On constate que A est une matrice **d'ordre 3**, admettant **3 valeurs propres distinctes**, donc : $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

Ce résultat était prévisible, car, **d'après le cours** :

$$\boxed{\text{Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable}}.$$

$\boxed{\textbf{1.5.}}$ Diagonalisation de A :

Les **vecteurs propres** relatifs à une valeur propre λ de A, sont tels que leurs coordonnées $X = {}^t(x, y, z)$ vérifient le système $(A - \lambda I)X = O$.

> Parce que les manipulations opérées au **1.4.** ont été effectuées sur les **lignes** de A et jamais sur les colonnes, **le système $(A - \lambda I)X = \mathbf{o}$ est équivalent au** (*i.e.* a les mêmes solutions que) le **système $A'X = \mathbf{o}$** où A' est la dernière **réduite de Gauss de A** obtenue au **1.4.**

Les vecteurs propres de A relatif à une valeur propre λ de A, sont donc les vecteurs dont les coordonnées satisfont le système :

$$(S_\lambda)\begin{cases} x - 4y - (3+\lambda)z = 0 \\ 22y + (44 + 6\lambda - \lambda^2)z = 0 \\ (60\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^3)z = 0 \end{cases}$$

Pour chacune des valeurs propres, $\lambda = 0, -4, 5$, la dernière équation s'écrit $0 = 0$ (car λ est racine du polynôme). La recherche des vecteurs propres se termine donc ainsi :

• pour $\lambda = 0$:

$$(S_0)\begin{cases} x - 4y - 3z = 0 \\ 22y + 44z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 4y - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

dont la **forme générale des solutions** est : $(-5z, -2z, z)$ où z est un réel quelconque.

Par conséquent, le *s.e.v.* propre, E_0, relatif à $\lambda = 0$ est engendré, *par exemple*, par le vecteur $(-5, -2, 1)$ ou encore par $(5, 2, -1)$, *i.e.* $\boxed{E_0 = VECT[(5, 2, -1)]}$.

• pour $\lambda = -5$:

$$(S_{-5})\begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ 22y - 11z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

On peut donc donner pour forme générale des solutions est : $(0, y, 2y)$ $(y \in \mathbb{R})$.

Et par suite : $\boxed{E_{-5} = VECT[(0, 1, 2)]}$.

• pour $\lambda = 6$:

$$(S_6)\begin{cases} x - 4y - 9z = 0 \\ 22y + 44z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 4y - 9z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Et la forme générale des solutions est : $(z, -2z, z)$ où z est un réel quelconque.

D'où : $\boxed{E_6 = VECT[(1, -2, 1)]}$.

◇ **On peut vérifier que** les vecteurs obtenus sont **perpendiculaires deux à deux**, en calculant leur produit scalaire par la formule : $(x, y, z).(x', y', z') = xx' + yy' + zz'$,

puis calculer leur **norme** par la formule : $\| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On obtient alors :

$\| (5, 2, -1) \| = \sqrt{30}$, $\quad \| (0, 1, 2) \| = \sqrt{5}$ $\quad$ et $\quad \| (1, -2, 1) \| = \sqrt{6}$

La base formée par les trois vecteurs propres déjà choisis, est donc naturellement **orthogonale**, et elle donnera une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, si l'on **norme** ces vecteurs.

Ce qui se fait en les multipliant par l'inverse de leur norme. On obtient alors pour base orthonormée de vecteurs propres la famille :

$$\mathcal{B}'\left(\frac{1}{\sqrt{30}}(5,2,-1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2);\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right)$$

et la matrice de passage correspondante s'écrit :

$$P=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \text{soit}\ \boxed{P=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5 & 0 & \sqrt{5}\\ 2 & \sqrt{6} & -2\sqrt{5}\\ -1 & 2\sqrt{6} & \sqrt{5}\end{pmatrix}}.$$

1.6. La matrice de passage P permet de lier les coordonnées $X={}^t(\,x\quad y\quad z\,)$ d'un vecteur $\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ dans la base canonique à ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, $X'={}^t(\,x'\quad y'\quad z'\,)$, par la **formule de cours** : $PX'=X$. D'où la première réécriture de (E) :

$$\left({}^tXAX=1\right)\iff\left({}^t(PX')A(PX')=1\right)\iff(\mathbf{1})\left({}^tX'{}^tPAPX'=1\right).$$

Or, d'une part, P est une matrice de **changement de bases orthonormées**, donc est telle que $\boldsymbol{{}^tP=P^{-1}}$ (ce qu'on vérifie en effectuant le produit ${}^tP.P$), et d'autre part, P est une matrice de passage qui rend A diagonale et compte-tenu de l'**ordre des vecteurs propres dans $\boldsymbol{P}$**, on a : $A=P.\mathrm{Diag}\,[0,-5,6]\,.P^{-1}$, ou de façon équivalente : $P^{-1}AP=\mathrm{Diag}\,[0,-5,6]$, soit, puisque ${}^tP=P^{-1}$: ${}^tPAP=\mathrm{Diag}\,[0,-5,6]$.
D'où, à partir de (1), la réécriture finale de (E) : ${}^tX'.\mathrm{Diag}\,[0,-5,6]\,.X'=1.$

En effectuant le produit ${}^tX'.\mathrm{Diag}\,[0,-5,6]\,.X'$, on obtient pour **équation de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}'$** :

$$\boxed{(E')\ :\ -5y'^2+6z'^2=1}.$$

1.7. Dans le nouveau repère de même origine O, dont les axes sont dirigés par les vecteurs $\left\{\frac{1}{\sqrt{30}}(5,2,-1);\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1);\ \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)\right\}$, d'après (E'), la surface $\mathcal{E}$ est constituée des points $M\,(x',y',z')$ tels que $-5y'^2+6z'^2=1$ *i.e.* tels que :

$z'=\sqrt{(1+5y'^2)/6}$, ou $z'=-\sqrt{(1+5y'^2)/6}$, tandis que x' est quelconque.

Dans le nouveau repère :

la surface $\mathcal{E}$ est constituée des points $M\,(x',y',z')$ tels que $K\,(0,y',z')$, projeté orthogonal de M sur le plan $(y'Oz')$, appartienne à l'une des deux courbes du plan $(y'Oz')$, dont les équations sont les suivantes :

$(\mathcal{C}_1)\ :\ z'=\varphi(y')$ et $(\mathcal{C}_2)\ :\ z'=-\varphi(y')$, avec $\varphi\ :\ y'\mapsto\sqrt{(1+5y'^2)/6}$.

• L'étude de φ est laissée aux soins du lecteur (on trouve que φ est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, admet une tangente horizontale en 0). On notera ici en revanche que φ admet **deux droites asymptotes** d'équations : $z=\frac{5}{6}.y$ et $z=-\frac{5}{6}.y$.
(Le DL(0) de $\sqrt{1+x}$, permet d'écrire pour y' tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$:

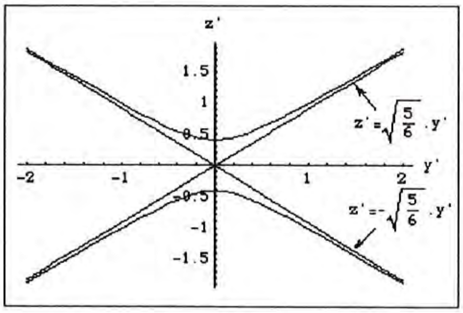
$$\varphi(y')=\sqrt{\frac{1+5y'^2}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.|y'|.\sqrt{1+\frac{1}{5y'^2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.|y'|.\left(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{5y'^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{5y'^2}\right)\right)$$

Ce qui donne(*): $\varphi(y')=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.|y'|+\frac{1}{2.\sqrt{30}}.\frac{1}{|y'|}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{y'}\right)$, et établit le résultat :

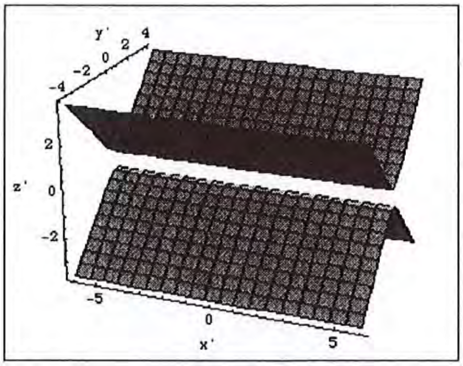
• en $+\infty$: $\varphi(y')=(\sqrt{5}/\sqrt{6}).y'+\varepsilon(y')$, avec $\lim_{y'\to+\infty}\varepsilon(y')=0$
• en $-\infty$: $\varphi(y')=-(\sqrt{5}/\sqrt{6}).y'+\varepsilon(y')$, avec $\lim_{y'\to-\infty}\varepsilon(y')=0$.)

(*) On peut bien sûr utiliser aussi la méthode habituelle : recherche de $\lim\limits_{y'\to+\infty}\frac{\varphi(y')}{y'}$, puis, si cette limite est réelle et vaut a, recherche de $\lim\limits_{y'\to+\infty}\varphi(y')-a.y'$.

La surface $\mathcal{E}$ apparaît alors comme la réunion des droites parallèles à (Ox) passant par $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.



Courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ du plan $(y'Oz')$



Surface $\mathcal{E}$ dans le repère $(0, x', y', z')$

◇ Compte-tenu des formules de changement de base obtenue en effectuant le produit $P.X'$, dans $P.X' = X$:
$x = \frac{1}{\sqrt{30}}(5x' + \sqrt{5}z')$; $y = \frac{1}{\sqrt{30}}(2x' + \sqrt{6}y' - 2\sqrt{5}z')$; $z' = \frac{1}{\sqrt{30}}(-x' + 2\sqrt{6}y' + \sqrt{5}z')$,
il apparaît, **par substitution à y et z de leurs expressions en fonction de x', y' et z'**, que le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $(\mathcal{P})$: $y + 2z = 0$ dans l'ancien repère, admet pour équation dans le nouveau repère :

$$(\mathcal{P}) : \ 5\sqrt{6}.y' = 0, \ i.e. \ \ y' = 0.$$

Alors :

L'intersection étudiée en **1.1.** apparaît comme l'intersection de $\mathcal{E}$ avec l'un de ses plans de symétrie : le plan d'équation $(y' = 0)$ dans le nouveau repère

.

.Problème n°2.

2.1. Rappels sur la loi exponentielle :
La loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est caractérisée par la densité suivante :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La durée de vie d'un noyau radioactif, la durée de vie d'un composant électronique, sont autant d'exemples de variables aléatoires suivant une loi exponentielle

.

2.2. Loi d'une somme de variables exponentielles de même paramètre :
La démonstration se fait par récurrence. ***Le résultat doit être connu,*** *même s'il n'est pas au programme,* ***ainsi que la démonstration.***

• Conjectures sur la loi de S_n : D'après le **rappel** de l'énoncé, si X_1 et X_2 sont deux V.A. indépendantes, suivant une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, de densité notée f, alors $S_2 = X_1 + X_2$ suit une loi dont la densité est f_2 donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Or, (*c.f.* 2.1.), si $y < 0$, alors $f(y) = 0$, et de même, si $x - y < 0$, c'est-à-dire si $y > x$, alors $f(x-y) = 0$. **La fonction intégrée,** $y \mapsto f(x-y)f(y)$ est donc **non nulle** seulement **sur $[0, x]$** si $x \geq 0$, et **nulle sur $\mathbb{R}$ si** $x < 0$.

Par conséquent, par ces remarques, f_2 est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et sur $\mathbb{R}_+$, en utilisant la définition de f :

$$\underline{f_2(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x f(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)}\lambda e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^x \lambda^2 e^{\lambda(y-x)-\lambda y}\,\mathrm{d}y = \lambda^2 e^{-\lambda x}.\int_0^x 1.\,\mathrm{d}y = \underline{x.\lambda^2 e^{-\lambda x}}.$$

Le lecteur pourra de même déterminer pour S_3, sa densité f_3, et se convaincre qu'il est légitime de formuler, pour tout $n \geq 1$, l'hypothèse de récurrence suivante :

$$(HR_n) : \quad \left(S_n \text{ suit une loi de densité } f_n : x \longmapsto \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \right)$$

- Au rang $k = 1$: on constate que f_1, définie dans l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_1)$, correspond bien à la densité d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, *i.e.* à la densité de X_1.
  Par conséquent : (HR_1) est vraie.
- Supposons que (HR_n) est vraie pour un certain entier $n \geq 1$:
  $S_{n+1} = X_1 + \ldots X_{n+1}$ est aussi la somme de S_n et de X_{n+1}, qui sont indépendantes **car** S_n est fonction de X_1, X_2,...,X_n, elles-même indépendantes de X_{n+1} (**propriété du cours**). Par conséquent, (*c.f.* **rappel**), la densité de S_{n+1} est f_{n+1}, donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)f_n(y)dy$

  On note alors que : pour $y < 0$, $f_n(y) = 0$; et de même, pour $x - y < 0$, c'est-à-dire pour $y > x$, $f_1(x-y) = 0$. **Par conséquent**, pour tout x réel positif :

$$\underline{f_{n+1}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x f(x-y)f_n(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(n-1)!}.\int_0^x \lambda^{n+1}y^{n-1}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\lambda^{n+1}.e^{-\lambda x}}{(n-1)!}.\int_0^x y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{\lambda^{n+1}.e^{-\lambda x}}{(n-1)!}.\left[\frac{y^n}{n}\right]_0^x = \underline{\frac{x^{(n+1)-1}}{n!}.\lambda^{n+1}.e^{-\lambda x}}.$$

  Tandis que : pour $x < 0$, $f_{n+1}(x) = 0$ (car la fonction intégrée est nulle sur $\mathbb{R}$).
  Ainsi, **on a montré que**, pour $n \geq 1$: $\big((HR_n) \text{ vraie}\big) \Longrightarrow \big((HR_{n+1}) \text{ vraie}\big)$.

