ou encore, en simplifiant les fractions en facteur :

$$\textbf{(21)}\quad R_k^{(r)}(x) = \frac{1}{k.(k-r)!}.\big[(k-r).(x-u_0)+r.(x-u_k)\big].(x-u_k)^{k-r-1}.$$

On termine en substituant à x la valeur $u_r = cr+d$. On constate alors, sachant que $u_0 = d$ et $u_k = ck+d$, que, dans l'expression de $R_k^{(r)}(u_r)$ donnée par (21), le crochet est nul, de sorte qu'il est établi que :

$$\forall\, k \geq 1,\ \text{pour } r \in [\![1, k-1]\!]\,,\quad R_k^{(r)}(u_r) = \delta_{k,r} = 0.$$

Ainsi, **après avoir distingué tous les cas pour les valeurs du couple** $(k,r) \in \mathbb{N}^2$, on a montré que la suite $(R_k(x))_{k\geq 0}$ vérifie la relation $(\mathcal{P}_{\mathcal{U}})$, relative à la suite $\mathcal{U}$ considérée, et caractéristique, d'après le **II.1**, de la suite $(Q_k(x;\mathcal{U}))_{k\geq 0}$.
On peut donc conclure que ces deux suites coïncident, c'est-à-dire que :

s'il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{U} = (ci+d)_{i\geq 0}$, *i.e.* si $\mathcal{U}$ est *arithmétique*, alors :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\quad Q_k(x;\mathcal{U}) = (x-u_0)\frac{(x-u_k)^{k-1}}{k!}}\,.$$

.PARTIE III.

Pour une bonne compréhension de cette **PARTIE III**, il est nécessaire de comprendre la modélisation de l'épidémie que l'on y propose.
Comme à la **PARTIE I**, on considère une population de N individus, initialement composée de m individus infectés et de n individus sensibles. On a donc : $N = m+n$.
Puis, on effectue $N^2 - N$ tirages, un pour chaque couple $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ $(i \neq j)$, déterminant chacun s'il existe une arête orientée de v_i vers v_j (c'est là une différence par rapport à la **PARTIE I** où l'on construisait un graphe non orienté ce qui nécessitait seulement C_N^2 tirages, un par paire d'éléments de $\mathcal{V}$).
Si on note $(v_i \to v_j)$ l'événement "*il existe une arête orientée de v_i vers v_j*", alors, d'après l'énoncé :

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2, i \neq j,\ \ P\big(v_i \to v_j\big) = p.$$

Ces tirages étant effectués, on dispose d'un **graphe orienté**. Ce graphe étant donné (c'est le résultat de l'expérience aléatoire), à chaque <u>génération</u> $\tau \geq 0$, les ensembles $\mathcal{I}_\tau$, $\mathcal{S}_\tau$, correspondent respectivement, à l'ensemble des individus infectés et à l'ensemble des individus sensibles. Le reste de la population, représenté par l'ensemble $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{I}_\tau \cup \mathcal{S}_\tau)$, est constitué d'individus ni infectés, ni sensibles, mais **immunisés**, c'est-à-dire ayant été infectés à une étape précédente, guéris, et ne pouvant plus être infectés (*c.f.* **PRÉLIMINAIRES**).

Il est à noter que <u>le graphe étant donné</u>, **la propagation de l'épidémie est entièrement déterministe** :

<u>D'une génération τ à la génération $\tau+1$</u> :

- les individus (ou sommets) v_i infectés (les éléments de $\mathcal{I}_\tau$), transmettent la maladie aux individus sensibles auxquels ils sont connectés (éléments de $\mathcal{L}_i$).
- les individus infectés guérissent et sont désormais immunisés (les individus éléments de $\mathcal{I}_\tau$ deviennent donc des éléments de $\mathcal{V}\setminus(\mathcal{I}_{\tau+1} \cap \mathcal{S}_{\tau+1})$). Ainsi, un individu ne peut être infecté qu'une fois et jamais pendant plus d'une génération.

C'est ce processus qui fonde les relations de récurrence explicitées par l'énoncé :

$$\mathcal{I}_{\tau+1} = \big(\textstyle\bigcup_{v_i \in \mathcal{I}_\tau} \mathcal{L}_i \cap \mathcal{S}_\tau\big) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\tau+1} = \mathcal{S}_\tau \setminus \mathcal{I}_{\tau+1}.$$

[III.1.a.] La population initiale étant donnée, composée de N individus dont m sont infectés, les $N-m$ autres étant sensibles, S_1 est la variable aléatoire égale au nombre d'individus sensibles à la première génération. Comme, d'autre part, la seule possibilité pour un individu d'être sensible, à une génération donnée, est d'avoir été sensible à la génération précédente et de ne pas avoir été infecté lors de la dernière phase de propagation :

> S_1 « ***compte*** » les individus initialement sensibles qui n'ont pas été infectés lors de la première étape de propagation de l'épidémie, c'est-à-dire les individus éléments de $\mathcal{S}_0$ tels que, dans le graphe issu des tirages, il n'y ait aucune arête orientée dirigée vers eux et les reliant à un individu infecté (élément de $\mathcal{I}_0$).

La V.A. S_1 est donc ce que l'on appelle un « ***compteur*** ». **D'où la façon de procéder.**

◇ Probabilité pour un élément de $\mathcal{S}_0$ de **ne pas** être infecté à la génération n°1 :
Si on désigne par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les indices des sommets (ou individus) éléments de $\mathcal{S}_0$ et $i_1, i_2, \ldots, i_m$ les indices des sommets(*) éléments de $\mathcal{I}_0$, d'après les hypothèses sur la propagation de l'épidémie, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(\text{“ \textit{l'individu} } n^o s_k \textbf{ \textit{n'est pas} } \text{\textit{infecté à la première étape de la propagation}”})$$

$$= P(v_{s_k} \in \mathcal{S}_1) = P\begin{pmatrix} \textit{il n'existe } \underline{\textbf{\textit{aucun}}} \textit{ indice } i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \textit{ tel que} \\ v_{s_k} \textit{ est relié à } v_i \textit{ par une arête orientée de } v_i \textit{ vers } v_{s_k} \end{pmatrix}$$

$$= P\Big(\forall i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}, \quad (v_i \not\to v_{s_k}) \text{ est réalisé }\Big)$$

$$= P\left(\bigcap_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} (v_i \not\to v_{s_k})\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{on a noté } (v_i \not\to v_j) \text{ l'événement “ \textit{il n'existe}} \\ \textit{pas d'arête orientée de } v_i \textit{ vers } v_j \text{”.}\end{array}\right).$$

Comme, par hypothèse, les tirages fixant l'existence des arêtes orientées allant d'un sommet différent de v_{s_k} vers v_{s_k} sont indépendants, on a encore :

$$P(v_{s_k} \in \mathcal{S}_1) = \prod_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} P(v_i \not\to v_{s_k}).$$

Enfin, l'événement contraire de $(v_i \not\to v_{s_k})$ étant l'événement $(v_i \to v_{s_k})$, de probabilité $p = 1 - q$ (*c.f.* notre introduction à la **PARTIE III**), on peut conclure :

> $\forall k$ tel que $v_{s_k} \in \mathcal{S}_0$:
>
> **(23)** $$P(v_{s_k} \in \mathcal{S}_1) = \prod_{i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}} \Big(1 - P(v_i \to v_{s_k})\Big) = (1-p)^m = q^m.$$

◇ Loi de S_1 : comme il a déjà été dit, puisque seuls les individus sensibles de la population initiale sont susceptibles d'être toujours sensibles après la première étape de la propagation, on compte le nombre d'individus sensibles de la première génération en sommant les V.A. de Bernoulli Y_{s_k} $(1 \le k \le n)$ égales à 1 si $v_{s_k} \in \mathcal{S}_1$, et égales à 0 sinon. On peut ainsi définir la V.A. S_1 par : $S_1 = Y_{s_1} + Y_{s_2} + \ldots + Y_{s_n} = \sum_{s \in \mathcal{S}_0} Y_s$.

Les V.A. Y_{s_k} $(1 \le k \le n)$ sont indépendantes car, par hypothèse, les tirages relatifs aux arêtes orientées arrivant sur un sommet v_s (ceux qui déterminent la valeur de Y_s) sont indépendants de ceux déterminant les arêtes arrivant sur les autres sommets.

(*) on parlera indifféremment de *sommets* ou d'*individus* dans la mesure où les dénominations renvoient toutes deux aux éléments de $\mathcal{V}$.

Par suite, S_1 est la somme de n V.A. de Bernoulli indépendantes de même paramètre, puisque : $\forall s \in \mathcal{S}_0,\quad P(Y_s = 1) = P(v_s \in \mathcal{S}_1) = q^m$, donc, d'après le cours :

$$\boxed{S_1 \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } q^m}.$$

$\boxed{\textbf{III.1.b.}}$ S_1 suivant une loi binomiale de paramètres n et q^m, pour tout $j \in [\![k, n]\!]$, $P(S_1 = j|n, m) = C_n^j (q^m)^j (1-q^m)^{n-j}$, et donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n} C_j^k P(S_1 = j|n, m) &= \sum_{j=k}^{n} C_j^k . C_n^j (q^m)^j (1-q^m)^{n-j} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{k!(j-k)!} . \frac{n!}{j!(n-j)!} (q^m)^j (1-q^m)^{n-j} \\
&= \frac{n!}{k!} . \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{(j-k)!(n-j)!} (q^m)^j (1-q^m)^{n-j}.
\end{aligned}$$

***Puisque le résultat final s'exprime sans signe de sommation**, et sous la forme d'une puissance, il est naturel de chercher à <u>reconnaître un développement du binôme</u> dans la somme précédente.*

<u>Commençons par un changement d'indice</u>, en posant $j' = j - k$, de sorte que la valeur minimale de l'indice soit 0, comme c'est le cas dans un développement du binôme :

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{(j-k)!(n-j)!} (q^m)^j (1-q^m)^{n-j} = \sum_{j'=0}^{n-k} \frac{1}{j'!(n-k-j')!} (q^m)^{j'+k} (1-q^m)^{n-k-j'}$$

(on a utilisé que : si $j' = j - k$, alors $j = j' + k$ pour éliminer l'indice j du terme général).

Par conséquent, en revenant à la somme qui nous intéresse :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n} C_j^k P(S_1 = j|n, m) &= \frac{n!}{k!} . \sum_{j'=0}^{n-k} \frac{1}{j'!(n-k-j')!} (q^m)^{j'+k} (1-q^m)^{n-k-j'} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} . (q^m)^k \sum_{j'=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j'!\big((n-k)-j'\big)!} (q^m)^{j'} (1-q^m)^{(n-k)-j'} \\
&= C_n^k . q^{km} \sum_{j'=0}^{n-k} C_{n-k}^{j'} (q^m)^{j'} (1-q^m)^{(n-k)-j'}.
\end{aligned}$$

Ainsi, **on reconnaît** que la somme correspond au développement du binôme de l'expression $\big(q^m + (1-q^m)\big)^{n-k}$; or $q^m + (1-q^m) = 1$, donc la somme aussi vaut 1 et l'on peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{j=k}^{n} C_j^k P(S_1 = j|n, m) = C_n^k . q^{km}}.$$

$\boxed{\textbf{III.1.c.}}$ *C'est encore purement calculatoire.* En substituant à $\phi_k(j, n-j)$ sa valeur (pour $k \le j \le n$), et en rappelant que $j_{[k]} = \frac{j!}{(j-k)!}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j|n, m) &= \sum_{j=k}^{n} j_{[k]} q^{k\left(j+(n-j)-k\right)} P(S_1 = j|n, m) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} q^{k(n-k)} P(S_1 = j|n, m) = q^{k(n-k)} . \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} P(S_1 = j|n, m).
\end{aligned}$$

En introduisant au numérateur et au dénominateur $k!$, on fait apparaître de force C_j^k dans la somme, et on obtient ainsi :

$$\sum_{j=k}^{n} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j | n, m) = k! q^{k(n-k)} . \sum_{j=k}^{n} C_j^k P(S_1 = j | n, m),$$

et l'on reconnaît que la somme est celle que l'on a calculée au **III.1.b.** Il vient donc :

$$\sum_{j=k}^{n} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j | n, m) = k! . q^{k(n-k)} . \underline{C_n^k q^{km}} = k! C_n^k . q^{k(n-k+m)}.$$

Or, $k! C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n_{[k]}$, donc on vérifie que, pour tout k compris entre 0 et n :

$$\boxed{\sum_{j=k}^{n} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j | n, m) = n_{[k]} . q^{k(n-k+m)} = \phi_k(n, m)}.$$

III.2. *Pour que le problème posé soit bien clair à l'esprit du lecteur, rappelons que* :

La **borne inférieure d'un ensemble** $X \subset \mathbb{R}$ est, s'il existe, le plus grand des minorants de cet ensemble. **On note alors** $\inf X$ **ce réel.**

Un tel réel **existe** si et seulement si l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est **non vide et minoré.**

Lorsque $X = \emptyset$, ou lorsque X est non vide mais n'admet pas de minorant, un tel réel n'existe donc pas, mais, **on définit néanmoins** $\inf X$:
- si $X = \emptyset$, alors on pose $\inf X = +\infty$,
- si X est non vide mais n'admet pas de minorant, alors on pose $\inf X = -\infty$.

Ici, on pose $T = \inf\{\tau \in \mathbb{N} \mid I_\tau = 0\}$.

