Delta_n(P) = Q) \Longleftrightarrow (\Delta_n(P) = \Delta_n(P_0)) \\ &\Longleftrightarrow (\Delta_n(P) - \Delta_n(P_0) = 0). \end{aligned}$$

Or, **par linéarité de** Δ_n : $\Delta_n(P) - \Delta_n(P_0) = \Delta_n(P - P_0)$, donc les équivalences précédentes se prolongent en :

$$(P \text{ antécédent de } Q \text{ par } \Delta_n) \Longleftrightarrow (\Delta_n(P - P_0) = 0) \Longleftrightarrow (P - P_0 \in \ker\Delta_n).$$

Puisque $\ker\Delta_n = E_0$, on en déduit que :

▌ P est antécédent de Q si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que $P = P_0 + k$.

$*$ Ainsi, pour tout polynôme $Q \in E_{n-1}$, $P_0 \in E_n$ désignant un antécédent de Q par Δ_n :

$$\begin{cases} \Delta_n(P) = Q \\ \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P = P_0 + k, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ \text{et } \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = 0 \end{cases}.$$

Or, si $P = P_0 + k$, alors $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x^{(**)} = \int_0^1 P_0(x) + k\,\mathrm{d}x = \int_0^1 P_0(x)\,\mathrm{d}x + k$.
Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{il existe un et un seul polynôme } P, \text{ antécédent de } Q \text{ par } \Delta_n, \text{ donc} \\ \text{élément de } E_n, \text{ tel que } \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ il s'écrit } P = P_0 - \int_0^1 P_0(x)\,\mathrm{d}x, \\ \text{où } P_0 \text{ est un antécédent quelconque de } Q \text{ par } \Delta_n \end{array}}.$$

(*) c'est un résultat général : si deux vecteurs x et y ont la même image par une application linéaire f, alors $x - y$ est un élément du noyau de f. Et réciproquement, si $x - y \in \ker f$ alors $f(x) = f(y)$.

(**) rappelons une fois pour toutes que les fonctions polynômiales sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Aussi, dans tout ce qui suit, on utilisera ou on invoquera, **sans justifier de nouveau**, la continuité, la dérivabilité des fonctions, la possibilité de les intégrer sur un segment, **dès lors qu**'il s'agira de polynômes.

.PARTIE B.

B.1. *Remarquons déjà qu'en vertu de* **A.3.b.**, *(appliqué à $Q = 1$ pour B_1, et à $Q = 2X$ pour B_2), B_1 et B_2 existent, sont uniques et éléments respectivement de E_0 et E_1.*
Pour les déterminer, un méthode de cœfficients indéterminés convient parfaitement.
$*$ Sachant que le polynôme cherché existe et est de degré 1, si on pose $B_1 = aX + b$:

$$\Delta_1(B_1) = a(X+1) + b - (aX+b) = a \text{ et } \int_0^1 B_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{a}{2}x^2 + bx\right]_0^1 = \tfrac{a}{2} + b.$$

Et donc :
$$B_1 \text{ solution de } \begin{cases} \Delta_1(B_1) = 1 \\ \int_0^1 B(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ \frac{a}{2} + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$*$ De même, B_2 existe et est degré 2, donc B_2 s'écrit $cX^2 + dX + e$, et on a :

$$\begin{aligned}\Delta_2(B_2) &= \Delta_2(cX^2 + dX + e) = c\Delta_2(X^2) + d\Delta_2(X) + e\Delta_2(1) \text{ (linéarité de } \Delta_2) \\ &= c(2X+1) + d.1 + e.0 = 2cX + (c+d).\end{aligned}$$

donc $\underline{\Delta_2(B_2) = 2cX + (c+d)}$, et $\underline{\int_0^1 B_2(t)\,dt = \left[\tfrac{c}{3}t^3 + \tfrac{d}{2}t^2 + et\right]_0^1 = \tfrac{c}{3} + \tfrac{d}{2} + e}.$

Par conséquent :
$$B_2 \text{ solution de } \begin{cases} \Delta_2(B_2) = 2X \\ \int_0^1 B_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ c + d = 0 \\ \frac{c}{3} + \frac{d}{2} + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \\ e = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

<u>En conclusion</u> : $\boxed{B_1(X) = X - \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad B_2(X) = X^2 - X + \tfrac{1}{6}}$.

B.2. <u>Pour $n \geq 1$</u>, suivant **A.3.b.**, B_n existe et est élément de E_n, B_n s'écrit donc $\sum_{k=0}^n b_k X^k$, avec $(b_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Avec cette écriture, on a, **en ne spécifiant que les termes qui contribuent aux degrés n et $n-1$**, les autres termes étant de degré inférieurs :

$$\begin{aligned}\Delta_n(B_n) &= B_n(X+1) - B_n(X) \\ &= (a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \ldots) - (a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots)\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la **formule du binôme** pour les développements :

$$\begin{aligned}\Delta_n(B_n) &= (\underline{a_nX^n} + a_n.n.X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots) - (\underline{a_nX^n} + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots) \\ &= n.a_n.X^{n-1} + \ldots\end{aligned}$$

Et comme on doit avoir $\Delta_n\,(B_n) = nX^{n-1}$, on a par identification des cœfficients de $\Delta_n\,(B_n)$ et de nX^{n-1} pour le degré $n-1$: $\underline{na_n = n}$. Donc (car $n \geq 1$) $\underline{a_n = 1}$.
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, mais aussi pour $n = 0$ car $B_0 = 1$, a_n non seulement est non nul mais est égal à 1. Donc : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad B_n \text{ est de degré } n \text{ et unitaire}}$.

B.3.a. Sachant que $\Delta_n\,(B_n) = B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$, et que X^{n-1} vaut 0 en $x = 0$ dès lors que $n \geq 2$ (X^{n-1} vaut 1 en 0 si $n = 1$), il vient, en considérant la valeur de $\Delta_n(B_n)$ en 0 : $\boxed{\forall n \geq 2, \quad B_n(0) - B_n(1) = 0 \quad i.e. \quad B_n(1) = B_n(0)}$.

B.3.b. *En suivant l'indication*, ..., on va calculer $\Delta(B_n^{(1)} - nB_{n-1})$. Comme on trouve que $\Delta(B_n^{(1)} - nB_{n-1}) = 0$, on en déduit que $B_n^{(1)} - nB_{n-1}$ est constant, puis on montre que la constante est nulle.

◇ <u>Calcul de $\Delta(B_n^{(1)} - nB_{n-1}), (n \geq 1)$</u>: **En utilisant la linéarité** et la définition de Δ,

$$\Delta(B_n^{(1)} - nB_{n-1}) = \Delta(B_n^{(1)}) - n.\Delta(B_{n-1}) = \underline{B_n^{(1)}(X+1) - B_n^{(1)}(X) - n.\Delta(B_{n-1})}.$$

Or, par définition, $B_{n-1} \in E_{n-1}$ et $\Delta(B_{n-1}) = \Delta_{n-1}(B_{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$, donc :

$$\textbf{(1)} \quad \Delta\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big) = B_n^{(1)}(X+1) - B_n^{(1)}(X) - n.(n-1)X^{n-2}.$$

Il faut alors **remarquer que** : $B_n^{(1)}(X+1) - B_n^{(1)}(X) = \big(\underbrace{B_n(X+1) - B_n(X)}_{\Delta_n(B_n)}\big)^{(1)}$.

En effet , par linéarité de la dérivation :

$$\big[B_n(X+1) - B_n(X)\big]^{(1)} = \big[B_n(X+1)\big]^{(1)} - B_n^{(1)}(X)$$

Et par la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\big[B_n(X+1)\big]^{(1)} = B_n^{(1)}(X+1).(X+1)^{(1)} = B_n^{(1)}(X+1).1.$$

On a donc, par (1) :

$$\Delta\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big) = \big[\Delta_n(B_n)\big]^{(1)} - n.(n-1)X^{n-2}.$$

Or, par définition, $\Delta_n(B_n) = nX^{n-1}$, donc en calculant $\big[\Delta_n(B_n)\big]^{(1)}$, on constate que :

$$\Delta\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big) = 0, \text{ i.e. } \Delta_n\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big) = 0.^{(*)}$$

(on utilise que, (*c.f.* **B.2.**), $B_n \in E_n$ (donc $B_n^{(1)} \in E_{n-1}$) et $B_{n-1} \in E_{n-1}$, ce qui donne $B_n^{(1)} - nB_{n-1} \in E_{n-1}$, donc, $\in E_n$. Par suite : $\Delta\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big) = \Delta_n\big(B_n^{(1)} - nB_{n-1}\big)$.)

Ainsi, $B_n^{(1)} - nB_{n-1} \in \ker\Delta_n$. Or $\ker\Delta_n = E_0$ pour $n \geq 1$ (*c.f.* **A.3.a.**) donc :

$B_n^{(1)} - nB_{n-1}$ est **constant** .

◇ Valeur du réel k tel que $B_n^{(1)} - nB_{n-1} = k$: (*en intégrant sur* $[0,1]$)

Par **linéarité de l'intégrale** :

$$\textbf{(2)} \quad \int_0^1 B_n^{(1)}(x) - nB_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 B_n^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x - n.\int_0^1 B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, on connaît **une** primitive de $B_n^{(1)}$, et $\int_0^1 B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$ (définition de B_{n-1}), on a :

$$\int_0^1 B_n^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x = \big[B_n(x)\big]_0^1 = B_n(1) - B_n(0), \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Donc, (2) s'écrit aussi :

$$\int_0^1 B_n^{(1)}(x) - nB_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = B_n(1) - B_n(0).$$

On peut conclure. En effet, puisque le polynôme $B_n^{(1)} - nB_{n-1}$ est constant, égal à $k \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^1 B_n^{(1)}(x) - nB_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$ est égale aussi à k. On a donc, par le calcul précédent :

$$k = B_n(1) - B_n(0).$$

Or, pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$ (*c.f.* **B.3.a.**), donc :

- si $n \geq 2$, k est nul, ce qui établit le résultat : $B_n^{(1)} - nB_{n-1} = 0$ *i.e.* $B_n^{(1)} = nB_{n-1}$.

Enfin, (car dans cette question $n \geq 1$) :

- si $n = 1$: par un calcul direct à partir de $B_1 = X - \frac{1}{2}$ (*c.f.* **B.1.**) et de $B_0 = 1$ (par définition), le résultat cherché est vrai.

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad B_n^{(1)} - nB_{n-1} = 0}.$$

(*) on passe de Δ à Δ_n, car, en toute rigueur, on n'a pas déterminé $\ker\Delta$ mais $\ker\Delta_n$ pour $n \geq 1$ (en fait $\ker\Delta = E_0$ mais cela n'a pas été montré). Et on préfère Δ_n à Δ_{n-1} pour éviter de distinguer le cas $n = 1$.