On a donc, **par récurrence**, que, pour tout $n \geq 1$:

S_n suit une loi de densité f_n, nulle sur $\mathbb{R}_-$, et, sur $\mathbb{R}_+$, telle que : $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n e^{-\lambda x}$ (**loi gamma** de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et n).

2.3. **D'après le cours**, pour deux variables aléatoires X et Y, discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, **prenant un nombre fini de valeurs entières positives, indépendantes**, la fonction génératrice de $X+Y$ est polynômiale, donnée par :

$$g_{X+Y}(x) = g_X(x).g_Y(x).$$

Par une **récurrence** (*laissée aux soins du lecteur*), il s'ensuit que pour tout $n \geq 1$:

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{S_n} = g_{X_1+X_2+\ldots+X_n} = g_{X_1}.g_{X_2}.\cdots.g_{X_n}.$

◇ Comme, pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, N\}$:

$$g_{X_i}(x) = \sum_{k=1}^{N} P(X_i = k)x^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{N} = \frac{x}{N}.\left(\frac{1-x^N}{1-x}\right)$$ [somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison x et de premier terme x/N].

On a alors, en vertu de (2) : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_{S_n}(x) = \left(\frac{x}{N}\right)^n . \left(\frac{1-x^N}{1-x}\right)^n}$.

2.4.a *L'idée du calcul est simple et consiste à* ***scinder en deux la somme*** :

$$\underline{\sum_{j=0}^{J}(a_j - a_{j-1})z^j} = \sum_{j=0}^{J} a_j z^j - \sum_{j=0}^{J} a_{j-1} z^j = \sum_{j=0}^{J} a_j z^j - \sum_{j=-1}^{J-1} a_j z^{j+1} \quad \left(\text{par le changement d'indice : } j' = j-1\right)$$

$$= \boldsymbol{a_J z^J} + \sum_{j=0}^{J-1} a_j z^j - z.\sum_{j=0}^{J-1} a_j z^j \quad (\text{car } a_{-1} = 0).$$

En effectuant une **factorisation par la somme**, on vérifie donc que :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{J}(a_j - a_{j-1})z^j = (1-z).\sum_{j=0}^{J-1} a_j z^j + a_J z^J}.$$

2.4.b La fonction $z \longmapsto \frac{1}{1-z}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{1\}$, et **on montre par récurrence que** :

$$(3) \quad \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \left(\textit{\textbf{Résultat à connaître}}, \text{ dont la démonstration est laissée à vos soins}\right).$$

D'où l'idée de dériver le DSE$_0$ de $1/(1-z)$.

◇ *En examinant les deux ou trois premières dérivées du DSE$_0$ de $1/(1-z)$ (en dérivant terme à terme), ou parce que vous avez retenu ce* ***résultat à connaître***, on est amené à poser, pour $n \geq 0$, l'hypothèse de récurrence suivante :

$$(\mathcal{P}_n) \quad \forall\, |z| < 1, \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)} = \sum_{k=n}^{+\infty} k.(k-1)\ldots(k-n+1)z^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n}.$$

- Au rang $n = 0$: **d'après le cours**, $z \mapsto 1/(1-z)$ admet pour DSE$_0$: $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$, de rayon de convergence 1. Ce qui établit que $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
- Si on suppose que pour un entier $n \geq 0$, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie : alors, pour le rang suivant, $[1/(1-z)]^{(n)}$, étant par hypothèse de récurrence, une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, **d'après le cours**, sa dérivée (*i.e.* la dérivée d'ordre $(n+1)$ de $z \mapsto 1/(1-z)$) existe et est elle aussi développable en série entière en 0, avec un rayon de convergence égal, et son DSE$_0$ s'obtient en dérivant terme à terme celui de $[1/(1-z)]^{(n)}$, donné par l'hypothèse de récurrence. On a donc, pour tout $|z| < 1$, en notant que le cœfficient du terme de degré n s'annule à cause du facteur $(k-n)$:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} k.(k-1)\ldots(k-n+1).\underline{(k-n)}.z^{k-n-1} = \sum_{k=\underline{n+1}}^{+\infty} \frac{k!}{(k-(n+1))!} z^{k-(n+1)}.$$

Ce qui achève d'établir, pour $n \geq 0$: $\big((HR_n) \text{ vraie}\big) \Longrightarrow \big((HR_{n+1}) \text{ vraie}\big)$.

D'après le **principe de récurrence**, on a donc montré que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ce résultat, conjugué à (3), montre que la fonction $z \mapsto 1/(1-z)^{n+1}$, admet le DSE$_0$ suivant, de rayon de convergence 1 :

$$\boxed{\forall\, |z| < 1, \quad \frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} z^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} C_k^n . z^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n}^n . z^k}$$

(en effectuant pour la dernière somme, le changement d'indice : $k' = k - n$).

$\boxed{\textbf{2.4.c.}}$ Fonction de répartition de S_n :

Chaque X_i étant à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, N\}$, S_n est une variable discrète, à valeurs dans $[\![N, nN]\!]$. Trouver la fonction de répartition $\mathbf{F}_{S_n}$ de S_n, consiste donc en la détermination des valeurs $\{P(S_n \leq k)\}_{n \leq k \leq nN-1}$, car pour les autres valeurs de k, on a déjà :

$$(4) \quad \mathbf{F}_{S_n}(k) = 0, \text{ si } k < n, \text{ et } \mathbf{F}_{S_n}(k) = 1, \text{ si } k \geq nN.$$

◇ L'énoncé suggérant d'utiliser pour cela la question **2.4.a.**, et notant que l'événement "$(S_n \leq j)$" est la réunion disjointe des événements "$(S_n \leq j-1)$" et "$(S_n = j)$", ce qui donne par la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (A, B incompatibles) :

$$(5) \quad \forall j \in \mathbb{N},\ P(S_n \leq j) - P(S_n \leq j-1) = P(S_n = j),$$

on pourra appliquer le résultat de **2.4.a.** à la suite $(a_j)_{j=0}^{j=nN} = \big(P(S_n \leq j)\big)_{j=0}^{j=nN}$, **en remarquant que**, pour tout $0 \leq j < n$: $a_j = 0$, et en posant $a_{-1} = 0$, auquel cas l'égalité du **2.4.a.**, compte-tenu des termes nuls, et de (5), s'écrit :

$$\sum_{j=n}^{nN} P(S_n = j).z^j = (1-z).\sum_{j=n}^{nN-1} P(S_n \leq j).z^j + P(S_n \leq nN).z^{nN}.$$

On reconnaît alors, dans le membre de gauche **la fonction génératrice de S_n**. Ainsi, notant aussi que $P(S_n \leq nN) = 1$ (car $S_n(\Omega) = [\![N, nN]\!]$), il vient :

$$\forall z \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad g_{S_n}(z) = (1-z).\sum_{j=n}^{nN-1} P(S_n \leq j).z^j + z^{nN}.$$

Et l'on en tire que :

$$(6) \quad \forall z \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad \sum_{j=n}^{nN-1} P(S_n \leq j) z^j = \frac{1}{1-z} g_{S_n}(z) - \frac{1}{1-z} z^{nN}.$$

Égalité de laquelle on déduit une égalité de séries entières sur $]-1, 1[$.

• En effet, en utilisant l'expression de g_{S_n} obtenue au **2.3.**, et le résultat du **2.4.b.**, le membre de droite de (6) s'écrit, **en se restreignant à** $|z| < 1$:

$$(7) \quad \left(\frac{z}{N}\right)^n . \frac{(1-z^N)^n}{(1-z)^{n+1}} - \frac{z^{nN}}{1-z} = \frac{1}{N^n}.(1-z^N)^n . \sum_{j=0}^{+\infty} C_{j+n}^n . z^{j+n} - z^{nN} \sum_{j=0}^{+\infty} z^j$$

(on a rentré dans la première somme le terme z^n issu de "$(z/N)^n$").

La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z} g_{S_n}(z)$ apparaît donc comme le produit de deux séries entières, $\sum_{k \geq 0} a_k.z^k$ et $\sum_{k \geq 0} b_k.z^k$, de rayon de convergence respectifs $R_1 = +\infty$ et $R_2 = 1$:

* $\sum_{k \geq 0} a_k.z^k$ est égale au DSE_0 de la fonction **polynômiale** $\frac{1}{N^n}.(1-z^N)^n$. Ce DSE_0 a donc un rayon de convergence R_1 infini. En invoquant le **développement du binôme** :

$$(1-z^N)^n = \sum_{h=0}^n C_n^h . (-x^N)^l = \sum_{h=0}^n (-1)^h . C_n^h . x^{hN},$$

il apparaît que :

$a_k = 0$, **sauf si k est un multiple de N, compris entre 0 et n**, *i.e.* sauf si k est de la forme hN, avec h tel que $0 \leq hN \leq n$, c'est-à-dire, en divisant par N, h tel que : $0 \leq h \leq \frac{n}{N}$. **Et en ce cas**, on a : $a_{hN} = \frac{1}{N^n}.(-1)^h.C_n^h$.

* $\sum_{k \geq 0} b_k.z^k = \sum_{j=0}^{+\infty} C_{j+n}^n . z^{j+n}$, série entière de rayon de convergence $R_2 = 1$ (*c.f.* **1.4.b.**), et sur laquelle on constate, par le changement d'indice $k = j + n$ sur la deuxième somme, que :

$b_k = 0$, **sauf si $k \geq n$, auquel cas** $b_k = C_k^n$.

D'après le cours, un tel produit est lui, aussi développable en série entière en zéro, avec un rayon de convergence égal à $\min(R_1, R_2)$, et un DSE_0 donné par :

$$\sum_{k \geq 0} c_k.z^k, \text{ où : } \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j.b_{k-j} \quad \left(\textit{formule du } \underline{\textit{produit de}} \ \underline{\textit{Cauchy}} \textit{ de deux séries}\right).$$

Puisque a_k est nul, sauf si $k = hN$ avec $0 \leq h \leq \frac{n}{N}$, *i.e.* $h \in [\![0, \mathrm{E}\left[\frac{n}{N}\right]]\!]$, où $\mathrm{E}\left[\frac{n}{N}\right]$ désigne la partie entière de n/N, le cœfficient c_k s'écrit plus simplement :

$$\textbf{(8)}\ \Big|\ \forall k \in \mathbb{N},\quad c_k = \sum_{h=0}^{\mathrm{E}[\frac{n}{N}]} a_{hN}.b_{k-hN} = \sum_{h=0}^{\mathrm{E}[\frac{n}{N}]} (-1)^h.C_n^h C_{k-hN}^n.$$

<u>À ce stade</u>, (7) s'écrit (voir aussi (8)), pour z tel que $|z| < \min(R_1, R_2) = 1$:

$$\underline{\sum_{j=n}^{nN-1} P(S_n \leq j) z^j} = \sum_{k \geq 0}^{+\infty} c_k.z^k - z^{nN}.\sum_{j=0}^{+\infty} z^j = \underline{\sum_{k \geq 0}^{nN-1} c_k.z^k + \sum_{k=nN}^{+\infty} (c_k - 1).z^k},$$

et **par unicité du développement en série entière**, on en déduit, **en identifiant les cœfficients** (pour les termes de degré $k \in [\![n, nN-1]\!]$ - cela suffit) de ses deux DSE_0, égaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ (non vide et contenant en 0), en utilisant aussi (4) et (8), les valeurs de la <u>**fonction de répartition de S_n**</u> :

$$\boxed{\mathbf{F}_{S_n}(k) = \mathbf{P}(S_n \leq k) = \begin{cases} \sum_{h=0}^{\mathrm{E}[\frac{n}{N}]} (-1)^h.C_n^h C_{k-hN}^n & \text{pour } n \leq k \leq nN-1, \\ 0 \ \text{ si } k < n, \quad \text{et} \quad 1 \ \text{ si } k \geq nN. \end{cases}}.$$

$\boxed{\textbf{2.5.}}$ Pour tous t réel positif, $n \in \mathbb{N}$, et $\omega \in \Omega$, par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$: $(S_n(\omega) \leq t)$ équivaut à $(e^{-S_n(\omega)} \geq e^{-t})$, donc :

| les événements $(S_n \leq t) = \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}$
| et $(e^{-S_n} \geq e^{-t}) = \{\omega \in \Omega \mid e^{-S_n} \geq e^{-t}\}$ sont égaux.

Par conséquent, $\quad \textbf{(9)}\ \big|\ \mathbf{P}(S_n \leq t) = \mathbf{P}\left(e^{-S_n} \geq e^{-t}\right).$

• Pour le second membre de l'inégalité à démontrer, *le passage à l'**exponentielle** permet*, par les propriétés de cette fonction, et par la définition de S_n, d'écrire :

$$\big|\ \forall \omega \in \Omega,\quad e^{-S_n(\omega)} = e^{-X_1(\omega) - X_2(\omega) \ldots - X_n(\omega)} = e^{-X_1(\omega)}.e^{-X_2(\omega)} \ldots e^{-X_n(\omega)}.$$

Et, les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant <u>indépendantes</u>, il en est de même, **d'après le cours**, pour les variables $e^{-X_1}, e^{-X_2} \ldots, e^{-X_n}$, donc, q désignant la valeur de l'espérance commune aux V.A. e^{-X_k} (les V.A. e^{-X_k} ($k \in \mathbb{N}$) ont même loi car il en est ainsi pour les X^k) :

$$\textbf{(10)}\ \big|\ \mathbf{E}(e^{-S_n}) = \mathbf{E}(e^{-X_1}.e^{-X_2} \ldots e^{-X_n}) = \mathbf{E}(e^{-X_1}).\mathbf{E}(e^{-X_2}) \ldots \mathbf{E}(e^{-X_n}) = q^{n(*)}.$$

C'est sur les réécritures (9) et (10), que repose la démonstration.

