**A.1.a.** Il s'agit ici de déterminer, pour $i$ compris entre 1 et $n-1$, la probabilité conditionnelle $P\big(E(t+h)=i \mid E(t)=i\big) = \frac{P\left(\left(E(t+h)=i\right)\cap\left(E(t)=i\right)\right)}{P\left(E(t)=i\right)}$.

*Il s'agit en fait de la seule probabilité dont il n'est pas question dans les hypothèses, en ce sens où les hypothèses donnent toutes les probabilités d'évolution à partir de l'état i sauf la probabilité pour rester dans cet état.*

***C'est ce qui donne l'idée de fond de la démonstration.***

◇ On va appliquer la propriété suivante :

(3)
**Si** $B$ est un événement de probabilité non nulle,
**et si** $\{A_k\}_{1\le k\le n}$ est un système complet d'événements,
**alors,** $B$ est à la réunion **disjointe** des événements $A_k \cap B$ $(1\le k\le n)$,
**et par conséquent :**
$P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k\cap B)$, et en divisant par $P(B)\neq 0$ : $1=\sum_{k=1}^{n} P(A_k \mid B)$.

Cette propriété, pour le système complet d'événements $\{E(t+h)=j\}_{0\le j\le n}$, et l'événement $(E(t)=i)$, s'écrit :

$$(4)\quad \textstyle\sum_{j=0}^{n} P\big(E(t+h)=j \mid E(t)=i\big)=1.$$

Or, dans cette sous-partie **A.1.**, **par hypothèse,** $\boldsymbol{i\in[\![1,n-1]\!]}$, donc $i+1$ et $i-1$ sont des entiers compris entre 0 et $n$, et par suite :

les états $i-1$ et $i+1$ sont des états possibles à la date $t+h$ pour un organisme étant dans l'état $i$ à la date $t$.

**Par conséquent**, le système complet d'événement $\{E(t+h)=j\}_{0\le j\le n}$, contient les événements $\big(E(t+h)=i+1\big)$ et $\big(E(t+h)=i-1\big)$, et on peut exprimer (4) par :

$$P\big(E(t+h)=i+1 \mid E(t)=i\big)+P\big(E(t+h)=i \mid E(t)=i\big)$$
$$+P\big(E(t+h)=i-1 \mid E(t)=i\big)+\sum_{\substack{0\le j\le n\\ j\neq, i-1,i,i+1}} P\big(E(t+h)=j \mid E(t)=i\big)=1.$$

**En vertu des hypothèses (H1'), (H2') et (H3)**, on peut encore écrire :

$$\lambda_{i+1}h+\underline{o(h)}+\mu_{i-1}h+\underline{o(h)}+P\big(E(t+h)=i \mid E(t)=i\big)+\underline{\sum_{\substack{0\le j\le n\\ j\neq, i-1,i,i+1}} o(h)}=1.$$

**Or,** d'après le cours, une **somme finie** de fonctions du type $o(h)$ (ici, négligeables devant $h$ au voisinage de 0) est encore <u>négligable devant $h$</u> en 0, c'est-à-dire **est elle-même du type** $\boldsymbol{o(h)}$, donc, l'égalité précédente se résume en :

$$\lambda_{i+1}h+\mu_{i-1}h+P\big(E(t+h)=i \mid E(t)=i\big)+o(h)=1.$$

D'où l'on tire finalement l'égalité demandée (*sachant que* " $-\,o(h)=o(h)$ " *!*) :

$$\boxed{P\big(E(t+h)=i \mid E(t)=i\big)=1-(\lambda_{i+1}+\mu_{i-1})\,h+o(h)}.$$

**A.1.b.** La relation à admettre :

$$(5)\quad \begin{aligned}\underline{\boldsymbol{X(t+h,i)}} &= \big(\lambda_i h+o(h)\big)X(t,i-1)\\ &+\big(\underline{1}-(\lambda_{i+1}+\mu_{i-1})h+o(h)\big).\underline{\boldsymbol{X(t,i)}}+\big(\mu_i h+o(h)\big)X(t,i+1)\end{aligned}$$

se réécrit, **en isolant $\boldsymbol{X(t+h,i)-X(t,i)}$** :

$$\begin{aligned}X(t+h,i)-X(t,i) &= \big(\lambda_i h+o(h)\big)X(t,i-1)\\ &+\big(-(\lambda_{i+1}+\mu_{i-1})h+o(h)\big).X(t,i)+\big(\mu_i h+o(h)\big)X(t,i+1)\end{aligned}$$

puis, sachant qu'au membre de droite, $X(t,i-1)$, $X(t,i)$, $X(t,i+1)$ désignent des pro-babilités donc sont positifs, que $\lambda_i$, $\lambda_{i+1}$, $\mu_i$ et $\mu_{i-1}$ sont positifs (**hypothèse**

**(H4)**), sachant encore que $h > 0$, par applications de l'**inégalité triangulaire**, de l'égalité précédente, on tire :

$$|X(t+h,i) - X(t,i)| \leq |\lambda_i h + o(h)|.X(t,i-1)$$
$$+ |-(\lambda_{i+1} + \mu_{i-1})h + o(h)|.X(t,i) + |\mu_i h + o(h)|.X(t,i+1),$$

puis :

$$|X(t+h,i) - X(t,i)| \leq \big(\lambda_i h + |o(h)|\big).X(t,i-1)$$
$$+\big(\lambda_{i+1} + \mu_{i-1})h + |o(h)|\big).X(t,i) + \big(\mu_i h + |o(h)|\big).X(t,i+1).$$

Et **en majorant alors les probabilités** $\boldsymbol{X(t,i-1)}$, $\boldsymbol{X(t,i)}$, $\boldsymbol{X(t,i+1)}$, **par 1**, et **les cœfficients** positifs $\lambda_i$, $\lambda_{i+1}$, **par** $\underline{\lambda = \max_{1\leq j\leq n} \lambda_j}$, et $\mu_i$, $\mu_{i-1}$, par $\underline{\mu = \max_{0\leq j\leq n-1} \mu_j}$, on obtient :

$$|X(t+h,i) - X(t,i)| \leq \big(\lambda h + |o(h)|\big) + \big(\lambda + \mu)h + |o(h)|\big) + \big(\mu h + |o(h)|\big).$$

Enfin, en rassemblant d'une part les termes en $h$, et d'autre part, les quatres termes négligeables devant $h$ en 0 (*on sait que* "$|o(h)| = o(h)$" *!*), en un seul, il vient :

$$|X(t+h,i) - X(t,i)| \leq 2.(\lambda + \mu).h + o(h).$$

**On a donc vérifié que :** **(6)** $\boxed{|X(t+h,i) - X(t,i)| \leq K.h + o(h)}$,

**où $\boldsymbol{K}$** $= 2.(\lambda+\mu)$ **est indépendant de $\boldsymbol{t}$ et de $\boldsymbol{h}$** car $\lambda$ et $\mu$ le sont.

◇ La majoration (6) a été établie à partir de la relation (5), énoncée pour $t \geq 0$ et $h > 0$ et admise. (6) est donc valable aussi pour tout couple $(t, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, et en particulier pour un couple $(t', h') = (t-h, h)$ si $t - h \geq 0$ et $h > 0$. Pour un tel couple, caractérisé en résumé par $0 < h \leq t$, (6) s'écrit : $\big|X\big((t-h)+h,i\big) - X(t-h,i)\big| \leq K.h + o(h)$,

Ainsi, en changeant la différence dans la valeur absolue par son opposée, on a :

**(7)** $\boxed{\text{pour tout couple, } (t,h) \text{ tel que } 0 < h \leq t, \quad |X(t-h,i) - X(t,i)| \leq K.h + o(h)}$.