B.3.c. ***D'abord une remarque de principe*** *: dans la mesure où il existe un unique polynôme vérifiant les deux conditions : $\Delta_n(P) = nX^{n-1}$(C1), et $\int_0^1 P(x)\,dx = 0$ (C2), à savoir B_n, si on montre qu'un polynôme Q satisfait aussi (C1) et (C2), alors $Q = B_n$. C'est cette* ***façon de procéder que l'on va adopter*** *ici avec $Q = S_n$.*

• **On compare** $\Delta(S_n)(X)$ **et** $\Delta(B_n)(-X)$ pour montrer que $\Delta(S_n)(X) = nX^{n-1}$:

Pour tout x réel, en utilisant les définitions de Δ et $S_n(x)$, $\big(S_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)\big)$:

$$\begin{aligned}\Delta S_n(x) &= S_n(x+1) - S_n(x) = (-1)^n B_n(1-(x+1)) - (-1)^n B_n(1-x)\\ &= (-1)^n B_n(-x) - (-1)^n B_n(1-x).\end{aligned}$$

tandis que,

$$\Delta(B_n)(-x) = B_n(1+(-x)) - B_n(-x) = B_n(1-x) - B_n(-x).$$

En conséquence, $\Delta(S_n)(X) = (-1)^{n+1}\Delta(B_n)(-X)$, et puisque $\Delta(B_n) = nX^{n-1}$, finalement :

$$\Delta S_n(X) = (-1)^{n+1} n(-X)^{n-1} = n.X^{n-1}.$$

• $\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 (-1)^n B_n(1-x)\,dx$, et par le changement de variable $x = 1-u$:

$\int_0^1 S_n(x)\,dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_n(u)\,du = 0$, car $\int_0^1 B_n(u)\,du = 0$ par définition de B_n.

Ainsi, (*cf.* notre remarque préliminaire) S_n vérifie les conditions (C1) et (C2) donc $S_n = B_n$, soit :

$$\boxed{B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)}.$$

◇ Pour tout $k > 0$, la formule précédente, pour $n = 2k+1$:

$B_{2k+1}(X) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(1-X)$, *i.e.* **(3)** $B_{2k+1}(X) = -B_{2k+1}(1-X)$.

Cette égalité de fonctions, pour $x = 0$, donne : $B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1}(1)$, et comme on a montré d'autre part que : $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1)$ (*c.f.* **B.3.a.**, qui s'applique car $k > 0$ donc $2k+1 \geq 2$), il vient que $2B_{2k+1}(0) = 0$, puis :

$$\boxed{B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0}.$$

• Pour $x = 1/2$, on obtient, toujours par (3) : $B_{2k+1}(1/2) = -B_{2k+1}(1/2)$ ou encore $2B_{2k+1}(1/2) = 0$, donc enfin :

$$\boxed{B_{2k+1}(0) = 0}.$$

B.3.d. ***Cette fois encore***, on va montrer l'égalité demandée, en posant $\tilde{S}_n = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$ et en montrant que $\tilde{S}_n$ vérifie (C1) et (C2), (*c.f.* introduction du **B.3.c.**).

$$\begin{aligned}\bullet\ \Delta(\tilde{S}_n)(X) &= 2^{n-1}\left(B_n\left(\tfrac{(X+1)}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{(X+1)+1}{2}\right)\right) - 2^{n-1}\left(B_n\left(\tfrac{X}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right)\\ &= 2^{n-1}\left[B_n\left(\tfrac{(X+1)}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{(X+1)+1}{2}\right) - B_n\left(\tfrac{X}{2}\right) - B_n\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right]\\ &= 2^{n-1}\left[B_n\left(\tfrac{X+1}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{X}{2}+1\right) - B_n\left(\tfrac{X}{2}\right) - B_n\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right]\\ &= 2^{n-1}\left[B_n\left(\tfrac{X}{2}+1\right) - B_n\left(\tfrac{X}{2}\right)\right]\\ &= 2^{n-1}.\Delta(B_n)\left(\tfrac{X}{2}\right).\end{aligned}$$

Or $\Delta(B_n)(X) = nX^{n-1}$, donc : $2^{n-1}.\Delta(B_n)\left(\frac{X}{2}\right) = 2^{n-1}.n\left(\frac{X}{2}\right)^{n-1} = n.X^{n-1}$, par suite :

$$\Delta(\tilde{S}_n)(X) = \Delta(B_n)(X) = nX^{n-1}.$$

• Maintenant pour ce qui est de $\int_0^1 \tilde{S}_n(x)\,dx$:

$$\int_0^1 \tilde{S}_n(x)\,dx = \int_0^1 2^{n-1}.\left[B_n\left(\tfrac{x}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right]dx = 2^{n-1}.\left[\int_0^1 B_n\left(\tfrac{x}{2}\right)dx + \int_0^1 B_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right)dx\right].$$

Il s'agit de se ramener à l'intégrale (de valeur nulle) ***de*** B_n. Pour cela, les changements de variables $u = \frac{x}{2}$ pour la première intégrale, et $v = \frac{x+1}{2}$ pour la seconde, donnent :

$$\int_0^1 B_n\left(\tfrac{x}{2}\right) dx = 2.\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)\,du, \text{ et } \int_0^1 B_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right) dx = 2.\int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(v)\,dv.$$

On en tire, avec l'expression précédente de $\int_0^1 \tilde{S}_n(x)\,dx$, en appliquant la **relation de Chasles** pour les intégrales :

$$\int_0^1 \tilde{S}_n(x)\,dx = 2^{n-1}\left[2.\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)\,du + 2.\int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(v)\,dv\right] = 2^n.\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$$

<u>**En conclusion**</u>, $\tilde{S}_n$ satisfait les conditions (C1) et (C2) et donc $\tilde{S}_n = B_n$, soit :

$$\boxed{B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\tfrac{X}{2}\right) + B_n\left(\tfrac{X+1}{2}\right)\right)}.$$

◇ <u>Pour $n = 2k,\ k > 0$</u>, la formule s'applique et donne $B_n(0) = 2^{n-1}.\left[B_n(0) + B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right]$, ou encore, en isolant $B_n(\frac{1}{2})$: $\boxed{B_n(\tfrac{1}{2}) = (-1 + 2^{1-2k})B_n(0)}$.

$\boxed{\textbf{B.4.a.}}$ D'après **B.3.c.**, B_3 admet 0, 1/2 et 1 pour racines. Or, B_3 est un polynôme, de degré 3 exactement (*c.f.* **B.2.**), donc B_3 n'est pas nul et admet au plus 3 racines réelles : ces trois racines sont les seules de B_3. Par conséquent :

$$\boxed{B_3 \text{ ne s'annule pas sur }]0, 1/2[}.$$

◇ D'après le **.B.1.**, $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$. Et pour tout x réel, $B_2^{(1)}(x) = 2x - 1$. Ainsi, B_2 est <u>dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[,\ B_2^{(1)}(x) < 0$</u>, donc :

▌ B_2 est dérivable et strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Comme **de plus**, $B_2(0) = \frac{1}{6} > 0$ **et** $B_2(1/2) = -\frac{7}{8} < 0$, on en déduit que :

▌ B_2 s'annule sur $[0, \frac{1}{2}]$, en un seul point $\alpha_1 \in]0, \frac{1}{2}[$, et B_2 est strictement positive sur $[0, \alpha_1[$, strictement négative sur $]\alpha_1, \frac{1}{2}]$.

∗ Puisque d'après **B.3.b.** $B_3^{(1)} = 3B_2$, l'étude du signe de B_2 permet de donner les variations de B_3 sur $[0, \frac{1}{2}]$. Il ne manque plus que de rappeler que $B_3(0) = B_3(\frac{1}{2}) = 0$ (d'après **B.3.c.**) pour dresser les <u>tableaux de variations de B_2 et B_3</u> :

x	0		α_1		1/2
B_2	$\frac{1}{6}$	↘	0	↘	$-\frac{7}{8}$
B_3	0	↗	$B_3(\alpha_1)$	↘	0

◇ L'on tire de l'examen de ses variations que B_3 est strictement positif sur $]0, \frac{1}{2}[$ et, par suite, que <u>B_4 est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$</u>, puisque $B_4' = 4.B_3$ (**B.3.b.**).

D'après **B.3.d.**, $B_4(\frac{1}{2}) = (-1 + 2^{1-4})B_4(0) = -\frac{3}{8}B_4(0)$. Et il est exclu que $B_4(0)$ ou $B_4(\frac{1}{2})$ soit nul car en ce cas on aurait $B_4(0) = B_4(\frac{1}{2}) = 0$ ce qui contredit la stricte croissance de B_4 sur $[0, \frac{1}{2}]$. <u>En conséquence</u>, $B_4(\frac{1}{2})$ et $B_4(0)$ sont donc de **signe opposé et non nuls**, et comme B_4 est **strictement croissante sur** $]0, \frac{1}{2}[$, et **continue** :

$$\boxed{B_4 \text{ s'annule une et une seule fois sur } [0, \tfrac{1}{2}], \text{ pour une valeur } \alpha_2 \in]0, \tfrac{1}{2}[}.$$

<u>et</u> nécessairement : ▌ $B_4 < 0$ sur $[0, \alpha_2[$, et B_4 strictement positive sur $]\alpha_2, \frac{1}{2}]$.

∗ En conséquence, parce qu'encore $B_5' = 5.B_4$, B_5 est strictement décroissante sur $]0, \alpha_2[$ (où $B_4 > 0$), strictement croissante sur $]\alpha_2, \frac{1}{2}[$ (où $B_4 < 0$). De plus, comme

$B_5(0) = B_5(\frac{1}{2}) = 0$ (**B.3.c.**), il s'ensuit que B_5 est négative strictement sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc : $\boxed{B_5 \text{ ne s'annule pas sur }]0, \frac{1}{2}[}$.

[B.4.b.] **Énonçons**, pour $k > 0$, l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_k)$ selon laquelle B_{2k} s'annule une et une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ et B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.

- Au rang $k = 1$: d'après les résultats du **B.4.a.** pour B_2 et B_3, $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.
- Supposons que $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour un certain entier $k > 0$:

*Pour montrer que $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie, on tient le même raisonnement qu'au **B.4.a.** pour établir les propriétés de B_4 et B_5 à partir des résultats sur B_2 et B_3.*

D'après le **B.3.b.**, $B^{(1)}_{2k+2} = (2k+2).B_{2k+1}$, or, **par l'hypothèse de récurrence**, B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc, B_{2k+1} étant **continue** sur cet **intervalle**, B_{2k+1}, et par suite $B^{(1)}_{2k+2}$, ne s'annule pas et est de signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$(*), donc :

| B_{2k+2} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$.

D'autre part, B_{2k+2} est **continue sur le segment** $[0, \frac{1}{2}]$, donc d'après le cours :

| l'image de $[0, \frac{1}{2}]$ par B_{2k+2} est un segment $[\alpha, \beta]$.

Comme B_{2k+2} est **monotone** sur $[0, \frac{1}{2}]$:

| $(\alpha, \beta) = \big(B_{2k+2}(0), B_{2k+2}(\frac{1}{2})\big)$ ou $(\alpha, \beta) = \big(B_{2k+2}(\frac{1}{2}), B_{2k+2}(0)\big)$.

Enfin, $B_{2k+2}(0) = (-1 + 2^{1-2k}).B_{2k+2}(\frac{1}{2})$ (*c.f.* B.3.d.) et $-1 + 2^{-n} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

| $B_{2k+2}(0)$ et $B_{2k+2}(\frac{1}{2})$ sont de signe contraire et non nuls.