<u>On peut noter que</u>, par (9) et (10), l'inégalité à démontrer s'écrit aussi :

$$\mathbf{P}\left(e^{-S_n} \geq e^{-t}\right) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{-S_n})}{e^{-t}}.$$

| *Et, sous cette forme, le résultat à démontrer apparaît comme un cas particulier (pour $Z = e^{-S_n}$ et $\alpha = e^{-t}$) de l'**inégalité de Markov**, valable pour toute V.A. Z admettant une espérance, et selon laquelle :* $\big|\ \forall \alpha > 0,\quad \mathbf{P}(Z \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(Z)}{\alpha}.$

(*) L'**existence** de chacune des espérances envisagées est acquise d'emblée si les V.A. prennent un nombre fini de valeurs entières, mais si elles prennent un nombre <u>infini</u> de valeurs, ou si ce sont des V.A. à densité, l'existence d'une espérance est toujours *a priori* sujette à caution (il faut montrer que la série/l'intégrale converge). <u>Mais</u> l'énoncé ne soulevant pas le problème, et **ne posant pas** <u>au moins</u> (ce qui pourtant est nécessaire) l'existence d'une espérance pour les V.A. X_k, on **admettra** l'existence de toutes les espérances que l'on est amené à considérer (ce qui d'ailleurs est plutôt dans la ligne du programme).

Dans la mesure où les hypothèses des questions **2.3.** et **2.4.** sont abandonnées, on est contraint de présenter une démonstration pour le cas où les V.A. $\{X_k\}_{k\geq 0}$ sont discrètes, et une pour le cas continu.

(*On notera la grande similarité de la démonstration avec celle de* ***l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev***).

◇ Démonstration dans le cas discret : si les V.A. X_k suivent une loi discrète (c'est-à-dire, **d'après le programme**, si les X_k prennent leurs valeurs dans $\mathbb{Z}$ - ici dans $\mathbb{N}$, car les V.A. X_k sont positives), alors la V.A. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est, elle aussi, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (ici $\mathbb{N}$)(*). On peut alors écrire, par la **formule de transfert**, et en admettant que la série converge :

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}\mathbf{P}(S_n = k).$$

Puis, parce qu'il s'agit d'une somme de réels positifs, on obtient une minoration de $\mathbf{E}(e^{-S_n})$ en ôtant des termes de la somme, ainsi, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) \geq \sum_{k=0}^{k_0} e^{-k}\mathbf{P}(S_n = k).$$

Maintenant, pour tout réel positif t, il existe un plus grand indice k_0 tel que : $k_0 \leq t$ (k_0 est l'entier qu'on appelle la **partie entière de t**). Ce choix de k_0, par croissance de la fonction exponentielle, assure que, pour tout $k \in [\![0, k_0]\!]$: $e^{-k} \geq e^{-t}$.

Dans ces conditions, on peut encore minorer la somme ci-dessus :

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) \geq \sum_{k=0}^{k_0} e^{-k}\mathbf{P}(S_n = k) \geq e^{-t}. \sum_{k=0}^{k_0} \mathbf{P}(S_n = k).$$

Puisque S_n ne prend que des valeurs entières, et que $k_0 \leq t$ par définition, on a :

$$\sum_{k=0}^{k_0} \mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}(S_n \leq k_0) = \mathbf{P}(S_n \leq t)$$

Le dernier résultat peut donc s'écrire de façon équivalente :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{E}(e^{-S_n}) \geq e^{-t}.\mathbf{P}(S_n \leq t), \ i.e. \quad \underline{\mathbf{P}(S_n \leq t) \leq e^t.q^n}.$$

◇ Démonstration dans le cas continu : si les V.A. X_k sont des variables à densité, **on reprend le même schéma de démonstration**. La V.A. S_n est aussi une V.A. à densité, dont la densité s'obtient, comme au **2.2.** par application itérée de la formule de convolution. En notant f la densité de S_n, par la **formule de transfert** :

$$\mathbf{E}(e^{-S_n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}.f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ égal encore à } \int_0^{+\infty} e^{-x}.f(x)\,\mathrm{d}x$$

(car S_n est une somme de V.A. positives, donc f est nulle sur $\mathbb{R}_-$).

Puis, parce qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, on obtient une minoration de $\mathbf{E}(e^{-S_n})$ en limitant l'intégration à un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{E}(e^{-S_n}) = \int_0^t e^{-x}.f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Alors, par croissance de la fonction exponentielle : $\forall x \in [0, t]$, $e^{-x} \geq e^{-t}$, et par suite : $\forall t \geq 0$, $\mathbf{E}(e^{-S_n}) \geq e^{-t}. \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, *i.e.* , puisque $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{P}(S_n \leq t)$:

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{E}(e^{-S_n}) \geq e^{-t}.\mathbf{P}(S_n \leq t), \ i.e. \quad \underline{\mathbf{P}(S_n \leq t) \leq e^t.q^n}.$$

Ainsi, dans les deux cas, discret ou continu, on a établi le résultat :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}(S_n \leq t) \leq e^t.q^n}.$$

(*) Comme pour les V.A. X_k, certaines valeurs sont peut-être prises avec une probabilité nulle - c'est le cas par exemple si les X_k prennent un nombre fini de valeurs : $\mathbf{P}(X_k = m) = 0$ à partir d'un certain rang m_0, et alors $\mathbf{P}(S_n = m) = 0$ au moins pour $m \geq nm_0$. Mais il est plus simple de considérer dans tous les cas que $S_n(\Omega) = \mathbb{Z}$ (ici $\mathbb{N}$).

$\boxed{\textbf{2.6.a.}}$ Si la loi commune des variables X_k, $(k \in \mathbb{N})$, est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f (*c.f.* **2.1.**), par la **formule de transfert**, sous réserve de convergence de l'intégrale : $\mathbf{E}(X_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}.f(t)\,dt.$

Puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, toujours sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{-X_k}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}.f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}.\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\tfrac{\lambda}{\lambda+1}.e^{-(\lambda+1)t}\right]_0^{+\infty} = \tfrac{\lambda}{\lambda+1}.\lim_{A\to+\infty}\left[1 - e^{-(\lambda+1)t}\right].\end{aligned}$$

La limite existant et valant $\frac{\lambda}{\lambda+1}$, on vérifie que l'espérance, notée q, existe et vaut :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad q = \mathbf{E}\left(e^{-X_k}\right) = \frac{\lambda}{\lambda+1}}.$$

$\boxed{\textbf{6.b.}}$ Si les variables X_k, $(k \in \mathbb{N})$, sont discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, en notant $p_n = \mathbf{P}(X_k = n)$, par **la formule de transfert** : $\mathbf{E}\left(e^{-X_k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}p_n$,

et **l'existence de l'espérance** est acquise par le **théorème de comparaison des séries à termes positifs**, car la série est à termes positifs, son terme général, $e^{-n}p_n$, est majoré par p_n, et, X_k étant une V.A., $\sum_{n\geq 0} p_n$ converge (sa somme vaut 1).

• **En vertu de ce théorème**, on a encore : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}p_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$, soit : $\underline{q \leq 1}$.

L'inégalité est stricte entre les deux sommes (*i.e.* on a $q < 1$), si l'un des termes $e^{-n}p_n$ au membre de gauche est strictement inférieur à p_n, ce que l'on établit ainsi :

$$1 - q = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_n - e^{-n}p_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - e^{-n}\right).p_n,$$

on peut rassembler les deux sommes en une seule car la **différence de deux séries convergentes est convergente** et sa somme est égale à la différence des sommes.

Ainsi:

$1 - q$ est égal à une **somme (infinie) de réels positifs**, donc $1 - q > 0$ (*i.e.* $q > 1$) si et seulement si l'un des termes de cette somme est strictement positif.

Comme $e^{-n} < 1$, *i.e.* $1 - e^{-n} > 0$, dès lors que $n > 0$:

$$\left(\left(1 - e^{-n}\right).p_n > 0\right) \iff \left(n \neq 0 \text{ et } p_n \neq 0\right)$$

Par conséquent : $\left(q < 1\right)$ si et seulement si $\left(\exists n_0 > 0 \text{ tel que } p_{n_0} > 0\right)$.

En conclusion :

$$\boxed{q < 1 \text{ si et seulement si les V.A. } X_k \text{ ne sont pas des V.A. certaines égales à } 0}.$$

$\boxed{\textbf{2.7.a.}}$ Il s'agit ici de démontrer l'égalité de deux ensembles, à savoir :

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} S_n \text{ existe}\right\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}.$$

Un peu d'expérience de ce genre d'égalité apprendra au lecteur qu'il est plus facile de partir du membre de droite. De plus, les explications seront rendues plus claires par l'introduction des notations suivantes :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_t, \quad \text{avec } \mathcal{A}_t = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}.$$

Dès lors :
- $(\omega \in \mathcal{A})$ équivaut à l'existence d'un entier t_0 tel que $\omega \in \mathcal{A}_{t_0}$
- $(\omega \in \mathcal{A}_{t_0})$ équivaut à $(\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad S_n(\omega) \leq t_0\ )$.

Et donc, il apparaît que :

(11) $(\ \omega \in \mathcal{A}\ )$ équivaut à l'existence d'un entier t_0 majorant la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, dans la mesure où $S_n(\omega)$ est la somme partielle de rang n de la série à termes positifs $\sum_{k\geq 0} X_k(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$, fixé, **la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante**, donc : $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée.

En conséquence, par (11) : $(\omega \in \mathcal{A}) \iff (\ (S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente $)$.

Ce qui traduit l'égalité d'ensembles demandée :

$$\boxed{\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\} = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} S_n \text{ existe}\right\}}.$$

2.7.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion évidente :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\} \subset \{\omega \in \Omega \mid S_k(\omega) \leq t\}.$$

D'où il découle, par **propriété des probabilités**, puis par le résultat du **2.5.** que :

(12) $\forall k \geq 0, \quad \underline{\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}\right)} \leq \mathbf{P}(\omega \in \Omega \mid S_k(\omega) \leq t) \leq \underline{e^t.q^k}$.

Il apparaît donc que la probabilité cherchée est telle que sa valeur minore la suite $(e^t q^k)_{k\in\mathbb{N}}$, or cette suite tend vers 0 (car $q < 1$ par hypothèse, et donc $\lim_{k\to+\infty} q^k = 0$) **donc** :

la probablité cherchée est nulle.

Ou encore, puisque $0 \leq q < 1$, par passage à la limite sur (12) :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}\right) = 0}.$$

2.7.c. **D'après le cours**, par la propriété d'**additivité dénombrable** des probabilités :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}\right) \leq \sum_{t=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}\right).$$

Or, en vertu du **2.7.b.**, la somme au membre de droite est la somme d'une **série de terme général nul**, donc :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}\right) = 0}.$$

Ce qui, compte-tenu de **7.a.**, signifie que l'ensemble $\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) \text{ existe}\right\}$ a une probabilité nulle, ou encore, **par passage à l'événement contraire**, il est ***quasi-certain*** qu'à l'issue de l'expérience aléatoire, $(S_n)_{n\geq 0}$ diverge, *i.e.* :

$\mathbf{P}(\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ n'existe pas$) = 1$.

Or, comme on l'a vu au **2.7.a.**, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(S_n(\omega))_{n\geq 0}$ une suite réelle croissante, donc elle est convergente ou tend vers $+\infty$, on a donc montré que :

$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geq 0} \text{ tend vers } +\infty \text{ avec une probabilité 1 (événement quasi-certain)}}$.

2.8.a. Pour étudier, <u>$t \geq 0$ étant fixé</u>, la convergence de la série de terme général, $F_n(t) = \mathbf{P}(S_n \leq t)$, on peut **comparer**, grâce à la question **2.5.**, son terme général à $e^t q^n$:

> $\sum_{n \geq 0} F_n(t)$ est une série à termes positifs, dont le terme général est majoré (*c.f.* **2.5.**), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $e^t q^n$, qui est le terme général d'une **série géométrique** de raison $q < 1$, donc **convergente**.

En conséquence, **d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs** :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} F_n(t) \text{ est convergente}}.$$

2.8.b. ***Si*** *$\omega \in \Omega$* ***est tel que la suite*** *$(S_n(\omega))_{n \geq 0}$* ***tende vers*** *$+\infty$, alors, pour tout $t \geq 0$, par la définition d'une limite infinie, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \quad S_n(\omega) > t$. Et parmi tous les rangs n_0 satisfaisant cette propriété, il en existe un, noté $\nu_t(\omega)$, qui soit <u>minimum</u>, c'est-à-dire, par définition, soit tel qu'au rang précédent la propriété n'est pas vérifiée, i.e. est tel que : $S_{\nu_t(\omega)-1}(\omega) \leq t < S_{\nu_t(\omega)}(\omega)$ (en convenant que $S_{-1} = 0$ pour que l'encadrement soit aussi pertinent si $\nu_t(\omega) = 0$).*
En revanche, *si $\omega \in \Omega$ est tel que la suite $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ ne tende pas vers $+\infty$, i.e. (comme on l'a montré) est tel que $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ tende vers une limite finie, alors la suite $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ admet un majorant - notons-le t_0 - et pour $t > t_0$, $\nu_t(\omega)$ n'existe pas, car il n'existe aucune rang n tel que : $t < S_n(\omega)$.*
Ainsi, ***en vertu de 2.7.c.***, on peut affirmer que :

> l'entier $\nu_t(\omega)$ existe avec une probabilité égale à 1.

C'est en ce sens qu'en définissant $\nu_t(\omega)$ comme il est fait dans l'énoncé, l'**on définit bien** une **variable aléatoire** ν_t **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ (On aura : $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\nu_t = k) = 1$).