◇ T est une V.A. (**c'est admis**), égale à la borne inférieure d'un ensemble X inclus dans $\mathbb{N}$, donc X est minoré par 0, ce qui élimine pour T une raison de n'être pas fini. **Ici donc** :

$$(\text{“}T = \inf X \textit{ est fini}\text{”}) \Longleftrightarrow (X \neq \emptyset).$$

Ainsi, la question se résume à montrer que :

$$P(T \text{ fini}) = P(X \neq \emptyset) = 1.$$

◇ En revenant à la définition de X, $(X = \{\tau \in \mathbb{N} \mid I_\tau = 0\})$, il vient :

$$P(T \text{ fini}) = P(X \neq \emptyset) = P(\exists \tau \in \mathbb{N}, \text{ tel que } I_\tau = 0) = P\big(\textstyle\bigcup_{\tau \in \mathbb{N}} (I_\tau = 0)\big).$$

Mais cette dernière probabilité n'est pas connue, et on n'a guère envie d'appliquer la formule du crible. Il est plus fructueux de **passer à l'événement contraire**, ce qui donne :

$$\textbf{(24)} \quad P(T \text{ fini}) = 1 - P(\forall \tau \in \mathbb{N},\ I_\tau \neq 0) = 1 - P\big(\textstyle\bigcap_{\tau \in \mathbb{N}} (I_\tau \neq 0)\big).$$

La transformation est fructueuse *car l'événement* $\bigcap_{\tau \in \mathbb{N}} (I_\tau \neq 0)$ *est facile à cerner.*

En effet, la réalisation de $\bigcap_{\tau \in \mathbb{N}} (I_\tau \neq 0)$ équivaut au fait qu'à chaque génération $\tau \geq 0$, au moins un individu est infecté ($I_\tau \neq 0 \Longleftrightarrow \mathcal{I}_\tau \neq \emptyset$). Or, pour tout $\tau \geq 1$, les individus infectés de la génération τ, sont de **nouveaux** individus prélevés, dans $\mathcal{S}_{\tau-1}$ (car $\mathcal{I}_\tau = \big(\cup_{v_i \in \mathcal{I}_{\tau-1}} \mathcal{L}_i\big) \cap \mathcal{S}_{\tau-1}$). Et, d'après la relation $\mathcal{S}_{\tau+1} = \mathcal{S}_\tau \backslash \mathcal{I}_{\tau+1}$, pour tout $\tau \geq 0$, $\mathcal{S}_{\tau+1} \subset \mathcal{S}_\tau$, de sorte que : $\forall \tau \geq 1$, $\mathcal{S}_{\tau-1} \subset \mathcal{S}_0$ (par récurrence). Ainsi, pour tout $\tau \geq 1$, les individus infectés de la génération τ, sont prélevés dans le contingent des individus initialement sensibles (ensemble $\mathcal{S}_0$). L'ensemble $\mathcal{S}_0$ étant de cardinal fini (égal à n), il est donc **impossible** d'avoir au cours de la propagation de l'épidémie, un infinité d'individus infectés comme cela est le cas si, pour tout $\tau \geq 0$, $I_\tau > 0$.

Ainsi l'événement $\bigcap_{\tau \in \mathbb{N}}(I_\tau \neq 0)$ est un <u>événement impossible</u>, donc de probabilité nulle.

Il en découle d'après (24), que : $\boxed{P(T \text{ fini}) = 1 - P\left(\bigcap_{\tau \in \mathbb{N}}(I_\tau \neq 0)\right) = 1}$.

III.3. *Avant toute chose, **précisons la nature de** S_T.*

Il est **admis** que S_T est une V.A. sur Ω. Ceci étant, on pourra préciser(*) que S_T a un sens de par le fait qu'il est certain que T prend une valeur entière à l'issue de l'expérience aléatoire.

En effet, ***il est à savoir que*** :

> si X est une partie de $\mathbb{N}$, et si $\inf X$ est finie (*i.e.* si $X \neq \emptyset$) alors $\inf X = \min X$.
> (*on dit que la borne inférieure est <u>atteinte</u> :* $\inf X$ *est un élément de* X)

Or, **ici**, quelque soit le résultat de l'expérience aléatoire, **il est certain que** :

$X = \{\tau \in \mathbb{N} \mid I_\tau = 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, et que $T = \inf X$ est fini,

donc, <u>au lieu de $T = \inf X$</u>, on peut aussi écrire que :

> $T = \min X$, *i.e.* T est la V.A. égale au plus petit entier τ tel que $I_\tau = 0$.

Ainsi, les conditions de l'expérience aléatoire étant fixées (par la donnée des ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}_0$) :

> <u>Pour tout $\mathcal{G} \in \Omega$</u>, (*i.e.* pour tout résultat de l'expérience aléatoire) :
> T prend une valeur entière, notée $T(\mathcal{G})$, et S_T prend la valeur $S_{T(\mathcal{G})}$, égale au nombre d'individus infectés à la $T(\mathcal{G})$-ième génération, (valeur entièrement déterminée par la connaissance de $\mathcal{V}$, $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{G}$), c'est donc le nombre d'individus sensibles lorsque de l'extinction de l'épidémie, à la génération $T(\mathcal{G})$ où pour la première fois il n'y a plus d'individus infectés.

◊ <u>Nature polynomiale de $\varphi(x \mid n, m)$</u> :

Par définition, φ est la fonction génératrice de S_T, ce qui a un sens dès lors qu'il est **admis** que S_T est une V.A. discrète prenant des valeurs entières positives.

Dans ces conditions, ***d'après le cours*** :

> Pour tout réel x, ***<u>tel que la somme existe</u>***,
> **(25)** $$\varphi(x \mid n, m) = \sum_{k \in S_T(\Omega)} x^k . P(S_T = k \mid n, m) = E(x^{S_T} \mid n, m).$$

Les cas de figure à envisager sont les suivants :

- soit $S_T(\Omega) \subset \mathbb{N}$ est de cardinal infini, et alors on peut montrer que φ est une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.
- soit $S_T(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, auquel cas φ est polynomiale et donc définie sur $\mathbb{R}$.

En conséquence, on poursuivra comme suit.

Comme on l'a indiqué à la question précédente, on déduit de la relation, donnée par l'énoncé, $\mathcal{S}_{\tau+1} \subset \mathcal{S}_\tau \backslash \mathcal{I}_{\tau+1}$ $(\forall \tau \in \mathbb{N})$, que :

$$\forall \tau \in \mathbb{N}, \quad \ldots \subset \mathcal{S}_{\tau+1} \subset \mathcal{S}_\tau \subset \ldots \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0.$$

(*) lors de l'épreuve on pourra enchaîner directement sur la "*nature polynomiale*" de $\varphi(x \mid n, m)$.

Puisque $\mathcal{S}_0$ est de cardinal fini, égal à n, il s'ensuit que la suite $(\text{Card } \mathcal{S}_\tau)_{\tau \geq 0} = (S_\tau)_{\tau \geq 0}$ est une suite décroissante, positive, à valeurs entières, de premier terme égal à n.

Par conséquent, $\forall \tau \geq 0, \ \ S_\tau \in [\![0, n]\!]$, et donc :

S_T est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

Par suite, dans (25), la somme pour $k \in S_T(\Omega)$ se ramène à une somme pour k variant de 0 à n, de sorte que φ est polynomiale, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x \mid n, m) = E\big(x^{S_T} \mid n, m\big) = \sum_{k=0}^{n} x^k . P\big(S_T = k \mid n, m\big)$$

En identifiant fonction polynomiale et polynôme, on peut donc conclure que :

$\boxed{\varphi(x \mid n, m) \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } n}$.

◇ Valeur de $\phi(x \mid 0, m)$:

Si $n = 0$, alors puisque n et m sont liés par la relation Card $\mathcal{V} = N = n + m$, on en déduit que tous les individus de la population sont infectés à la génération initiale $(m = N)$, donc : $\mathcal{I}_0 = \mathcal{V}$ et $I_0 = N$.

Par suite, **à la première génération**, tous les individus sont immunisés, donc : $\mathcal{I}_1 = \emptyset$ et $I_1 = 0$, (on peut invoquer que $\mathcal{I}_1 = \big(\cup_{v_i \in \mathcal{I}_0} \mathcal{L}_i\big) \cap \mathcal{S}_0$ et que $\mathcal{S}_0 = \emptyset$) et **ce indépendamment du résultat des tirages**, *i.e.* pour tout $\mathcal{G} \in \Omega$.

Par conséquent, quelque soit le résultat de l'expérience aléatoire : $I_0 = N$ et $I_1 = 0$.

Donc, $T = \inf\{\tau \in \mathbb{N} \mid I_\tau = 0\}$ est la variable aléatoire certaine égale à 1.

Il s'ensuit que :

$$\forall \mathcal{G} \in \Omega, \quad S_T(\mathcal{G}) = S_{T(\mathcal{G})} = S_1.$$

Il est donc certain que la V.A. S_T prend la même valeur que la V.A. S_1. Or, considérant les conditions de l'expérience, $(n = 0)$, à la première génération, tous les individus sont immunisés et il n'y a plus aucun individu sensible, (ou encore $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_0 = \emptyset$), donc S_1 est, elle aussi, une variable aléatoire certaine, égale à 0 car $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

On a donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] , P\big(S_T = k \mid 0, m\big) = P\big(S_1 = k \mid 0, m\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\varphi(x \mid 0, m) = \sum_{k=0}^{n} x^k . P\big(S_T = k \mid 0, m\big) = x^0 . 1 = 1}.$$

◇ Valeur de $\phi(x \mid n, 0)$:

Si $m = 0$, alors on a, déjà au rang $\tau = 0$, $I_0 = 0$, donc, de nouveau, la V.A. $T = \inf\{\tau \in \mathbb{N} \mid I_\tau = 0\}$ est une variable aléatoire certaine, égale à 0 cette fois.

Quant à S_T, il est donc certain que $S_T = S_0$ (puisque $T = 0$), or comme S_0 est fixé, égal à n, et indépendant du résultat de l'expérience, S_0 est la V.A. certaine égale à n.

En conclusion :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] , P\big(S_T = k \mid n, 0\big) = P\big(S_0 = k \mid n, 0\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}.$$

Puis :

$$\boxed{\varphi(x \mid n, 0) = \sum_{k=0}^{n} x^k . P\big(S_T = k \mid n, 0\big) = x^n . 1 = x^n}.$$

III.3.b. *On pourra noter que la* <u>*structure*</u> *de la formule proposée* (c'est une somme sur $j \in S_1(\Omega)$, $S_1(\Omega) = [\![0,n]\!]$, de termes faisant intervenir les valeurs $P(S_1 = j \mid n,m)$), *suggère l'utilisation de la formules des* ***probabilités totales***.

◇ On a établi à la question précédente que :

$$\textbf{(26)} \quad \varphi(x \mid n,m) = E(x^{S_T} \mid n,m) = \sum_{k=0}^{n} x^k . P(S_T = k \mid n,m).$$

La **formule des probabilités totales**, avec le <u>système complet d'événements</u> $\{(S_1 = j)\}_{j\in[\![0,n]\!]}$, permet d'y réexprimer les probabilités $P(S_T = k \mid n,m)$(*). Pour tout k compris entre 0 et n, elle donne :

$$P(S_T = k \mid n,m) = \sum_{j=0}^{n} P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))P(S_1 = j \mid n,m),$$

où $P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))$ désigne la probabilité pour que S_T soit égal à k, **<u>sachant que</u>** S_1 prend la valeur j et la mention "(n,m)" **<u>rappelle</u>** l'hypothèse sur la composition de la population initiale.

On peut alors utiliser cette réécriture dans l'égalité (26) qui devient :

$$\begin{aligned}\varphi(x \mid n,m) &= \sum_{k=0}^{n} x^k . \left(\sum_{j=0}^{n} P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))P(S_1 = j \mid n,m)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^k . P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))P(S_1 = j \mid n,m)\end{aligned}$$

puis, en remarquant que les indices <u>varient de façon indépendante</u>, on peut **intervertir les sommations** comme suit :

$$\textbf{(27)} \quad \varphi(x \mid n,m) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} x^k . P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))P(S_1 = j \mid n,m).$$

◇ <u>Valeur des probabilités $P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))$, $((k,j) \in [\![0,n]\!]^2)$:</u>

Pour tout $(k,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))$ est la probabilité pour qu'**au moment de l'extinction de l'épidémie** (c'est-à-dire à la génération $\tau = T$, génération à laquelle pour la première fois, il n'y a plus d'individus infectés, ce qui stoppe la propagation), **le nombre d'individus sensibles soit égal à k**, $(S_T = k)$, **sachant qu**'à la première génération la population est composée de j individus sensibles, et initialement de n individus sensibles et m individus infectés.

Il s'agit d'établir en quoi cette probabilité est égale à $P(S_T = k \mid j, n-j)$.

Dans $P(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m))$, le conditionnement et les conditions initiales indiquent ***globalement*** que : **(28)** $S_0 = n, \quad I_0 = m \quad \text{et} \quad S_1 = j.$

Or, **il découle** des relations de l'énoncé :

$$(\forall \tau \geq 0) \qquad \mathcal{I}_{\tau+1} = \left(\cup_{v_i\in\mathcal{I}_\tau} \mathcal{L}_i\right) \cap \mathcal{S}_\tau, \ \text{ et } \ \mathcal{S}_{\tau+1} = \mathcal{S}_\tau \backslash \mathcal{I}_{\tau+1},$$

que : $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{I}_1$, donc que :

<u>$\text{Card } \mathcal{I}_1 = \text{Card } \mathcal{S}_1 - \text{Card } \mathcal{S}_0$</u>, *i.e.* $I_1 = S_1 - S_0$.

(*) on notera que $P(S_T = k \mid n,m)$ n'est pas à proprement parler une probabilité conditionnelle, mais à une probabilité "*simple*". En effet, la mention "$\mid n,m$" ne renvoie pas à un *alea* que l'on fixe (la réalisation d'un certain événement à l'issue de l'expérience aléatoire) mais simplement rappelle les conditions de l'expérience.
Il s'agit donc ici d'une <u>application tout à fait usuelle</u> de la formule des probabilités totales.