(de par la stricte monotonie de B_{2k+2} - *c.f.* **B.4.a.** pour $B_4(0) \neq 0$ et $B_4(\frac{1}{2}) \neq 0$)

Donc $B_{2k+2}([0, \frac{1}{2}]) = [\alpha, \beta]$ contient 0, ou de façon équivalente :

| il existe une valeur α_{k+1} telle que $B_{2k+2}(\alpha_{k+1}) = 0$,

et comme B_{2k+2} est **strictement monotone sur** $[0, \frac{1}{2}]$:

(4) | **cette valeur est unique**, et si B_{2k+2} est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[0, \frac{1}{2}]$ alors $B_{2k+2} < 0$ (resp. > 0) sur $[0; \alpha_{k+1}[$ et $B_{2k+2} > 0$ (resp. < 0) sur $]\alpha_{k+1}, \frac{1}{2}]$.

Dans ces conditions, on peut affirmer, toujours en s'appuyant sur la relation $B'_{2k+3} = (2k+3).B_{2k+2}$, que les variations de B_{2k+3} sont les suivantes :

x	$0 \quad \alpha_{k+1} \quad 1/2$
B_{2k+3}	$0 \nearrow B_{2k+3}(\alpha_{k+1}) \searrow 0$

ou

x	$0 \quad \alpha_{k+1} \quad 1/2$
B_{2k+3}	$0 \searrow B_{2k+3}(\alpha_{k+1}) \nearrow 0$

suivant que B_{2k+2} est croissante ou décroissante strictement.

D'après ces variations, la monotonie de B_{2k+3} étant stricte sur $[0, \alpha_{k+1}]$ et $[\alpha_{k+1}, \frac{1}{2}]$, et B_{2k+3} nulle en 0 (*c.f.* **B.3.c.**) et en $\frac{1}{2}$:

| B_{2k+3} **ne s'annule pas sur** $[0, \frac{1}{2}]$.

(*) on rappelle que ce résultat pour B_{2k+1}, comme les précédents (pour B_3 et B_5) sur les valeurs d'annulation des différents polynômes, est une conséquence directe du théorème de cours selon lequel **l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle**. Ainsi, si une fonction f est continue sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ (ou dérivable, ce qui entraîne la continuité), alors $f\,(]0, \frac{1}{2}[)$ est un intervalle I. Si f ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$ alors I ne contient pas 0, et c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}^*_+$ (en ce cas $f > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$) ou un intervalle de $\mathbb{R}^*_-$ (alors f est strictement négative sur $]0, \frac{1}{2}[$).

Ainsi, on a montré que B_{2k+2} et B_{2k+3} satisfont $(\mathcal{H}_{k+1})$.

En conclusion, $(\mathcal{H}_1)$ est vraie et $((\mathcal{H}_k)\text{vraie}) \Rightarrow ((\mathcal{H}_{k+1})\text{vraie})$, donc, **par récurrence**, il vient que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k} \text{ s'annule une et une seule fois sur }]0, \tfrac{1}{2}[\\ \text{et } B_{2k+1} \text{ ne s'annule pas sur }]0, \tfrac{1}{2}[\end{array}}.$$

B.4.c. Pour tout $k > 0$, on vient de montrer que B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. C'est encore vrai pour $k = 0$, sachant que $B_1 = X - \frac{1}{2}$ (*c.f.* **B.1.**). Par conséquent, pour tout $k > 0$:

B_{2k-1} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.

On peut donc reprendre, pour B_{2k}, et non plus B_{2k+2}, (avec toujours $k > 0$) les conclusions notées (4) dans la récurrence précédente, en les précisant suivant le signe de $B_{2k}(0)$, et en les prolongeant pour obtenir les variations de $|B_{2k}|$:

- Si $B_{2k}(0) > 0$: B_{2k} est nécessairement strictement décroissante et positive sur $[0, \alpha_k,]$, strictement décroissante et négative sur $[\alpha_k, \frac{1}{2}]$, nulle en α_k, donc :

  En α_k, $|B_{2k}|$ s'annule. Sur $[0, \alpha_k,]$, $|B_{2k}| = B_{2k}$ et décroît strictement.
  Sur $[\alpha_k, \frac{1}{2}]$, $|B_{2k}| = -B_{2k}$ et croît strictement.

- Si $B_{2k}(0) < 0$: on obtient pour $|B_{2k}|$, en suivant le même raisonnement, le même tableau de variation.

Compte tenu de **B.3.d.**, on peut alors dresser pour $|B_{2k}|$ le tableau de variation suivant :

x	0		α_k		$1/2$
$\lvert B_{2k}\rvert$	$\lvert B_{2k}\rvert(0)$	$\searrow$	$\lvert B_{2k}\rvert(\alpha_k)$	$\nearrow$	$(1 - \frac{1}{2^{2k-1}})\,\lvert B_{2k}\rvert(0)$

En conséquence, $|B_{2k}|$ atteint son maximum, soit en 0, soit en $\frac{1}{2}$.

Or, k étant un entier naturel, $\left|B_{2k}(\frac{1}{2})\right| = \left|-1 + \frac{1}{2^{2k-1}}\right| . |B_{2k}(0)| = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) . |B_{2k}(0)|$, donc, $\left|B_{2k}(\frac{1}{2})\right| - |B_{2k}(0)| = -\frac{1}{2^{2k-1}} . |B_{2k}(0)| < 0$, et $\underline{\left|B_{2k}(\frac{1}{2})\right| < |B_{2k}(0)|}$.

On peut alors conclure : $\boxed{|B_{2k}| \text{ atteint son maximum sur } [0,1] \text{ en } 0}$.

.PARTIE C.

C.1. f est de classe C^{2n} sur $[0, 1]$, avec $n > 0$, donc de classe au moins C^2, et B_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en conséquence, **une intégration par parties de** $\int_0^1 f^{(2)}(x) B_2(x)\,\mathrm{d}x$, en posant : $u(x) = f^{(1)}(x)$ et $v(x) = B_2(x)$, est licite car u et v sont de classe au moins C^1 sur $[0, 1]$. On a alors :

$$\begin{cases} u' = f^{(2)}\ ;\ v = B_2 \\ u\ = f^{(1)}\ ;\ v' = B_2' = 2.B_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \int_0^1 f^{(2)}(x) B_2(x)\,\mathrm{d}x \\ \quad = \left[f^{(1)}(x).B_2(x)\right]_0^1 - 2.\underline{\int_0^1 f^{(1)}(x).B_1(x)\,\mathrm{d}x}. \end{array}$$

Puis, **une seconde intégration par parties**, tout aussi licite, en posant :

$$\begin{cases} u' = f^{(1)}\ ;\ v = B_1 \\ u = f\ \ \ ;\ v' = B_1' = B_0 = 1 \end{cases} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{l} \underline{\int_0^1 f^{(1)}(x) B_1(x)\,\mathrm{d}x} \\ \quad = \left[f^{(1)}(x).B_2(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

En reportant dans la première égalité, en tirant aussi de l'expression de B_1 (*c.f.* **B.1.**) que $B_1(0) = B_1(1) = -\frac{1}{2}$, sachant encore que $B_2(1) = B_2(0)$ (*c.f.* **B.3.a**), on obtient l'égalité demandée :

$$\boxed{\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)\,\mathrm{d}x = B_2(0)\left[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)\right]_0^1 - (f(0) - f(1)) + 2.\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

C.2. Montrons **par récurrence** que pour tout $1 \le k \le n$, l'égalité suivante :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{i=1}^{k} B_{2i}(0)\left[f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0)\right] + R_k$$

$$\text{où} \quad R_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 f^{(2k)}(x)B_{2k}\,\mathrm{d}x,$$

est vraie.

- pour $k = 1$: on constate que la relation proposée correspond exactement à l'égalité obtenue au C.1. si l'on y isole $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
- si l'on suppose l'égalité vraie à un rang k, compris entre 1 et $n-1$:

  alors, puisque f est de classe C^{2n} sur $[0,1]$, et $1 \le k \le n-1$ (par l'hypothèse de récurrence), $f^{(2k+1)}$ et $f^{(2k+2)}$ existent et sont continues sur $[0,1]$, puisqu'encore les fonctions B_j ($j \in \mathbb{N}$) sont C^∞ sur $[0,1]$, les deux intégration par parties suivantes sont licites :
  $$R_k = \left[\frac{B_{2k+1}(x)}{2k+1}.f^{(2k)}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2k+1}\int_0^1 f^{(2k+1)}(x)B_{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x,$$
  en ayant posé : $u = f^{(2k)}$ et $v = \frac{1}{2k+1}B_{2k+1}(x)$ (alors $v' = B_{2k}$ d'après **B.3.b.**),

  puis, en posant $u = f^{(2k+1)}$ et $v = \frac{1}{2k+2}B_{2k+2}$ (ce qui donne $v' = B_{2k+1}$) :
  $$\frac{1}{2k+1}\int_0^1 f^{(2k+1)}(x)B_{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2k+2}B_{2k+2}(x).f^{(2k+1)}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2k+2}\int_0^1 f^{(2k+2)}(x)B_{2k+2}(x)\,\mathrm{d}x.$$
  En reportant le second résultat dans l'égalité précédente, en utilisant que $B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0$ et $B_{2k}(1) = B_{2k}(0)$ (d'après **B.3.c.** et **B.3.a.**, car $k \ge 1$), il vient :
  $$R_k = -\frac{B_{2k+2}(0)}{(2k+1)(2k+2)}.\left[f^{(2k+1)}(1) - f^{(2k+1)}(0)\right] + \frac{R_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)}.$$
  Ce résultat permet de remplacer R_k dans l'égalité de l'hypothèse de récurrence et on obtient alors que l'égalité est encore vraie au rang $k+1$.

Ainsi, on a montré que l'égalité est vraie au rang $k = 1$, et que si elle est vraie à un rang k, $1 \le k \le n-1$, alors elle est vraie au rang $k+1$. Donc, par le principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout k compris entre 1 et n, ce qui pour $k = n$ s'écrit :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} B_{2i}(0)\left[f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0)\right] + R_n}.$$

C.3. f étant de classe C^{2n} sur $[0,1]$, $f^{(2n)}$ est **continue sur le segment** $[0,1]$, donc, **d'après le cours**, l'image de $[0,1]$ est un segment que l'on peut noter $[a,b]$. Il s'ensuit (*c'est un résultat connu*) que f est majorée sur $[0,1]$ (par b).

Donc, $M = \sup_{x\in[0;1]} \left|f^{(2n)}(x)\right|$ existe et n'est pas égale à $+\infty$ ($M = b$).

Comme d'autre part, $|B_{2n}|$ est majorée par $|B_{2n}(0)|$ sur $[0,1]$ (*c.f.* **B.4.c.** car $n > 0$), on a donc :

$$\forall x \in [0,1] \quad \left|f^{(2n)}(x).B_{2n}(x)\right| \leq M.\,|B_{2n}(0)|.$$

puis, par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 \left|f^{(2n)}(x).B_{2n}(x)\right| \,\mathrm{d}x \leq M.\,|B_{2n}(0)| \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x$.