$\boxed{\textbf{A.2.a.}}$ $f_i$ est la fonction qui à tout $t$ de $\mathbb{R}_+$, associe la probabilité $X(t,i)$, donc, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, et $h > 0$, la majoration (6) s'écrit : $|f_i(t_0+h) - f_i(t_0)| \leq K.h + o(h)$.

Et par encadrement, on en déduit que : $\lim\limits_{h \xrightarrow{h>0} 0} |f_i(t_0+h) - f_i(t_0)| = \lim\limits_{h \xrightarrow{h>0} 0} K.h + o(h) = 0$.

Donc, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} f_i(t_0+h) = f_i(t_0)$, *i.e.* $\lim_{t\to t_0^+} f_i(t) = f_i(t_0)$,

ce qui traduit exactement que : $\boxed{\text{pour tout } t_0 \in \mathbb{R}_+,\ f_i \text{ est continue à droite en } t_0}$.

◇ **Pour la continuité à gauche**, on utilise la majoration **(7)** pour $t = t_0$ fixé, mais celle-ci impose d'avoir $0 < h \leq t_0$ et donc $\underline{t_0 > 0}$ (en revanche, $0 < h \leq t_0$ n'empêche pas, $t_0$ étant fixé, de faire tendre $h$ vers 0 par valeurs strictement positives).

Ainsi, par passage à la limite sur (7), il vient, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} |X(t-h,i) - X(t,i)| = \lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} K.h + o(h) = 0, \text{ et donc } \lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} f_i(t_0-h) = f_i(t_0).$$

Ainsi : $\Big(\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{t\to t_0^-} f_i(t) = f_i(t_0)\Big)$, *i.e.* $\boxed{f_i \text{ est continue à droite sur } \mathbb{R}_+^*}$.

$\boxed{\textbf{A.2.b.}}$ Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, et $h > 0$, en reprenant le **résultat admis** (5) :

**(5)**
$$\underline{\boldsymbol{X(t_o+h,i)}} = \big(\lambda_i h + o(h)\big)X(t_0,i-1)$$
$$+\big(\underline{1} - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1})h + o(h)\big).\underline{\boldsymbol{X(t_o,i)}} + \big(\mu_i h + o(h)\big)X(t_0,i+1),$$

en notant $h.\epsilon_k(h)$ $(k = 1, 2, 3)$ les fonctions négligeables du membre de droite (on a alors $\lim_{h\to 0} \epsilon_k(h) = 0$, $1 \le k \le 3$), il vient, en isolant la différence $X(t_0+h) - X(t_0, i)$ comme au **A.1.b.**, puis en divisant les deux membres par $h > 0$ :

$$\frac{X(t_0+h,i)-X(t_0,i)}{h} = \big(\lambda_i + \epsilon_1(h)\big).X(t_0, i-1)$$
$$+\big(-\lambda_{i+1} - \mu_{i-1} + \epsilon_2(h)\big).X(t_0,i) + \big(\mu_i + \epsilon_3(h)\big).X(t_0, i+1).$$

En utilisant les fonctions $f_i$ ce résultat s'écrit aussi :

$$(8)\quad \frac{f_i(t_0+h)-f_i(t_0)}{h} = \big(\lambda_i + \epsilon_1(h)\big).f_{i-1}(t_0)$$
$$+\big(-\lambda_{i+1} - \mu_{i-1} + \epsilon_2(h)\big).f_i(t_0) + \big(\mu_i + \epsilon_3(h)\big).f_{i+1}(t_0).$$

En considérant alors la limite du membre de droite, pour $h$ tendant vers 0 par valeurs supérieures, puisque seuls $\epsilon_1(h)$, $\epsilon_2(h)$ et $\epsilon_3(h)$ dépendent de $h$ et ont une limite nulle, il vient :

$$\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} \frac{f_i(t_0+h)-f_i(t_0)}{h} = \lambda_i.f_{i-1}(t_0) - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1}).f_i(t_0) + \mu_i.f_{i+1}(t_0).$$

Le résultat étant valable pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, on a montré que :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_i \text{ est dérivable à droite sur } \mathbb{R}_+, \text{ avec pour tout } t \in \mathbb{R}_+ : \\ \quad (f_i)'_d(t) = \lambda_i.f_{i-1}(t) - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1}).f_i(t) + \mu_i.f_{i+1}(t) \end{array}}.$$

**A.2.c.** Comme il a été fait au **A.1.b.** pour passer de la majoration (6) à (7), on remarque que (8) est valable pour tout couple $(t_0, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, donc aussi pour un couple $(t_0 - h, h)$ avec $\mathbf{o} < \boldsymbol{h} \le \boldsymbol{t_o}$, auquel cas (8) s'écrit :

$$\frac{f_i(t_0+h)-f_i(t_0)}{h} = \big(\lambda_i + \epsilon_1(h)\big).f_{i-1}(t_0)$$
$$+\big(-\lambda_{i+1} - \mu_{i-1} + \epsilon_2(h)\big).f_i(t_0) + \big(\mu_i + \epsilon_3(h)\big).f_{i+1}(t_0).$$

**D'où l'on déduit**, de façon analogue à ce qui a été fait au **A.2.b.**, par un passage à la limite tout aussi licite que celui opéré au **A.2.a.** pour la continuité à gauche, mais **avec**, de même, **l'obligation de se restreindre à** $\boldsymbol{t_o} > \mathbf{o}$ :

$$\lim_{h \xrightarrow{h>0} 0} \frac{f_i(t_0-h)-f_i(t_0)}{h} = \lambda_i.f_{i-1}(t_0) - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1}).f_i(t_0) + \mu_i.f_{i+1}(t_0).$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_i \text{ est dérivable à gauche sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ avec pour tout } t \in \mathbb{R}_+^* : \\ \quad (f_i)'_g(t) = \lambda_i.f_{i-1}(t) - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1}).f_i(t) + \mu_i.f_{i+1}(t) \end{array}}.$$

**A.2.d.** Puisqu'on a montré (*c.f.* **A.2.b.** et **A.2.c.**) que pour tout $t$ de $\mathbb{R}_+^*$, $f_i$ est dérivable **à la fois** à droite et à gauche, avec $(f_i)'_d(t) = (f_i)'_g(t)$, il est immédiat, en reprenant l'expression trouvée pour les dérivées, que :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_i \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ avec pour tout } t \in \mathbb{R}_+^* : \\ \quad f_i'(t) = \lambda_i.f_{i-1}(t) - (\lambda_{i+1} + \mu_{i-1}).f_i(t) + \mu_i.f_{i+1}(t) \end{array}}.$$

**B.1.** En posant $n = 2$, on s'autorise à appliquer dans cette partie les résultats de la partie **II.A.**, valables pour $n \ge 2$.
Notons ensuite que les fonctions $f_i$ n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+$ et non à gauche de 0, et dérivables sur tout $\mathbb{R}_+^*$ et à droite en 0, on pourra noter sans ambigité $f_i'(t)$, même pour une dérivée à doite en 0.

Ceci étant, pour tout $t \ge 0$, puisque l'on pose dans cette partie : $n = 2$, $\lambda_1 = 2\lambda$, $\lambda_2 = 2\lambda$, $\mu_0 = \lambda$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) et $\mu_1 = 0$, la **relation admise** en fin de **Partie II.A** : $f_0'(t) = -\lambda_1 f_0(t) + \mu_0 f_1(t)$ s'écrit ici $\underline{f_0'(t) = -2\lambda.f_0(t) + \lambda.f_1(t)}$.