◇ Par définition, à l'issue de l'expérience aléatoire, ν_t prend la valeur n si et seulement si n est le plus petit indice tel que $t < S_n$, *i.e.* est tel que $S_{n-1} \leq t < S_n$. On a donc :

> $\forall n \geq 0, \quad \mathbf{P}(\nu_t = n) = \mathbf{P}[S_{n-1} \leq t \leq S_n]$ (<u>on rappelle que</u> : $S_{-1} = 0$).

Et l'espérance de la variable ν_t vaut, sous réserve de convergence :

(13) $\forall n \geq 0, \quad \mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\mathbf{P}(\nu_t = n)$.

Pour obtenir le résultat demandé, à savoir : $\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$, on doit procéder en deux étapes.

• <u>Réexpression de la loi de ν_t, à l'aide de la fonction de répartition de S_n</u> :

Il est classique de considérer le système complet d'événements $\{(S_n \leq t), (S_n > t)\}$ pour écrire, par la **formule des probabilités totales**(*) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{P}(S_{n-1} \leq t) = \mathbf{P}\Big[\underbrace{(S_{n-1} \leq t) \cap (S_n \leq t)}_{=(S_n \leq t) \text{ car } S_{n-1} \leq S_n}\Big] + \mathbf{P}\Big[\underbrace{(S_{n-1} \leq t) \cap (S_n > t)}_{=(S_{n-1} \leq t < S_n)}\Big].$$

$\left(\begin{array}{l}\text{on a, pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_{n-1} \leq S_n \text{ car } S_n - S_{n-1} = X_n, \text{ avec } X_n \text{ V.A.} \\ \text{positive. et la relation est vraie aussi pour } n = 0 \text{ avec la convention : } S_{-1} = 0\end{array}\right)$

<u>Ainsi</u> : $\mathbf{P}(S_{n-1} \leq t) = \mathbf{P}(S_n \leq t) + \mathbf{P}(S_{n-1} \leq t < S_n)$, c'est-à-dire :

(14) $\mathbf{P}(S_{n-1} \leq t < S_n) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$.

(*) Il s'agit de la version suivante de la formule des probabilités totales : si $\{A_i\}_{i \geq 0}$ est un système complet d'événements, alors, pour tout événement $B \subset \Omega$, $\mathbf{P}(B) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(B \cap A_i)$, formulation équivalente à la formulation plus usitée : $\mathbf{P}(B) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(B \mid A_i).\mathbf{P}(A_i)$.

• Réexpression de $\mathbf{E}(\nu_t)$: Grâce à (14), $\mathbf{E}(\nu_t)$, donné par (13), se réécrit :

$$\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\left[F_{n-1}(t) - F_n(t)\right] = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} n.\left[F_{n-1}(t) - F_n(t)\right],$$

L'existence de $\mathbf{E}(\nu_t)$ n'étant pas acquise, on commence par travailler sur les sommes partielles. En notant $u_n = n.\left[F_{n-1}(t) - F_n(t)\right]$, et $U_n = \sum_{n=1}^{N} u_n$, pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
U_N &= \sum_{n=1}^{N} n.\left[F_{n-1}(t) - F_n(t)\right] = \sum_{n=1}^{N} n.F_{n-1}(t) - \sum_{n=1}^{N} n.F_n(t) \\
&= \sum_{n'=0}^{N-1} (n'+1).F_{n'}(t) - \sum_{n=1}^{N} n.F_n(t) \quad \left(\text{par le changement d'indice : } n' = n - 1 \text{ sur la première somme. (on a alors : } n = n' + 1)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) + \sum_{n=0}^{N-1} n.F_n(t) - \sum_{n=1}^{N} n.F_n(t) \quad \left(\text{en scindant la première somme et en renommant } n \text{ l'indice } n'\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) + \sum_{n=1}^{N-1} n.F_n(t) - \sum_{n=1}^{N} n.F_n(t). \quad \left(\text{car le le terme de rang 0 de la seconde somme est nul}\right)
\end{aligned}$$

Les termes de même rang des deuxième et troisième somme s'éliminant, il vient :

(15) $\forall N \geq 1, \quad U_N = \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) - N.F_N(t).$

On peut alors discuter de l'existence d'une limite pour U_N (*i.e.* de l'existence de $\mathbf{E}(\nu_t)$), et de la valeur de cette limite.

$\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs ($u_n = n.\left[F_{n-1}(t) - F_n(t)\right] = n.\mathbf{P}(\nu_t = n)$), donc la suite de ses sommes partielles $(U_N)_{N\geq 0}$ est **une suite réelle croissante.**
Or, puisque $N.F_N \geq 0$, on déduit de (15), que : $\forall N \geq 1, \quad U_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t)$,
et, **par suite**, puisque $\sum_{n\geq 0} F_n(t)$ est une **série à termes positifs convergente**, *i.e.* $\sum_{n\geq 0} F_n(t)$ existe (*c.f.* 2.8.a.) : $\forall N \geq 1, \quad U_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)$.
La suite $(U_N)_{N\geq 0}$ est donc croissante et majorée, donc elle converge vers une limite notée l. On a alors, en reprenant (15) :

$$\lim_{N\to+\infty} N.F_N(t) = \lim_{N\to+\infty} U_n - \sum_{n=0}^{N-1} F_n(t) = l - \sum_{k=0}^{+\infty} F_n(t).$$

Ainsi : la suite $(n.F_n(t))_{n\geq 0}$ admet une limite, et cette limite, notée α, est **positive**, car la suite est à termes positifs, et vaut : $l - \sum_{k=0}^{+\infty} F_n(t)$.

On peut alors montrer que $\alpha = 0$.

En effet, si la limite positive α est strictement positive , alors il existe un rang N_0 tel que :

$$\forall N \geq N_0, \quad N.F_N(t) \geq \alpha/2, \quad i.e. \quad F_N(t) \geq \tfrac{\alpha}{2}.\tfrac{1}{N}.$$

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, puisque la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{N}$ est divergente, la minoration précédente implique que la série $\sum_{n\geq 0} F_n(t)$ est divergente, ce qui contredit le résultat de **2.8.a.**.

On a donc montré, par l'absurde, que $\underline{\alpha = 0}$, *i.e.* : $\lim_{N\to+\infty} N.F_N(t) = 0$.

Par ce dernier résultat, le passge à la limite sur (15) donne :

$$\lim_{N\to+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t), \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\mathbf{E}(\nu_t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)}.$$

2.9. Si les variables $\{X_k\}_{n\geq 1}$ suivent la loi exponentielle de paramètre λ, on a une expression de la fonction de répartition de la V.A. S_n, en utilisant la fonction de densité de S_n obtenue au **2.2.** : $F_n(t)=\int_{-\infty}^{t} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$

Et, d'après **2.8.b.** : $\mathbf{E}(\nu_t)=\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$

Pour calculer cette somme infinie, on peut réexprimer l'intégrale en remarquant qu'elle correspond à un **reste dans une formule de Taylor-reste intégral**, formule en vertu de laquelle, pour une fonction f de classe C^n sur un intervalle $[a,b]$, ou $[b,a]$:

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+\int_a^b f^{(n)}(a)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx.$$

Ainsi, pour $f : x\mapsto e^{-\lambda x}$, et $b=0$, $a=t>0$, **la formule s'applique** car f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, **et on obtient**, puisque $\forall k\geq 0, f^{(k)}(x)=(-\lambda)^k e^{-\lambda x}$:

$$e^{\lambda.0}=\sum_{k=0}^{n-1}(-\lambda)^k e^{-\lambda t}\frac{(0-t)^k}{k!}+\int_t^0\frac{(0-x)^{n-1}}{(n-1)!}(-\lambda)^n e^{-\lambda x}dx.$$

ou encore, en effectuant en particulier les simplifications relatives aux signes :

$$1=e^{-\lambda t}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}-\lambda.\int_t^0 e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}dx.$$

Puis, en permutant les bornes de l'intégrale, **on peut isoler $F_n(t)$** :

$$F_n(t)=\int_0^t \lambda^n e^{-\lambda x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right).$$

On peut encore factoriser la parenthèse par $e^{-\lambda t}$ et utiliser que $e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$:

$$F_n(t)=\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(e^{\lambda t}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)=\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right).$$

Enfin, en simplifiant les termes communs aux deux sommes, il vient :

$$F_n(t)=\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right).$$

On a ainsi obtenu une écriture de $F_n(t)$ et par suite, on a une réécriture de $\mathbf{E}(\nu_t)$:

$$\textbf{(16)}\quad \mathbf{E}(\nu_t)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_n(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right).$$

Il s'agit maintenant d'intervertir deux sommations sur des nombres infinis de termes, ce qui ne peut se faire sans quelques précautions :

◊ **Pour effectuer l'interversion des sommes**, posons $V_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$.

On intervertira les sommations sur V_N, puis on reviendra à $\mathbf{E}(\nu_t)$ en utilisant que, par (16), $\mathbf{E}(\nu_t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$, *i.e.* : **(17)** $\mathbf{E}(\nu_t)=\lim_{n\to+\infty}V_n$.

Pour V_n, l'interversion des sommes est licite. Il faut pour le vérifier, considérer les N séries $\sum_{k\geq n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$, pour n compris entre 0 et N (séries que l'on peut noter $\sum_{k\geq 0}w_k^{(0)}, \sum_{k\geq 0}w_k^{(1)},\ldots,\sum_{k\geq 0}w_k^{(N)}$, dont le terme général $w_k^{(n)}$ est, pour chacune de ces séries, numérotées de 0 à N, respectivement nul jusqu'au rang $n-1$, et égal à $(\lambda t)^k/k!$ pour $k\geq n$.

Ces N séries sont convergentes car leur terme général est égal, à partir du rang n au terme général de la **série exponentielle** de somme égale à e^t, donc la série obtenue en sommant ces N séries et en multipliant par $\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$, dont le terme général est égal, au rang m, à $\sum_{k=0}^{m} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sum_{l=0}^{\min(m,N)} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, est convergente, et a pour somme : $\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \ldots + \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$.

Cette égalité de sommes (*il s'agit du résultat suivant lequel* ***la somme d'une combinaison linéaire de séries est égale à la combinaison linéaire des sommes***) s'écrit :

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sum_{l=0}^{\min(m,N)} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \ldots + \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

ou encore :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sum_{l=0}^{\min(m,N)} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) = V_N.$$

On a ainsi, de fait, interverti les sommations dans l'expression de V_N. Ce qui permet de poursuivre :

$$V_N = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\min(k,N)} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\underline{\sum_{n=1}^{k} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\frac{(\lambda t)^k}{k!}}\right) - \sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(\underline{\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\frac{(\lambda t)^k}{k!}}\right).$$

En remarquant que les deux sommes sur n sont respectivement des sommes de k termes et N termes **tous égaux**, il vient :

$$\begin{aligned} V_N &= \sum_{k=1}^{N} k.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=N+1}^{+\infty} N.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= t.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\sum_{k=1}^{N} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - N.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} && \left(\begin{array}{c}\text{en sortant les facteurs}\\ \text{constants de chaque somme}\end{array}\right) \\ &= t.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - N.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} && \left(\begin{array}{c}\text{en décalant l'indice}\\ \text{sur la première somme}\end{array}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $W_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, et $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, on a

$$\textbf{(18)} \quad V_N = t.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.W_{N-1} - N.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.R_N.$$

Or, on reconnaît respectivement en W_N et R_N, la somme partielle de rang N, et le reste de rang N de la **série exponentielle** de somme $e^{\lambda t}$, donc :

$$\lim_{N\to+\infty} W_N = \lim_{N\to+\infty} W_{N-1} = e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} R_N = 0$$

Par suite, **un passage à la limite** sur (18) est possible et donne :

$$\lim_{N\to+\infty} V_N = t.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.e^{\lambda t} - N.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.0 = \frac{t}{\lambda}.$$

On peut alors conclure, par (17), que : $\quad$ **(19)** $\mathbf{E}(\nu_t) = \lim_{N\to+\infty} V_N = \frac{t}{\lambda}$.

Comme, la loi exponentielle de paramètre λ, loi suivie par les V.A. X_k, l'espérance vaut λ, (19) s'écrit encore $\mathbf{E}(\nu_t)/t = 1/\lambda = 1/\mathbf{E}(X_k)$, et comme $\mathbf{E}(\nu_t)/t$ est indépendant de t, on a, *a fortieri* :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathbf{E}(\nu_t) = \frac{1}{\mathbf{E}(X_k)}}.$$

PREMIER PROBLÈME

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Première Partie

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice est M dans la base canonique.

1. Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'on a $X' = f(X)$.
   Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.
2. a) Déterminer le noyau de f c'est-à-dire le sous-espace vectoriel K de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs X vérifiant $f(X) = (0, 0, 0)$. En donner une base et la dimension.
   b) Déterminer le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs $f(X)$, pour X élément quelconque de $\mathbb{R}^3$. En donner une base et la dimension.
3. K et E sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Deuxième Partie

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ N^{n+1} = N^n \times N$; avec la convention $N^0 = I$.

1. Verifier que $N^2 = -2N + 3I$.
2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n \end{cases}$$
   (On pourra procéder par récurrence.)
3. Soit n un entier naturel quelconque.
   a) Vérifier la relation $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.
   b) En déduire que l'on a : $u_{n+1} = -3u_n + 1$.
   c) Démontrer que la suite $\left(u_n - \dfrac{1}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Exprimer u_n, v_n et N^n en fonction de n.

DEUXIÈME PROBLÈME

Première Partie

Une urne contient 7 boules : 5 boules blanches et 2 boules noires.
Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité qu'il tire deux boules blanches.
2. Le joueur participe maintenant au jeu suivant :
   - s'il tire deux boules blanches il gagne x francs ($x \geq 0$) ;
   - s'il tire deux boules noires il perd $10\,x$ francs ;
   - s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées :
     à l'issue de ce second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

   On désigne par G la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (positifs ou négatifs) du joueur.