Enfin, comme **la valeur absolue d'une intégrale est inférieure à l'intégrale de la valeur absolue** :

$$\boxed{|R_n| \leq M.\frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}}.$$

PROBLÈME II

.PARTIE A.

A.1. Pour $X \in \mathcal{M}_{c,1}(\mathbb{R})$, matrice colonne à c lignes, dont on note $\{x_i\}_{1\leq i\leq c}$ les cœfficients, on a, par définition de $||X||$:

$$||X||^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_c \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{c} x_k^2.$$

La somme étant une somme de réels tous positifs, elle est nulle si et seulement si chacun des x_i^2, donc chacun des x_i, est nul, d'où le résultat :

$$\boxed{||X|| = 0 \text{ si et seulement si } X = 0}.$$

A.1.b. Pour tout λ réel et tout couple (X,Y) de matrices colonnes à r lignes,

$$\underline{||X+\lambda Y||^2} = {}^t(X+\lambda Y)(X+\lambda Y) = ({}^tX + \lambda{}^tY)(X+\lambda Y)$$
$$= {}^tXX + \lambda{}^tXY + \lambda X{}^tY + \lambda^2.{}^tYY = \underline{||X||^2 + \lambda^2.\,||Y||^2 + \lambda.({}^tXY + X{}^tY)}.$$

Or, ${}^tXY$ étant un réel, ${}^tXY$ est invariant par transposition $\left({}^tXY = {}^t({}^tXY)\right)$. Comme aussi ${}^t({}^tXY) = {}^tY{}^t({}^tX) = {}^tYX$, on a donc $\underline{{}^tXY = {}^tYX}$, et finalement :

$$\boxed{||X+\lambda Y||^2 = ||X||^2 + \lambda^2\,||Y||^2 + 2\lambda{}^tYX}.$$

A.2. Pour $M \in \mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{d,c}(\mathbb{R})$, le produit $P = M.N$ a un sens car le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N, de plus, ce produit est une matrice de taille $c \times c$ (nombre de lignes de M $\times$ nombre de colonnes de N)(*).

◇ Ensuite, d'après la définition de l'image d'une matrice, rappelée par l'énoncé, on a :

$$(Y \in \operatorname{Im} P) \iff (\exists X \in \mathcal{M}_{c,c}(\mathbb{R}), \text{ telle que } Y = PX)$$

et comme $Y = PX$ peut aussi s'écrire $Y = (MN)X = M(NX)$, (par associativité du produit matriciel), Y apparaît aussi comme un élément de $\operatorname{Im} M$, en tant qu'image de NX. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} M}.$$

.PARTIE B.

B.1.a. Toujours par le même argument (*c.f.* **A.2.**), puisque $A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ est de taille $s \times r$ et ${}^tA$ de taille $r \times s$: dans le produit ${}^tAA$, la matrice de gauche a un

(*) rappel : le produit AB d'une matrice A de taille $m \times n$ et d'une matrice B de taille $p \times q$ existe si et seulement si $n = p$, et alors AB est de taille $m \times q$.
De façon mnémotechnique : $(m \times \underline{n}) \times (\underline{n} \times q) = (m \times q)$

nombre de colonnes (s) égal au nombre de lignes de la matrice de droite, et il vient que : $\boxed{\text{le produit } {}^tAA \text{ existe, et } {}^tAA \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})}$.

B.1.b. *Cette inclusion est aussi commune que celle démontrée en* **A.2.**. D'une façon générale, en définissant image et noyau d'une matrice comme dans l'énoncé :

si $C = AB$, alors $\mathrm{Im}C \subset \mathrm{Im}A$ et $\ker B \subset \ker C$.

◇ Pour cette question, A étant de taille $s \times r$, on ne peut la multiplier, à droite, qu'avec une matrice colonne X comportant r lignes.
Ceci étant, si $X \in \ker A$, alors $AX = 0$ et par suite : $({}^tAA)\,X = {}^tA\,(AX) = {}^tA.0 = \underline{0}$.

En conclusion, pour tout $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$: $(X \in \ker A) \Longrightarrow (X \in \ker({}^tAA))$, **donc** :

$$\boxed{\ker A \subset \ker({}^tAA)}.$$

B.1.c. Si X est élément de $\ker({}^tAA)$, on a, par définition, $({}^tAA)\,X = 0$. Comme par ailleurs $||AX|| = \sqrt{{}^t(AX).AX} = \sqrt{{}^tX{}^tA.AX}$ (d'après les **propriétés de la transposition**). On a donc : $\boxed{X \in \ker({}^tAA) \Longrightarrow ||AX|| = \sqrt{{}^tX\,({}^tA.AX)} = \sqrt{{}^tX.0} = 0}$.

B.1.d. *L'égalité demandée suggère une utilisation du théorème du rang. Voyons si tel est le cas.*

◇ Appliqué à une matrice M à r colonnes, le **théorème du rang**(*) s'énonce :

$\dim(\ker M) + \mathrm{rg}M = r$.

Ainsi, pour $A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$, on a $\underline{\dim\ker({}^tA A) + \mathrm{rg}\,({}^tAA) = r}$, et, pour ${}^tAA \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, $\underline{\dim\ker({}^tAA) + \mathrm{rg}\,({}^tAA) = r}$. Égalités dont on tire que :

$$(5)\quad \begin{aligned} (\mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}A) &\Longleftrightarrow (r - \dim\ker({}^tAA) = r - \dim\ker A) \\ &\Longleftrightarrow (\dim\ker({}^tAA) = \dim\ker A) \end{aligned}$$

Or, on dispose des résultats nécessaires pour **établir l'égalité** des dimensions des noyaux $(\dim\ker({}^tAA) = \dim\ker A)$, en effet :

* d'après **B.1.b.**, $\underline{\ker A \subset \ker({}^tAA)}$.
* d'après **B.1.c.**, $\underline{\text{si } X \in \ker({}^tAA)}$, alors $||AX|| = 0$, ce qui, d'après **A.1.a.**, implique encore $AX = 0$ *i.e.* $X \in \ker A$. Ainsi, on a montré que :
  $(\forall X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}) :\ X \in \ker({}^tAA) \Longrightarrow X \in \ker A)$ *i.e.* $\underline{\ker({}^tAA) \subset \ker A}$.

Ainsi, par définition de l'égalité de deux ensembles, de cette double inclusion, $\ker A \subset \ker({}^tAA)$, et $\ker({}^tAA) \subset \ker A$, on déduit que : $\ker({}^tAA) = \ker A$.

Puisqu'il s'agit d'une égalité de deux *s.e.v.* d'un espace de dimension finie $(\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}))$, il s'ensuit que leurs dimensions sont égales $(\dim\ker({}^tAA) = \dim\ker A)$, et par l'équivalence (5) : $\boxed{\mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}A}$.

(*) ce théorème du rang **pour les matrices** est la traduction sur $M \in \mathcal{M}_{l,r}(\mathbb{R})$ ($l \in \mathbb{N}^*$), du théorème du rang appliqué à l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^l)$ dont la matrice dans dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^l$ et de $\mathbb{R}^r$ est M. La correspondance découlant de ce que $\ker M$, $\mathrm{Im}M$, sont respectivement les *s.e.v.* de $\mathcal{M}_{l,1}(\mathbb{R})$ et de de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes des coordonnées dans les bases canoniques des vecteurs de $\ker f \in \mathbb{R}^l$ et de $\mathrm{Im} f \in \mathbb{R}^r$.
On a dès lors : $\underline{\dim\ker f = \dim\ker M}$ et $\underline{\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}M = \dim\mathrm{Im}M}$.

B.2.a. *On sait que pour deux* s.e.v. V *et* W, *de dimensions finies, d'un* e.v. E, *tels que* $V \subset W$:

si $\dim V = \dim W$, alors $V = W$.

On utilise ce résultat pour montrer que $\mathrm{Im}\,({}^tAA) = \mathrm{Im}A$.

$\diamondsuit$ Le **A.2.**, appliqué avec $M = {}^tA \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $N = A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$, et donc $P = {}^tAA$, donne :

$$\mathrm{Im}\,({}^tAA) \subset \mathrm{Im}\,({}^tA).$$

Et on a montré au **B.1.d.** que : $\mathrm{rg}\,({}^tAA) = \mathrm{rg}A$, et rappelé **en note** que le rang d'une matrice M est égal à $\dim \mathrm{Im}M$, on a donc aussi : $\dim \mathrm{Im}\,({}^tAA) = \dim \mathrm{Im}A$. Comme enfin, **d'après le cours**, une matrice et sa transposée ont même rang, (ici $\mathrm{rg}\,({}^tA) = \mathrm{rg}A$), il vient : $\dim \mathrm{Im}\,({}^tAA) = \dim \mathrm{Im}A = \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\,({}^tA) = \dim \mathrm{Im}\,({}^tA)$.

En conséquence, le rappel du début s'applique, avec $V = \mathrm{Im}\,({}^tAA)$ et $W = \mathrm{Im}{}^tA$, et donne :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,({}^tAA) = \mathrm{Im}{}^tA}.$$

B.2.b. B étant une matrice élément de $\mathcal{M}_{\underline{s},1}(\mathbb{R})$ et ${}^tA$ un élément de $\mathcal{M}_{r,\underline{s}}(\mathbb{R})$, le produit ${}^tA.B$ a un sens et appartient à $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, de plus, par définition de $\mathrm{Im}A$: ${}^tA.B \in \mathrm{Im}{}^tA$. Or, on a montré que $\mathrm{Im}\,({}^tAA) = \mathrm{Im}\,({}^tA)$ (**B.2.a.**). Donc on a encore :

${}^tA.B \in \mathrm{Im}\,({}^tAA)$.

Par définition de $\mathrm{Im}\,({}^tAA)$, et sachant que ${}^tAA \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{il existe } X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), \quad \text{tel que : } \quad {}^tAA.X = {}^tA.B}.$$

.PARTIE C.

C.1. Supposons que l'équation matricielle ($\underline{1}$) : $A.X = B$, admet au moins une solution, et notons X_0 cette solution.

Le résultat demandé peut se montrer alors par ***double implication.***

Soit $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$:

- Si X est une pseudo-solution de ($\underline{1}$) : alors, par la définition donnée d'une pseudo-solution : $\forall Z \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}),\ ||A.X - B|| \leq ||A.Z - B||$.

  Et **en particulier pour** $Z = X_0$: **(6)** $||A.X - B|| \leq ||A.X_0 - B||$.

  Or, X_0 **étant solution de (**$\underline{1}$**)**, on a : $A.X_0 = B$, donc $A.X_0 - B = 0$, et par **A.1.a.** : $||A.X_0 - B|| = 0$. Donc (6) s'écrit encore : (7) $||A.X - B|| \leq 0$.

  Et comme, par définition de $||C||$, pour toute matrice colonne C, $||C|| \geq 0$:

  $$((7)) \Longleftrightarrow (||A.X - B|| = 0) \underset{\text{d'après } \mathbf{A.1.a.}}{\Longleftrightarrow} (A.X - B = 0) \Longleftrightarrow (A.X = B).$$

  Ainsi, X pseudo-solution de ($\underline{1}$) implique : $AX = B$ *i.e.* X solution de ($\underline{1}$).