Par ailleurs, avec $n = 2$ et $i = 1$, $f_1'(t)$ est donnée par **A.2.d.** (car $i \in [\![1,n\text{-}1]\!]$), vaut : $f_1'(t) = \lambda_1.f_0(t) - (\lambda_2 + \mu_0).f_1(t) + \mu_1.f_2(t)$, et s'avère ici être égale à : $f_1'(t) = 2\lambda.f_0(t) - 3.\lambda.f_1(t)$, compte-tenu des valeurs fixées de $\lambda_1$, $\lambda_2\lambda$, $\mu_0$ et $\mu_1$.

On a peut donc vérifier, **en vertu des règles du calcul matriciel**, que :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \begin{pmatrix} f_0'(t) \\ f_1'(t) \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix}, \text{ si l'on pose : } \quad A = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda \\ 2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}}.$$

**B.2.** Compte-tenu de la forme de $A$, il est plus simple de diagonaliser d'abord la matrice $A'$ définie par $\boldsymbol{A = \lambda.A'}$.

◇ Recherche des vecteurs propres et valeurs propres de $A'$ :

**Par définition,** $\alpha \in \mathbb{R}$ est **valeur propre** de $A'$ si et seulement si il existe des solutions non nulles $X = {}^t(x,y)$ de l'équation $A'X = \alpha.X$. Ces solutions, quand elles existent, sont appelées **vecteurs propres** de $A'$ relativement à la valeur propre $\alpha$.

**Or**, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a la **succession d'équivalences** suivante :

$$A'X = \alpha.X \iff \begin{cases} -2x + y = \alpha x \\ 2x - 3y = \alpha y \end{cases} \iff \begin{cases} -(2+\alpha).x + y = 0 \\ 2x - (3+\alpha).y = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_1 + (2+\alpha)L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_2}{\iff}} \quad (\mathcal{S}_\alpha) \begin{cases} \underline{2}.x - (3+\alpha).y = 0 \\ \underline{\theta(\alpha)}.y = 0 \end{cases}, \quad \text{où : } \quad \underline{\theta(\alpha) = \alpha^2 + 5\alpha + 4}.$$

**D'où la discussion usuelle :**

$$\left( \begin{matrix} \alpha \text{ est valeur} \\ \text{propre de } A' \end{matrix} \right) \text{ si et seulement si } \left( \begin{matrix} (\mathcal{S}_\alpha) \text{ admet des solutions} \\ \text{non nulles } (x,y) \end{matrix} \right),$$

**Or**, le système linéaire $(\mathcal{S}_\alpha)$, étant **homogène**(*), il admet $(0,0)$ pour solution. Et cette solution est la seule si et seulement si $(\mathcal{S}_\alpha)$ est **de Cramer**, *i.e.*, puisque le système est **triangulaire**, si et seulement si tous les pivots de $(\mathcal{S}_\alpha)$ (ici 2 et $\theta(\alpha)$) sont non nuls.

**Ainsi,**

$\alpha$ est valeur propre de $A'$ si et seulement si $\theta(\alpha) = \alpha^2 + 5\alpha + 4 = 0$.

Et si $\theta(\alpha) = 0$, les vecteurs propres de $A'$ sont les $X = {}^t(x,y)$ tels que $(x,y)$ est une solution non nulle de $(\mathcal{S}_\alpha)$.

**Puisque** le polynôme de degré 2, $\alpha^2 + 5\alpha + 4$, admet pour racines $-1$ et $-4$(**) :

$A'$ admet **deux** valeurs propres **distinctes,** $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = -4$.

**En conséquence,** $A'$ admet exactement **deux sous-espaces propres** $E_{\alpha_1}$ et $E_{\alpha_2}$, qui sont, comme c'est toujours le cas pour des *s.e.v.* propres d'une même matrice, chacun, **de dimension supérieure ou égale à 1**, et **en somme directe**.

**Il existe donc** $X_1 \neq 0$ dans $E_{\alpha_1}$, et $X_2 \neq 0$ dans $E_{\alpha_2}$, et $X_1$ et $X_2$ forment une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (donc une base de $\mathbb{R}^2$).

**Ainsi**, il existe pour $A'$ (matrice carrée de taille $2 \times 2$), une base (de $\mathbb{R}^2$), $(X_1, X_2)$, constituée de vecteurs propres ($X_1$ est propre pour $\alpha_1$ et $X_2$ pour $\alpha_2$).

**Donc, d'après le cours** :

$A'$ est diagonalisable, semblable à $D = \text{Diag}\,[\alpha_1, \alpha_2] = \text{Diag}\,[-1, -4]$.

(*) *i.e.* tous les seconds membres sont égaux à 0.

(**) ce sont des **racines** entières **évidentes** si l'on considère que la somme et le produit des racines valent respectivement $S = -\frac{b}{2a} = -5$ et $P = \frac{c}{a} = 4$ (formules du cours).

Plus précisément :

$A' = P \times D \times P^{-1}$, pour toute matrice $P$, constituée de la juxtaposition, dans cet ordre d'un vecteur $X_1$ propre pour $\alpha_1$ et d'un vecteur $X_2$ propre pour $\alpha_2$.

On choisit $X_1$ en cherchant une solution non nulle de $(\mathcal{S}_{\alpha_1})$, système qui, puisque $\alpha_1 = -1$, et $\theta(\alpha_1) = 0$, s'écrit :

$$(\mathcal{S}_{\alpha_1}) \begin{cases} 2.x \ - \ (3+\alpha_1).y = 0 \\ \qquad\quad \theta(\alpha_1).y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2.x \ - \ 2.y = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff \{ x = y \ .$$

<u>On peut donc prendre</u> $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, $(\mathcal{S}_{\alpha_2})$ s'écrit, puisque $\alpha_2 = -4$ et $\theta(\alpha_2) = 0$ :

$$(\mathcal{S}_{\alpha_2}) \begin{cases} 2.x \ - \ (3+\alpha_2).y = 0 \\ \qquad\quad \theta(\alpha_2).y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2.x \ + \ y = 0 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \iff \{ 2x = -y \ .$$

<u>On peut donc prendre</u> $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**Pour ces choix** de $X_1$ et $X_2$, on a :

$$\boxed{A = P \times D \times P^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

**B.3.** Si on note $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pour la matrice inverse de $P$, alors en définissant $\phi_0$ et $\phi_1$ comme dans l'énoncé, il vient, pour tout $t \geq 0$ : $\begin{cases} \phi_0(t) = a.f_0(t) \ + \ b.f_1(t) \\ \phi_1(t) = c.f_0(t) \ + \ d.f_1(t) \end{cases}$,

puis, **par linéarité de la dérivation**, $f_1$ et $f_2$ étant dérivables sur $\mathbb{R}_+$(*) :

$$\begin{cases} \phi_0'(t) = a.f_0'(t) \ + \ b.f_1'(t) \\ \phi_1'(t) = c.f_0'(t) \ + \ d.f_1'(t) \end{cases}, \text{ ce qui s'écrit aussi : } \boxed{\begin{pmatrix} \phi_0'(t) \\ \phi_1'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} f_0'(t) \\ f_1'(t) \end{pmatrix}}.$$

◇ <u>Expressions de $\phi_0$ et $\phi_1$</u> :