Les informations (28) sont donc équivalentes à :

$$\textbf{(29)} \quad (S_0, I_0) = (n,m), \quad (S_1, I_1) = (j, n-j).$$

Par conséquent :

$$P\big(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m)\big) = P\big(S_T = k \mid S_1 = j, I_1 = n-j,\ (n,m)\big)$$

Or, **sous le conditionnement** "$S_1 = j, I_1 = n-j$" :

- puisque **la propagation ultérieure de l'épidémie**, (générations $\tau \geq 2$), se fait au sein des individus sensibles de $\mathcal{S}_1$, ($\forall\,\tau \geq 2,\ \ \mathcal{S}_\tau, \mathcal{I}_\tau \subset \mathcal{S}_1$), à partir des éléments de $\mathcal{I}_1$, et **dépend donc uniquement des ensembles** $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{I}_1$ **et** $\{\mathcal{L}_i\}_{v_i \in \mathcal{S}_0}$ (*).
(par les relations : $\mathcal{I}_{\tau+1} = \big(\cup_{v_i \in \mathcal{I}_\tau} \mathcal{L}_i\big) \cap \mathcal{S}_\tau$ et $\mathcal{S}_{\tau+1} = \mathcal{S}_\tau \backslash \mathcal{I}_{\tau+1}$, pour $\tau \geq 1$)
- puisque **le conditionnement ne donne d'indication que sur** $\mathcal{S}_1$ **et** $\mathcal{I}_1$, c'est-à-dire seulement **sur les ensembles** $\{\mathcal{L}_i\}_{v_i \in \mathcal{I}_0}$ qui les déterminent, $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{I}_0$ étant donnés (compte-tenu de ce que : $\mathcal{I}_1 = \big(\cup_{v_i \in \mathcal{I}_0} \mathcal{L}_i\big) \cap \mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \setminus \mathcal{I}_1$).

on peut constater que le conditionnement se ramène à une hypothèse faite sur les ensembles $\{\mathcal{L}_i\}_{v_i \in \mathcal{I}_0}$ (ensembles des arêtes partant des individus initialement infectés) et n'impose aucune condition sur les ensembles $\{\mathcal{L}_i\}_{v_i \in \mathcal{S}_0}$ (car $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{I}_0 = \emptyset$), c'est-à-dire n'impose aucune condition sur les arêtes reliant les individus de $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{I}_1$ qui seules déterminent la propagation de l'épidémie pour les générations $\tau \geq 2$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{I}_1$ étant donnés.

Ainsi : $P\big(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m)\big) = P\big(S_T = k \mid S_1 = j, I_1 = n-j,\ (n,m)\big)$ est la probabilité pour que S_T soit égal à k lorsque l'épidémie se propage au sein d'une population composée initialement de j individus sensibles et de $n-j$ individus infectés, **avec une distribution aléatoire** - suivant le principe décrit par l'énoncé - des arêtes orientées reliant tous ces individus.

Par conséquent, on peut affirmer que :

$$P\big(S_T = k \mid S_1 = j,\ (n,m)\big) = P\big(S_T = k \mid j, n-j\big).$$

et réécrire l'égalité (27) sous la forme :

$$\varphi(x \mid n,m) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} x^k.P\big(S_T = k \mid j, n-j\big)P\big(S_1 = j \mid n,m\big).$$

Reste à sortir $P\big(S_1 = j \mid n,m\big)$, indépendant de k, de la somme la plus intérieure, pour écrire que :

$$\varphi(x \mid n,m) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k.P\big(S_T = k \mid j, n-j\big)\right)P\big(S_1 = j \mid n,m\big).$$

et à reconnaître, en $\sum_{k=0}^{n} x^k.P\big(S_T = k \mid j, n-j\big)$, l'expression de $\varphi(x \mid j, n-j)$, de sorte que finalement :

$$\boxed{\varphi(x \mid n,m) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x \mid j, n-j)P\big(S_1 = j \mid n,m\big)}$$

III.3.c. *On va montrer, par récurrence sur n, que la relation proposée est vraie pour tout couple d'entiers (n,m), en s'appuyant sur le résultat précédent.* (Il faudra aussi utiliser la définition par récurrence des polynômes $Q_k(x; \mathcal{U}^{(q)})$).

(*) en fait la propagation dépend des ensembles $\mathcal{L}_i$ tels que $v_i \in \mathcal{I}_\tau$, $\tau \geq 1$. Mais puisque $\forall\,\tau \geq 1$, $\mathcal{I}_\tau \subset \mathcal{S}_0$, on a : $\{\mathcal{L}_i\}_{v_i \in \mathcal{I}_\tau, \tau \geq 1} \subset \{\mathcal{L}_i\}_{v_i \in \mathcal{S}_0}$.

◊ Formulons l'hypothèse de récurrence suivante :

$$(\mathcal{H}_n): \quad \forall m \in \mathbb{N}, \ \varphi(x \mid n, m) = \sum_{k=0}^{n} n_{[k]} q^{k(n+m-k)} Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right).$$

Et procédons par une ***récurrence forte*** (*c.f.* démonstrations de la **PARTIE II**).

- pour $n = 0$: la somme se réduit à $0_{[0]} q^{0.(0+m-0)} Q_0\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right)$ $(\forall m \in \mathbb{N})$. Avec la convention $0_{[0]} = 1$ (sous-entendu de l'énoncé), sachant que, pour toute suite réelle $\mathcal{V}$, $Q_0(x; \mathcal{V}) = 1$ (*c.f.* **II.**), la somme est donc égale à 1 (polynôme constant). Comme, d'après **III.3.a.**, $\varphi(x \mid 0, m) = 1$ $(\forall m \in \mathbb{N})$, $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
- Si l'on suppose, pour un entier $n \geq 1$, que $(\forall j \in [\![0, n-1]\!])$, $(\mathcal{H}_j)$ est vraie : On a (*c.f.* **III.3.a.**) :

(30) $$\forall m \in \mathbb{N}, \ \varphi(x \mid n, m) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x \mid j, n-j) P(S_1 = j \mid n, m).$$

* Valeur de la somme (dans (30)) pour j variant de 0 à $n-1$:

Par l'hypothèse de récurrence, pour $0 \leq j \leq n-1$ on dispose d'un réécriture de $\varphi(x \mid j, n-j)$, la somme, **privée de son dernier terme**, s'écrit alors :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{j} j_{[k]} q^{k(j+(n-j)-k)} Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right) \right) P(S_1 = j \mid n, m).$$

La double somme se fait sur tous les couples (j, k) tels que : $0 \leq k \leq j \leq n-1$[*]. Donc, **en inversant la somme sur** j **et la somme sur** k, cette double somme est encore égale à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{n-1} j_{[k]} q^{k(j+(n-j)-k)} Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right) P(S_1 = j \mid n, m) \right).$$

En extrayant de la somme sur j **les facteurs indépendants de** j, on réécrit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{n-1} j_{[k]} q^{k(j+(n-j)-k)} P(S_1 = j \mid n, m) \right) Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right),$$

et il est intéressant de n'avoir pas simplifié l'exposant de q, car on aura reconnu que $j_{[k]} q^{k(j+(n-j)-k)} = \phi_k(j, n-j)$, ce qui permet encore de réécrire la double somme sous la forme :

(31) $$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k}^{n-1} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j \mid n, m) \right) Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right).$$

Or, on peut constater que la somme sur j dans (31) est égale à la somme calculée au **III.1.c**, **privée de** son terme de rang n, lequel, par définition des nombres $\phi_k(n, m)$, et sachant que S_1 suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, q^m)$, vaut $\phi_k(n, 0) P(S_1 = n \mid n, m) = n_{[k]} q^{k(n-k)}.q^{mn}$. La somme sur j dans (31) vaut donc :

$$\sum_{j=k}^{n-1} \phi_k(j, n-j) P(S_1 = j \mid n, m) = \phi_k(n, m) - n_{[k]} q^{k(n-k)}.q^{mn}.$$

(*) k peut donc prendre toutes les valeurs de 0 à $n-1$, tandis que pour k fixé, j varie de k à $n-1$.

On en déduit la réécriture suivante de la double somme (31) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\phi_k(n,m) - n_{[k]}q^{k(n-k)}.q^{mn}\right)Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right).$$

Ou encore, en rappelant que $\phi_k(n,m) = n_{[k]}q^{k(n+m-k)}$, et en scindant la somme en deux :

$$\textbf{(32)}\quad \sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n+m-k)}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n-k)}.q^{mn}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right).$$

C'est là notre **ultime réécriture** de la somme de (30) privée de son dernier terme (*i.e.* "(32)". $= \sum_{j=0}^{n-1}\varphi(x \mid j, n-j)P(S_1 = j \mid n,m)$).

∗ <u>Valeur du terme de rang n de la somme (dans (30))</u> :

Ce terme vaut $\varphi(x \mid n,0)P(S_1 = n \mid n,m)$, or, d'après **III.3.a.**, $\varphi(x \mid n,0) = x^n$, et on a déjà rappelé que $P(S_1 = n \mid n,m) = (q^m)^n$, donc :

$$\textbf{(33)}\quad \varphi(x \mid n,0)P(S_1 = n \mid n,m) = q^{mn}x^n.$$

Avec les résultats (32) et (33), on a une réécriture complète de la double somme de (30), selon laquelle :

(34) pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\varphi(x \mid n,m)$ vaut :

$$\sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n+m-k)}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n-k)}.q^{mn}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) + q^{mn}x^n.$$

Rappelons à ce stade qu'il s'agit d'établir $(\mathcal{H}_n)$ ***!*** Et si dans $(\mathcal{H}_n)$ on isole le terme de rang n de la somme en l'explicitant, $(\mathcal{H}_n)$ s'énonce :

$$(\mathcal{H}_n):\quad \forall m \in \mathbb{N},\ \varphi(x \mid n,m) = \sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n+m-k)}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) + n!q^{mn}.Q_n\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right).$$

<u>**Ainsi**</u>, en comparant l'expression de $\varphi(x \mid n,m)$ dans (34) et dans $(\mathcal{H}_n)$, on constate à qu'**il ne reste plus qu'à** <u>**montrer l'égalité suivante**</u> :

$$\textbf{(35)}\quad -\sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n-k)}.q^{mn}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) + q^{mn}x^n = n!q^{mn}.Q_n\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right).$$

Or, en utilisant que $n_{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}$, on peut factoriser l'expression au membre de gauche par $n!q^{mn}$, puis revenir à la définition de la suite $\mathcal{U}^{(q)}$ selon laquelle $q^{k(n-k)} = \left(u_k^{(q)}\right)^{n-k}$, pour obtenir que :

$$-\sum_{k=0}^{n-1} n_{[k]}q^{k(n-k)}.q^{mn}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) + q^{mn}x^n = n!q^{mn}.\underbrace{\left(\frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(u_k^{(q)}\right)^{n-k}}{(n-k)!}Q_k\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)}_{=\,Q_n\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right)\ (c.f.\ \text{définition PARTIE II})}.$$

<u>**L'égalité (35) est donc vraie**</u>. Et par suite, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.

On peut conclure la démonstration par récurrence.

On a montré que :

> $(\mathcal{H}_0)$ est vraie et si l'hypothèse est vraie jusqu'à un rang $n-1$ $(n \geq 1)$, alors $(\mathcal{H}_n)$ est vraie,

donc, ***par le principe de la récurrence forte*** $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ \ \varphi(x \mid n, m) = \sum_{k=0}^{n} n_{[k]} q^{k(n+m-k)} Q_k\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right)}.$$

III.3.d. Loi de $(n - S_T)$: *(loi de l'étendue de l'épidémie)*

Puisque $S_T(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (*c.f.* **III.3.a.**), on a aussi : $(n - S_T)(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Par ailleurs, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\qquad P(n - S_T = k) = P(S_T = n - k)$.

Or, la loi de S_T nous est connue par sa fonction génératrice :

$$\varphi(x \mid n, m) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} x^k P(S_T = k),$$

et l'on sait, par la **formule de Taylor pour les polynômes**, que le cœfficient du terme de degré k, égal à $P(S_T = k)$, est aussi donné par la formule : $\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0 \mid n, m)$.

On a donc une première réécriture de $P(n - S_T = k)$:

(36) $\forall k \in [\![0, n]\!]\,, P(n - S_T = k) = P(S_T = n - k) = \frac{1}{(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(0 \mid n, m)$.

* Calcul de $\frac{1}{(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(0 \mid n, m)$ $(0 \leq k \leq n)$:

Par linéarité de la dérivation, l'équation du **III.3.c.** permet d'écrire :

$$\frac{1}{(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(x \mid n, m) = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \sum_{l=0}^{n} n_{[l]} q^{l(n+m-l)} Q_l^{(n-k)}\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right),$$

et comme $d°Q_l\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right) = l$, les termes de la somme sont **nuls**, tant que $l < n - k$, donc :

$$\frac{1}{(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(x \mid n, m) = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \sum_{l=\mathbf{n-k}}^{n} n_{[l]} q^{l(n+m-l)} Q_l^{(n-k)}\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right).$$

D'après le **II.3.**, $Q_l^{(n-k)}\left(x; \mathcal{U}^{(q)}\right) = Q_{l-(n-k)}\left(x; \nu_{n-k}\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$, donc encore :

$$\frac{1}{(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(x \mid n, m) = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{l=n-k}^{n} n_{[l]} q^{l(n+m-l)} Q_{l-(n-k)}\left(x; \nu_{n-k}\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right).$$

Pour pour simplifier à la fois l'indiçage des polynômes Q et les variations de l'indice pour la somme :

> on pourra effectuer le **changement d'indice** défini par $\boldsymbol{j = l - (n - k)}$.