Réciproquement,

- Si X est une solution de ($\underline{1}$) : alors $A.X = B$ *i.e.* $A.X - B = 0$. Il s'ensuit, par le **A.1.a.**, que $||A.X - B|| = 0$, et comme pour tout $Z \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ $||A.Z - B|| \geq 0$, il est immédiat que :

  $\forall Z \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}),\ ||A.X - B|| \leq ||A.Z - B||$, *i.e.* X est pseudo-solution de ($\underline{1}$).

En conclusion, par double implication, on a montré que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } (\underline{1}) \text{ admet au moins une solution } X_0 \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), \text{ alors pour tout } X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}) : \\ \qquad (X \text{ pseudo-solution de } (\underline{1})) \Longleftrightarrow (X \text{ solution de } (\underline{1}))\end{array}}.$$

$\boxed{\textbf{C.2.}}$ *La forme de l'inégalité à démontrer suggère de recourir au résultat du* ***A.1.b.*** :
$\forall (X', Y') \in (\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad ||X' + \lambda Y'||^2 = ||X'||^2 + \lambda^2 ||Y'||^2 + 2\lambda^t Y' X'$.

Il faut noter d'abord que cette égalité du **A.1.b.** est **vraie quelque soit la valeur de l'entier** $r \geq 1$, c'est-à-dire pour n'importe quel couple (X', Y') de matrices colonnes, pourvu qu'elles aient le même nombre de lignes.

En particulier, **l'égalité du A.1.b.** est vraie pour un couple (X', Y') de la forme $(AX" - B, A.Y)$, avec $X" \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ **car** en ce cas $AX" - B$ et $A.Y$ sont deux matrices colonnes **à s lignes** (*c.f.* $A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$).

En appliquant **A.1.b.** à de tels couples (X', Y'), il vient :

(8) $\forall X" \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$||(A.X" - B) + \lambda A.Y||^2 = ||A.X" - B||^2 + \lambda^2 ||A.Y||^2 + 2\lambda^t(A.Y).(A.X" - B).$$

Pour se rapprocher encore de la forme du résultat attendu, au moyen des réécritures suivantes : $\underline{(A.X - B) + \lambda A.Y = A.(X + \lambda Y) - B}$ et $\underline{{}^t(A.Y) = {}^tY.{}^tA}$,

et **en isolant les termes convenables dans le membre de gauche**, (8) devient :

(9) pour tout $X" \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda^2 ||A.Y||^2 + 2\lambda^t Y.{}^tA.(A.X'' - B) = ||A.(X'' + \lambda Y) - B||^2 - ||A.X'' - B||^2$$

(*sous cette forme, le résultat va permettre, pour* $X'' = X$, *d'utiliser que* X *est une pseudo-solution, et être réutilisé pour le* ***C.3.***).

Commençons la démonstration proprement dite.

$*$ <u>Si X est une pseudo-solution de (1)</u> : en prenant $X'' = X$, on déduit de (9) que :

(10) pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda^2 ||A.Y||^2 + 2\lambda^t Y.{}^tA.(A.X - B) = ||A.(X + \lambda Y) - B||^2 - ||A.X - B||^2.$$

<u>Or</u>, ***X* étant pseudo-solution de (1)**, on a, en reprenant la définition d'une pseudo-solution (*c.f.* **énoncé**), en y prenant Z de la forme $\underline{Z = X + \lambda Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})}$:

$$\underbrace{||A.(X + \lambda Y) - B||}_{||A.Z - B||} \geq ||A.X - B|| \iff ||A.(X + \lambda Y) - B||^2 \geq ||A.X - B||^2$$

(la dernière équivalence étant vraie car les nombres sont positifs).

<u>Ceci étant établi</u>, il apparaît que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et tout λ réel le membre de droite dans l'égalité du (10) est positif, d'où le résultat attendu :

$$\textbf{(11)} \quad \boxed{\forall Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 ||A.Y||^2 + 2\lambda^t Y.{}^tA.(A.X - B) \geq 0}.$$

$\diamond$ $\underline{{}^tAA.X = {}^tA.B}$: (*La méthode utilisée ici est à retenir*). Il s'agit d'envisager l'inégalité (11) comme un résultat établissant que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ fixé, la fonction polynomiale, $\underline{\varphi : \lambda \longmapsto \lambda^2 ||A.Y||^2 + 2\lambda^t Y.{}^tA.(A.X - B)}$ est positive sur $\mathbb{R}$.
<u>Or</u>, $\varphi(\lambda)$ se factorise facilement ($\varphi(\lambda)$ admet pour racine évidente 0) :
$$\varphi(\lambda) = \lambda.\left(\lambda.||A.Y||^2 + 2^t Y.{}^tA.(A.X - B)\right).$$

Et **à partir de cette factorisation**, on peut mener la **discussion suivante** :
Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$:

- <u>soit $||A.Y|| = 0$</u> : auquel cas $\varphi(\lambda) = \lambda.(2^t Y.{}^tA.(A.X - B))$, et le fait que φ soit positive sur $\mathbb{R}$ impose que le réel ${}^tY.{}^tA.(A.X - B)$ soit nul.

- soit $||A.Y|| \neq 0$ (*i.e.* $||A.Y|| > 0$) : auquel cas $\varphi(\lambda)$ est un polynôme de degré 2, admettant pour racines 0 et $-\frac{2^tY.^tA.(A.X-B)}{||A.Y||}$. Le fait que φ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$ impose en ce cas qu'il s'agisse en réalité d'une racine double, *i.e.* ($\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}$) impose que : $-\frac{2^tY.^tA.(A.X-B)}{||A.Y||} = 0$, *i.e.* ${}^tY.{}^tA.(A.X-B) = 0$.

Ainsi, tous les cas ayant été examinés, on conclut :

$$\text{pour tout } Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tY.{}^tA.(A.X-B) = 0.$$

∗ *On peut alors, en remplaçant successivement Y par les coordonnées de tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^r$, montrer que la matrice ${}^tA.(A.X-B)$ a tous ses cœfficients nuls.* ***Mais** il est plus astucieux d'utiliser ce **rappel de cours** :*

$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $MX = 0$, alors $M = 0$.

En effet, **en transposant l'égalité** ${}^tY.{}^tA.(A.X-B) = 0$, le résultat précédent équivaut à :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t\Big({}^tA.\big(A.X-B\big)\Big).Y = 0.$$

On en déduit par le **rappel de cours** que la matrice ${}^t({}^tA.(A.X-B))$ est nulle, et donc que sa transposée, ${}^tA.(A.X-B)$, aussi est nulle.

Comme $({}^tA.(A.X-B) = 0) \iff ({}^tA.A.X - {}^tA.B = 0)$, on a montré finalement que : $\boxed{\text{si (1) admet une pseudo-solution } X, \text{ alors : } {}^tA.A.X = {}^tA.B}$.

C.3. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$, et toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ ($r, s \in \mathbb{N}^*$), d'après le **C.2.**, on sait que s'il existe une pseudo-solution $\hat{X}$ de (1), elle est à chercher parmi les solutions de l'équation ${}^tA.A.X = {}^tA.B$. C'est ce qui donne le point de départ de la démonstration. Plus précisément, il convient de voir cette question **C.3.** comme une réciproque de la question **C.2.**. Aussi est-il utile de* «coller» *à ce qui a été fait précédemment dans le but d'établir les implications inverses.*

Commençons la démonstration.

D'après le **B.2.b.**, pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, il existe $\tilde{X}$, élément de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, solution de l'équation ${}^tA.A.X = {}^tA.B$.

◇ Examinons si $\tilde{X}$ est une pseudo-solution de (1) :

***Dans cette idée d'établir une réciproque pour le résultat de* C.2., reprenons le résultat général (9)** à partir duquel on a pu montrer que : (X pseudo-solution de (1)) $\Longrightarrow ({}^tA.A.X = {}^tA.B)$. De (9), on déduit, pour $X'' = \tilde{X}$:

(12) pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda^2\,||A.Y||^2 + 2\lambda\,\underline{{}^tY.{}^tA.(A.\tilde{X}-B)} = \big|\big|A.(\tilde{X}+\lambda Y) - B\big|\big|^2 - \big|\big|A.\tilde{X} - B\big|\big|^2.$$

Puisque $\tilde{X}$ vérifie ${}^tA.A.\tilde{X} = {}^tA.B$, on a dans le membre de gauche de l'égalité dans (12), la simplification suivante : ${}^tY{}^tA.(A.\tilde{X}-B) = {}^tY({}^tA.A.\tilde{X} - {}^tA.B) = {}^tY.0 = 0$, de sorte que (12) donne que :

pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda^2\,||A.Y||^2 = \big|\big|A.(\tilde{X}+\lambda Y) - B\big|\big|^2 - \big|\big|A.\tilde{X} - B\big|\big|^2.$$

Or, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et tout λ réel, $\lambda^2\,||A.Y||^2 \geq 0$, donc on a encore :

(13) $\forall Y \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \big|\big|A.(\tilde{X}+\lambda Y) - B\big|\big|^2 - \big|\big|A.\tilde{X} - B\big|\big|^2.$

Le but étant de montrer que $\tilde{X}$ est une pseudo-solution, c'est-à-dire de montrer que pour tout $Z \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$: $||A.\tilde{X} - B|| \leq ||A.Z - B||$ *i.e.* $||A.\tilde{X} - B||^2 \leq ||A.Z - B||^2$,

on termine ainsi :

Pour tout $Z \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, en vertu de (13) (pour $\lambda = 1$ et $Y = Z - \tilde{X}$), on a :

$$\left|\left|A.\left(\tilde{X} + 1.(Z - \tilde{X})\right) - B\right|\right|^2 - \left|\left|A.\tilde{X} - B\right|\right|^2 = ||A.Z - B||^2 - \left|\left|A.\tilde{X} - B\right|\right|^2 \geq 0,$$

ce qui achève d'établir que $\tilde{X}$ est une pseudo-solution de (1).

En conclusion :

> on a montré que toute solution de l'équation ${}^tA.A.X = {}^tA.B$ est une pseudo-solution de (1) et que, par conséquent, puisqu'il existe toujours une solution de ${}^tA.A.X = {}^tA.B$, il existe toujours une pseudo-solution de (1).

C.4. On demande ici de montrer qu'une **condition suffisante d'unicité** de la pseudo-solution de (1) est $\text{rg}(A) = r$.

◇ Puisqu'il est équivalent que X soit pseudo-solution de (1) et que X soit solution de l'équation ${}^tA.A.X = {}^tA.B$ (*c.f.* **C.3.**), **l'unicité de la pseudo-solution équivaut à l'unicité de la solution de** ${}^tA.A.X = {}^tA.B$.

Or, on a montré que la matrice ${}^tAA$ appartient à $\mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ (*c.f.* **B.1.a.**), et que $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$ (*c.f.* **B.1.d.**), donc :

- ${}^tAA$ est une matrice carrée $r \times r$ et si $\text{rg}(A) = r$, son rang est maximal (ou encore par application du théorème du rang : $\ker A = \{0\}$), donc elle est inversible et dès lors :
$$({}^tA.A.X = {}^tA.B) \iff X = ({}^tA.A)^{-1}.{}^tA.B.$$
Ce qui établit l'**unicité** (et en l'espèce l'existence, mais elle était déjà acquise dans le cas général par le **B.2.b.**), de la solution de l'équation ${}^tA.A.X = {}^tA.B$.