   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

   b) Calculer, en fonction de y, l'espérance mathématique de la variable aléatoire G. Déterminer y pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire $E(G) = 0$.

   c) Pour cette valeur de y, calculer l'écart-type $\sigma(G)$ de la variable G en fonction de x.

Deuxième Partie

Soit f la fonction, définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{110x^2 + 60}{21}}$$

1. Déterminer le réel α tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$.
   Quel est le signe de $f(x) - \alpha x$ pour $x \geq 0$?
2. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : 1,5 cm).
3. Déterminer l'entier naturel x pour lequel l'écart-type $\sigma(G)$ de la première partie est compris entre 7 et 8.

Nota-bene : *À l'attention des élèves de la filière BCPST, on signale que les sujets Véto. sont corrigés de façon cohérente avec le programme de cette classe. Aussi, est-il possible de trouver des raccourcis pour la résolution de ces problèmes si on suit le programme BCPST et non Véto.*

PREMIER PROBLÈME

Première Partie

1. Notons $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisque M est la matrice de f dans $\mathcal{B}$, l'égalité $X' = f(X)$ se traduit matriciellement par : $X' = M.X$.

Ce qui donne ici :

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 2y + z \\ 2x + 2z \\ -x + 2y + 3z \end{pmatrix}. \text{ Ainsi : } \boxed{\begin{cases} x' = 5x - 2y + z \\ y' = 2x + 2z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}}.$$

2.a. Noyau de f : $X = (x, y, z)$ appartient au noyau de f ($\ker f$) si et seulement si $X' = f(X) = (0, 0, 0)$. **On détermine donc les éléments de $\ker f$** en résolvant le système d'inconnues x, y et z, obtenu en posant $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, dans les équations trouvées au **1.** Procédons par la **méthode du pivot de Gauss** :

$$(S) \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \underset{L_3' \leftarrow L_1 + 5L_3}{\overset{\substack{L_1' \leftarrow -L_3 \\ L_2' \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\iff}} \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 4y + 8z = 0 \\ 8y + 16z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les deux dernières équations étant équivalentes à $y + 2z = 0$, en reportant dans la première, il vient :

$$X = (x, y, z) \in \ker f \iff \begin{cases} x = 2y + 3z = -z \\ y = -2z \\ z \text{ réel quelconque} \end{cases},$$

ou encore, en notant a au lieu de z :

$\ker f = \{X = (x, y, z) \ / \ \exists\, a \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) = (-a, -2a, a) = -a(1, 2, -1)\}$.

Par conséquent, $\ker f$ est engendré par un seul vecteur, le vecteur $(1, 2, -1)$. Donc :

$\boxed{K = \ker f \text{ est de dimension 1, et } \{(1, 2, -1)\} \text{ est une base de } K}$.

◇ Image de f : Les vecteurs $f(X)$, pour $X = (x, y, z)$ quelconque dans $\mathbb{R}^3$, sont d'après **1.**, de la forme $(x', y', z') = (5x - 2y + z, 2x + 2z, -x + 2y + 3z)$. Ils constitue l'ensemble que l'on note usuellement $\mathrm{Im} f$ (image de f).

Donc, d'après les règles de calculs dans $\mathbb{R}^3$, de tels vecteurs s'écrivent encore :

$(5x, 2x, -x) + (-2y, 0, 2y) + (z, 2z, 3z) = x.(5, 2, -1) + y.(-2, 0, 2) + z.(1, 2, 3)$.

x, y et z étant des réels quelconques, on constate que l'ensemble des vecteurs $f(X)$ est l'ensemble des vecteurs égaux à une **combinaison linéaire quelconque**, des vecteurs $(5, 2, -1)$, $(-2, 0, 2)$, et $(1, 2, 3)$. **Par conséquent** :

l'ensemble E cherché est un *s.e.v.* de $\mathbb{R}^3$, dont une famille génératrice est la famille $\{(5, 2, -1), (-2, 0, 2), (1, 2, 3)\}$.

Ce que l'on peut noter : $E = VECT[(5, 2, -1), (-2, 0, 2), (1, 2, 3)]$.

• La famille génératrice obtenue est une base de E si et seulement si ses vecteurs forment une famille libre.

On examine la liberté de la famille précédente, en cherchant s'il existe des réels, α, β, γ, non tous nuls, tels que : $\alpha.(5, 2, -1) + \beta.(-2, 0, 2) + \gamma.(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

Or, cette dernière égalité équivaut à :

$$(\alpha,\beta,\gamma) \text{ solution de } \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\alpha & - & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ 2\alpha & & & + & 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

On reconnaît là le système (S), étudié au **1.**, dont on a montré qu'il équivaut à :

$$\alpha = -\gamma \qquad \beta = -2\alpha.$$

Il existe donc des réels α, β, γ, non tous nuls (on peut prendre par exemple $\alpha = -1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 1$) **tels que** :

$$\alpha.(5,2,-1) + \beta.(-2,0,2) + \gamma.(1,2,3) = (0,0,0).$$

Par conséquent : la famille $\{(5,2,-1),(-2,0,2),(1,2,3)\}$ est liée.

• En revanche, si l'on considère la famille constituée des seuls vecteurs $(5,2,-1)$ et $(-2,0,2)$:

$$\alpha.(5,2,-1) + \beta.(-2,0,2) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\alpha & - & 2\beta & = & 0 \\ 2\alpha & & & = & 0 \\ -\alpha & + & 2\beta & = & 0 \end{array}\right. \iff \alpha = \beta = 0.$$

Donc, la famille $\{(5,2,-1),(-2,0,2)\}$, extraite de la famille liée $\{(5,2,-1),(-2,0,2),(1,2,3)\}$ (génératrice de E), est libre. En conséquence, et en conclusion :

$$\boxed{\big((5,2,-1),(-2,0,2)\big) \text{ est une base de } E, \text{ et donc } E \text{ est de dimension } 2}.$$

$\boxed{3.}$ Dans la mesure où E et K sont des *s.e.v.* de $\mathbb{R}^n$ ($\dim R^n = n$), et que **leurs dimensions vérifient l'égalité $\dim R^n = \dim E + \dim K$** :

E et K sont supplémentaires si et seulement si $E \cap K = \{(0,0,0)\}$.

• **Parce que K est de dimension 1**, $E \cap K \neq \{(0,0,0)\}$ équivaut à $K \subset E$. Plus précisément, puisque $K = \text{VECT}\big[(1,2,-1)\big]$: $K \subset E$ équivaut à $(1,2,-1) \in E$.

En conséquence, on examinera si $(1,2,-1) \in E$, *i.e.* si $(1,2,-1)$ est une combinaison linéaire de $(5,2,-1)$ et $(1,2,3)$, vecteurs formant une base de E.

◇ $(1,2,-1)$ est combinaison linéaire de $(5,2,-1)$ et $(1,2,3)$, si et seulement s'il existe α et β, deux réels, tels que :

$$(1,2,-1) = \alpha(5,2,-1) + \beta(1,2,3) = (5\alpha+\beta, 2\alpha+2\beta, -\alpha+3\beta).$$

Ce qui donne à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5\alpha & + & \beta & = & 1 \\ 2\alpha & + & 2\beta & = & 2 \\ -\alpha & + & 3\beta & = & -1 \end{array}\right. \underset{L'_3 \leftarrow L_1+5L_3}{\overset{L'_1 \leftarrow -L_3 \quad L'_2 \leftarrow -L_2+2L_3}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & - & 3\beta & = & 1 \\ & & 8\beta & = & 0 \\ & & 8\beta & = & 3 \end{array}\right.$$

L'examen des deux dernières équations, qui sont **incompatibles**, fait apparaître que le système n'admet **aucun** couple (α,β) solution.

Par suite, il vient que $(1,2,-1) \notin E$, donc que $K \cap E = (0,0,0)$, et **finalement** que :

$$\boxed{K \text{ et } E \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}.$$

$\boxed{\textit{Deuxième Partie}}$

$\boxed{1.}$ *Peu de choses à dire !* Si ce n'est que, d'une part N^2, et d'autre part $-2N+3I$, s'avèrent être égales toutes deux à :

$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et donc, qu'effectivement : $\boxed{N^2 = -2N + 3I}$.

2. **Procédons <u>par récurrence</u>** avec l'hypothèse suivante, énoncée pour $n \geq 0$:

$$(\mathcal{P}_n) : \left(\begin{array}{l} \text{pour tout } k \leq n, \text{ il existe deux réels } u_k \text{ et } v_k \text{ tels que :} \\ N^k = u_k N + v_k I, \text{ et, si } k \geq 1 : \begin{cases} u_k = -2u_{k-1} + v_{k-1} \\ v_k = 3u_{k-1} \end{cases} \end{array} \right).$$

- <u>pour $n = 0$</u> : puisque $N^0 = I$, on constate qu'en posant $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, on a bien : $N^0 = u_0 N + v_0 I$. Donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
- <u>si on suppose que pour un certain rang $n \geq 0$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie</u> : alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ pour exprimer N^n, on a : $N^{n+1} = N^n.N = (u_n N + v_n I).N = u_n N^2 + v_n I$, et comme $N^2 = -2N = 3I$, on a encore :

  $$N^{n+1} = u_n(-2N + 3I) + v_n I = -2u_n N + (3u_n + v_n)I.$$

  On déduit qu'il existe deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que $N^{n+1} = u_{n+1}N + v_{n+1}I$, il suffit de poser : $u_{n+1} = -2u_n$ et $v_{n+1} = 3u_n + v_n$. Donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

<u>En conclusion</u> : $(\mathcal{P}_0)$ est vraie, et pour tout $n \geq 0$, $\big((\mathcal{P}_n)$ vraie$\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{P}_{n+1})$ vraie$\big)$, donc, par récurrence, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$. En conséquence, en effectuant le changement d'indice $n = k - 1$ *i.e.* :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{il existe deux suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ telles que :} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = u_n.N + v_n.I, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \begin{cases} u_k = -2u_{k-1} + v_{k-1} \\ v_k = 3u_{k-1} \end{cases} \end{array}}.$$

<u>Remarque</u> : on peut réécrire la relation de récurrence sous la forme attendue : $\forall n \geq 0, \quad u_{k+1} = -2u_n + v_n \; ; \; v_{n+1} = 3u_n$, par le changement d'indice $n = k - 1$.

3.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} et v_{n+1} étant liés à u_n et v_n par la relation énoncée au **2.**, il vient :

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (-2u_n + v_n) + 3u_n = u_n + v_n.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n}.$$

3.b. En conséquence de **3.a.**, la suite $(u_n + v_n)_{n \geq 0}$ est une suite constante, donc son terme général $u_n + v_n$ est égal à $u_0 + v_0$. Or, $u_0 + v_0 = 0 + 1 = 1$, donc :

pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 1$ ou encore : $v_n = 1 - u_n$

Ce qui permet de substituer $1 - u_n$ à v_n, dans l'égalité $u_{n+1} = -2u_n + v_n$, ce qui donne :

$$\textbf{(1)} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + (1 - u_n) = -3u_n + 1}.$$

3.c. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - \frac{1}{4}$, on peut, dans la relation de récurrence (1), substituer $w_n + \frac{1}{4}$ ce qui donne :

$$w_{n+1} + \tfrac{1}{4} = -3(w_n + \tfrac{1}{4}) + 1, \text{ soit : } \underline{w_{n+1}} = -3w_n - 3.\tfrac{1}{4} + 1 - \tfrac{1}{4} = \underline{-3w_n}.$$

Il apparaît donc que :

$$\boxed{\text{la suite de terme général } w_n = u_n - \tfrac{1}{4} \text{ est une suité géométrique de raison } -3}.$$

4. Si (t_n) est une suite géométrique de premier terme t_0 et de raison q, on a : $\forall n \geq 0, \; t_n = t_0.q^n$. En conséquence, pour (w_n), suite géométrique de raison -3 (*c.f.* **3.**) et de premier terme $w_0 = u_0 - \frac{1}{4}$, on a :

$$w_n = u_n - \tfrac{1}{4} = (-3)^n(u_0 - \tfrac{1}{4}).$$

Comme $u_0 = 0$, on en tire que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{(-3)^n}{4} + \frac{1}{4}}$.

Puis, parce que pour $n \geq 0$, $v_{n+1} = 3u_n$ (et donc, pour $n \geq 1$: $v_n = 3u_{n-1}$), il vient, pour $n \geq 1$: $\underline{v_n} = -3.u_n = -3.\frac{(-3)^{n-1}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{(-3)^n+3}{4}$. Et comme on peut constater, puisque $v_0 = 1$, que la relation est encore valable pour $n = 0$, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{(-3)^n+3}{4}}.$$

puis, comme $N^n = u_n N + v_n I$ $(n \geq 0)$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = \frac{1-(-3)^n}{4}.N + \frac{3+(-3)^n}{4}.I}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Première Partie

1. À l'issue d'une réalisation de l'expérience aléatoire, on obtient une poignée de deux boules, donc on peut choisir comme **univers** Ω (ensemble des résultats possibles) l'ensemble des poignées de deux boules qu'il est possible de constituer avec les 7 boules de l'urne. Comme il y a C_7^2 façons de choisir deux boules parmi 7 :

$$\text{Card } \Omega = C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

Le tirage étant supposé fait au hasard, **les différentes poignées de deux boules sont toutes équiprobables**, donc la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$\textbf{(2)} \quad P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{Nombre de résultats réalisant } A}{\text{Nombre de résultats possibles}}.$$

◇ S'agissant de l'événement A_1 : " *Tirer deux boules blanches*", Card A_1 est égal au nombre de poignées de deux boules que l'on peut constituer avec les seules boules blanches. Or il y a 5 boules blanches parmi les 7, donc : Card $A_1 = C_5^2 = \frac{5\times4}{2} = 10$.
Ainsi : $\boxed{\text{la probabilité de tirer deux boules blanches vaut : } \frac{\text{Card}A_1}{\text{Card}\Omega} = \frac{10}{21}}$.