On a alors un indice j qui varie de 0 à k, lorsque l varie de $n - k$ à n, et les relations :

$$\begin{cases} l = n - k + j \\ n - k = l - j \end{cases} \quad \text{et aussi } n - l = k - j, \text{ qui donne : } n_{[l]} = \frac{n!}{(n-l)!} = \frac{n!}{(k-j)!},$$

de sorte qu'après changement d'indice, puis factorisation par $n!$, on a :

$$\frac{1}{(n-k)!}\varphi^{(n-k)}(x \mid n, m) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} \frac{q^{(n-k+j)(m+k-j)}}{(k-j)!} Q_j\left(x; \nu_{n-k}\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right).$$

Et **pour** $x = 0$, en reprenant que $n_{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}$, on obtient au lieu de (36) :

(37) $\forall k \in [\![0, n]\!]\,, P(n - S_T = k) = n_{[k]} \sum_{j=0}^{k} \frac{q^{(n-k+j)(m+k-j)}}{(k-j)!} Q_j\left(0; \nu_{n-k}\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$.

On peut alors se rapprocher du résultat en utilisant, de préférence aux polynômes $\{Q_j(x;\nu_{n-k}(\mathcal{U}^{(q)}))\}_{j\geq 0}$, les polynômes $\{Q_j(x;\nu_m(\mathcal{U}^{(q)}))\}_{j\geq 0}$.

$*$ Réexpression des valeurs $Q_j(0;\nu_{n-k}(\mathcal{U}^{(q)}))$ $(0\leq j\leq k\,;\,k\in[\![0,n]\!])$:

Par la définition de $\nu_r(\mathcal{U})$ (*c.f.* **II.3.**), pour $\mathcal{U}=\mathcal{U}^{(q)}$, et sachant que $\mathcal{U}^{(q)}=(q^i)_{i\geq 0}$, on a, (en notant $(\mathcal{W})_i$ pour le terme de rang i d'une suite $\mathcal{W}$), pour tout $r\geq 0$:

$$\forall i\geq 0,\quad \left(\nu_r(\mathcal{U}^{(q)})\right)_i = q^{r+i} = q^r.q^i = q^r(\mathcal{U}^{(q)})_i = (q^r.\mathcal{U}^{(q)})_i.$$

Ainsi, par examen des termes généraux, on a les égalités de suite suivantes :

$$\textbf{(38)}\quad (\forall r\geq 0)\ \nu_r(\mathcal{U}^{(q)}) = (q^{r+i})_{i\geq 0} = q^r.\mathcal{U}^{(q)},$$

que l'on appliquera ici pour $r=m\geq 0$ et $r=n-k\geq 0$ (car $0\leq k\leq n$).

Rappelons encore que d'après le **II.4.** :

pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, toute suite réelle $\mathcal{W}$ et tout entier $j\geq 0$:

$$a^jQ_j(x;\mathcal{W}) = Q_j(ax+b;a\mathcal{W}+b).$$

ce qui donne, pour $b=0$, en substituant la valeur 0 à x :

$$\textbf{(39)}\quad a^jQ_j(0;\mathcal{W}) = Q_j(0;a\mathcal{W}).$$

Ainsi, en utilisant (38), et (39) pour $a=q^{n-k}$, puis $a=q^m$, et $\mathcal{U}=\mathcal{U}^{(q)}$, il vient :

$$\forall j\in[\![0,k]\!],\quad Q_j(0;\nu_{n-k}(\mathcal{U}^{(q)})) = Q_j(0;q^{n-k}.\mathcal{U}^{(q)}) = (q^{n-k})^j.Q_j(0;\mathcal{U}^{(q)})$$
$$\text{et}\quad Q_j(0;\nu_m(\mathcal{U}^{(q)})) = Q_j(0;q^m.\mathcal{U}^{(q)}) = (q^m)^j.Q_j(0;\mathcal{U}^{(q)}).$$

On en déduit, pour $0\leq j\leq k$:

$$\begin{aligned}Q_j(0;\nu_{n-k}(\mathcal{U}^{(q)})) &= q^{(n-k)j}.Q_j(0;\mathcal{U}^{(q)})\\ &= q^{(n-k-m)j}.q^{mj}.Q_j(0;\mathcal{U}^{(q)}) = q^{(n-k-m)j}.Q_j(0;\nu_m(\mathcal{U}^{(q)})).\end{aligned}$$

Cette dernière expression de $Q_j(0;\nu_{n-k}(\mathcal{U}^{(q)}))$ permet de réécrire (37) :

$$\textbf{(40)}\quad P(n-S_T=k) = n_{[k]}\sum_{j=0}^{k}\frac{q^{(n-k+j)(m+k-j)}}{(k-j)!}q^{(n-k-m)j}.Q_j\left(0;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right).$$

En simplifiant les puissances de q, de la façon suivante, **en vue d'une factorisation par $q^{(n-k)(m+k)}$** (comme dans la formule attendue) :

$$\begin{aligned}q^{(n-k+j)(m+k-j)}.q^{(n-k-m)j} &= q^{\underline{(n-k)}(m+k-j)+\underline{\underline{j}}(m+k-j)}.q^{j\underline{(n-k)}+\underline{\underline{j}}(-m)}\\ &= q^{\underline{(n-k)}\left((m+k-j)+j\right)}.q^{\underline{\underline{j}}\left((m+k-j)+(-m)\right)}\end{aligned}$$

et finalement :

$$q^{(n-k+j)(m+k-j)}.q^{(n-k-m)j} = \boldsymbol{q^{(n-k)(m+k)}}.q^{j(k-j)}.$$

En reportant dans (40), et en effectuant la factorisation par $\boldsymbol{q^{(n-k)(m+k)}}$, il vient :

$$\textbf{(41)}\quad \forall k\in[\![0,n]\!]\,,\ P(n-S_T=k) = n_{[k]}q^{(n-k)(m+k)}\sum_{j=0}^{k}\frac{q^{j(k-j)}}{(k-j)!}Q_j\left(0;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right).$$

Au vu de l'égalité (41), une étape suffit pour arriver au résultat !

$*$ **Montrons que** : $Q_k(1;\nu_m(\mathcal{U}^{(q)})) = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(k-j)!}q^{j(k-j)}Q_j(0;\nu_m(\mathcal{U}^{(q)}))$.

Il s'agit alors de penser à appliquer la ***formule de Taylor pour les polynômes***, qui s'énonce :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall P\in\mathbb{R}_k[x],\ P(x) = \sum_{j=0}^{k}\frac{P^{(j)}(0)}{j!}.x^j,$$

et fait ***le <u>lien</u> entre les valeurs prises par un polynôme et les valeurs de ses dérivées successives en 0.***
En particulier, **en substituant la valeur 1 à x**, et pour $P(x) = Q_k\left(x; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$, la formule donne :

$$\textbf{(42)}\quad Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} Q_k^{(j)}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right).$$

D'où la nécessité d'avoir aussi à l'esprit qu'il existe, ici, une relation** (assez simple) **entre les valeurs $Q_j\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$ et les valeurs des dérivées successives $Q_k^{(j)}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$.

<u>En effet</u>, d'après **II.3.**, pour toute suite réelle $\mathcal{W}$, tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad Q_k^{(j)}(x; \mathcal{W}) = Q_{k-j}\left(x; \nu_j(\mathcal{W})\right),$$

ce qui donne, pour $\mathcal{W} = \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)$, et pour $x = 0$:

$$\textbf{(43)}\quad \forall j \in [\![0, k]\!], \quad Q_k^{(j)}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right) = Q_{k-j}\left(0; \underline{\nu_j\left(\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)}\right).$$

Or, dans cette dernière expression, puisque $\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right) = \left(q^{m+i}\right)_{i \geq 0}$ (*c.f.* (38)), la suite $\nu_j\left(\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$ a pour terme général de rang i, $q^{m+j+i} = q^j . q^{m+i} = q^j . \left(\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)_i$.
Ainsi, $\nu_j\left(\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$ et $q^j . \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)$ ont les mêmes termes généraux, et sont donc égales, et (43) devient :

$$\textbf{(44)}\quad \forall j \in [\![0, k]\!], \quad Q_k^{(j)}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right) = Q_{k-j}\left(0; q^j . \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right),$$

Il faut alors invoquer, ici encore, le résultat (39), qui s'écrit, en remplaçant j par $k-j \geq 0$: $\underline{a^{k-j} Q_{k-j}(0; \mathcal{W}) = Q_{k-j}(0; a\mathcal{W})}$, et donne, avec $a = q^j$ et $\mathcal{W} = \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)$:

$$\textbf{(45)}\quad \forall j \in [\![0, k]\!], \quad Q_{k-j}\left(0; q^j . \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right) = q^{j(k-j)} . Q_{k-j}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right).$$

En conclusion, de (44) et (45), on tire une nouvelle expression des valeurs $Q_k^{(j)}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)$ $(0 \leq j \leq k)$, à savoir :

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad Q_k^{(j)}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right) = q^{j(k-j)} . Q_{k-j}\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right),$$

par laquelle l'égalité (42) équivaut à l'égalité recherchée (moyennant un dernier changement d'indice $j' = k - j$).

<u>On a donc montré que</u> :

$$\textbf{(46)}\quad \forall j \in [\![0, k]\!], \quad Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(k-j)!} q^{j(k-j)} Q_j\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right),$$

ce qui, de par (41), achève de démontrer le résultat final attendu :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], P(n - S_T = k) = n_{[k]} q^{(n-k)(m+k)} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)}.$$

◇ $\underline{E\left(S_{T,[r]}\right) = \sum_{j=r}^{n} n_{[j]} q^{j(n+m-j)} Q_{j-r}\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)}$:

Par définition de la V.A. $S_{T,[r]}$:

$$E\left(S_{T,[r]}\right) = E\left[S_T\left(S_T - 1\right) \ldots \left(S_T - (r-1)\right)\right].$$

Or, $S_{T,[r]}$ est de la forme $f(S_T)$, où f est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x(x-1)\ldots\left(x - (r-1)\right),$$

et où S_T est une V.A. discrète prenant un nombre fini de valeurs $\left(S_T(\Omega) = [\![0, n]\!]\right)$.

Donc, pour tout r compris entre 1 et n, on peut appliquer la **formule de transfert**(*), par laquelle on obtient :
$$E(S_{T,[r]}) = \sum_{j=0}^{n} j\,(j-1)\ldots(j-(r-1))P(S_T = j).$$
Or, si $0 \le j \le r-1$, dans le produit $j\,(j-1)\ldots(j-(r-1))$, l'un des facteurs est nul. Donc **la somme se réduit à j variant de r à n**, soit :
$$E(S_{T,[r]}) = \sum_{j=r}^{n} j\,(j-1)\ldots(j-(r-1))P(S_T = j).$$
***À ce stade**, on ne peut manquer de remarquer, (si on ne l'avait déjà deviné), que* la somme obtenue coïncide avec la **dérivée r-ième de la fonction génératrice de S_T, au point $x = 1$** :
$$E(S_{T,[r]}) = \left(\sum_{j=0}^{n} P(S_T = j).x^j\right)^{(r)}\Bigg|_{x=1} = \varphi^{(r)}(x \mid n,m)\Big|_{x=1}.$$
Or, si l'on utilise l'autre expression de $\varphi(x \mid n,m)$, obtenue au **III.3.c**, il vient :
$$E(S_{T,[r]}) = \left(\sum_{j=0}^{n} n_{(j)}q^{j(n+m-j)}Q_j\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)^{(r)}\Bigg|_{x=1}.$$
et par linéarité de la dérivation, sachant que $Q_j^{(r)}\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right)$ est nul si $r > j$ car $Q_j^{(r)}\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right)$ est de degré j, on a finalement :
$$E(S_{T,[r]}) = \sum_{j=r}^{n} n_{(j)}q^{j(n+m-j)}\left(Q_j^{(r)}\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)\Bigg|_{x=1}.$$
Maintenant, en invoquant le **II.3.** :
$$Q_j^{(r)}\left(x;\mathcal{U}^{(q)}\right) = Q_{j-r}\left(x;\nu_r\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right),$$
et l'on peut conclure :
$$\boxed{E(S_{T,[r]}) = \sum_{j=r}^{n} n_{(j)}q^{j(n+m-j)}Q_{j-r}\left(1;\nu_r\left(\mathcal{U}^{(q)}\right)\right)}.$$

$\boxed{\textbf{III.4.a.}}$ *Il y a deux **clés** pour cette question :*

* l'utilisation, (*encore!*), de la ***définition récurrente des polynômes*** $Q_k(x;\mathcal{U})$.
* l'idée que l'on peut passer, pour n tendant vers l'infini, du terme de rang i de la suite réelle $\mathcal{U}^{(q_n)}$, à savoir $q_n^i = \left(\exp(-\lambda/n)\right)^i = e^{-\frac{\lambda i}{n}}$, au terme de rang i de la suite $\mathcal{W}$, à savoir $w_i = -\lambda i$, grâce à ***la limite suivante*** : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda i}{n}}-1}{1/n} = -\lambda i.$

◇ Établissons déjà ce résultat : $\lim_{n\to\infty} n\left(u_i^{(q_n)} - 1\right) = w_i.$

On connaît ce résultat sur la fonction exponentielle : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$

(c'est la limite du taux de variation de la fonction exponentielle en 0 qui vaut $\exp'(0)$)

Pour $x = -\frac{\lambda i}{n}$, puisque, (i étant fixé), $\lim_{n\to\infty} -\frac{\lambda i}{n} = 0$, par composition de limites, on a donc : $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda i}{n}}-1}{-\frac{\lambda i}{n}} = 1$, soit encore : $\underline{\lim_{n\to\infty} n.\frac{u_i^{(q_n)}-1}{-\lambda i} = 1}$ (car $u_i^{(q_n)} = e^{-\frac{\lambda i}{n}}$).