D'où la conclusion :

> si $\text{rg}(A) = r$, alors il existe une unique pseudo-solution de (1).

ÉPREUVE B

Durée 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les Parties I et II sont indépendantes. Dans la partie II, on peut traiter les sections B et C en admettant les résultats de la section A.

L'objet du problème est de proposer des méthodes d'études, dans des cas particuliers, de modèles mathématiques visant à rendre compte de l'évolution d'un micro-organisme soumis à des radiations. On ne se préoccupera pas de la pertinence effective des modèles et des cas particuliers choisis, le but étant de mettre en évidence des traitements mathématiques de certains systèmes d'équations.
Ainsi, n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on supposera que chaque micro-organisme peut prendre $n+1$ états numérotés de 0 à n, l'état 0 correspondant à l'organisme sain et l'état n représentant la mort de l'organisme.

PARTIE I. *Le modèle en temps discret*

On observe le micro-organisme à des instants successifs numérotés par des entiers naturels, l'instant dit "initial" étant numéroté 0. Entre deux instants successifs k et $k+1$ (k étant un entier naturel) les règles d'évolution du micro-organisme sont les suivantes :
(1) Si l'organisme est à l'instant k en l'état i avec $1 \leq i \leq n-1$, il sera, à l'instant $k+1$ en l'état $i+1$ avec la probabilité i/n et en l'état $i-1$ avec la probabilité $(n-i)/n$.
(2) Si l'organisme est à l'instant k en l'état 0 ou en l'état n, il y reste à l'instant $k+1$ avec une probabilité égale à 1.

On désigne, pour $1 \leq i \leq n-1$, par P_i la probabilité pour un micro-organisme d'atteindre l'état n sachant qu'il est au départ dans l'état i et ceci sans tenir compte du temps mis pour y parvenir. Par ailleurs on convient de poser : $P_0 = 0$ et $P_n = 1$.

1. On note :

$$(1) \quad P_i = \frac{i}{n} \times P_{i+1} + \frac{n-i}{n} \times P_{i-1}$$

Démontrer que la relation (1) est vraie dans le cas $n = 2$, pour $i = 1$.

Résultat admis : on supposera que, dans le cas général où n est supérieur ou égal à 2, (1) est vraie pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq n-1$.

2. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, $P_k = 1$. Montrer qu'alors la relation (1) est vraie pour tout entier i strictement positif.

3.a. Montrer qu'on définit une fonction G continue et dérivable sur $]-1,1[$, en posant :

$$G(s) = \sum_{k \geq 1} P_k s^k$$

3.b. En utilisant la relation (1), justifier, pour tout s élément de $]0,1[$:

$$s(1-s^2)G'(s) = \big(ns + 1 - (n-1)s^2\big)G(s)$$

3.c. Vérifier, pour tout s élément de $]0,1[$, la relation :

$$\frac{ns + 1 - (n-1)s^2}{s(1-s^2)} = \frac{n-1}{1+s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

En déduire une expression de $G(s)$, à une constante multiplicative C près, sur $]0,1[$, puis sur $[0,1[$.

4.a. Rappels : on peut, pour tout s élément de $[0,1[$, écrire la relation :

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{n \geq 0} s^n$$

Par ailleurs, lorsqu'une fonction admet un développement en séries, il y a unicité des cœfficients.

Donner une expression de P_i, pour $1 \leq i \leq n$, en fonction de n et de C.

4.b. On a : $P_n = 1$.
Déterminer C puis P_i (pour tout i entier) en fonction de n. Préciser P_1.

PARTIE II. *Le modèle en temps continu*

Le micro-organisme est ici observé à des instants réels, l'instant dit "initial" étant l'instant 0. Les hypothèses faites sont les suivantes, t désignant un réel positif et h un réel strictement positif :

(1) Pour tout i compris entre 1 et n, h désignant un réel, un organisme à l'état $i-1$ au temps t sera au temps $t+h$ dans l'état i avec une probabilité : $\lambda_i h + o(h)$, $o(h)$ désignant usuellement une expression de la forme $h\varepsilon(h)$, $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

(2) Pour tout i compris entre 0 et $n-1$ et h réel, un organisme à l'état $i+1$ au temps t sera au temps $t+h$ dans l'état i avec une probabilité : $\mu_i h + o(h)$.

(3) Pour tout i compris entre 0 et n et h réel, la probabilité pour un organisme d'atteindre un autre état que $i-1$, i et $i+1$ (lorsque ces entiers sont bien compris entre 0 et n) est égale à : $o(h)$.

(4) On supposera que les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont strictement positifs, que les $(\mu_i)_{0 \leq i \leq n-2}$ sont positifs et que μ_{n-1} est nul.

(5) On notera $X(t,i)$ la probabilitié pour un organisme d'être à l'état i au temps t et on supposera qu'à l'instant 0 le micro-organisme est en l'état 0 avec une probabilité égale à 1.

On désignera par f_i la fonction qui à tout t de $\mathbb{R}^+$ associe $X(t,i)$.

Remarque : on supposera partout que $|h|$ est suffisamment petit pour que toutes les expressions ci-dessus qui définissent des probabilités soient bien à valeurs dans $[0,1]$.

A : LE MODÈLE

A.1. Dans cette question i est un entier vérifiant : $1 \leq i \leq n-1$, t est un réel positif et h un réel strictement positif.

A.1.a. Montrer que la probabilité pour un organisme à l'état i en t d'y être en $t+h$ est égale à : $1 - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1})h = o(h)$

Résultat admis : On admettra la relation :

$$\begin{aligned} X(t+h, i) = {} & (\lambda_i h + o(h))X(t, i-1) \\ & +(1 - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1})h + o(h))X(t,i) + (\mu_i h + o(h))X(t, i+1) \end{aligned}$$

A.1.b. Montrer l'existence d'un réel K, indépendant de t et de h tel que l'on ait :

$$| X(t+h, i) - X(t,i) | \leq Kh + o(h)$$

En déduire lorsque $0 < h \leq t$:

$$| X(t-h, i) - X(t,i) | \leq Kh + o(h)$$

A.2.a. En utilisant ce qui précède, montrer que f_i est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$ et à gauche sur $\mathbb{R}^{*+}$.

A.2.b. En formant :

$$\frac{f_i(t+h) - f_i(t)}{h}$$

montrer que f_i est dérivable à droite sur $\mathbb{R}^+$.

A.2.c. En s'inspirant de ce qui précède, montrer de même que f_i est dérivable à gauche sur $\mathbb{R}^{*+}$.

A.2.d. Démontrer que f_i est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et justifier de plus la relation, pour tout t réel strictement positif :

$$f_i'(t) = \lambda_i f_{i-1}(t) - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1}) f_i(t) + \mu_i f_{i+1}(t)$$

On admettra qu'on montrerait de même que f_0 et f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$, dérivables à droite en 0 et que l'on a :

$$f_0'(t) = -\lambda_1 f_0(t) + \mu_0 f_1(t) \text{ et } f_n'(t) = \lambda_n f_{n-1}(t)$$

B : PREMIER CAS PARTICULIER *Un exemple numérique*

Dans cette partie, on fixe : $n = 2$; $\lambda_1 = 2\lambda$; $\lambda_2 = 2\lambda$; $\mu_0 = \lambda$; $\mu_1 = 0$, où λ désigne un réel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée A d'ordre 2, que l'on explicitera, telle que, pour tout t on ait :

$$\begin{pmatrix} f_0'(t) \\ f_1'(t) \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix}$$

2. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que l'on ait :

$$A = P \times D \times P^{-1}$$

3. On pose :

$$\begin{pmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix}$$

Justifier la relation :

$$\begin{pmatrix} \phi_0'(t) \\ \phi_1'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} f_0'(t) \\ f_1'(t) \end{pmatrix}$$

En déduire, à une constante multiplicative près, $\phi_0(t)$ et $\phi_1(t)$, puis déterminer $f_0(t)$ et $f_1(t)$

4. À l'aide de ce qui précède expliciter $X(t, 2)$ en fonction de t et de λ.

C : DEUXIEME CAS PARTICULIER

Dans cette partie on suppose que tous les μ_i sont nuls (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rémission possible) et que l'on a pour tout i $(1 \leq i \leq n)$: $\lambda_i = i \times \lambda$, où λ désigne un réel strictement positif.

1. Déterminer f_0.

2. Pour tout i $(0 \leq i \leq n-1)$ et tout t réel positif, on pose :

$$g_i(t) = f_i(t) \times \exp((i+1)\lambda t)$$

2.a. Déterminer g_1.

2.b. Exprimer, pour tout i non nul, $g_i'(t)$ en fonction de i, λ et $g_{i-1}(t)$. Calculer $g_i(0)$.

2.c. Montrer, en utilisant une récurrence, que l'on a, pour tout i $(1 \leq i \leq n-1)$ et tout t réel positif :

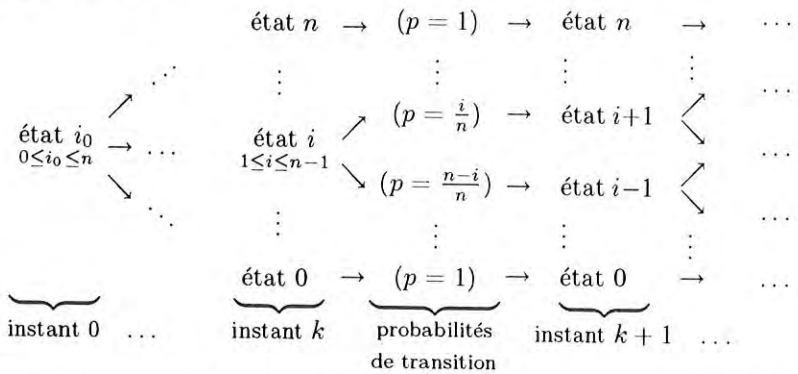
$$g_i(t) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k \exp(k\lambda t)$$

3. Déduire de ce qui précède $X(t, n)$ ainsi qu'un équivalent de $1 - X(t, n)$ lorsque t tend vers l'infini.

Corrigé

.PARTIE I.

De façon préliminaire, dans un problème de probabilités, il est toujours utile de **schématiser les données de l'énoncé**, ici, les règles d'évolution décrites pour le micro-organisme :



$\boxed{\text{I.1.}}$ Pour $n = 2$ et $i = 1$, la relation (1) s'énonce : $P_1 = \frac{1}{2}.P_2 + \frac{1}{2}.P_0$.

Or, par les conventions : $P_0 = 0$ et $P_2 = 1$ (car ici $P_2 = P_n$, puisque $n = 2$). Donc la relation (1), pour $n = 2$, $i = 1$, s'énonce encore plus simplement : (1') ▌ $P_1 = \frac{1}{2}$.