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en notant : $\begin{cases} \Phi(t) = {}^t(\,\phi_1(t) \quad \phi_0(t)\,), & F(t) = {}^t(\,f_1(t) \quad f_0(t)\,), \\ \Phi'(t) = {}^t(\,\phi_1'(t) \quad \phi_0'(t)\,), & F'(t) = {}^t(\,f_1'(t) \quad f_0'(t)\,), \end{cases}$

la définition de $\phi_0$ et $\phi_1$, et le résultat précédent sur $\phi_0'$ et $\phi_1'$, s'écrivent :

**(9)** $\Phi(t) = P^{-1}F(t)$, et $\Phi'(t) = P^{-1}F'(t)$,

ou encore, en multipliant chaque égalité à gauche par $P$ :

**(10)** $F(t) = P\Phi(t)$, et $F'(t) = P\Phi'(t)$.

De même, l'égalité obtenue en **B.1.** s'écrit, avec les notations : $F'(t) = AF(t)$, ou, par multiplication à gauche par $P^{-1}$, et en introduisant la matrice unité $I$, égale à $PP^{-1}$ :

$$\underline{P^{-1}F'(t)} = P^{-1}AF(t) = P^{-1}A.I.F(t) = \underline{P^{-1}APP^{-1}F(t)}.$$

Ainsi, en utilisant (9) : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi(t) = (\underline{P^{-1}AP})\Phi(t)$, *i.e.* $\Phi(t) = \underline{D}\Phi(t)$

(on utilise que $A = PDP^{-1}$ équivaut à $D = P^{-1}AP$).

C'est-à-dire, en explicitant $D$ et en effectuant le produit matriciel :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \begin{cases} \phi_0'(t) = \ \ -\phi_0(t) \\ \phi_1'(t) = -4\phi_1(t) \end{cases}, \text{ ou encore : } \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \begin{cases} \phi_0'(t) \ + \ \ \phi_0(t) = 0 \\ \phi_0'(t) \ + \ 4.\phi_0(t) = 0 \end{cases}.$$

(*) en 0, dérivables à droite seulement bien sûr, puisque $f_1$ et $f_2$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ uniquement.

• $\phi_0$ **et** $\phi_1$ **satisfont** donc, chacune, sur $\mathbb{R}_+$, une **équation différentielle du premier ordre, linéaire, à cœfficients constants, homogène**, dont la résolution donne :

$$\textbf{(11)} \quad \forall t \geq 0,\ \phi_0(t) = k_1.e^{-t} \text{ et } \phi_0(t) = k_2.e^{-4t},$$

où $k_1$ et $k_2$ sont deux constantes réelles.

◇ On revient à $f_0$ et $f_1$. D'après (10) : $F(t) = P\Phi(t)$, *i.e.* $\begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{pmatrix}$.

Connaissant $P$ et (11), on en déduit :

$$\forall t \geq 0,\ \begin{cases} f_0(t) = k_1.e^{-t} + k_2.e^{-4t} \\ f_1(t) = k_1.e^{-t} - 2k_2.e^{-4t} \end{cases}.$$

Il faut alors, **pour déterminer $k_1$ et $k_2$** :

• considérer ces égalités pour $t = 0$, ce qui donne : $\begin{array}{l} f_0(0) = k_1 + k_2 \\ f_1(0) = k_1 - 2k_2. \end{array}$

• et invoquer la **règle (5)** selon laquelle à l'instant 0 le micro-organisme est dans l'état 0 avec la probabilité 1, ce qui donne : $X(0,0) = 1$ et, si $i \neq 0$, $X(0,i) = 0$, soit, pour $f_0$ et $f_1$ : $\quad f_1(0) = X(0,0) = 1$ et $f_1(0) = X(0,1) = 0$.

**$k_1$ et $k_2$ vérifient donc** le système $\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 - 2k_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2k_2 \\ 3k_2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{2}{3} \\ k_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

**Ainsi,**

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad f_0(t) = \tfrac{1}{3}\left(2.e^{-t} + e^{-4t}\right), \text{ et } f_1(t) = \tfrac{1}{3}\left(2.e^{-t} - 4.e^{-4t}\right)}.$$

$\boxed{\textbf{B.4.}}$ Pour tout $t \geq 0$, par définition, $X(t,2) = f_2(t)$. Or, d'après le résultat admis au **A.2.d.** (puisque dans cette **Partie B.** : $n = 2$) : $f_2'(t) = \lambda_2 f_1(t)$, *i.e.*, en rappelant qu'ici $\lambda_2 = 2\lambda$ et en utilisant l'expression trouvéee pour $f_1(t)$ :

$$f_2'(t) = \tfrac{2}{3}\lambda\left(2.e^{-t} - 4.e^{-4t}\right).$$

En intégrant alors l'égalité sur un intervalle $[0,t]$, $(t \geq 0)$, il vient :

$$f_2(t) - f_2(0) = \tfrac{2}{3}\lambda\left[-2.e^{-x} + e^{-4x}\right]_{x=0}^{t} = \tfrac{2}{3}\lambda\left(-2.e^{-x} + e^{-4x} - 1\right).$$

Enfin, comme $f_2(0) = X(0,2) = 0$ (*c.f.* **règle (5)**), on peut conclure :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad f_2(t) = \tfrac{2}{3}\lambda\left(1 + e^{-4t} - 2.e^{-t}\right)}.$$

$\boxed{\textbf{C.}}$ Reprenons pour cette **Partie C.**, les résultats, montrés ou admis du **A.2.d.**, en tenant compte des hypothèses sur les $\lambda_i$ et les $\mu_i$.

Pour tout $t \geq 0$ :

$$\textbf{(12)} \quad \begin{array}{|ll} \forall i \in [\![1, n-1]\!], & f_i'(t) = \lambda i.f_{i-1}(t) - \lambda(i+1).f_i(t), \\ \text{et pour } i = 0 \text{ et } n, & f_0'(t) = -\lambda.f_0(t),\ f_n' = n\lambda.f_{n-1}(t). \end{array}$$

$\boxed{\textbf{C.1.}}$ $f_0$ étant solution sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle linéaire homogène à cœfficients constants $\underline{y' + \lambda.y = 0}$ (*c.f.* **(12)**), pour tout $t \geq 0$, $f_0(t)$ est de la forme : $f_0(t) = k.e^{-\lambda.t}$. Et on détermine $k$ sachant que $f_0(0) = X(0,0) = 1$ (*c.f.* **règle (5)**).

**On trouve** :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(t) = e^{-\lambda.t}}.$$

$\boxed{\textbf{C.2.a.}}$ ***Vraisemblablement, c'est $g_0$ plutôt que $g_1$ qu'il s'agissait de déterminer ici. En effet, la détermination de $g_1$ relève logiquement du C.2.b..***

S'agissant de $g_0$, sa définition et le résultat du **C.1.** donnent immédiatement :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_0(t) = f_0(t).e^{\lambda.t} = 1}.$$

**C.2.b.** Pour tout $i$ non nul, *i.e.* pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, par définition, $g_i$ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall t \geq 0, \quad g_i'(t) = \left(f_i(t).e^{(i+1)\lambda.t}\right)' = f_i'(t).e^{(i+1)\lambda.t} + f_i(t).\left((i+1)\lambda\right).e^{(i+1)\lambda.t}.$$

En remplaçant $f_i'(t)$ par son expression donnée par (12), on peut poursuivre :

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0, \quad g_i'(t) &= \left[\lambda i.f_{i-1}(t) - \lambda(i+1).f_i(t)\right].e^{(i+1)\lambda.t} + f_i(t).\left((i+1)\lambda\right).e^{(i+1)\lambda.t}.\\ &= \lambda i.f_{i-1}(t).e^{(i+1)\lambda.t} + \left[-\lambda(i+1)+(i+1)\lambda\right].f_i(t).e^{(i+1)\lambda.t}\end{aligned}$$

Comme le crochet est nul, et que, par définition(*), $g_{i-1}(t) = f_{i-1}(t).e^{i.\lambda.t}$, on termine ainsi, en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle :

$$\forall t \geq 0, \quad \underline{g_i'(t)} = \lambda.i.f_{i-1}(t).e^{(i+1)\lambda.t} = \lambda.i.e^{\lambda.t}.f_{i-1}(t).e^{i.\lambda.t} = \underline{\lambda.i.e^{\lambda.t}.g_{i-1}(t)}.$$

◇ Quant à la valeur, pour $i > 0$, de $g_i(0)$, elle découle de la définition de $g_i$ et de la **règle (5)**, selon laquelle, si $i > 0$, $f_i(0) = X(0,0) = 0$. On trouve : $\underline{g_i(0) = 0}$.