(*) pour une V.A. discrète X, et une fonction f définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, la V.A. $f(X)$ admet une espérance $E(f(X))$, égale à $\sum_{x_i\in X(\Omega)} f(x_i).P(X = x_i)$, dès lors que $X(\Omega)$ est fini ou si la somme correspond à une série absolument convergente dans le cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$.

En multipliant alors par $w_i = -\lambda i$, (i est constant quand n varie), on obtient le résultat :

(47) $\lim_{n\to\infty} n\left(u_i^{(q_n)} - 1\right) = w_i.$

◇ Démonstration par récurrence du résultat demandé :

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, fixé, considérons la suite réelle $\left(n_{[k]} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et formulons l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_k) : \lim_{n\to+\infty} n_{[k]} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = Q_k\left(0; \nu_m(\mathcal{W})\right).$$

* pour $k = 0$: par définition, pour toute suite $\mathcal{U}$, $Q_0(x;\mathcal{U}) = 1$, donc, (puisqu'aussi par convention $n_{[0]} = 1$), $n_{[0]} Q_0\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = 1$, et aussi $Q_0\left(0; \nu_m(\mathcal{W})\right) = 1$. Donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
* pour $k \geq 1$, supposons que $(\mathcal{H}_i)$ est vraie pour tout i compris entre 0 et $k-1$:

alors, par définition de la suite de polynômes $\left(Q_l\left(x; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)\right)_{l\geq 0}$:

$$Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = \frac{1}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left(u_{m+i}^{(q_n)}\right)^{k-i}}{(k-i)!} Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right).$$

On peut alors penser à multiplier l'égalité par $n_{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}$ et à utiliser l'hypothèse de récurrence, mais c'est un ***piège*** *de la question car on tombe alors sur* ***plusieurs*** *formes indéterminées.*

Aussi doit-on d'abord utiliser la question **II.4.**, avec $\mathcal{U} = \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)$, $a = 1$ et $b = -1$, ce qui donne :

$$1^k . Q_k\left(x; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = Q_k\left(x - 1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right).$$

et pour $x = 1$:

(48) $Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = Q_k\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right),$

où $\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1$ désigne la suite de terme général, au rang i, $u_{m+i}^{(q_n)} - 1$.

Et c'est pour $Q_k\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right)$ que l'on va utiliser la définition par récurrence de la suite de polynômes $\left(Q_l\left(x; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right)\right)_{l\geq 0}$, ce qui donne :

$$Q_k\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i}}{(k-i)!} Q_i\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right).$$

En utilisant qu'au membre de gauche, $Q_k\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right) = Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)$, mais aussi que, pour chaque terme de la somme, (toujours par **II.4.** et (48)), $Q_i\left(0; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right) - 1\right) = Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)$, il vient :

$$Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i}}{(k-i)!} Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right).$$

On peut alors multiplier par $n_{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}$, pour obtenir :

$$n_{[k]} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!\left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i}}{(n-k)!(k-i)!} Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right).$$

Puis, **en insérant le facteur** $\frac{(n-i)!}{(n-i)!}$, égal à 1, dans la somme, **on fait apparaître** $n_{[i]} = \frac{n!}{(n-i)!}$, ce qui donne :

$$n_{[k]} Q_k \left(1; \nu_m \left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(n-i)! \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i}}{(n-k)!(k-i)!} n_{[i]} Q_i \left(1; \nu_m \left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right),$$

ce qui va permettre d'**utiliser l'hypothèse de récurrence** selon laquelle :

$$\forall i, \text{ tel que } 0 \leq i \leq k-1, \quad n_{[i]} Q_i \left(1; \nu_m \left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} Q_i \left(0; \nu_m (\mathcal{W})\right).$$

Réécrivons l'égalité précédente sous la forme :

$$n_{[k]} Q_k \left(1; \nu_m \left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\beta_{k,i}(n)}{(k-i)!} . n_{[i]} Q_i \left(1; \nu_m \left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right),$$

en posant : $\underline{\beta_{k,i}(n) = \frac{(n-i)!}{(n-k)!} \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i}}$.

Et **montrons que**, pour tout i compris entre 0 et $k-1$, $\underline{\lim_{n\to\infty} \beta_{k,i}(n)}$ **existe.**

■ Limite pour n tendant vers $+\infty$ de $\beta_{k,i}(n) = \frac{(n-i)!}{(n-k)!} \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i}$, $(0 \leq i \leq k-1)$:

Comme on a montré, ((47)), que pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé : $\lim_{n\to\infty} n \left(u_i^{(q_n)} - 1\right) = w_i$, de même, pour non plus un entier i mais un entier s'écrivant $m+i$, fixé, pour n tendant vers l'infini, on a :

$$\textbf{(49)} \quad \lim_{n\to\infty} n \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right) = w_{m+i}.$$

Faisons apparaître l'expression $n\left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)$ dans l'écriture de $\beta_{k,i}(n)$:

$$\beta_{k,i}(n) = \frac{(n-i)!}{(n-k)!} \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)^{k-i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!} . \frac{1}{n^{k-i}} \left(n . \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)\right)^{k-i}.$$

- pour i compris entre 0 et $k-1$, $k-i \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto x^{k-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et par suite, continue en w_{m+i}.

  Par conséquent, de (49), on déduit, par composition de limite :

  $$\textbf{(50)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(n . \left(u_{m+i}^{(q_n)} - 1\right)\right)^{k-i} = (w_{m+i})^{k-i}.$$

- quant à l'autre facteur, en notant que $0 \leq i \leq k-1$ et donc $n-k < n-i$:

  $$\frac{(n-i)!}{(n-k)!} . \frac{1}{n^{k-i}} = \frac{(n-i)\big(n-(i+1)\big)\ldots\big(n-(k-1)\big)}{n^{k-i}} = \frac{\prod_{j=i}^{k-1}(n-j)}{n^{k-i}}.$$

  Le produit au numérateur est composé de $(k-1)-i+1$ termes, soit $k-i$ facteurs, et de même, au dénominateur, la puissance est le produit, $k-i$ fois, du même nombre n. D'où la récriture suivante :

  $$\frac{(n-i)!}{(n-k)!} . \frac{1}{n^{k-i}} = \frac{\prod_{j=i}^{k-1}(n-j)}{n^{k-i}} = \prod_{j=i}^{k-1} \frac{(n-j)}{n} = \prod_{j=i}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

  Le facteur $\frac{(n-i)!}{(n-k)!} . \frac{1}{n^{k-i}}$ est donc un produit de termes de limite 1 pour $n \to \infty$. Le produit étant composé d'un nombre fini et constant quand n varie, de tels termes, il vient :

  $$\textbf{(51)} \quad \lim_{n\to\infty} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!} . \frac{1}{n^{k-i}} = 1.$$

Ainsi, à la lumière de ces deux résultats, ((50) et (51)), pour tout entier i compris entre 0 et $k-1$:

$$\beta_{k,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} (w_{m+i})^{k-i},$$

et donc $-\frac{\beta_{k,i}}{(k-i)!} . n_{[i]} Q_i \left(1; \nu_m \left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{(w_{m+i})^{k-i}}{(k-i)!} . Q_i \left(0; \nu_m (\mathcal{W})\right).$

Or, **dans sa dernière réécriture**, $n_{[k]}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)$, apparaît une somme finie de telles expressions, donc admet une limite quand n tend vers l'infini, donnée par :

$$n_{[k]}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(w_{m+i}\right)^{k-i}}{(k-i)!}.Q_i\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right),$$

Comme w_{m+i} est le terme de rang i de la suite $\nu_m(\mathcal{W})$, **on reconnaît** dans la limite, **l'expression de $Q_k(0;\nu_m(\mathcal{W}))$ donnée par la définition par récurrence de la suite de polynômes $\left(Q_l\left(x;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)\right)_{l\geq 0}$ (PARTIE II)**.

On a donc en fait montré que : $\lim_{n\to\infty} n_{[k]}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)=Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)$, ce qui établit que l'hypothèse de récurrence est vraie au rang k.

Ainsi, $(\mathcal{H}_0)$ est vraie et si $(\mathcal{H}_j)$ est vraie du rang 0 à un rang $k-1\geq 0$, elle est vraie au rang k, donc, d'après le **principe de récurrence forte** :

$$\boxed{\forall\, k\in [\![0,n,]\!]\quad \lim_{n\to\infty} n_{[k]}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)=Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)}.$$

III.4.b. D'après le **III.3.d.**, mais en prenant cette fois $q=q_n=\exp\left(-\lambda/n\right)$:

pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\quad P(n-S_T=k)=n_{[k]}q_n^{(n-k)(m+k)}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)$.

Comme on vient de déterminer la limite de $n_{[k]}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)$ pour n tendant vers l'infini, il ne reste qu'à déterminer celle de $q_n^{(n-k)(m+k)}$.

◊ Compte-tenu de la définition de q_n : $q_n^{(n-k)(m+k)}=\left(e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^{(n-k)(m+k)}=e^{-\lambda(m+k)\frac{n-k}{n}}$,

or, $\lim_{n\to\infty}\frac{n-k}{n}=1$, donc $-\lambda(m+k)\frac{n-k}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}-\lambda(m+k)$ et en composant par la fonction exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$, il vient : $\lim_{n\to\infty} q_n^{(n-k)(m+k)}=e^{-\lambda(m+k)}$.

En conjuguant ce résultat avec celui du **III.4.a.**, on obtient :

$$P(n-S_T=k)=n_{[k]}q_n^{(n-k)(m+k)}Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_n)}\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda(m+k)}Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right).$$

Résultat que l'on va affiner pour aboutir au résultat final.

◊ Expression de $Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)$:

Puisque $\mathcal{W}=(-\lambda i)_{i\geq 0}$, la suite $\nu_m(\mathcal{W})$ est, m étant fixé, une **suite arithmétique**, dont le terme général, au rang i égal à $-\lambda(m+i)$, peut s'écrire $u_i=ci+d$, avec $c=-\lambda$ et $d=-\lambda.m$.

La suite de polynômes $\left(Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)\right)_{l\geq 0}$ est donc du type étudié au **II.5.b.** et donc :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad Q_k\left(x;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)=(x-u_0)\frac{(x-u_k)^{k-1}}{k!},$$

ce qui, pour la valeur $x=0$, sachant qu'ici $u_k=(-\lambda)k+(-\lambda.m)=-\lambda(m+k)$, donne :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)=\lambda.m\frac{\left(\lambda(m+k)\right)^{k-1}}{k!}=\lambda^k.\frac{m.(m+k)^{k-1}}{k!}.$$

La limite précédemment trouvée, s'écrit donc :

$$e^{-\lambda(m+k)}Q_k\left(0;\nu_m\left(\mathcal{W}\right)\right)=e^{-\lambda(m+k)}.\lambda^k.\tfrac{m(m+k)^{k-1}}{k!}$$

et l'on peut conclure :

$$\boxed{\forall\, k\in[\![0,n]\!],\ \lim_{n\to\infty}P(n-S_T=k)=m(m+k)^{k-1}\exp\left[-\lambda(m+k)\right]\tfrac{\lambda^k}{k!}}.$$

$\boxed{\textbf{III.5.}}$ Reconsidérons le résultat du **III.3.d.**, avec cette fois $q = q_m$:

pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad P(n - S_T = k) = n_{[k]} q_m^{(n-k)(m+k)} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right)$.

Dans cette expression de $P(n - S_T = k)$, ***deux facteurs*** seulement ***dépendent de*** m.

◇ On obtient rapidement la **limite du premier facteur**, $q_m^{(n-k)(m+k)}$, pour $m \to \infty$.
En effet, comme précédemment pour le calcul de $\lim_{n\to\infty} q_n^{(n-k)(m+k)}$:

$$q_m^{(n-k)(m+k)} = \left(e^{-\frac{\mu}{m}}\right)^{(n-k)(m+k)} = e^{-\mu(n-k)\frac{m+k}{m}}, \quad \text{où } \lim_{m\to\infty} \frac{m+k}{m} = 1,$$

donc : $\quad \lim_{m\to\infty} q_m^{(n-k)(m+k)} = e^{-\mu(n-k)}$.

En utilisant la notation $\theta = 1 - \exp(-\mu)$, on a $e^{-\mu} = 1 - \theta$, et **le résultat s'écrit** :

$$\lim_{m\to\infty} q_m^{(n-k)(m+k)} = (1-\theta)^{(n-k)}.$$

Au vu de ce résultat, le second facteur dépendant de m, $Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right)$, doit tendre vers $\frac{1}{k!}.\theta^k$, c'est-à-dire $\frac{1}{k!}\left(1 - e^{-\mu}\right)^k$ si l'on veut établir l'égalité demandée.