◇ Démontrons (1') : $P_1 = \frac{1}{2}$.
Par définition, P_1 désigne la probabilité pour un micro-organisme d'atteindre l'état n (ici $n = 2$), sachant qu'il est à l'instant initial dans l'état $i = 1$.
L'état initial étant différent de 0 et de n, l'évolution du micro-organisme est régie par la **règle (1)**, il évolue donc, à l'instant suivant $k = 1$:

$*_1$ soit vers l'état $i + 1$, ici l'état 2, avec la probabilité $\frac{i}{n}$, ici égale à $\frac{1}{2}$,
$*_2$ soit vers l'état $i - 1$, ici l'état 0, avec la probabilité $\frac{n-i}{n}$, ici égale à $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, si $n = 2$ et $i = 1$, **nécessairement**, le micro-organisme est dès l'instant $k = 1$, dans l'état 0 (organisme sain) ou dans l'état n (mort de l'organisme).
Puisque, par hypothèse (**règle (2)**), le micro-organisme n'évolue plus lorsqu'il atteint l'état 0, ou l'état n, il apparaît qu'ici le micro-organisme n'évolue plus après l'instant $k = 1$ et que **la seule possibilité pour qu'il atteigne l'état $n = 2$ est qu'il l'atteigne à l'instant 1**, ce qui se fait avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (*c.f.* $*_1$).
On a donc vérifié que :

$$\boxed{\text{si } n = 2 \text{ et } i = 1,\quad P_1 = \tfrac{1}{2}\quad i.e. \text{ la relation (1) est vraie}}.$$

I.2. *Comme la première, cette question est assez élémentaire. En effet*, puisque, pour toutes les valeurs de n envisagées dans ce problème (à savoir $n \geq 2$), il est admis que la relation (1) est vraie pour tout i compris entre 1 et $n - 1$(*), il ne s'agit en fait, dans cette question **2.**, que de démontrer (1) pour $i \geq n$.

◇ On peut traiter ensemble toutes les valeurs de i supérieures ou égales à $n + 1$:

En effet, si $i \geq n+1$, alors dans (1), tous les indices (i, $i+1$ et $i-1$) sont supérieurs ou égaux à n. Or, par convention, d'une part $P_n = 1$ (*c.f.* introduction de la **Partie I**), et d'autre part $P_k = 1$ si $k \geq n + 1$, comme l'énoncé le pose en cette question **I.2.**.
Donc, si $i \geq n + 1$, $P_i = P_{i+1} = P_{i-1} = 1$, et, par conséquent, (1) est vérifiée car :

$$\frac{i}{n} \times P_{i+1} + \frac{n-i}{n} \times P_{i-1} = \frac{i}{n} \times 1 + \frac{n-i}{n} \times 1 = \frac{i+(n-i)}{n} = 1 = P_i.$$

◇ Reste alors à étudier le dernier cas pour lequel $i = n$:
Si dans la relation (1) on prend $i = n$, (1) s'écrit : $P_n = \frac{n}{n} \times P_{n+1} + \frac{n-n}{n} \times P_{n-1}$, c'est-à-dire, après simplification : $P_n = P_{n+1}$. Or, comme on vient de le préciser, d'après les conventions, $P_n = 1$ et $P_{n+1} = 1$, donc pour $i = n$ aussi, (1) est vraie.

En conclusion, on a montré que la relation (1) est vraie pour tout $i \geq n + 1$, et il est admis que (1) est vraie si $i \in [\![1, n-1]\!]$ donc :

$$\boxed{\text{la relation (1) est vraie pour tout } i > 0}.$$

I.3.a. La fonction G, telle qu'elle est définie, est une **série entière**. De ce fait, et **d'après le cours**, G est **continue et dérivable**, sur son **intervalle ouvert de convergence** $]-R, R[$.
Il reste à évaluer le rayon de convergence R de G.

◇ Pour $|s| < 1$: **la série $\sum_{k\geq 1} P_k s^k$ converge absolument**. En effet, pour k compris entre 1 et $n - 1$, P_k désigne une probabilité, donc : $0 \leq P_k \leq 1$. Et pour

(*) le lecteur trouvera en fin de problème les indications pour une démonstration de (1) pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

$k \geq n$, par convention : $P_k = 1$. Ainsi, pour le terme général de la série des valeurs absolues $\left(\sum_{k\geq 1} |P_k s^k|\right)$, on a : $\forall k \geq 1, \quad |P_k|.|s^k| \leq |s^k|, \; i.e. \; |P_k.s^k| \leq |s|^k$.

Or, la série $\sum_{k\geq 0} |s|^k$ est convergente (c'est une série géométrique de raison $|s| < 1$).
Donc, **par la règle de comparaison des séries à termes positifs** :

la série $\sum_{k\geq 1} |P_k s^k|$ est convergente.

Ainsi, on a montré que :

$\forall s \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k\geq 1} P_k s^k$ est absolument convergente, donc convergente.

On en déduit que :

la série entière G a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1(*),

et par suite, que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de G, par conséquent : $\boxed{G \text{ est continue et dérivable sur }]-1, 1[}$.

I.3.b. *Il est pertinent de considérer l'égalité proposée comme une égalité entre fonctions, plus précisément comme l'égalité de deux séries entières sur l'intervalle* $]0, 1[$. *Aussi cherchera-t-on à montrer que leurs cœfficients pour chaque degré sont égaux, ce qui établira l'égalité des sommes.*

• Écriture de $s(1 - s^2)G'(s)$ comme somme d'une série entière :

D 'après le cours, sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$, la dérivée de la série entière $\sum_{k\geq 0} P_k s^k$ est la fonction $s \mapsto \sum_{k\geq 1}^{\infty} k.P_k s^{k-1}$.
Donc, pour tout $s \in]0, 1[\subset]-R, R[$, on a :

$$s(1 - s^2)G'(s) = (s - s^3).\sum_{k=1}^{+\infty} k.P_k s^{k-1} = s.\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k.P_k.s^{k-1}\right) - s^3.\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k.P_k.s^{k-1}\right).$$

La méthode est ensuite tout à fait courante, et a pour but de ne plus faire apparaître qu'une seule somme du type $\sum_{k\geq k_0}^{+\infty} a_k s^k$.

On rentre les facteurs s et s^3, indépendants de k, dans les sommes, ce qui est licite, et il vient :

$$s(1 - s^2)G'(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.P_k.s^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k.P_k.s^{k+2}.$$

En décalant alors **de 2 l'indice** de la seconde somme (poser $k' = k + 2$), on obtient :

$$\begin{aligned} s(1 - s^2)G'(s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k.P_k.s^k - \sum_{k=3}^{+\infty}(k-2).P_{k-2}.s^k \\ &= P_1.s + 2P_2.s^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} k.P_k.s^k - \sum_{k=3}^{+\infty}(k-2).P_{k-2}.s^k \end{aligned}$$

Et puisque **la différence de deux séries convergentes est convergente et converge vers la différence des sommes**, on a encore :

$$\textbf{(1)} \quad s(1 - s^2)G'(s) = P_1.s + 2P_2.s^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} \left(k.P_k - (k-2).P_{k-2}\right).s^k.$$

(*) en fait $R = 1$, car pour $s = 1$, le terme général de la série $\sum_{k\geq 1} P_k s^k$, est égal à 1 pour $k \geq n$. Donc le terme général ne tend pas vers 0 (mais vers 1), et par conséquent la série diverge.

• Traitons de même le second membre, avec toujours $s \in]0,1[$:

$$\left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} nP_k s^{k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} P_k s^k - \sum_{k=1}^{+\infty}(n-1).P_k s^{k+2}$$

En décalant les indices des première et troisième sommes, en posant respectivement $k' = k+1$ et $k' = k+2$, on peut exprimer toutes les sommes à l'aide de s^k :

$$\left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} nP_{k-1} s^k + \sum_{k=1}^{+\infty} P_k s^k - \sum_{k=3}^{+\infty}(n-1).P_{k-2} s^k.$$

Puis, après avoir sorti des sommes les termes d'indice $k < 3$, on peut, pour les valeurs communes de l'indice, parce que les séries sont convergentes, rassembler les trois sommes en une seule.

En partant de l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}&\left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s)\\ &\quad = n.P_1.s^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} nP_{k-1}s^k + P_1.s + P_2.s^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} P_k s^k - \sum_{k=3}^{+\infty}(n-1).P_{k-2}s^k,\end{aligned}$$

puis :

$$\textbf{(2)}\quad \begin{aligned}&\left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s)\\ &\quad = P_1.s + (n.P_1+P_2).s^2 + \sum_{k=3}^{+\infty}\left(nP_{k-1} + P_k - (n-1).P_{k-2}\right)s^k.\end{aligned}$$

Il reste alors à ***comparer cette expression, à celle précédemment obtenue :***

$$(1)\quad s(1-s^2)G'(s) = P_1.s + 2P_2.s^2 + \sum_{k=3}^{+\infty}\left(k.P_k - (k-2).P_{k-2}\right).s^k.$$

On dispose pour cela de la **relation (1) de l'énoncé** (*c.f.* **I.2.**) :

$$\left(\forall i>0,\ P_i = \tfrac{i}{n}.P_{i+1} + \tfrac{n-i}{n}.P_{i-1}\right) \iff \textbf{(1')}\ \left(\forall i>0,\ \underline{n.P_i = i.P_{i+1} + (n-i).P_{i-1}}\right).$$

- pour $i = 1$: puisque $P_0 = 0$ par convention, cette dernière relation s'écrit : $n.P_1 = P_2$. Par suite, $nP_1 + P_2 = 2P_2$, ce qui permet de vérifier que :
  dans (1) et (2), les parties polynômiales, $P_1.s + (n.P_1+P_2).s^2$ et $P_1.s + 2P_2.s^2$, des fonctions $s(1-s^2)G'(s)$ et $\left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s)$ **sont égales**.
- pour $i = k-1$ (et $k \geq 3$) : (1') s'écrit $n.P_{k-1} = (k-1).P_k + (n-k+1).P_{k-2}$, ce qui permet de réécrire le cœfficient de s^k de la somme dans (2) :

$$\begin{aligned}nP_{k-1} + P_k - (n-1).P_{k-2} &= \left[(k-1).P_k + (n-k+1).P_{k-2}\right] + P_k - (n-1).P_{k-2}\\ &= \left[(k-1)+k\right].P_k + \left[(n-k+1)-(n-1)\right].P_{k-2}.\end{aligned}$$

En simplifiant les cœfficients de P_k et P_{k-2}, on obtient donc que :

$$\forall k \geq 3,\quad nP_{k-1} + P_k - (n-1).P_{k-2} = k.P_k - (k-2).P_{k-2},$$

Ainsi, comme c'est le cas pour les parties polynômiales :
les sommes dans les expressions (1) et (2) des fonctions $s(1-s^2)G'(s)$ et $\left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s)$ **sont aussi égales.**

En conclusion, en montrant que les expressions (1) et (2) sont égales, on a montré que :

$$\boxed{\forall s \in]0,1[,\quad s(1-s^2).G'(s) = \left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s)}.$$

I.3.c. *La vérification de l'égalité est laissée aux soins du lecteur dans la mesure où* le résultat s'obtient par une simple réduction au même dénominateur des trois fractions du membre de droite de l'égalité attendue.
(on utilisera bien sûr aussi que $(1-s)(1+s) = 1-s^2$).