**En conclusion** : $\boxed{\forall i > 0 (1 \leq i \leq n-1), \quad g_i'(t) = \lambda.i.e^{\lambda.t}.g_{i-1}(t), \text{ et } g_i(0) = 0}$.

**C.2.c.** En suivant docilement l'indication, on pose l'hypothèse de récurrence suivante, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ : $\quad (\mathcal{H}_i) \mid \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_i(t) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k.e^{k\lambda t}$.

- Au rang $i = 1$ : on sait de $g_1$, par le **C.2.b.** que, sur $\mathbb{R}_+$, $g_1'(t) = \lambda.e^{\lambda.t}.g_0(t)$. Or, sur $\mathbb{R}_+$, $g_0 = 1$ (*c.f.* **C.2.a.**), donc : $\mid \forall t \geq 0, \quad g_1'(t) = \lambda.e^{\lambda.t}.g_0(t) = \lambda.e^{\lambda.t}$.
  On en déduit que $g_1$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \longmapsto \lambda.e^{\lambda.t}$. Donc, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, telle que, pour tout $t \geq 0$, $g_1(t) = e^{\lambda.t} + c$.
  Comme on a montré que $g_1(0) = 0$ (**C.2.b.**), il vient que $c = -1$.
  D'autre part, la somme, dans l'égalité pour $(\mathcal{H}_1)$ se résume à la somme $(-1)^1 C_1^0.e^{0.\lambda t} + (-1)^{1-1} C_1^1.e^{1.\lambda t} = -1 + e^{\lambda t}$, donc on conclut que $\underline{(\mathcal{H}_1) \text{ est vraie}}$.
- Supposons $(\mathcal{H}_i)$ vraie à un rang $i \in [\![1, n-2]\!]$ : $g_{i+1}$, d'après **C.2.b.** (car ici $i+1 \in [\![1, n-1]\!]$ ), est telle que : $\forall t \geq 0$, $g_{i+1}'(t) = \lambda.(i+1).e^{\lambda.t}.g_i(t)$. En remplaçant $g_i(t)$ par son expression donnée par $(\mathcal{H}_i)$, supposée vraie, on obtient sur $\mathbb{R}_+$ :
  $$g_{i+1}'(t) = \lambda.(i+1).e^{\lambda.t}.\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k.e^{k\lambda t} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k.\lambda.(i+1).e^{(k+1)\lambda t}$$
  Puisqu'aussi $g_{i+1}(0) = 0$, on en déduit que $g_{i+1}$ est <u>la</u> primitive qui s'annule en 0 de la fonction au membre de droite. Donc, pour tout $t \geq 0$ :
  $$\begin{aligned} g_{i+1}(t) &= \int_0^t \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k.\lambda.(i+1).e^{(k+1)\lambda t}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k.\lambda.(i+1).\frac{e^{(k+1)\lambda t}}{(k+1)\lambda}\right]_0^t. \end{aligned}$$
  Or, $C_i^k.\frac{i+1}{k+1} = \frac{i!.(i+1)}{(k+1).k!(i-k)!} = \frac{(i+1)!}{(k+1)!.((i+1)-(k+1))!} = C_{i+1}^{k+1}$, donc on a encore, en simplifiant aussi par $\lambda$ la fraction dans le crochet :
  $$g_{i+1}(t) = \left[\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_{i+1}^{k+1}.e^{(k+1)\lambda t}\right]_0^t = \left[\sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} C_{i+1}^{k}.e^{k\lambda t}\right]_0^t.$$
  (on a effectué le changement d'indice $k' = k+1$ dans la somme)

(*) puisque $i \geq 1$, on vérifie que $i - 1 \geq 0$, donc $g_{i-1}$ est défini.

En calculant effectivement la différence des valeurs en $t$ et en 0 de la fonction entre crochet :

$$g_{i+1}(t) = \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} C_{i+1}^k . e^{k\lambda t} - \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} C_{i+1}^k .$$

Et, puisque la seconde somme se réécrit : $\sum_{k=1}^{i+1} C_{i+1}^k . 1^k . (-1)^{(i+1)-k}$, on y reconnaît le développement du binôme de l'expression (égale à 0) $(1+(-1))^{i+1}$, privé du terme de rang $k=0$, valant $(-1)^{i+1}$. Cette somme vaut donc $-(-1)^{i+1}$.
**Ainsi**, pour tout $t \geq 0$ : $\quad g_{i+1}(t) = \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{i+1-k} C_{i+1}^k . e^{k\lambda t} + (-1)^{i+1}$.

Le nombre $(-1)^{i+1}$ peut alors être intégré à la somme au titre de terme de rang 0, ce qui achève de montrer que $(\mathcal{H}_{i+1})$ est vraie.

**En conclusion**, $(\mathcal{H}_1)$ est vraie et si $(\mathcal{H}_i)$ est vraie pour $i$ compris entre 1 et $n-2$, alors $(\mathcal{H}_{i+1})$ est vraie, donc par le principe de récurrence, $(\mathcal{H}_i)$ est vraie pour tout $i$ compris entre 1 et $n-1$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_i(t) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k . e^{k\lambda t}.}$$

$\boxed{\text{C.3.}}$ ***C'est le moment de remarquer***, si on ne l'a pas fait précédemment, que l'expression obtenue de $g_i(t)$, elle-même, **grâce à la formule du binôme**, s'écrit :

$$g_i(t) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k . e^{k\lambda t} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \left(e^{\lambda t}\right)^k . (-1)^{i-k} = \left(e^{\lambda t} - 1\right)^i .$$

On a ainsi, en particulier, pour $t \geq 0$, $g_{n-1}(t) = \left(e^{\lambda t} - 1\right)^{n-1}$, et donc, par la définition de $g_{n-1}$, et par les propriétés de l'exponentielle et des fonctions puissances :

$$f_{n-1}(t) = e^{-n\lambda t} . g_{n-1}(t) = e^{-\lambda t} . e^{-(n-1)\lambda t} \left(e^{\lambda t} - 1\right)^{n-1} = e^{-\lambda t} . \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1} .$$

**C'est ainsi que pour** $f_n$, il vient, par les relations (12) :

$$\forall t \geq 0, \quad f_n'(t) = n\lambda . f_{n-1}(t) = n\lambda . e^{-\lambda t} . \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1} = \left[\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n\right]' .$$

D'où l'on déduit que sur $\mathbb{R}_+$, $f_n$ et $t \mapsto \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n$ sont deux primitives d'une même fonction, donc diffèrent d'une constante, que là encore la **règle (5)** permet de fixer. En effet, cette règle impose $f_n(0) = 0$, et donc la constante cherchée est nulle, puisque $\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n$ est nulle en 0.