2.a. Le gain du joueur peut prendre 4 valeurs différentes : x, $-10x$, y ou -3, *i.e.* $G(\Omega) = \{x, -10x, y, -3\}$. **Déterminer la loi de G** consiste donc à calculer la probabilité avec laquelle le gain peut prendre chacune de ces valeurs.

i. Le joueur gagne x francs si et seulement si il tire deux boules blanches (événement A_1, *c.f.* question **1.**), donc : $P(G = x) = P(A_1) = \frac{10}{21}$.

ii. Il perd $10x$ francs si et seulement si il tire deux noires (événement noté A_2). Or, à l'issue d'un tirage, parmi les poignées que l'on peut obtenir, une seule réalise cet événement, car il n'y a que deux boules noires dans l'urne. Donc, Card $A_2 = 1$, et, par (2) : $P(G = -10x) = P(A_2) = \frac{\text{Card}A_2}{\text{Card}\Omega} = \frac{1}{21}$.

Pour le calcul de $P(G = y)$ et $P(G = -3)$, il faut conditionner par l'événement A_3 : "tirer une noire et une blanche au premier tirage". Puisque, pour constituer une poignée bicolore, il y a cinq choix possibles pour la boule blanche et deux pour la noire, il y a donc $5 \times 2 = 10$ poignées bicolores en tout et donc : **(3)** $P(A_3) = \frac{10}{21}$.

Parce que **le second tirage a lieu sans remise**, si l'on sait que le premier tirage réalise A_3, alors **lors du second tirage, l'urne est composée de 4 boules blanches et 1 noire**, et l'on pourra choisir, pour ce second tirage, l'univers Ω', constitué des poignées de deux boules qu'il est alors possible d'obtenir, et qui a pour cardinal : $C_5^2 = 10$ (nombre de façons de choisir 2 boules parmi un total de cinq). Le tirage ayant encore lieu au hasard, toutes ces poignées sont équiprobables, et donc la probabilité d'un événement B, lors de ce second tirage «sachant A_3», est donnée par : (4) $P(B \mid A_3) = \frac{\text{Card}(B \text{ sachant } A_3)}{\text{Card}\Omega'} = \frac{\text{Card}(B \text{ sachant } A_3)}{10}$.

Ainsi :

iii. En notant B_1 l'événement "tirer deux boules blanches au second tirage", d'après les règles du jeu, notre joueur gagne y francs si et seulement si $A_3 \cap B_1$ est réalisé, et comme, par la **formule des probabilités conditionnelles**, $P(A_3 \cap B_1)$ vaut $P(B_1 \mid A_3).P(A_3)$, il vient, par (3) et (4) : $P(A_3 \cap B_1) = \frac{\text{Card }(B_1 \text{ sachant } A_3)}{10} \cdot \frac{10}{21}$, donc : $P(A_3 \cap B_1) = \frac{\text{Card }(B_1 \text{ sachant } A_3)}{21}$.

Or, A_3 étant réalisé, il y a C_4^2 poignées de deux boules blanches possibles (choix des deux blanches parmi les quatre restantes), *i.e.* Card $(B_1$ sachant $A_3) = C_4^2 = \frac{4\times3}{2}$.

En conséquence : $P(A_2 \cap B_1) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$, d'où $\boxed{P(G = y) = \frac{2}{7}}$.

iv. Enfin, le joueur perd 3 francs si et seulement si $\overline{B_1} \cap A_3$ est réalisé, ($\overline{B_1}$ désignant l'événement contraire de B_1). Et, comme précédemment :

$$P(\overline{B_1} \cap A_3) = P(\overline{B_1} \mid A_3).P(A_3) = \frac{\text{Card }\left(\overline{B_1} \text{ sachant } A_3\right)}{21}.$$

Or, $\left(\overline{B_1} \text{ sachant } A_3\right)$ est le complémentaire de $(B_1 \text{ sachant } A_3)$ dans Ω' : Card $\left(\overline{B_1} \text{ sachant } A_3\right) =$ Card $\Omega' -$ Card $(B_1$ sachant $A_3) = 10 - 6 = 4$, et donc :

$$P(\overline{B_1} \cap A_3) = \frac{\text{Card }\left(\overline{B_1} \text{ sachant } A_3\right)}{21} = \frac{4}{21}, \text{ d'où } \boxed{P(G = -3) = \frac{4}{21}}.$$

On peut alors dresser le tableau de la loi de G :

g	-3	$-10x$	x	y
$P(G = g)$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{6}{21}$

Remarque : En toute rigueur, l'énoncé ne précisant pas les valeurs de x et y, il est possible que parmi les valeurs possibles pour G : -3, $-10x$, y, x, il y ait des valeurs égales. En ce cas, puisque néanmoins les événements A_1, A_2; $A_3 \cap B_1$ et $A_3 \cap \overline{B_1}$ sont deux à deux incompatibles, on obtient la loi de G en procédant comme suit :

si, par exemple, $x = y \neq -3$ et si encore $x \neq \frac{3}{10}$ (pour que l'on ait pas $10x = -3$), **alors** $G(\Omega) = \{-3, -10x, x\}$ et $P(G = x) = P(A_1 \cup (A_2 \cap B_1)) = P(A_1) + P(A_2 \cap B_1)$, et donc : $P(G = x) = \frac{10}{21} + \frac{6}{21} = \frac{16}{21}$, $P(G = -10x) = \frac{1}{21}$ et $P(G = -3) = \frac{4}{21}$.

Ceci étant, on n'examiera pas les (nombreux !) autres cas car il est douteux que le concepteur de l'énoncé se soit attendu à ce que l'on traite la question en envisageant ces cas d'égalité (il aurait alerté le candidat).

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ Espérance de G :

Par la formule du cours :

$$\begin{aligned} E(G) &= (-3).P(G = -3) + (-10x).P(G = -10x) + x.P(G = x) + y.P(G = y) \\ &= -3.\tfrac{4}{21} - 10x.\tfrac{1}{21} + x.\tfrac{10}{21} + y.\tfrac{2}{7} = \tfrac{-4}{7} - \tfrac{10x}{21} + \tfrac{10x}{21} + y.\tfrac{2}{7} = \tfrac{2y-4}{7} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{E(G) = \frac{2(y-2)}{7}, \text{ et le jeu est équitable si et seulement si } y = 2}$.

3.c. Écart-type de G dans le cadre d'un jeu équitable :

Par la formule d'Huyghens, la variance de G s'écrit : $V(G) = E(G^2) - E(G)^2$.

Or, dans l'hypothèse d'un **jeu équitable**, $y = 2$ et $E(G) = 0$ (*c.f.* **3.b.**) et puisque :

$$E(G^2) = (-3)^2.P(G=-3) + (-10x)^2.P(G=-10x) + x^2.P(G=x) + y^2.P(G=y)$$
$$= 9.\frac{4}{21} + 100x^2.\frac{1}{21} + x^2.\frac{10}{21} + y^2.\frac{6}{21} = \frac{36 + 110x^2 + 6y^2}{21},$$

il vient, pour $y = 2$:

$$V(G) = E(G^2) = \frac{36 + 110x^2 + 6y^2}{21} = \frac{110x^2 + 60}{21}.$$

Ainsi, dans un jeu équitable : $\boxed{\text{l'écart-type de } G \text{ vaut } \sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{\frac{110x^2+60}{21}}}$.

Deuxième Partie

1. Pour que $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x]$ soit égale à zéro, il est nécessaire que α soit strictement positif, sinon la limite est trivialement égale à $+\infty$ (car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \alpha.x = +\infty$). **Le réel α cherché est donc strictement positif**, et en cas on a affaire, en $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x]$, avec une forme indéterminée de type "$(+\infty)-(+\infty)$" ; **il s'agit donc trouver une réécriture de $f(x)-\alpha x$ pour lever cette indétermination**. On utilisera une quantité conjuguée, puisqu'une racine carrée est en jeu :

$$f(x) - \alpha x = \sqrt{\frac{110x^2+60}{21}} - \alpha.x = \frac{\frac{110x^2+60}{21} - \alpha^2.x^2}{\sqrt{\frac{110x^2+60}{21}} + \alpha.x} = \frac{110x^2+60-21.\alpha^2.x^2}{21.\left(\sqrt{\frac{110x^2+60}{21}} + \alpha.x\right)}$$
$$= \frac{(110-21\alpha^2).x^2+60}{21x.\left(\sqrt{\frac{110+\frac{60}{x^2}}{21}}+\alpha\right)} = \frac{x^2\left((110-21\alpha^2)+\frac{60}{x^2}\right)}{21x.\left(\sqrt{\frac{110+\frac{60}{x^2}}{21}}+\alpha\right)} = x.\frac{(110-21\alpha^2)+\frac{60}{x^2}}{21.\left(\sqrt{\frac{110+\frac{60}{x^2}}{21}}+\alpha\right)}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$f(x)-\alpha x = x.\frac{N(x)}{D(x)}, \text{ avec } N(x) = (110-21\alpha^2) + \frac{60}{x^2}, \text{ et } D(x) = 21.\left[\sqrt{\frac{110+\frac{60}{x^2}}{21}} + \alpha\right].$$

Alors, puisque nécessairement le réel α cherché est > 0, $\lim_{x\to+\infty} D(x)$, qui vaut $21.\left[\sqrt{110/21} + \alpha\right]$, est strictement positive, et donc, pour x tendant vers $+\infty$, le quotient $N(x)/D(x)$ tend vers une limite **finie** K, égale à :

$$K = \lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{(110-21\alpha^2)}{\sqrt{\frac{110}{21}} + \alpha}.$$

En conséquence, deux cas sont à envisager, suivant que $110 - 21\alpha^2$ est nul ou non. Et comme le réel α cherché est nécessairement strictement positif, les deux cas à distinguer sont $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{110/21}$ et $\alpha \neq \sqrt{110/21}$:

- pour $\alpha \neq \sqrt{110/21}$: alors, $K = \lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{D(x)} \neq 0$, et, en tant que produit d'une fonction admettant une limite finie non nulle et d'une fonction tendant vers $+\infty$, $f(x) - \alpha.x = x.\frac{N(x)}{D(x)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, suivant le signe de K.
- pour $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{110/21}$: alors, $K = 0$ et la limite de $f(x)-\alpha.x$, pour x tendant vers $+\infty$ est une forme indéterminée du type "$\infty \times 0$". Il convient en ce cas de **lever l'indétermination**, et pour cela, on reprendra l'expression de précédente

de $f(x) - \alpha.x$, en notant que, si $110 - 21\alpha^2 = 0$, alors $N(x)$ se simplifie $60/x^2$, ce qui donne : $f(x) - \alpha.x = x.\frac{N(x)}{D(x)} = x.\frac{60/x^2}{D(x)} = \frac{1}{x}.\frac{60}{D(x)}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} D(x) = \sqrt{\frac{110}{21}} + \alpha > 0$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha.x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.\frac{60}{D(x)} = 0.$$

En conclusion, on a donc montré que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha.x = 0 \text{ si et seulement si } \alpha = \alpha_0 = \sqrt{110/21}}.$$

◇ Signe de $f(x) - \alpha.x$ pour $x \geq 0$: **pour $x = 0$**, on vérifie que $f(0) > 0$, et **pour $x > 0$**, $f(x) - \alpha x$ est égal à $x.\frac{N(x)}{D(x)}$, avec $D(x) > 0$, donc : $f(x)$ est du signe de $N(x)$.

Or, pour $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{110/21}$ et $x > 0$: $N(x) = \frac{60}{x^2} > 0$.

Donc, pour la valeur de α, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha.x = 0$:

$$\boxed{f(x) - \alpha_0 > 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0}.$$

2. Étude de la fonction f : f résulte de la composition de la fonction polynômiale $x \longmapsto \frac{110x^2+60}{21}$, définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left[\sqrt{\frac{60}{21}}, +\infty\right[\subset \mathbb{R}_+^*$, et de la fonction racine carrée, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme cet ensemble contient l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $x \longmapsto \frac{110x^2+60}{21}$:

f est **définie, continue, dérivable sur** $\mathbb{R}$.

On remarquera aussi que la fonction ***f* est paire**, et par suite, on l'étudiera sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout $x \geq 0$, par la formule de dérivation des fonctions composées :

$f'(x) = \frac{110.2x}{21}.\left(\frac{110x^2+60}{21}\right)^{\frac{1}{2}}$, donc : f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0.

Par suite, ***f* est strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+$.

• L'étude menée au **1.**, établit que **la droite d'équation** $y = \sqrt{\frac{110}{21}}.x$ **est asymptote à la courbe en** $+\infty$, et que la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, est située **au-dessus** de cette droite pour toutes les abscisses positives.

Pour le tracé de la courbe, on utilisera que, de par la parité de f, la droite d'équation $y = -\sqrt{\frac{110}{21}}.x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et se situe en-dessous de $\mathcal{C}_f$.

■ La représentation graphique de f est donnée à la page suivante.

3. $\sigma(G)$ a été calculé au **2.c.** de la première partie ($\sigma(G) = f(x)$), et $\sigma(G)$ compris entre 7 et 8, équivaut, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, à $V(G)$ comprise entre 49 et 64, et l'on peut poursuivre ainsi :

$$7 \leq \sigma(G) \leq 8 \iff 49 \leq \frac{110x^2+60}{21} \leq 64 \iff 1029 \leq 110x^2 + 60 \leq 1344,$$

d'où, enfin, en encadrant $110x^2$, puis x^2 : $7 \leq \sigma(G) \leq 8 \iff \frac{969}{110} \leq x^2 \leq \frac{1284}{110}$.