◇ Ainsi **pour le second facteur** on procèdera **par récurrence**, en posant :

$$(\mathcal{H}_k) : \quad \lim_{m\to\infty} Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) = \frac{1}{k!}\left(1 - e^{-\mu}\right)^k = \frac{1}{k!}.\theta^k.$$

* pour $k = 0$: par définition, $Q_0\left(x; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right)$ est le polynôme constant égal à 1. D'autre part, $\frac{1}{0!}\theta^0 = 1$. Donc $Q_0\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) = \frac{1}{0!}.\theta^0$ et $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
* pour $k \geq 1$, supposons que $(\mathcal{H}_i)$ est vraie pour tout i compris entre 0 et $k-1$:
  De nouveau, par définition de la suite de polynômes $\left(Q_l\left(x; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right)\right)_{l\geq 0}$:

$$Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) = \frac{1}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left(u_{m+i}^{(q_m)}\right)^{k-i}}{(k-i)!} Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right).$$

  C'est-à-dire, en rappelant que $q_m = \exp(-\mu/m)$:

$$Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) = \frac{1}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\mu\frac{(m+i)(k-i)}{m}}}{(k-i)!} Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right).$$

  Or, pour chaque cœfficient des termes dans la somme :

$$e^{-\mu\frac{(m+i)(k-i)}{m}} = e^{-\mu(k-i)\frac{(m+i)}{m}} \xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-\mu(k-i)}, \text{ car } \frac{(m+i)}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1,$$

  et, par l'hypothèse de récurrence :

$$\forall\, i \in [\![0, k-1]\!], \quad Q_i\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{i!}.\theta^i = \frac{1}{i!}\left(1 - e^{-\mu}\right)^i.$$

  Donc, la somme étant finie, par les théorèmes usuels sur les limites de suites (produit, multiplication par un réel et somme), il vient :

$$Q_k\left(1; \nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} L_k = \frac{1}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\mu(k-i)}}{i!(k-i)!}\left(1 - e^{-\mu}\right)^i.$$

  Or, en posant $a = 1 - e^{-\mu}$, $b = e^{-\mu}$, et en factorisant par $\frac{1}{k!}$, la limite L_k s'écrit : $L_k = \frac{1}{k!}\left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!(k-i)!}.a^i.b^{k-i}\right)$, où la somme corrrespond au développement, par **formule du binôme**, de $(a+b)^k$, privé de son dernier terme a^k.
  Ainsi, comme aussi $a + b = 1$:

$$L_k = \frac{1}{k!}\Big(1 - \left[(a+b)^k - a^k\right]\Big) = \frac{1}{k!}\Big(1 - \left[1 - a^k\right]\Big) = \frac{a^k}{k!}.$$

En revenant à la définition de a :

$$L_k = \lim_{m\to\infty} Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) = \frac{1}{k!}\left(1-e^{-\mu}\right)^k = \frac{1}{k!}\theta^k.$$

ce qui achève de montrer que $(\mathcal{H}_k)$ est vraie.

En conclusion, $(\mathcal{H}_0)$ est vraie, et si $(\mathcal{H}_i)$ est vraie du rang 0 jusqu'au rang $k-1$, alors elle est vraie au rang k, donc par le principe de **récurrence forte**, $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout entier k.

On a donc : $\quad \forall\, k\in\mathbb{N},\quad \lim_{m\to\infty} Q_k\left(1;\nu_m\left(\mathcal{U}^{(q_m)}\right)\right) = \frac{1}{k!}\left(1-e^{-\mu}\right)^k = \frac{1}{k!}.\theta^k.$

Et comme aussi : $\quad \forall\, k\in\mathbb{N},\quad \lim_{m\to\infty} q_m^{(n-k)(m+k)} = (1-\theta)^{(n-k)},$

en revenant à l'expression, pour $k\in[\![0,n]\!]$ de $P(n-S_T=k)$ on peut conclure :

$$\boxed{\forall\, k\in[\![0,n]\!],\ \lim_{m\to\infty} P(n-S_T=k) = n_{[k]}\,(1-\theta)^{(n-k)}\,\tfrac{1}{k!}.\theta^k = C_n^k\theta^k\,(1-\theta)^{(n-k)}}.$$

.PARTIE IV.

Cette **PARTIE IV**, comme le reste du problème est d'un niveau soutenu, mais à la différence des trois autres, cette partie pâtit de **lacunes** et d'**imprécisions** dans son énoncé.
Les remarques qui suivent doivent permettre de guider votre réflexion.

Remarques générales : 1) Les systèmes différentiels proposés modélisant la propagation d'une épidémie à partir d'une date $t=0$:

> les solutions envisagées sont composées de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$.

2) De plus, dans la **résolution d'un système différentiel d'ordre 1**, (c'est-à-dire dont les équations ne portent que sur les fonctions et leurs dérivées premières), comme pour les équations différentielles d'ordre 1 (qui, elles, sont au programme !) :

> les fonctions solutions sont par hypothèse continues et dérivables sur l'intervalle de résolution choisi, ici $\mathbb{R}_+$.

3) Dans cette partie, on met en place un **modèle** décrivant la propagation de l'épidémie au cours du temps avec des règles de propagation clairement énoncées.
Dans le cas discret $\big(n(t),\ m(t),\ h_{SS}(t),\ h_{SI}(t)\in\mathbb{N}$, le temps s'écoulant par unités de temps$\big)$, les définitions :

$$S(t)=N^{-1}n(t),\ I(t)=N^{-1}m(t),\ [SS](t)=N^{-1}h_{SS}(t) \text{ et } [SI](t)=N^{-1}h_{SI}(t),$$

sont claires.
En particulier, on constate que les fonctions S et N mesurent des **fractions de la population totale** (respectivement la fraction d'individus sensibles et la fraction d'individus infectés à la date t), tandis que les fonctions $[SS]$ et $[SI]$ mesurent des **rapports** entre des nombres d'arêtes et le nombre total d'individus.
On a donc : $\quad 0\le S(t)\le 1,\ \ 0\le I(t)\le 1,\ \ [SS](t)\ge 0 \text{ et } [SI](t)\ge 0.$

En revanche, après le **passage au continu** $(N\to\infty,\ m/N\to\bar{I}$, le temps variant continûment$)$, l'énoncé n'indique pas, si ces propriétés sont encore vérifiées par les solutions envisagées.

En toute rigueur, ce propriétés doivent découler de l'étude des systèmes proposés et au contraire apparaître comme confortant la pertinence du modèle envisagé.
Mais dans la mesure où l'établissement de ces propriétés n'a rien d'évident, constatant que le candidat n'est en rien aidé à les établir alors qu'elles s'avèrent incontournables au cours de la résolution des questions, il faut bien considérer que l'auteur de ce sujet les aura tenues pour acquises.
On admettra donc dans la résolution du problème **que, pour les solutions envisagées** :

$$\forall t \geq 0, \quad 0 \leq S(t) \leq 1, \quad 0 \leq I(t) \leq 1, \quad [SS](t) \geq 0 \quad \text{et} \quad [SI](t) \geq 0.$$

IV.1.a. Les fonctions du quadruplet $(S, I, [SS], [SI])$ vérifient, sur $\mathbb{R}_+$, les quatre équations de (1), que l'on notera (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), et les conditions initiales (C1).

En particulier, on a, d'après (E_1) : $-\beta[SI] = \dfrac{dS}{dt}$, ce qui permet d'éliminer $[SI]$ dans (E_3) :

$$\frac{d[SS]}{dt} = -2\beta\frac{[SS][SI]}{S} = 2\frac{[SS]}{S}\left(-\beta[SI]\right) = 2\frac{[SS]}{S}\frac{dS}{dt}.$$

Ainsi, pour $(S, I, [SS], [SI])$, unique solution de (1) associé aux conditions initiales (C1) :

$$(E_3) \quad \text{équivaut à} \quad (\boldsymbol{E_3'}) : \quad \frac{d[SS]}{dt} = 2\frac{[SS]}{S}\frac{dS}{dt}.$$

À ce stade, *on peut souhaiter transformer (E_3') en divisant chaque membre de l'égalité par $[SS]$, ce qui donne :*

$$\frac{1}{[SS]}.\frac{d[SS]}{dt} = 2\frac{1}{S}.\frac{dS}{dt},$$

égalité qui s'intègre de 0 à t pour donner :

$$\ln\left[\frac{|[SS](t)|}{|[SS](0)|}\right] = 2.\ln\left[\frac{|S(t)|}{|S(0)|}\right].$$

En composant ensuite par la fonction exponentielle, puis en utilisant les conditions initiales (C1), on obtient le résultat cherché.
Mais, *la transformation initiale, nécessite d'établir* a priori *que la fonction $[SS]$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$,* ***ce qui n'a rien d'immédiat.***

Compte-tenu de la remarque, on établit le résultat en introduisant la **fonction auxiliaire f**, définie sur $\mathbb{R}_+$, par $\boldsymbol{f(t) = [SS](t)/S^2(t)}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$, dont le dénominateur ne s'annule pas (car $S > 0$ sur $\mathbb{R}_+$), et par la formule de dérivation d'un quotient, on a :

$\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(t) = \frac{[SS]'(t)S^2(t) - [SS](t).2S'(t)S(t)}{S^4(t)} = \frac{1}{S^2(t)}\left(\frac{d[SS]}{dt}(t) - 2.\frac{[SS](t)}{S(t)}\frac{dS}{dt}(t)\right).$$

Or, **d'après $(\boldsymbol{E_3'})$**, la parenthèse, dans l'expression factorisée de f', est nulle pour tout t de $\mathbb{R}_+$, donc :

f' est **nulle** sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, f' est nulle sur un **intervalle** (ici $\mathbb{R}_+$), donc on peut affirmer, pour sa primitive f, **d'après le cours**, que :

f est constante sur $\mathbb{R}_+$, et donc : $\forall t \geq 0, \; f(t) = f(0)$, *i.e.* $\dfrac{[SS](t)}{S^2(t)} = \dfrac{[SS](0)}{S^2(0)}$.

Or, compte-tenu des conditions initiales (C1), $\frac{[SS](0)}{S^2(0)} = \frac{\gamma(1-\bar{I})^2}{(1-\bar{I})^2} = \gamma$, donc, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{[SS](t)}{S^2(t)} = \gamma, \quad i.e. \quad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad [SS](t) = \gamma S^2(t)}.$$

IV.1.b. En substituant à $[SS]$ son expression en fonction de S, l'équation (E_4) du système (1) devient :

$$\frac{d[SI]}{dt} = \beta\left[\frac{\gamma S^2[SI]}{S} - \frac{[SI]^2}{S} - [SI]\right] - [SI]$$

ou encore :

$$\frac{d[SI]}{dt} = \gamma\beta S[SI] - \beta\frac{[SI]^2}{S} - \beta[SI] - [SI].$$

On peut dire que les fonctions S, I et $[SI]$ du quadruplet $(S, I, [SS], [SI])$ solution de (1), avec les conditions initiales (C1), vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta[SI] \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta[SI] - I \\ \dfrac{d[SI]}{dt} = \gamma\beta S[SI] - \beta\dfrac{[SI]^2}{S} - \beta[SI] - [SI] \end{cases}$$

En posant maintenant $\hat{I} = [SI]/S$, on a, pour tout t de $\mathbb{R}_+$: $[SI](t) = S(t)\hat{I}(t)$, ce qui permet d'éliminer $[SI]$, en substituant, dans le système précédent.
On obtient alors que le triplet $(S, I, \hat{I})$ vérifie le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta S\hat{I} & (E_1') \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta S\hat{I} - I & (E_2') \\ \dfrac{d(S\hat{I})}{dt} = \gamma\beta S^2\hat{I} - \beta S\hat{I}^2 - \beta S\hat{I} - S\hat{I} & (E_4') \end{cases}$$

Or,
$$\frac{d(S\hat{I})}{dt} = S\frac{d\hat{I}}{dt} + \hat{I}\frac{dS}{dt} \quad \text{et, d'après } (E_1') : \quad \frac{dS}{dt} = -\beta S\hat{I}.$$

Donc la dernière équation (E_4') s'écrit encore :

$$S\frac{d\hat{I}}{dt} - \beta S\hat{I}^2 = \gamma\beta S^2\hat{I} - \beta S\hat{I}^2 - \beta S\hat{I} - S\hat{I}.$$

On peut alors simplifier cette égalité par $-\beta S\hat{I}^2$, puis en diviser les deux membres par S (en effet S ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$). On obtient alors : $\dfrac{d\hat{I}}{dt} = \gamma\beta S\hat{I} - \beta\hat{I} - \hat{I}$.

En conclusion, le triplet $(S, I, \hat{I})$ vérifie les équations (E_1'), (E_2') et cette dernière équation, dont on peut factoriser le membre de droite par $\hat{I}$ pour l'écrire :

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = (\gamma\beta S - \beta - 1)\,\hat{I}.$$

On a donc montré que : $\boxed{\text{le triplet } (S, I, \hat{I}) \text{ vérifie le système (2)}}$.

<u>Par la suite</u>, on notera : $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}, E_3^{(2)}$, les trois équations composant les système (2).

IV.2.a. *Pour obtenir l'égalité proposée, on dispose de $E_1^{(2)}$ et de $E_3^{(2)}$, qui, dans le système (2), sont les équations ne faisant intervenir que S et $\hat{I}$.*
Mais, parce que *l'égalité attendue ne fait intervenir aucune dérivée première, ni pour S, ni pour $\hat{I}$, il convient vraisemblablement d'**obtenir une égalité de fonctions que l'on puisse intégrer**, par exemple sur $[0,t]$, ce qui aura pour effet de faire disparaître les dérivées premières présente à l'origine.*

Ainsi, substituons à $\hat{I}$, $-\frac{1}{\beta S}\dfrac{dS}{dt}$, dans le second membre de $E_3^{(2)}$.

(car, S étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, $\hat{I} = -\frac{1}{\beta S}\dfrac{dS}{dt}$ d'après $E_1^{(2)}$).