**On en conclut que** : $\quad \boxed{\forall t \geq 0, \quad X(t,n) = f_n(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n}$.

◇ Équivalent de $1 - X(t,n)$ pour $t$ tendant vers l'infini :

Puisque $\lambda > 0$, $\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$, donc, pour étudier le comportement au voisinage de l'infini de $X(t,n)$, il est pertinent d'utiliser le $\mathrm{DL}_0$ $(1-x)^n = 1 - nx + x.\epsilon(x)$, où $\epsilon$ est une fonction de limite nulle en 0, pour y substituer $e^{-\lambda t}$ à $x$, et en tirer que :

$1 - X(t,n) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n = 1 - \left[1 - n.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}.\epsilon(e^{-\lambda t})\right] = n.e^{-\lambda t}.\left(1 + \frac{1}{n}.\epsilon(e^{-\lambda t})\right)$.

Puis : $\frac{1 - X(t,n)}{n.e^{-\lambda t}} = 1 + \frac{1}{n}.\epsilon(e^{-\lambda t}) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$. Ce qui établit que :

$$\boxed{1 - X(t,n) \sim_{t \to +\infty} n.e^{-\lambda t}.}$$

**Banque Agro 99**
**Épreuve C**

Étude d'une suite récurrente d'ordre 3 - Accélération de la convergence

Durée
3 h 00

# ÉPREUVE C

Durée 3 h

---

*L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.*

*Le but de ce problème est de mettre en évidence, dans un cas particulier, une méthode de calcul approché de la plus grande racine positive d'une équation algébrique, ainsi que d'estimer la qualité de cette approximation.*

*Les questions demandant une suite d'instructions rédigées en Pascal sont destinées à mettre en évidence le fonctionnement des algorithmes.* ***On ne demande pas de rédiger les parties déclaratives des variables ni les procédures d'entrées-sorties.***

## PARTIE I

On considère l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

**1.** Montrer qu'elle admet 3 racines réelles distinctes vérifiant :

$$-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$$

**2.** Justifier la relatiion : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, puis en déduire les inégalités : $|x_2| < |x_1| < |x_3|$

**3.** On considère l'ensembles E des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n$ entier naturel, la relation :

$$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

**3.a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

**3.b.** Soit $\phi$ l'application de E dans $\mathbb{R}^3$ qui à un élément $u$ de E associe $(u_0, u_1, u_2)$. Montrer que $\phi$ est un isomorphisme et en déduire que E est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

**3.c.** Montrer que les suites de termes généraux respectifs $x_1^n$, $x_2^n$ et $x_3^n$ sont des éléments de E.

**4.** On considère le système (S) :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1 \end{cases}$$

**4.a.** Montrer qu'il admet une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et déterminer $\lambda_3$. Vérifier en particulier qu'il est non nul.

**4.b.** Expliciter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en fonction de $(x_1, x_2, x_3)$.

**5.** On note $a$ l'unique suite élément de E telle que :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1$$

**5.a.** Montrer que la suite $a$ est croissante et que, pour tout $n$ supérieur ou égal à 2, $a_n$ est strictement positif.

**5.b.** Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que, pour tout $n$ entier naturel, on ait :

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$$

**5.c.** On pose, pour $n \geq 2$ :

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Montrer que la suite $b$ ainsi définie converge vers $x_3$.

**6. Application numérique**

**6.a.** Écrire une suite d'instructions rédigées en Pascal permettant de calculer $a_n$ et $b_n$ lorsque $n$ varie entre 2 et 100.

**6.b.** Donner les valeurs approchées de $b_2, \ldots, b_{10}$ fournies par la calculatrice.

## PARTIE II

Dans cette partie, on se propose d'estimer la rapidité de convergence de la suite $b$ et de l'accélérer.

### A. Une première estimation de la rapidité de convergence

On pose, pour tout $n$ entier naturel :

$$\varepsilon_n = b_n - x_3$$

**1.** Justifier, lorsque $n$ tend vers l'infini :

$$\varepsilon_n \sim (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n$$

**2.** En déduire l'existence d'une constante $K$ telle que, pour tout $n$ entier naturel, on ait :

$$|b_n - x_3| \leq K \times \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^n$$

### B. Utilisation des suites dominantes

On rappelle que si $u_n$ et $v_n$ sont les termes respectifs d'ordre $n$ de deux suites réelles $u$ et $v$, on dit que "$v$ domine $u$" s'il existe un indice $p$ et une constante $M$ tels que, pour tout $n \geq p$ :

$$|u_n| \leq M|v_n|$$

On notera : $u_n = O(v_n)$.

On s'intéressera plus particulièrement ici à des suites définies par : $v_n = \beta^n$, où $\beta$ est un réel strictement positif.

**1.** Dans cette question, on suppose que $\beta$ est un réel fixé strictement positif. On note $E(\beta)$ l'ensemble des suites réelles dominées par la suite de terme général $\beta^n$. Les résultats démontrés pourront être utilisés dans les questions ultérieures.

**1.a.** Montrer que $E(\beta)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

**1.b.** Prouver que, lorsque $\beta$ est strictement inférieur à 1, tout élément de $E(\beta)$ converge vers 0.

**1.c.** Montrer que $E(\beta)$ contient toutes les suites de terme général $\lambda^n$, avec : $0 < \lambda \leq \beta$.

**1.d.** Démontrer que si $u$ est élément de $E(\beta)$ et si $w$ est une suite dont tous les termes sont non nuls et qui converge vers une limite finie et non nulle, alors les suites de termes généraux respectifs $u_n w_n$ et $u_n/w_n$ sont des éléments de $E(\beta)$.

**2.a.** Montrer que l'on peut écrire :

$$\varepsilon_n = \frac{\left(\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n (x_1 - x_3)\right] + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n (x_2 - x_3)\right]\right)}{1 + \alpha_n}$$

où $\alpha_n$ est le terme général d'une suite qui converge vers 0 et que l'on précisera.

**2.b.** On pose :

$$\beta = \max\left\{\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2\right\}$$

Vérifier l'inégalité :

$$\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$$

Montrer que l'on peut écrire :

$$(1) \quad b_n = x_3 + \gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)$$

où on a posé :

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1 - x_3)$$

## C. Accélération de la convergence

Dans cette partie, on se propose d'utiliser la relation (1) pour trouver une suite qui converge vers $x_3$ plus rapidement que la suite $b$.

**1.** On pose, pour $n \geq 3$ :

$$c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}$$

Après avoir formé : $c_n - \frac{x_1}{x_3}$, justifier :

$$(2) \quad c_n = \frac{x_1}{x_3} + O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$$

**2.** On définit la suite $d$ par son terme général, pour $n \geq 3$ :

$$d_n = \frac{b_{n+1} - c_n b_n}{1 - c_n}$$

Montrer que l'on a :

$$(3) \quad d_n = x_3 + O(\beta^n)$$

On pourra pour cela considérer la quantité : $d_n - x_3$.

**3.** En quoi peut-on dire que "la convergence de la suite a été accélérée" ?

## D. Application numérique

**1.** Écrire une suite d'intructions rédigées en Pascal permettant de calculer $d_{50}$.

**2.** À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée de $d_3, \ldots, d_{10}$.

# *Corrigé*

## .PARTIE I.

**I.1** *Il convient de considérer la fonction polynômiale* $\varphi : x \mapsto x^3 - x^2 - 2x + 1$.
Avec $\varphi$ ainsi définie : $(\mathcal{E}) : \left(x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0\right) \iff \left(\varphi(x) = 0\right)$.
Les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont donc les zéros de la fonction $\phi$.