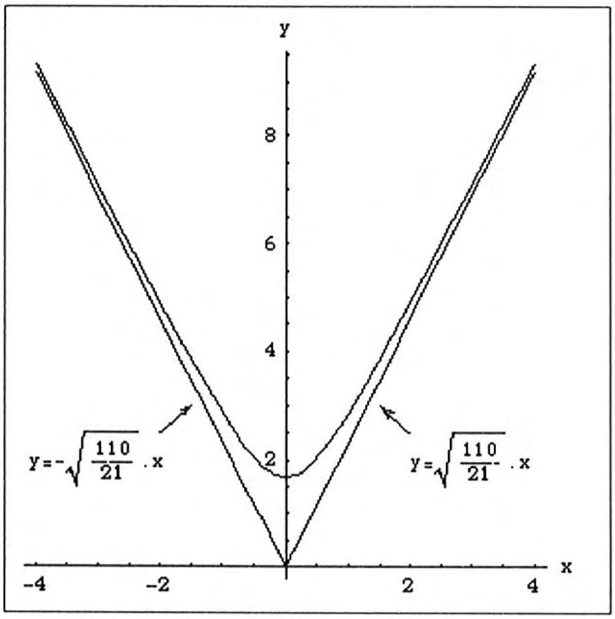
On achève alors à la calculatrice, ou **à la main**, ainsi :

$$\frac{969}{110} \geq \frac{880}{110},\ i.e.\ \frac{969}{110} \geq 8, \text{ et de même, } \frac{1284}{110} = \frac{1100}{110} + \frac{164}{110} \leq 10 + \frac{220}{110} = 12,$$

Donc : $7 \leq \sigma(G) \leq 8 \iff 8 \leq x^2 \leq 12$.

et, puisque l'on cherche une valeur **entière** de x, telle que $7 \leq \sigma(G) \leq 8$:

$$\boxed{x = 3 \text{ est l'unique entier tel que } 7 \leq \sigma(G) \leq 8}.$$



Courbe représentative de f (question **2.** partie **2**)

Écoles Normales Supérieures 98 — Propriétés des puissances n-ièmes des matrices stochastiques — Durée 3 h 00

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Les candidats sont expressément invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

On désignera par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. on fixe un entier naturel $r \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à 2. On désignera par $M_r(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à cœfficient réels.

1] Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbf{R})$.
a) Montrer que si $W = (w_1, \ldots, w_r)$ est un vecteur ligne de $\mathbf{R}^r$ alors le produit matriciel WM est un vecteur ligne de $\mathbf{R}^r$ dont on précisera les composantes.
b) Montrer que si Y est un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_r \end{pmatrix}$$

alors le produit matriciel MY est un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$ dont on précisera les composantes.

On considère un ensemble fini Ω muni d'une loi de probabilité P et $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ une partie à r éléments de $\mathbf{R}$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on se donne une variable aléatoire $X_n : \Omega \mapsto S$ (à valeurs dans S). On suppose dans la suite que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie les deux propriétés suivantes notées **A]** et **B]**.

A] Pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et tout $(u_0, \ldots, u_n) \in S^{n+1}$, la probabilité pour que $X_n = u_n$ sachant que $X_0 = u_0, X_1 = u_1, \ldots, X_{n-1} = u_{n-1}$ est égale à la probailité pour que $X_n = u_n$ sachant que $X_{n-1} = u_{n-1}$. En d'autres termes on suppose que

$$P(X_n = u_n \mid X_0 = u_0, X_1 = u_1, \ldots, X_{n-1} = u_{n-1}) = P(X_n = u_n \mid X_{n-1} = u_{n-1})$$

B] Il existe une matrice $M = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbf{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ on ait :

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = p_{i,j}$$

Dans la suite, pour chaque entier naturel $n > 0$, on désignera par M^n la matrice obtenue en effectuant n fois le produit de M avec elle-même; et on notera $M^n = (p_{i,j}(n))_{1\leq i,j\leq r}$. On conviendra que M^0 désigne la matrice identité. Enfin, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on désignera par μ_n la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

2] a) Soit $i \in \{1,\ldots,r\}$. Calculer $\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}$. Puis calculer $\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}(n)$ pour chaque entier $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$.

b) On considère des sous-ensembles $A_1,\ldots,A_m$ de Ω (c'est-à-dire des évènements) tels que $P(A_1\cap\ldots\cap A_m) > 0$. Exprimer alors $P(A_1\cap\ldots\cap A_m)$ en fonction de

$$P(A_1), P(A_2 \mid A_1), P(A_3 \mid A_1\cap A_2), \ldots, P(A_m \mid A_1\cap\ldots\cap A_{m-1})$$

c) Soit m un entier naturel positif. On considère une application $j \mapsto \sigma(j)$ de $\{1,\ldots,m\}$ dans $\{1,\ldots,r\}$. Exprimer $P(\{X_1 = s_{\sigma(1)},\ldots,X_m = s_{\sigma(m)}\})$ en fonction de $P(\{X_1 = s_{\sigma(1)}\})$ et de

$$p_{\sigma(1),\sigma(2)}, p_{\sigma(2),\sigma(3)}, \ldots, p_{\sigma(m-1),\sigma(m)}$$

d) Soit $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ et $j \in \{1,\ldots,r\}$. Exprimer $\mu_n(\{s_j\})$ en fonction des nombres réels suivants:

$$\mu_{n-1}(\{s_h\}),\quad p_{k,l},\quad h,k,l \in \{1,\ldots,r\}$$

(On pourra utiliser la formule des probabilités totales). Donner une interprétation matricielle de ce résultat. En déduire, en utilisant une récurrence, une expression de $\mu_n(\{s_j\})$ en fonction des nombres réels suivants:

$$\mu_0(\{s_h\}),\quad p_{k,l}(n),\quad h,k,l \in \{1,\ldots,r\}$$

3] On rappelle que $r \geq 2$. On suppose dans les questions **3]**, **4]**, **5]** et **6]** que pour tout $i,j \in \{1,\ldots,r\}$ $p_{i,j} > 0$.

a) On pose $d = \min_{1\leq i,j\leq r} p_{i,j}$. Prouver, en utilisant la question **2] a)**, que $0 < d \leq \frac{1}{2}$.

Pour chaque vecteur colonne Z de $\mathbf{R}^r$:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_r \end{pmatrix}$$

on pose $\min Z = \min_{1\leq j\leq r} z_j$ et $\max Z = \max_{1\leq j\leq r} z_j$.

b) Soit Z un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$ tel que $\min Z \geq 0$. Comparer $\min MZ$ et $d\max Z$.

4] On fixe un vecteur colonne Y de $\mathbf{R}^r$:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_r \end{pmatrix}$$

a) Comparer $\min MY$ et $d \max Y + (1-d) \min Y$. On introduira le vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$:

$$\begin{pmatrix} y_1 - \min Y \\ y_2 - \min Y \\ . \\ . \\ y_r - \min Y \end{pmatrix}$$

b) Comparer $\max MY$ et $d \min Y + (1-d) \max Y$.

c) Déduire des deux questions précédentes une majoration simple de $\max MY - \min MY$ en fonction de $(1-2d)$ et de $(\max Y - \min Y)$.

5] a) Soit n un entier naturel > 0. Déduire de la question précédente une majoration simple de $\max M^nY - \min M^nY$ en fonction de n, $(1-2d)$ et de $(\max Y - \min Y)$ (On pourra procéder par récurrence sur n).

b) Établir que les suites $(\max M^nY)_{n>0}$ et $(\min M^nY)_{n>0}$ sont monotones. On précisera pour chacune d'elles le sens de la monotonie (croissante ou décroissante au sens large).

On note pour chaque entier naturel $n > 0$:

$$M^nY = \begin{pmatrix} y_1(n) \\ . \\ . \\ y_r(n) \end{pmatrix}$$

les composantes du vecteur colonne M^nY.

c) Établir qu'il existe un réel $z \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad \lim_{n \to +\infty} y_i(n) = z$$

6] a) Déduire de ce qui précède qu'il existe $(w_1, \dots, w_r) \in \mathbf{R}^r$ tel que:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}, \quad \lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n) = w_j$$

b) Déterminer $\sum_{j=1}^r w_j$.

c) Avec les notations de la question **6] a)**, on note $W = (w_1, \dots, w_r)$ le vecteur ligne de $\mathbf{R}^r$ de composantes $w_1, \dots, w_r$. Exprimer le vecteur ligne WM en fonction de W. (On pourra considérer les matrices M^nM pour $n \in \mathbf{N}^*$).

d) Déterminer l'ensemble des vecteurs lignes de R^r:

$$Z = (z_1, \dots, z_r)$$

tels que $\sum_{i=1}^r z_i = 1$ et $ZM = Z$. (On pourra utiliser la question **6] a)**).

7] Maintenant on ne suppose plus nécessairement que les $p_{i,j}$ soient tous *strictement* positifs, mais on fait l'hypothèse qu'il existe un entier naturel strictement positif N tel que les cœfficients $p_{i,j}(N)$ de la matrice $M^N = (p_{i,j}(N))_{1 \leq i,j \leq r}$ soient tous strictement positifs.

a) Existe-t-il $(w_1, \ldots, w_r) \in \mathbf{R}^r$ tel que :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}, \quad \lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n) = w_j \ ?$$

(On observera que le résultat de la question **4] c)** est encore valable avec $d = 0$).

b) Déterminer l'ensemble des vecteurs lignes de $\mathbf{R}^r$:

$$Z = (z_1, \ldots, z_r)$$

tels que $\sum_{i=1}^r z_i = 1$ et $ZM = Z$.

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes de R^r :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r \end{pmatrix}$$

tels que $\sum_{j=1}^r y_j = 1$ et $MY = Y$. (On pourra utiliser la question **6] a)**).

8] Dans cette question on suppose que M est une matrice (3,3) égale à :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'ensemble des vecteurs lignes $W = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbf{R}^3$ tels que $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$ et $WM = W$.

b) Déterminer pour chaque $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$:

$$\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n)$$

Corrigé

$\boxed{\text{1.a.}}$ **Le produit d'une matrice $n \times m$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$, par une matrice $m' \times p$,** $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m' \\ 1 \le j \le p}}$, **existe** <u>si et seulement si</u> $\boldsymbol{m = m'}$, et dans ce cas, il est égal à une matrice C, $(C = AB)$, de taille $n \times p$, dont le cœfficient générique est donné par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}.$$

Dans le cas proposé, la matrice A est égale à la ligne $W = (w_1, \ldots, w_r)$, $(a_{1,j} = w_j)$, donc est de taille $1 \times r$, tandis que B, est égale à la matrice M, de taille $r \times r$.

On vérifie donc que $m = m' = r$ (***le nombre de colonnes de W est égal au nombre de lignes de M***), donc le produit WM existe et est égal à une matrice de taille $n \times p$, ici $1 \times r$, *i.e.* :

$$\boxed{\begin{array}{l}WM \text{ est un vecteur ligne de } \mathbf{R}^r, \text{ dont la } j\text{-ième composante est} \\ \text{donnée par : } \qquad \forall j \in [\![1,r]\!], \quad (WM)_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} w_k.m_{k,j}\end{array}}.$$

1.b. Cette fois, le même **résultat de cours**, avec $A = M$ et $B = Y$ donne :

$$\boxed{\begin{array}{l}MY \text{ est un vecteur colonne de } \mathbf{R}^r, \text{ dont la } i\text{-ième composante est} \\ \text{donnée par : } \qquad \forall i \in [\![1,r]\!], \quad (MY)_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_{i,k}.y_k\end{array}}.$$

2.a. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, la définition des $p_{i,j}$ étant donnée avec la propriété **B]** :

$$\sum_{j=1}^r p_{i,j} = \sum_{j=1}^r P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = \sum_{j=1}^r \frac{P\big((X_{n+1}=s_j)\cap(X_n=s_i)\big)}{P(X_n=s_i)}$$

et extrayant de la somme sur j le facteur $1/P(X_n = s_i)$ (indépendant de j), on a :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{r} p_{i,j} = \frac{1}{P(X_n = s_i)}.\sum_{j=1}^{r} P((X_{n+1} = s_j)\cap(X_n = s_i)).$$

S'agissant d'une somme de probabilités d'événements **incompatibles**, la somme se réécrit :

$$\sum_{j=1}^{r} P((X_{n+1} = s_j)\cap(X_n = s_i)) = P\left(\Big(\bigcup_{j=1}^{r}(X_{n+1} = s_j)\Big)\cap(X_n = s_i)\right).$$

Enfin, parce que la famille d'événements $\{(X_{n+1} = s_j)\}_{1\le j\le r}$ forme un **système complet d'événements**, (*c'est toujours le cas lorsque l'on considère toutes les réalisations possibles d'une variable aléatoire*), on a : $\bigcup_{j=1}^r (X_{n+1} = s_j) = \Omega$,

de sorte que la probabilité précédente vaut : $P(\Omega \cap (X_n = s_i)) = P(X_n = s_i)$

En reportant enfin dans (1), il vient : $\boxed{\forall i \in [\![1,r]\!],\ \sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1}$.

Ainsi, **on a montré que** :

(2) la somme des cœfficients pour chaque ligne de M est égale à 1.

◇ *On peut montrer le résultat suivant par récurrence, mais on peut aussi* ***généraliser***. En effet, considérons deux matrices carrées $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de taille $r \times r$, vérifiant la même propriété que M (propriété (2)), c'est-à-dire telles que :

(3) pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ $\quad \sum_{j=1}^r a_{i,j} = 1 \quad \sum_{j=1}^r b_{i,j} = 1.$

Alors, si pour la matrice produit AB, on note $(AB)_{i,j}$ le cœfficient ligne i, colonne j, on a, pour tout i compris entre 1 et r : $\sum_{j=1}^r (AB)_{i,j} = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^r a_{i,k}.b_{k,j}\right)$.