◇ Explicitation de la fonction $G(s)$:

D'après **I.3.b.**, sur l'intervalle $]0,1[$, **G vérifie l'équation différentielle :**

$$s(1-s^2).G'(s) = \left(ns+1-(n-1)s^2\right)G(s).$$

Or, pour $s \in\,]0,1[$, on peut diviser les deux membres de cette égalité par $s(1-s^2).G(s)$, en effet :

$G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k s^k$ est, pour $s > 0$, est une somme (infinie) de réels positifs, donc elle est supérieure à l'un de ses termes, par exemple le terme de rang n dont on sait qu'il est égal à $P_n s^n = 1.s^n > 0$.

Ainsi, pour $s \in\,]0,1[$: $G(s) \geq s^n > 0$, et aussi $s(1-s^2) \neq 0$.

Après division, il vient :

$$\forall\, s \in\,]0,1[,\quad \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{ns+1-(n-1)s^2}{s(1-s^2)}.$$

Or, d'une part, on reconnaît en $G'(s)/G(s)$ la dérivée de la fonction $s \mapsto \ln G(s)$ (définie et dérivable sur $]0,1[$, car $G > 0$ sur $]0,1[$).

Et, **d'autre part**, grâce à l'égalité $\frac{ns+1-(n-1)s^2}{s(1-s^2)} = \frac{n-1}{1+s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$ $(0 < s < 1)$, on reconnaît que la fraction rationnelle au membre de droite est l'expression de la dérivée de la fonction :

$$\varphi\ :\ s \longmapsto (n-1)\ln(1+s) + \ln s - \ln(1-s).$$

(fonction dont on vérifie qu'elle est définie et dérivable sur $]0,1[$)

Ainsi, sur $]0,1[$, les fonctions $s \mapsto \ln G(s)$ et φ sont dérivables et leurs dérivées sont égales, donc, **d'après le cours** :

il existe une constante réelle K, telle que : $\forall\, s \in\,]0,1[,\quad \ln G(s) = \varphi(s) + K.$

La fonction ln étant bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, il existe un (unique) antécédent, $C > 0$, du réel K par la fonction ln, et **on peut écrire :** $K = \ln C$.

Le résultat s'écrit alors, en explicitant aussi $\varphi(s)$:

$$\forall\, s \in\,]0,1[,\quad \ln G(s) = (n-1)\ln(1+s) + \ln s - \ln(1-s) + \ln C,$$

puis, en utilisant les propriétés du logarithme :

$$\forall\, s \in\,]0,1[,\quad \ln G(s) = \ln\left[(1+s)^{n-1}\right] + \ln s - \ln(1-s) + \ln C = \ln\left[C.\frac{s.(1+s)^{n-1}}{1-s}\right].$$

Il reste à composer l'égalité $\ln G(s) = \ln\left[C.\frac{s.(1+s)^{n-1}}{1-s}\right]$ par la fonction exponentielle pour obtenir que :

$$\boxed{\forall\, s \in\,]0,1[,\quad G(s) = C.\frac{s.(1+s)^{n-1}}{1-s}}.$$

◇ Enfin, on peut étendre l'égalité à $s = 0$, en constatant simplement que :

$$C.\frac{s.(1+s)^{n-1}}{1-s}\bigg|_{s=0} = 0\ \text{ ; et, d'après } \mathbf{I.3.a.},\quad G(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k s^k\bigg|_{s=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k.0 = 0.$$

Les deux fonctions sont donc égales aussi en 0.

I.4.a. Le premier des **Rappels** permet de substituer $\sum_{k=0}^{+\infty} s^k$ à $\frac{1}{1-s}$, dans l'expression de $G(s)$ obtenue au **I.3.c.**, ce qui donne :

$$\forall\, s \in [0,1[,\quad G(s) = C.s.(1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k.$$

Il s'agit alors, pour pouvoir utiliser le second des **Rappels**, *de transformer cette expression en une somme de série, pour pouvoir la comparer au développement déjà connu $G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k s^k$ (c.f.* ***I.3.a.****).*

◇ Développement en série entière de la fonction $s \mapsto s.(1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k$:

Cette fonction est le **produit de deux fonctions admettant un DSE$_0$**(*). En effet, en utilisant le **développement du binôme** de $(a+b)^{n-1}$, avec $a = s$ et $b = 1$ (en rappelant que par hypothèse $n \geq 2$), il vient :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad s.(1+s)^{n-1} = s.\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i s^i = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i s^{i+1} = \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} s^i.$$

(moyennant le changement d'indice $i' = i+1$ pour la dernière égalité)

En conséquence, la fonction $s \mapsto s(1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k$, est le **produit des deux séries entières**, dont l'une est la série géométrique (et converge pour $|s| < 1$) :

$$s \mapsto \sum_{i\geq 0}^{+\infty} a_i s^i, \text{ avec } \begin{cases} a_i = C_{n-1}^{i-1} & \text{si } 1\leq i \leq n \\ a_i = 0 & \text{si } i>n \text{ ou } i=0 \end{cases}, \quad \text{et} \quad s \mapsto \sum_{i\geq 0}^{+\infty} b_i s^i, \text{ avec } \begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}, \\ \quad b_i = 1. \end{cases}$$

de rayons de convergence respectifs : $\underline{R_1 = \infty}$ (la fonction est **polynômiale**) et $\underline{R_2 = 1}$.

D'après le cours :

la fonction $s \mapsto (1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k$, produit de ces deux séries entières, admet un développement en série entière en 0, $\sum_{k\geq 0} c_k s^k$, avec, pour tout $k \geq 0$:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \text{ et de rayon de convergence } R = \min(R_1, R_2) = 1.$$

Ici, puisque pour tout $i \in \mathbb{N}$, $b_i = 1$, on peut simplifier c_k en $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$, puis par la définition des a_k, on a plus précisément :

$$c_0 = 0,\ c_k = \sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^{i-1}, \text{ si } 1 \leq k \leq n, \quad \text{et} \quad c_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} = (1+1)^{n-1}}_{\textbf{(formule du binôme)}} = 1, \text{ si } k > n.$$

$\begin{pmatrix}\text{en posant}\\ i' = i-1\end{pmatrix}$

et on notera que, pour $k = n$, on a, par le même calcul que pour $k > n$, $\underline{c_n = 1}$.

En conclusion, la fonction $s \mapsto s(1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k$ admet le DSE$_0$ suivant :

$$\forall s \in]-1, 1[, \quad s(1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^{i-1}\right) s^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} s^k.$$

◇ En vertu de **I.3.c.**, pour $s \in [0, 1[$, $G(s) = \underline{C}.s(1+s)^{n-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} s^k$, donc :

$$\forall s \in [0, 1[, \quad G(s) = \sum_{k=1}^{n} \left(C.\sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^{i-1}\right) s^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} C.s^k.$$

On dispose donc pour G de deux développements en séries sur l'intervalle $[0, 1[$: le développement ci-dessus, et le DSE$_0$ de G (*c.f.* **I.3.a.**) : $G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k.s^k$. D'après **le second des Rappels**, les cœfficients de ces deux développements sont égaux, ce qui donne en particulier :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P_k = C.\left(\sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^{i-1}\right)}, \text{ et pour } k > n, \quad P_k = C.$$

(*) DSE$_0$: développement en série entière en 0.

On pourra noter que : pour $k = 0$, l'identification des cœfficients donne $P_0 = 0$(*).

$\boxed{\textbf{I.4.b.}}$ Il est fixé par les conventions que $P_n = 1$. *Cependant, en étendant la définition de P_i à la valeur $i = n$, P_n désigne la probabilité d'atteindre l'état n pour un micro-organisme iniatialement en l'état 0. Il est donc cohérent de pouvoir poser $P_n = 1$. Ceci étant, l'énoncé ne nous demande pas de nous attarder sur ces considérations, mais nous engage simplement à utiliser que $P_n = 1$.*

◇ D'après le **I.4.a.**, $P_n = C.\left(\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1}\right)$, or, ainsi qu'on l'a déjà mentionné, la somme, égale à c_n, vaut 1.
En conséquence, l'égalité se lit en fait : $P_n = C$. Et comme $P_n = 1$, il vient : $\boxed{C = 1}$.

◇ On peut alors reprendre le résultat du **I.4a.** avec cette valeur pour C, ce qui donne :

$$\boxed{\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ P_k = \sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^{i-1},\ \text{et permet d'expliciter } P_1 :\ \underline{P_1} = \sum_{i=1}^{1} C_{n-1}^{i-1} = C_{n-1}^{0} = \underline{1}}.$$

Quant aux autres valeurs de k : on a montré au **I.4.a.** que $P_0 = 0$, et $P_k = C$ $(k > n)$, ce qui donne, de façon cohérente avec les conventions :

$$\boxed{P_0 = 0, \text{ et pour tout } k > n,\ \ P_k = 1}.$$

.PARTIE II.

Pour plus de clarté, **on notera (H1), (H2),...,(H5)**, les cinq hypothèses de cette **PARTIE II**, et en notant encore, pour tout $t \geq 0$ et i compris entre 1 et n, $(\boldsymbol{E(t)}{=}\boldsymbol{i})$, **l'événement "l'organisme est dans l'état $\boldsymbol{i}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$"**, on reformulera les hypothèses (H1), (H2) et (H3), en utilisant le formalisme des probabilités conditionnelles, ce qui donne :

- (H1) : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad P\big(E(t+h) = i \mid E(t) = i-1\big) = \lambda_i h + o(h)$.
  ou encore, en notant $j = i - 1$ (auquel cas on a la correspondance $i = j + 1$) :

(H1') $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0, n-1]\!],\quad P\big(E(t+h) = j+1 \mid E(t) = j\big) = \lambda_{j+1} h + o(h)}$.

- (H2) : pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\quad P\big(E(t+h) = i \mid E(t) = i+1\big) = \mu_i h + o(h)$.
  ou encore, en notant $j = i + 1$ (on a alors $i = j - 1$) :

(H2') $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![1, n]\!],\quad P\big(E(t+h) = j-1 \mid E(t) = j\big) = \lambda_{j-1} h + o(h)}$.

- **Quant à l'hypothèse (H3),** incomplète, on en profite pour la préciser. En effet, il s'agit de comprendre que, **pour un organisme à l'état $\boldsymbol{i}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$**, la probabilité d'atteindre un état quelqu'il soit, pourvu qu'il soit différent des états i, $i+1$ ou $i-1$, est égale à $o(h)$. (la précision sur l'appartenance de $i-1$, $i+1$ à $[\![0, n]\!]$ signifiant juste que si $i = 0$, l'état $i - 1$ est inenvisageable, et de même l'état $i + 1$ si $i = n$, mais *cela allait sans dire*). **(H3) se résume donc en** :

(H3) $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0, n]\!] - \{i-1, i, i+1\},\quad P\big(E(t+h) = j \mid E(t) = i\big) = o(h)}$.

(*) Concernant l'identification qui a été faite entre les cœfficients de deux développements $\sum_{k\geq 0} c_k s^k$ et $\sum_{k\geq 0} \tilde{c}_k s^k$, égaux sur $[0, 1[$, cette identification est légitimée par le cours si les développement sont égaux sur un intervalle non vide du type $]-R, R[$ (unicité du DSE_0), en fait l'identification est possible dès lors que les développements sont égaux sur intervalle contenant 0, c'est ce que légitime le rappel de l'énoncé.