$E_3^{(2)}$ devient alors :
$$\frac{d\hat{I}}{dt} = (\gamma\beta S - \beta - 1)\left(-\frac{1}{\beta S}\right)\frac{dS}{dt}.$$

Puis, en développant et en réduisant le second membre, il vient :
$$\textbf{(52)}\quad \frac{d\hat{I}}{dt} = -\gamma\left(\frac{dS}{dt}\right) + \frac{\beta+1}{\beta}\left(\frac{1}{S}.\frac{dS}{dt}\right).$$

Intégrabilité des fonctions considérées : $(S, I, [SS], [SI])$, en tant que solutions du système différentiel (1), sont, par hypothèse, **continues** sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, puisque, d'après (E_1), $\dfrac{dS}{dt} = -\beta[SI]$, $\dfrac{dS}{dt}$, par suite $\frac{1}{S}.\dfrac{dS}{dt}$, sont continues sur $\mathbb{R}_+$, et au vu de (52), $\dfrac{d\hat{I}}{dt}$ aussi en tant que combinaison linéaire de fonctions continues.
Ces fonctions peuvent donc être intégrées sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$.

L'égalité (52) est valable sur $\mathbb{R}_+$, en l'intégrant sur $[0,t]$, $(t \geq 0)$, on obtient :
$$\int_0^t \frac{d\hat{I}}{dt}\,\mathrm{dt} = \int_0^t \left(-\gamma\left(\frac{dS}{dt}\right) + \frac{\beta+1}{\beta}\left(\frac{1}{S}.\frac{dS}{dt}\right)\right)\mathrm{dt},$$
puis, par linéarité de l'intégrale :
$$\int_0^t \frac{d\hat{I}}{dt}\,\mathrm{dt} = -\gamma\int_0^t \left(\frac{dS}{dt}\right)\mathrm{dt} + \frac{\beta+1}{\beta}\int_0^t \left(\frac{1}{S}.\frac{dS}{dt}\right)\mathrm{dt}.$$
En calculant chaque intégrale, il vient finalement :
$$\hat{I}(t) - \hat{I}(0) = -\gamma[S(t) - S(0)] + \frac{\beta+1}{\beta}\ln\left[\frac{|S(t)|}{|S(0)|}\right].$$
En utilisant les conditions initiales (C2), satisfaites par S et $\hat{I}$, à savoir $S(0) = (1-\bar{I})$ et $\hat{I}(0) = \gamma\bar{I}$, en rappelant encore que $S(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en particulier en 0, il vient :
$$\hat{I}(t) - \gamma\bar{I} = -\gamma S(t) + \gamma(1-\bar{I}) + \frac{\beta+1}{\beta}\ln\left[\frac{S(t)}{1-\bar{I}}\right].$$
En isolant enfin le logarithme, et en simplifiant, on aboutit à :
$$\frac{\beta+1}{\beta}.\ln\frac{S(t)}{1-\bar{I}} = \gamma S(t) - \gamma + \hat{I}(t).$$
Ce qui s'écrit encore, en introduisant des constantes c_1 et c_2, et en factorisant partiellement le second membre :
$$\boxed{\begin{array}{c}\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad c_1\ln[c_2 S(t)] = -\gamma[1 - S(t)] + \hat{I}(t), \\ \text{avec} \quad c_1 = \frac{\beta+1}{\beta} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{1-\bar{I}}.\end{array}}.$$

Comme par hypothèse, on a $\beta > 0$, et $\bar{I} \in]0,1[$, on peut encore affirmer que :

$$\boxed{c_1 > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{c_2 > 0}.$$

IV.2.b. *Pour montrer qu'une fonction admet une limite en $+\infty$, sans pour autant connaître ou calculer cette limite, comme cela semble être le cas ici pour la fonction S, un théorème s'impose, celui de la* ***limite monotone pour les fonctions****.*
On va donc chercher à montrer que, sur $\mathbb{R}_+$, S est croissante et majorée ou décroissante et minorée.

◇ On a un indice sur le sens de variation de S *via* l'équation (E_1) du système (1).
En effet, d'après (E_1) : $\dfrac{dS}{dt} = -\beta\big[SI\big]$. Or, d'après nos **remarques générales**, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $\big[SI\big](t) \geq 0$, donc on tire de (E_1) que : $\dfrac{dS}{dt} \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ceci donne que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme d'autre part, $S(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on peut affirmer que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et minorée par 0, et donc, d'après le **théorème de la limite monotone** pour les fonctions :

$$\boxed{S \text{ admet une limite quand } t \to +\infty, \text{ et cette limite est positive}}.$$

◇ De la relation établie au **IV.2.a.**, l'on tire, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\hat{I}(t) = \frac{\beta+1}{\beta}.\ln\left[\frac{S(t)}{1-\bar{I}}\right] + \gamma\,[1 - S(t)].$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty} S(t)$ existe et vaut $S_\infty \geq 0$, on en déduit, par les opérations usuelles sur les limites : $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma\,[1 - S(t)] = \gamma\,[1 - S_\infty]$, et, d'après les propriétés du logarithme :

- si $S_\infty > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta+1}{\beta}.\ln\left[\frac{S(t)}{1-\bar{I}}\right] = \frac{\beta+1}{\beta}.\ln\left[\frac{S_\infty}{1-\bar{I}}\right]$,

tandis que

- si $S_\infty = 0$: $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta+1}{\beta}.\ln\left[\frac{S(t)}{1-\bar{I}}\right] = -\infty$.

<u>On obtient donc que</u> :

$\hat{I}$ admet une limite quand $t \to +\infty$, égale à $\begin{cases} \frac{\beta+1}{\beta}.\ln\left[\frac{S_\infty}{1-\bar{I}}\right] + \gamma\,[1 - S_\infty], & \text{si } S_\infty > 0 \\ -\infty, & \text{si } S_\infty = 0 \end{cases}$.

Or, $\hat{I}$ étant égal à $\big[SI\big]/S$, avec $\big[SI\big] \geq 0$ et $S > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\hat{I}(t) \geq 0$, et donc par passage à la limite, si on note $\hat{I}_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} \hat{I}(t)$, il vient : $\hat{I}_\infty \geq 0$.

Il est donc exclu que $\hat{I}_\infty$ soit égale à $-\infty$, et par conséquent, par l'absurde, on a $S_\infty > 0$ nécessairement, et :

$$(53) \quad \hat{I}_\infty = \frac{\beta+1}{\beta}.\ln\left[\frac{S_\infty}{1-\bar{I}}\right] + \gamma\,[1 - S_\infty].$$

Ce résultat est encore insuffisant, car il est indiqué que l'on doit obtenir une équation liant S_∞, ou plus précisément l'étendue de l'épidémie, $1 - S_\infty$, et γ, β et $\bar{I}$, sans que $\hat{I}_\infty$ intervienne. **Il faut donc poursuivre et déterminer $\hat{I}_\infty$.**

$\hat{I}$ représentant la proportion d'individus infectés au sein de la population, on peut présager que $\hat{I}_\infty = 0$, car dans le cas contraire, il restera à toute date t une proportion non nulle d'individus infectés, susceptibles d'infecter des individus sensibles, avec une probablilté $\beta > 0$ par unité de temps. On peut donc penser que dans ces conditions

l'épidémie ne cessera de se propager et atteindra toute la population de sorte que l'on aurait $S_\infty = 0$.
Mais cela n'est pas avéré et on peut tout aussi bien imaginer que la population des individus sensibles décroisse strictement avec le temps, mais tende néanmoins vers une limite S_∞ strictement positive.

Heureusement, l'examen des équations du système (2) permet de trancher et d'établir plus rigoureusement que $\hat{I}_\infty = 0$, en procédant **par l'absurde**. En effet, si $\hat{I}_\infty > 0$, on peut montrer à partir de l'équation (E_1) du système (2) que $\lim_{t\to+\infty} S(t) = -\infty$, ce qui est exclu.

◇ **Supposons que** $\hat{I}_\infty = \lim_{t\to+\infty} \hat{I}(t) > 0$.

On a établi ci-avant qu'alors $S_\infty > 0$, on en déduit que $\lim_{t\to+\infty} S.\hat{I}$ existe et vaut $S_\infty.\hat{I}_\infty > 0$.
Il découle alors de la définition de $\lim_{t\to+\infty} S(t)\hat{I}(t) = S_\infty \hat{I}_\infty$, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $t_0 \geq 0$, tel que :
$$\forall t \geq t_0, \quad \left|S(t)\hat{I}(t) - S_\infty \hat{I}_\infty\right| \leq \varepsilon,$$
ce qui équivaut à :
$$\forall t \geq t_0, \quad S_\infty \hat{I}_\infty - \varepsilon \leq S(t)\hat{I}(t) \leq S_\infty \hat{I}_\infty + \varepsilon,$$
Pour $\varepsilon = (S_\infty.\hat{I}_\infty)/2 > 0$, il existe donc $t_0 \geq 0$ tel que :
$$\forall t \geq t_0, \quad S_\infty \hat{I}_\infty - (S_\infty.\hat{I}_\infty)/2 \leq S(t)\hat{I}(t) \leq S_\infty \hat{I}_\infty + (S_\infty.\hat{I}_\infty)/2.$$
Ce qui donne en particulier :
$$\forall t \geq t_0, \quad S(t)\hat{I}(t) \geq \tfrac{1}{2} S_\infty \hat{I}_\infty,$$
et, en revenant à $E_1^{(2)}$:
$$\forall t \geq t_0, \quad \frac{dS}{dt}(t) \leq -\frac{1}{2} S_\infty \hat{I}_\infty,$$
Il vient alors, par croissance de l'intégrale, pout tout $t \geq 0$:
$$\int_0^t \left(\frac{dS}{dt}\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^t \left(-\frac{1}{2} S_\infty \hat{I}_\infty\right) \mathrm{d}t, \quad \text{soit encore :} \quad S(t) \leq S(0) - \tfrac{1}{2} S_\infty \hat{I}_\infty . t$$
La fonction majorante tendant vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, on a donc en conséquence :

$\lim_{t\to+\infty} S(t) = -\infty$, ce qui est exclu car $S(t) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, par hypothèse.

Ainsi, **on a montré par l'absurde que :** $\hat{I}_\infty = 0$.

L'équation (53) précédemment obtenue, liant S_∞ et $\hat{I}_\infty$, s'écrit donc (puisque $\hat{I}_\infty = 0$) :
$$\boxed{\tfrac{\beta+1}{\beta} . \ln\left[\tfrac{S_\infty}{1-I}\right] + \gamma\left[1 - S_\infty\right] = 0}.$$

IV.2.c. *Le caractère pertinent d'une application du* ***lemme de Gronwall*** *à ce stade de la démonstration reste obscur. On gardera de l'indication donnée l'intérêt que l'on peut porter à l'**étude de la dérivée de la fonction*** $\boldsymbol{f : t \mapsto (\hat{I} - \gamma.I)(t)}$(*).

◇ On tire des équations $E_2^{(2)}$ et $E_3^{(2)}$ du sytème (2) que, sur $\mathbb{R}_+$:
$$\frac{df}{dt} = \frac{d(\hat{I} - \gamma.I)}{dt} = \frac{d\hat{I}}{dt} - \gamma.\frac{dI}{dt} = \gamma\beta S\hat{I} - \beta\hat{I} - \hat{I} - \gamma(\beta S\hat{I} - I) = -(\beta+1)\hat{I} + \gamma I,$$

(*) en effet dans les applications usuelles du lemme de Gronwall, on vérifie généralement que l'hypothèse : $f(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est satisfaite par intégration d'une inégalité donnant une majoration de $\frac{df}{dt}$, typiquement une inégalité de la forme : $\forall\, x \in [t_0, t] : \frac{df}{dt}(x) \leq f(x)g(x)$.

ce qui se réécrit encore :

$$(54)\quad \frac{df}{dt} = -(\beta+1)f - \beta\gamma I.$$

◊ Étude au voisinage de 0 à droite :

On peut noter qu'en $t = 0$, compte-tenu des conditions initiales (C2), on a :

$$f(0) = \hat{I}(0) - \gamma I(0) = \gamma \bar{I} - \gamma \bar{I} = 0,$$

et (54) s'écrit :

$$\frac{df}{dt}(0) = -(\beta+1)f(0) - \beta\gamma I(0) = -\beta\gamma\bar{I} < 0.$$

Si on introduit t_o défini par : $t_0 = \sup\left\{t \geq 0 \mid \frac{df}{dt} \leq 0 \text{ sur } [0,t]\right\}$ (éventuellement $t_0 = +\infty$), alors, par définition de t_0 :

$$\frac{df}{dt} \text{ est négative sur } [0, t_0[.$$

De plus, comme par (54), $\frac{df}{dt}$ est une combinaison linéaire des fonctions f et I, continues sur $\mathbb{R}_+$, $\frac{df}{dt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et par suite, on peut montrer(*) que :

$$\frac{df}{dt} \text{ est nulle en } t_0 \text{ et on en tire que : } t_0 > 0 \text{ (car } f'(0) = 0).$$

Ainsi, sur l'intervalle $[0, t_0]$: $\frac{df}{dt} = -(\beta+1)f - \beta\gamma I \leq 0$, ce qui implique que :

$$\forall t \in [0, t_0],\ -(\beta+1)f(t) \leq \beta\gamma I(t).$$

De plus comme f est nulle en 0, est décroissante sur $[0, t_0]$, f est donc **négative** sur l'intervalle $[0, t_0]$ et donc on a plus précisément :

$$\forall t \in [0, t_0],\ 0 \leq -(\beta+1)f(t) \leq \varepsilon(\beta)\gamma I(t).$$

puis en divisant par $\beta + 1$, I étant supposée positive :

$$\forall t \in [0, t_0],\ 0 \leq |f(t)| \leq \varepsilon(\beta).\gamma I(t), \text{ en posant : } \varepsilon(\beta) = \tfrac{\beta}{\beta+1}.$$