◇ Existence d'une racine comprise entre $-2$ et $1$ :
**D'après le cours,**
l'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment.
En appliquant ce théorème à $\varphi$, **continue sur** $\mathbb{R}$ (en tant que fonction polynômiale), il vient que : l'image par $\varphi$ du segment $[-2, -1]$ est un segment $[\alpha, \beta]$.
De plus, **les images** par $\varphi$ de $-2$ et de $-1$ appartiennent à $[\alpha, \beta]$, et valent respectivement $-7$ et $1$.
Ainsi, $-7 \in [\alpha, \beta]$ et $1 \in [\alpha, \beta]$, donc, **parce que** $[\alpha, \beta]$ **est un intervalle de** $\mathbb{R}$ :
$[-7, 1] \subset [\alpha, \beta]$, et par suite, $0 \in [\alpha, \beta]$, *i.e.* $0 \in \varphi\left([-2, -1]\right)$.
Par conséquent, $\varphi$ **s'annule au moins une fois** sur $[-2, -1]$. Et comme $\varphi(-2) \neq 0$, $\varphi(-1) \neq 0$, on peut préciser que $\varphi$ s'annule sur $]-2, -1[$, *i.e.* :
$\varphi$ admet au moins une racine $x_1$, élément de $]-2, -1[$.

◇ Par le même raisonnement(*), fondé par la continuité de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ :
puisqu'on vérifie que $\varphi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = -1 < 0$ :
$\varphi$ admet (au moins) une racine $x_2 \in \,]0, 1[$.
et en considérant que $\varphi(1) = -1 < 0$ et $\varphi(2) = 1 > 0$ :
$\varphi$ admet (au moins) une racine $x_3 \in \,]1, 2[$.
**Enfin**, $\varphi$ étant une fonction polynômiale de degré 3, $\varphi$ admet **au plus** trois zéros réels, donc sur $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$, il n'existe qu'une racine, et il n'en existe pas en dehors de ses intervalles ; on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{l'équation } \varphi(x) = 0, \textit{ i.e. } (\mathcal{E}) : x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ admet 3 solutions réelles distinctes, } x_1, x_2, x_3, \text{ telles que : } -2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2}.$$

**I.2.** *Il s'agit d'utiliser les relations* ***cœfficients-racines*** *pour les polynômes.*
$\varphi$ étant de degré 3, unitaire, avec trois racines réelles distinctes $x_1$, $x_2$, $x_3$, pour tout $x$ réel, $\varphi(x)$ s'écrit : $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
En développant et réduisant, l'expression, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3).x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).x - x_1x_2x_3.$$

et on peut **identifier les cœfficients** avec ceux de l'autre écriture de $\varphi(x)$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

Examinant le cœfficient du terme de degré 2, il vient : **(1)** $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 1}$.

(*) ou, **ce qui est équivalent** en invoquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, selon lequel : si $\phi$ est une fonction continue, sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, s'il existe $x_1, x_2 \in I$, tels que $x_1 < x_2$ et $\phi(x_1).\phi(x_2) < 0$, alors $\phi$ s'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$.
(ce théorème ne figure pas explicitement au programme).

◇ Compte-tenu des signes respectifs de $x_1$, $x_2$ et $x_3$, on a déjà : $|x_1| = -x_1$, $|x_2| = x_2$ et $|x_3| = x_3$. Donc, de $-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$, on tire que :

$$\textbf{(2)}\ \|\ 0 < |x_2| < 1 < |x_3| < 2, \quad \text{et} \quad \textbf{(3)}\ \|\ 1 < |x_1| < 2.$$

*Il ne reste donc plus qu'à* ***situer*** $|x_1|$ ***relativement à*** $|x_3|$, *dans l'intervalle* $]1, 2[$, *ce que l'on peut faire* grâce à la relation (3), qui s'écrit aussi : $-|x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$, *i.e.* $\|\ |x_3| - |x_1| = 1 - |x_2|$, d'où l'on tire, car $|x_2| < 1$ (*c.f.* **(2)**), que : $\|\ |x_3| > |x_1|$.
D'où la conclusion grâce aussi à (2) et (3) : $\boxed{|x_2| < |x_1| < |x_3|}$.

$\boxed{\textbf{I.3.a.}}$ ***i)*** E est <u>inclus dans l'espace vectoriel réel</u> des suites réelles, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Par ailleurs, pour tous $(u_n)_{n\geq 0}$, $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}$, $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ :

- la suite $(w_n)_{n\geq 0} = \lambda\,(u_n)_{n\geq 0} + \mu\,(v_n)_{n\geq 0}$, de terme général $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ vérifie, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} & w_{n+3} - w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n \\ &= (\lambda u_{n+3} + \mu v_{n+3}) - (\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) - 2(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + (\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda.(\underbrace{u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n}_{\text{parenthèse nulle car } (u_n)_{n\geq 0}\in \mathrm{E}}) + \mu.(\underbrace{v_{n+3} - v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n}_{\text{parenthèse nulle car } (u_n)_{n\geq 0}\in \mathrm{E}}) \end{aligned}$$

Donc, $\big(\forall\, n \in \mathbb{N},\quad w_{n+3} - w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0\big)$, *i.e.* $\underline{(w_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}}$.

On a donc montré que :

***ii)*** E est <u>stable par combinaisons linéaires</u>.

**En conclusion**, par ***i)*** et ***ii)***, il est établi que :

$\boxed{\text{E est un \textbf{sous-espace vectoriel} de l'espace vectoriel des suites réelles}}$.

$\boxed{\textbf{I.3.b.}}$ $\phi$ est un **isomorphisme** si et seulement si $\phi$ : $\mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire et bijective.

- <u>Linéarité de $\phi$</u> : pour tous $u = (u_n)_{n\geq 0}$, $v = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}$, $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$, on a, pour la suite $w = \lambda u + \mu v$, de terme général $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ :

$$\begin{aligned} \underline{\phi(w)} &= (w_0, w_1, w_2) = (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) \\ &= (\lambda u_0, \lambda u_1, \lambda u_2) + (\mu v_0, \mu v_1, \mu v_2) \\ &= \lambda.(u_0, u_1, u_2) + \mu.(v_0, v_1, v_2) = \underline{\lambda.\phi(u) + \mu.\phi(v)}. \end{aligned}$$

On vérifie donc que : $\underline{\phi(w) = \lambda.\phi(u) + \mu.\phi(v)}$

Ainsi : $\big(\forall\,(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \phi(w) = \lambda.\phi(u) + \mu.\phi(v)\big)$, *i.e.* $\boxed{\phi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}^3)}$.

- <u>Bijectivité de $\phi$</u> : *Bien que $\phi$ soit linéaire, on n'adopte pas la stratégie usuelle : démonstration de l'injectivité (* via $\ker\phi = \{0\}$*), puis de la surjectivité par le théorème du rang, car* ***on ne connaît pas*** *la dimension de E. Au contraire, il s'agit d'utiliser la surjectivité de $\phi$ pour en déduire* dim E. ***D'où la démonstration.***

**Par définition de la bijectivité**, $\phi$ : $\mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est bijective si et seulement si tout élément $(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ admet un antécédent <u>unique</u> par $\phi$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ :

* on définit par récurrence, une suite $u \in \mathrm{E}$, en posant $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_3 = c$, et en imposant que $u$ vérifie la **relation de récurrence linéaire d'ordre 3** :

$$\textbf{(4)}\ \|\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0,$$

**il découle de cette définition que** $\phi(u) = (u_0, u_1, u_2) = (a, b, c)$.
Ainsi, on a montré, **en le construisant**, que :

$\|$ il existe un antécédent, $u \in \mathrm{E}$, de $(a, b, c)$ par $\phi$.