Et l'on peut **intervertir les deux sommes** car les indices de sommations varient de façon <u>indépendante</u>, on obtient alors : $\sum_{j=1}^r (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r (a_{i,k}.b_{k,j})$,

et en sortant le facteur $a_{i,k}$ - indépendant de j - de la somme la plus intérieure, il vient : $\sum_{j=1}^r (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^r a_{i,k}.\left(\sum_{j=1}^r b_{k,j}\right)$.

Dans cette dernière écriture, **puisque** B **vérifie la propriété (2)** (voir (3)), la parenthèse vaut 1, et il reste alors une somme, elle aussi égale à 1 car A **vérifie aussi la propriété (2)** (voir (3)), donc : $\sum_{j=1}^{r}(AB)_{i,j} = 1$. La propriété (2) est donc vraie pour AB. Ainsi, **on a montré que** :

> si deux matrices carrées, A et B, sont telles que la somme pour chacune de leurs lignes respectives vaut 1, alors cela est encore vrai pour la matrice AB.

Par conséquent, puisque M vérifie (2), par la propriété établie, $M^2 = M \times M$ vérifie aussi (2), puis, par récurrence, toutes les puissances de M (M^n, $n \geq 1$) vérifient (2). **En conclusion** et avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{j=1}^{r} p_{i,j}(n) = 1}.$$

2.b. *On propose ici de redémontrer la formule des* ***probabilités composées*** :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_m \mid A_1 \cap A_2 \ldots A_{m-1}).$$

◇ Considérons m événements, $A_1, A_2, \ldots, A_m$, tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) > 0$, et notons, pour tout $k \in \mathbf{N}$, (E_k) l'égalité :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_m \mid A_1 \cap A_2 \ldots A_{k-1}).$$

et **procédons par récurrence** :

- pour $k = 1$: l'égalité (E_1) s'écrit : $P(A_1) = P(A_1)$ et est évidemment vraie.
- supposons que l'égalité (E_k) est vraie pour un entier k compris entre 1 et $m-1$:
  Par la **définition** des probabilités conditionnelles, pour deux événements A et B :

  $$P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) = P(B).P(A \mid B), \quad \left(\begin{array}{l}\text{si } P(B)>0\text{, sinon } P(A|B)\text{, égal par}\\ \text{définition à } \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\text{, n'existe pas}\end{array}\right)$$

  donc, pour $A = A_{k+1}$ et $B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$:

  $$P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k).P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k),$$

  et l'égalité est licite, car, pour $k \leq m-1$, puisque $A_1 \cap \ldots \cap A_k \subset A_1 \cap \ldots \cap A_m$, on a : $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \geq P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) > 0$ (*c.f.* hypothèse sur $\{A_i\}_{1 \leq i \leq m}$).
  Alors, **par application de l'hypothèse de récurrence** $(\boldsymbol{E_k})$, il vient :

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots \ldots P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \ldots A_{k-1}).P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k).$$

  L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $k+1$.

En conclusion, l'égalité (E_k) est vérifiée au rang 1, et si elle est vraie à un rang k, $1 \leq k \leq m-1$, alors elle est vraie au rang $k+1$. Donc, **par le principe de récurrence**, elle est vraie pour tout rang k, compris entre 1 et m. ***C.Q.F.D.***

2.c. L'application de la formule des probabilités composées - ci-dessus -, avec, pour tout entier i compris entre 1 et m, $A_i = (X_i = s_{\sigma(m)})$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
&P(\{X_1 = s_{\sigma(1)}, \ldots, X_m = s_{\sigma(m)}\}) \\
&= P((X_1 = s_{\sigma(1)}) \cap \ldots \cap (X_m = s_{\sigma(m)})) \\
&\quad = P(X_1 = s_{\sigma(1)}).P(X_2 = s_{\sigma(2)} \mid X_1 = s_{\sigma(1)}). \\
&\qquad P(X_3 = s_{\sigma(3)} \mid (X_1 = s_{\sigma(1)}) \cap (X_2 = s_{\sigma(2)}))\ldots \\
&\qquad \ldots P(X_k = s_{\sigma(k)} \mid (X_1 = s_{\sigma(1)}) \cap (X_2 = s_{\sigma(2)}) \ldots \cap (X_{k-1} = s_{\sigma(k-1)}))\ldots \\
&\qquad \ldots P(X_m = s_{\sigma(m)} \mid (X_1 = s_{\sigma(1)}) \cap (X_2 = s_{\sigma(2)}) \ldots \cap (X_{m-1} = s_{\sigma(m-1)})).
\end{aligned}$$

Et l'application de la formule est licite, car toutes les probabilités conditionnelles qui interviennent sont supposées exister - sinon **A]** et **B]** n'auraient pas de sens.

Or, les probabilités $P\big(X_k = s_{\sigma(k)} \mid (X_1 = s_{\sigma(1)}) \cap (X_2 = s_{\sigma(2)}) \ldots \cap (X_{k-1} = s_{\sigma(k-1)})\big)$, pour k compris entre 2 et m, compte-tenu de la propriété **A]**, sont égales, chacune, à $P\big(X_k = s_{\sigma(k)} \mid X_{k-1} = s_{\sigma(k-1)}\big)$, donc encore à $p_{\sigma(k-1),\sigma(k)}$ d'après la propriété **B]**.
Donc, le développement précédent se réécrit :

$$\boxed{\begin{aligned} &P\big(\{X_1 = s_{\sigma(1)}, \ldots, X_m = s_{\sigma(m)}\}\big) \\ &\quad = P\big(X_1 = s_{\sigma(1)}\big).p_{\sigma(k-1),\sigma(k)}.p_{\sigma(k-1),\sigma(k)} \cdots p_{\sigma(k-1),\sigma(k)} \cdots p_{\sigma(k-1),\sigma(k)} \end{aligned}}.$$

2.d. Qu'il soit d'abord clair, que $\mu_n(\{s_j\})$ désigne, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, la probabilité $P(X_n = s_j)$.
Si nous n'y avions pas pensé (mais la question n'est-elle pas *hyper-classique* ?), l'énoncé nous y engage : appliquons la **formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{X_{n-1} = s_h\}_{1 \le h \le r}$** pour exprimer $\mu_n(\{s_j\})$:

$$\mu_n(\{s_j\}) = P(X_n = s_j) = \sum_{h=1}^r P(X_n = s_j \mid X_{n-1} = s_h).P(X_{n-1} = s_h).$$

ou encore, à l'aide de μ_{n-1} et la notation $p_{i,j}$ introduite avec la propriété **B]** :

$$\textbf{(4)} \quad \boxed{\mu_n(\{s_j\}) = \sum_{h=1}^r p_{h,j}.\mu_{n-1}(\{s_h\}) = \sum_{h=1}^r \mu_{n-1}(\{s_h\}).p_{h,j}}.$$

◇ *La dernière réécriture est importante et doit permettre de faire le lien avec la question* **1.a.** *pour reconnaître que, si on pose :*

$$W_{n-1} = \big(\,\mu_{n-1}(\{s_1\}) \quad \mu_{n-1}(\{s_2\}) \quad \ldots \quad \mu_{n-1}(\{s_r\})\,\big),$$

alors : $\mu_n(\{s_j\})$ est égal au j-ième cœfficient de la ligne $W_{n-1}M$.

En posant de même pour tout entier n, $W_n = \big(\,\mu_n(\{s_1\}) \quad \mu_n(\{s_2\}) \quad \ldots \quad \mu_n(\{s_r\})\,\big)$, puisque, par (4) : $\forall\, 1 \le j \le r$, $\mu_n(\{s_j\}) = (W_n)_j = \big(W_{n-1}M\big)_j$, on peut résumer ces r égalités par la seule égalité : **(5)** $\boxed{W_n = W_{n-1}M}$, valable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

◇ ***Par une récurrence***, *on peut alors montrer que : $\forall\, n \ge 0$,* $\underline{W_n = W_0.M^n}$.
En effet, l'égalité est vraie pour $n = 0$ (car $M^0 = I$) et si pour un entier $k \ge 0$, il est vrai que : $W_k = W_0.M^k$, alors, puisque d'après (5) pour $n = k+1 \ge 1$: $W_{k+1} = W_kM$, il vient que : $W_{k+1} = W_kM = (W_0M^k).M = W_kM^{k+1}$.
Ainsi, pour $k=0$, $W_0 = W_0.M^0$ et : $\forall\, k \ge 0$, $\big(W_k = W_0.M^k\big) \Longrightarrow \big(W_{k+1} = W_kM^{k+1}\big)$ donc par le principe de récurrence : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : \quad W_n = W_0.M^n}$.

- Il suffit alors de revenir aux définitions : $W_0 = \big(\,\mu_0(\{s_1\}) \quad \ldots \quad \mu_0(\{s_r\})\,\big)$, et $M^n = \big(p_{i,j}(n)\big)_{1 \le i,j \le r}$ afin d'expliciter les composantes de $W_0.M^n$ (*c.f.* **1.a**), pour obtenir le résultat demandé :

$$\boxed{\forall\, h \in [\![1, r]\!], \quad \mu_n(\{s_j\}) = (W_n)_j = \sum_{h=1}^r (W_0)_h.(M^n)_{h,j} = \sum_{h=1}^r \mu_0(\{s_h\}).p_{h,j}}.$$

3.a. *On ne dispose, sur les valeurs de cœfficients $p_{i,j}$ de la matrice M, que de trois informations*, que l'on notera ***i)***, ***ii)*** et ***iii)*** :

i) pour tout $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$, $p_{i,j} \in [0,1]$ car les $p_{i,j}$ sont égaux à des probabilités,
ii) par hypothèse, pour les questions ***3.***, ***4.***, ***5.*** et ***6.*** : $p_{i,j} > 0$ pour $1 \le i, j \le r$,
iii) $\forall\, i \in [\![1, r]\!]$, $\sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1$ (*c.f.* **2.a.**).

Les propriétés de $d = \min_{1\le i,j\le r} p_{i,j}$ ***en découlent nécessairement.***

- d est le minimum de la famille de réels $\{p_{i,j}\}_{1\le i,j\le r}$, donc il existe un couple $(i_0,j_0) \in [\![1,r]\!]^2$, tel que : $p_{i_0,j_0} = d$. Et d'après *ii)*, $p_{i_0,j_0} > 0$, donc : $\underline{d > 0}$.
- par définition, d minore tous les cœfficients $p_{i,j}$, donc : $\sum_{j=1}^r p_{i,j} \ge \sum_{j=1}^r d$, *i.e.* $\sum_{j=1}^r p_{i,j} \ge r.d$. Or, d'après *iii)* : $\sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1$, donc l'inégalité précédente s'écrit aussi : $1 \ge r.d$ ou encore : $d \le \frac{1}{r}$, d'où il découle, puisque $r \ge 2$: $\underline{d \le \frac{1}{r} \le \frac{1}{2}}$.

En conclusion, il est établi que : $\boxed{0 < d \le 1/2}$.

3.b. Soit Z un vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$, tel que $\min Z \ge 0$, *i.e.* **dont tous les cœfficients z_j $(1 \le j \le r)$, sont positifs**. Rappelons alors que MZ est le vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$, dont le i-ème cœfficient vaut : $(MZ)_i = \sum_{j=1}^r p_{i,j} z_j$.

◇ Comme d minore les $p_{i,j}$, pour tous i,j tels que $1 \le i,j \le r$: $d \le p_{i,j}$, puis, en multipliant par z_j, en rappelant que $z_j \ge 0$: $d.z_j \le p_{i,j}.z_j$.

En effectuant alors une **sommation sur j**, il vient : $\sum_{j=1}^r d.z_j \le \sum_{j=1}^r p_{i,j}.z_j$.

On a donc une minoration de $(MZ)_i$ par $\sum_{j=1}^r d.z_j = d.\sum_{j=1}^r z_j$. **Or**, comme les z_j sont positifs, la somme $\sum_{j=1}^r z_j$ est minorée par n'importe lequel de ses termes, en particulier par le plus grand d'entre eux : $\max Z$.

On a donc : pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $(MZ)_i \ge d.\sum_{j=1}^r z_j \ge d.\max Z$.

Et cette minoration est **en particulier valable pour le plus petit des cœfficients de MZ**, donc : $\boxed{\min MZ \ge d.\max Z}$.

4.a. *Pour cette question, il n'est plus fait l'hypothèse que les cœfficients de Y sont positifs, mais précisément, il est à remarquer que cette hypothèse est* ***vraie*** *sinon pour Y, du moins* ***pour le vecteur introduit par l'énoncé.***

En effet, $\min Y$ étant un minorant de tous les y_j : $y_j - \min Y \ge 0$ $(\forall j \in [\![1,r]\!])$.

En conséquence, le résultat précédent s'applique au vecteur introduit par l'énoncé, que l'on notera Y_m, et dont les cœfficients sont définis par : $(Y_m)_j = y_j - \min Y$.

Ce résultat s'énonce : $\min MY_m \ge d.\max Y_m$.

Or,

$$MY_m = M\begin{pmatrix} y_1 - \min Y \\ y_2 - \min Y \\ \vdots \\ y_r - \min Y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} \min Y \\ \min Y \\ \vdots \\ \min Y \end{pmatrix} = MY - (\min Y).M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et aussi :

$$M.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r p_{1,j} \\ \sum_{j=1}^r p_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r p_{r,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ (en effet : } \forall i \in [\![1,r]\!],\ \sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1).$$

Donc, MY_m est encore égal à :

$$MY - (\min Y).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de sorte que : } \forall i \in [\![1,r]\!], (MY_m)_i = (MY)_i - \min Y.$$