En passant, comme il est demandé, à la limite $\beta \longrightarrow 0$, **t étant fixé**, il vient donc, puisque $\lim_{\beta\to+\infty} \varepsilon(\beta) = 0$: $f(t) = o(\gamma I(t))$, ce qui traduit que :

$$\forall t \in [0, t_{0,}] \quad \hat{I}(t) \sim_{\beta\to+\infty} \gamma I(t).$$

◊ pour $t \geq t_0$: l'application du lemme de Gronwall proposeé par l'énoncé est incorrecte ne serait-ce que parce que la fonction $f = \bar{I} - \gamma I$ est négative alors que le lemme s'applique avec des fonctions positives, et son application à $|f|$ ne donne rien de satisfaisant aussi : ***nous laissons le soin à un lecteur plus futé de suggérer une démonstration satisfaisante ! Elle sera la bienvenue.***

$\boxed{\textbf{IV.3.a.}}$ **Supposons que le système (4)**, muni des conditions initiales (C3), admet une solution **constante** $(S^*, I^*) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour une telle solution :

$$\forall t \geq 0, \quad S(t) = S^*,\ I(t) = \mathcal{I}^* \text{ et } \frac{dS}{dt}(t) = \frac{dI}{dt}(t) = 0,$$

(*) la continuité de f' en t_0 implique que $f(t_0) = \lim_{t\to t_0} f'(t) \leq 0$ car $f' \leq 0$ sur $[0, t_0[$, et, par un raisonnement par l'absurde, si $f'(t_0) < 0$ alors, par continuité de f' en t_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f' < 0$ sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, ce qui contredit la définition de t_0.

et, en reportant ces valeurs le système (4), dont le couple (S, I) est solution, on obtient :

$$\begin{cases} 0 = -\gamma\beta S^* \mathcal{I}^* + \Delta \\ 0 = \gamma\beta S^* I^* - I^* \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma\beta S^* \mathcal{I}^* = \Delta \\ (\gamma\beta S^* - 1)\, I^* = 0 \end{cases}.$$

D'autre part, les conditions initiales (C3), satisfaites par $(S, I) = (S^*, I^*)$, s'écrivent :

$$S(0) = S^* = 1 - \bar{I} \text{ et } I(0) = I^* = \bar{I}.$$

Puisque l'on suppose que $I^* > 0$, l'une des équations obtenues, $(\gamma\beta S^* - 1)\, I^* = 0$, donne :

$$\gamma\beta S^* = 1.$$

En éliminant S^* dans cette équation, grâce à $S^* = 1 - \bar{I}$, il vient : ▌ $\gamma\beta(1 - \bar{I}) = 1$.

Mais aussi, de $\gamma\beta S^* I^* = \Delta$, sachant que $\gamma\beta S^* = 1$ et $I^* = \bar{I}$, on tire : ▌ $\bar{I} = \Delta$.

◇ Réciproquement, si γ, β, Δ et $\bar{I}$ sont tels que : $\gamma\beta(1 - \bar{I}) = 1$ et $\bar{I} = \Delta$, le système (4) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{SI}{1 - \bar{I}} + \bar{I} \\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{SI}{1 - \bar{I}} - I \end{cases}$$

et l'on vérifie que $(S, I) = \big(1 - \bar{I}, \bar{I}\big)$, (valeurs précédemment trouvées pour S^* et I^*), constitue bien une solution constante de (4) muni des conditions initiales (C3), telle que S et I soient à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque par hypothèse $\bar{I} \in \left]0{,}1\right[$.

Ainsi, et en conclusion :

le système (4) muni des conditions initiales (C3) admet une solution constante (S^*, I^*) si et seulement si : $\gamma\beta(1 - \bar{I}) = 1$ et $\bar{I} = \Delta$

.

IV.3.b. On vient de voir que si les conditions mises au jour précédemment sont satisfaites, le système (4) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{SI}{1 - \bar{I}} + \bar{I} \\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{SI}{1 - \bar{I}} - I \end{cases}, \quad \text{ou en utilisant que } \begin{cases} S^* = 1 - \bar{I} \\ I^* = \bar{I} \end{cases} : \quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{SI}{S^*} + I^* \\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{SI}{S^*} - I \end{cases}.$$

En revenant aux définitions des fonctions ε et η, selons lesquelles :

$$▌\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S(t) = [1 + \varepsilon(t)]\, S^* \quad \text{et} \quad I(t) = [1 + \eta(t)]\, I^*,$$

on a, pour tout $t \geq 0$: $\dfrac{dS}{dt}(t) = S^* \dfrac{d\varepsilon}{dt}(t)$ et $\dfrac{dI}{dt}(t) = I^* \dfrac{d\eta}{dt}(t)$, et une dernière réécriture du système (4) est donc donnée par :

$$\begin{cases} S^* \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{[1 + \varepsilon]\, S^* . [1 + \eta]\, I^*}{1 - \bar{I}} + \bar{I} \\ I^* \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{[1 + \varepsilon]\, S^* . [1 + \eta]\, I^*}{1 - \bar{I}} - [1 + \eta]\, . I^* \end{cases}, \text{ puis en utilisant que } \begin{cases} S^* = 1 - \bar{I} \\ I^* = \bar{I} \end{cases},$$

et en effectuant les simplifications *ad hoc*, sachant de plus que $S^* > 0$ et $I^* > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \frac{I^*}{S^*}\big(1 - [1 + \varepsilon] . [1 + \eta]\big) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \varepsilon\, [1 + \eta] \end{cases}.$$

Et en observant que $\frac{I^*}{S^*} = \frac{\bar{I}}{1-\bar{I}} = \frac{\Delta}{1/\gamma\beta} = \gamma\beta\Delta$, après développement et réduction de $(1 - [1+\varepsilon]\,.\,[1+\eta]\,)$, on obtient le système (5) demandé :

$$\boxed{(5)\ \begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} &= -\gamma\beta\Delta(\varepsilon+\eta+\varepsilon\eta) \\ \dfrac{d\eta}{dt} &= \varepsilon(1+\eta) \end{cases}}, \text{ avec les conditions initiales : } \boxed{\begin{matrix}\varepsilon(0)=\varepsilon_0 \\ \text{et } \eta(0)=\eta_0\end{matrix}}.$$

(les conditions initiales sur ε et η découlent directement des conditions (C4) et des expressions de $S(t)$ et $I(t)$ en fonction de $\varepsilon(t)$ et $\eta(t)$, considérées pour $t = 0$)

IV.3.c. Si (ε, η) est un couple solution du système (6), en notant f' et f'' les dérivées première et deuxième d'une fonction f, il découle, sur $\mathbb{R}_+$, en dérivant la première équation :

$$\varepsilon'' = -\gamma\beta\Delta(\varepsilon' + \eta').$$

(on rappelle que si (ε, η) est un couple solution de (6), alors, par définition de ce qu'on appelle *solution* d'un système différentiel sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions ε et η se doivent d'être dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma\beta\Delta(\varepsilon+\eta)$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions de dérivables).

Puis, comme d'après la seconde équation $\eta' = \varepsilon$:

$$\boxed{(\mathcal{E}) : \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varepsilon''(t) + \gamma\beta\Delta\varepsilon'(t) + \gamma\beta\Delta\varepsilon(t) = 0}.$$

◊ Résolution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

***Tout d'abord** : Commençons par préciser qu'il est impossible de donner la solution d'une équation du second ordre si on ne dispose de condition initiale que sur la valeur de la fonction en un point, ici $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. **On a besoin aussi** d'une seconde condition, par exemple une condition sur la valeur de la dérivée de la fonction en 0 (ce qui pourrait venir ici d'une valeur donnée pour $\eta(0)$). Or **il n'en est rien**.*

En conséquence, on prendra comme conditions initiales les conditions générales, issues des conditions (C4), à savoir :

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \text{ et } \eta(0) = \eta_0, \text{ avec } \varepsilon_0 \in\ ]\text{-}1,1[\text{ et } \eta_0 \in\ ]\text{-}1,1[.$$

(de toute façon, la conjecture intéressante sur le comportement asymptotique des fonctions S et I n'est pas affectée par ce choix).

L'équation $\mathcal{E}$ est une équation différentielle linéaire à cœfficients constants, dont l'équation caractéristique : $r^2 + \gamma\beta\Delta.r + \gamma\beta\Delta = 0$, a pour discriminant :

$$\delta = (\gamma\beta\Delta)^2 - 4.\gamma\beta\Delta = (\gamma\beta\Delta)\,.\,(\gamma\beta\Delta - 4).$$

À l'aide de $\bar{I}$, le produit $\gamma\beta\Delta$ s'écrit : $\gamma\beta\Delta = \bar{I}/(1-\bar{I})$, et par suite pour δ on a :

$$\delta = (\gamma\beta\Delta)\,.\,(\gamma\beta\Delta - 4) = \frac{\bar{I}}{(1-\bar{I})}.\left(\frac{\bar{I}}{(1-\bar{I})} - 4\right) = \frac{\bar{I}}{(1-\bar{I})^2}.\left[\bar{I} - 4(1-\bar{I})\right] = \frac{\bar{I}(5\bar{I}-4)}{(1-\bar{I})^2}.$$

Ainsi : $\delta = 5.\frac{\bar{I}}{(1-\bar{I})^2}\left(\bar{I} - \frac{5}{4}\right)$, et comme on ne dispose d'aucune information sur γ, β, Δ et $\bar{I}$, si ce n'est que : $\gamma > 0$, $\beta > 0$ (plus précisément $\beta \in\ ]0,1]$ car β représente une probabilité), $\Delta > 0$ et $\bar{I} \in\ ]0,1[$, on en déduit que le discriminant peut être aussi bien strictement positif que strictement négatif, ou encore nul, suivant que $\bar{I} > 5/4$, $\bar{I} < 5/4$ ou $\bar{I} = 5/4$.

D'après le cours, l'équation $(\mathcal{E})$ admettra donc une solution ε de l'un des types suivants :

- si $\delta > 0$: $\forall t \geq 0, \quad \varepsilon(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, où r_1 et r_2 sont les deux solutions réelles distinctes de l'équation caractéristique, égales à $\frac{-\gamma\beta\Delta \pm \sqrt{\delta}}{2}$.
- si $\delta = 0$: $\forall t \geq 0, \quad \varepsilon(t) = (A + Bt)\, e^{r_0 t}$, où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique, égale à $\frac{-\gamma\beta\Delta}{2}$.
- si $\delta < 0$: $\forall t \geq 0, \quad \varepsilon(t) = e^{\frac{-\gamma\beta\Delta}{2}t}\left(A\cos\left(\sqrt{|\delta|}\right) + B\sin\left(\sqrt{|\delta|}\right)\right)$, ce que l'on obtient en ne gardant que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ parmi l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui, elles, sont de la forme $\varepsilon(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, avec r_1 et r_2 les solutions complexes de l'équation caractéristique, égales à $\frac{-\gamma\beta\Delta \pm \mathrm{i}\sqrt{|\delta|}}{2}$.

Dans les trois cas, A et B sont deux réels dont la valeur est déterminée par les conditions initiales : $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\varepsilon'(0) = -\gamma\beta\Delta\,(\varepsilon_0 + \eta_0)$ (d'après la première équation du système (6) si $\eta(0) = \eta_0$).

◇ Comportement asymptotique des fonctions S et I :

Dans les trois cas de figure précédents, on peut montrer, indépendamment des valeurs de A et B, donc indépendamment des conditions initiales, que : $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$.

- si $\delta \leq 0$: $r_0 = \frac{-\gamma\beta\Delta}{2}$ est strictement négatif (car $\gamma\beta\Delta = \bar{I}/(1-\bar{I})$ et $\bar{I} \in]0{,}1[$). Donc il résulte des résultats usuels sur les comparaisons et les limites de fonctions que :

$$(A + Bt)\, e^{r_0 t} \text{ (si } \delta = 0) \text{ ou } e^{\frac{-\gamma\beta\Delta}{2}t}\left(A\cos\left(\sqrt{|\delta|}\right) + B\sin\left(\sqrt{|\delta|}\right)\right) \text{ (si } \delta = 0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

(une exponentielle décroissante impose sa limite dans un produit avec une fonction bornée ou un polynôme)

- si $\delta > 0$: on connaît les formules donnant la valeur du produit ($P = c/a$) et de la somme ($S = -b/a$) des racines d'un polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$. Appliquées à l'équation caractéristiques de $(\mathcal{E})$, elles donnent :

  $r_1 r_2 = \gamma\beta\Delta > 0$ (r_1 et r_2 sont donc de même signe),
  et
  $r_1 + r_2 = -\gamma\beta\Delta < 0$ (r_1 et r_2 sont donc tous deux strictement négatifs).

  Ainsi, la fonction ε est une combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes, et tend donc vers 0 en $+\infty$.

En conclusion, quelque soit $(\varepsilon_0, \eta_0) \in (]-1{,}1[)^2$: $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$, donc aussi :

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \lim_{t\to+\infty} [1 + \varepsilon(t)]\, S^* = S^*.$$

Enfin, d'après la première équation de (6) : $\eta = -\varepsilon - \frac{1}{\gamma\beta\Delta}\varepsilon'$, et on peut vérifier que quelque soit la forme de la fonction ε on a aussi $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon'(t) = 0$, donc :

$$\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 0, \text{ et par suite : } \lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} [1 + \eta(t)]\, I^* = I^*.$$

Les résultats précédents sont avérés pour toute solution de (6), avec les conditions initiales issues des conditions (C4).

Or, (6) constitue une approximation linéaire du système (5), si l'approximation est pertinente, on peut donc, comme il est demandé, formuler la conjecture suivante sur le comportement asymptotique de la solution (S, I) de (5), muni des conditions initiales issues des conditions (C4) : $\boxed{\lim_{t\to+\infty} S(t) = S^* \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} I(t) = I^*}$.