$*$ de plus, **cet antécédent est unique**, car si $u$ est un antécédent de $(a,b,c)$ par $\phi$, alors $u_0$, $u_1$ et $u_2$ sont uniquement déterminés du fait qu'on a $\phi(u)=(u_0,u_1,u_2)=(a,b,c)$, et si on suppose que pour un entier $n$ $(n\geq 2)$, $u_0,\ldots,u_{n-1},u_n$ sont définis de façon unique, alors, parce que par définition $u\in \mathrm{E}$ et donc $u$ vérifie (4), $u_{n+1}$ est défini de façon unique par $u_{n+1}=u_n+2u_{n-1}-u_{n-2}$ (relation (4) pour $n-2\geq 0$ au lieu de $n\geq 0$).

**En conclusion**, on a montré, de façon directe, que l'application $\phi:\mathrm{E}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ est <u>bijective</u>, $\phi$ étant de plus <u>linéaire</u> : $\boxed{\phi \text{ est un } \textbf{isomorphisme} \text{ de E sur } \mathbb{R}^3}$.

◇ <u>Dimension de E</u> : **d'après le cours**, $\phi$ définissant un **isomorphisme** de E sur $\mathbb{R}^3$, si E ou $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, alors $\underline{\dim \mathrm{E}=\dim\mathbb{R}^3}$, comme $\dim R^3=3$ :

$$\boxed{\text{E est un espace vectoriel (réel) de dimension 3}}.$$

**I.3.c.** La démonstration étant commune aux trois suites, **considérons**, de façon générale, une **suite géométrique $w$ de raison $r\in\mathbb{R}$**.

- $w$ est une suite réelle, et pour tout $n\geq 0$ :

$$w_{n+3}-w_{n+2}-2w_{n+1}+w_n=r^{n+3}-r^{n+2}-2r^{n+1}+r^n=(\underline{r^3-r^2-2r+r}).r^n.$$

**Par conséquent**, si $r$ est une racine de l'équation $(\mathcal{E})$ : $x^3-x^2-2x+1=0$, *i.e.* si $r=x_1,x_2$ ou $x_3$, alors $w$ vérifie (4), et donc appartient à E.

Ainsi : $\boxed{\text{les suites de termes généraux respectifs } x_1^n,\ x_2^n \text{ et } x_3^n \text{ sont éléments de E}}$.

**I.4.a.** Par les **opérations usuelles sur les lignes**, on a pour le système $(S)$, d'inconnues $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$, la succession d'équivalences suivante(*):

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&=&0\\ x_1.\lambda_1&+&x_2.\lambda_2&+&x_3.\lambda_3&=&0\\ x_1^2.\lambda_1&+&x_2^2.\lambda_2&+&x_3^2.\lambda_3&=&1\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-x_1^2.L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-x_1.L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&=&0\\ x_1.\lambda_1&+&x_2.\lambda_2&+&x_3.\lambda_3&=&0\\ x_1^2.\lambda_1&+&x_2^2.\lambda_2&+&x_3^2.\lambda_3&=&1\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-x_1^2.L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-x_1.L_1}{\Longleftrightarrow}}\left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda_1\ +&&\lambda_2\ +&&\lambda_3=0\\ &&(x_2-x_1).\lambda_2&+&(x_3-x_1).\lambda_3=0\\ &&(x_2^2-x_1^2).\lambda_2&+&(x_3^2-x_1^2).\lambda_3=1\end{array}\right.$$

, puis, par la dernière opération, $\underline{L_3\leftarrow L_3-(x_1+x_2).L_2}$, on obtient que le sytème $(S)$ est équivalent à :

$$(S')\left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda_1\ +&&\lambda_2\ +&&\lambda_3=0\\ &&(x_2-x_1).\lambda_2\ +&&(x_3-x_1).\lambda_3=0\ ,\\ &&&+&\theta(x_1,x_2,x_3).\lambda_3=1\end{array}\right.$$

**où** : $\underline{\theta(x_1,x_2,x_3)}=(x_3^2-x_1^2)-(x_1+x_2)(x_3-x_1)$
$=(x_3+x_1)(x_3-x_1)-(x_1+x_2)(x_3-x_1)\underline{=(x_3-x_2)(x_3-x_1)}.$

Les racines $x_1$, $x_2$ et $x_3$ étant distinctes, $x_2-x_3\neq 0$ et $\theta(x_1,x_2,x_3)\neq 0$. Donc, le système **triangulaire** $(S')$ **a des pivots tous trois non nuls**. Par conséquent $(S')$, équivalent à $(S)$ est un système **de Cramer**, et par conséquent :

$$\boxed{\text{le système } (S) \text{ admet une solution unique } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}.$$

Cette solution est aussi l'unique solution du système **équivalent** $(S')$ et en examinant $L_3$ dans $(S')$ :

$$\boxed{\lambda_3=\frac{1}{\theta(x_1,x_2,x_3)}=\frac{1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\neq 0}.$$

(*) la résolution est exemplaire car $(S)$ est d'un type connu dit "système de **Van der Monde**".

$\boxed{\textbf{I.4.b.}}$ *On finit d'expliciter la solution* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *en* ***remontant*** *le système* $(S')$.
La seconde ligne, $L_2$, dans $(S')$, donne : $\left|\lambda_2 = -\frac{(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)}.\lambda_3 = -\frac{(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)}.\frac{1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\right.$,

donc : $\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}}$, et grâce à $L_1$ dans $(S')$ : $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}}$ (*).

$\boxed{\textbf{I.5.a.}}$ *Comme il est naturel, on examine la monotonie de a en examinant la différence* $a_{n+1}-a_n$*, pour* $n \geq 0$. **Il faut noter ici** que, par la relation de récurrence (4) satisfaite par $a$ (car $a \in$ E), on a, en changeant $n$ en $n-2$, pour $n \geq 2$, puis en isolant la différence $a_{n+1} - a_n$ : **(5)** $\forall n \geq 2, \quad \underline{a_{n+1} - a_n} = 2a_{n-1} - a_{n-2} = \underline{(a_{n-1} - a_{n-2})} + \underline{a_{n-1}}$.

***D'où l'idée de démontrer conjointement, par récurrence, les deux propriétés demandées.***

Ainsi, posons, pour $n \geq 2$, l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) : \begin{pmatrix} a \text{ est } \underline{\text{croissante et positive}} \text{ jusqu'au rang } n, \\ \text{et } \underline{\text{strictement positive}} \text{ du rang 2 au rang } n. \end{pmatrix}$$

- $(\mathcal{H}_2)$ est vraie (par simple examen des valeurs de $a_0$, $a_1$ et $a_2$).
- Si l'on suppose que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 2$ : alors, d'après (5), on a : $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = (a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-2}}$, où, puisque $n-2 \geq 0$, $a_{n-1} - a_{n-2} \geq 0$ et $a_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Donc : $\underline{a_{n+1} - a_n \geq 0}$.
  Comme aussi, par hypothèse de récurrence, $a_n > 0$, on a aussi : $\underline{a_{n+1} \geq a_n > 0}$.

Ainsi, il est établi que $(\mathcal{H}_2)$ est vraie, et, pour $n \geq 2$, $\big((\mathcal{H}_n) \text{ vraie}\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{H}_{n+1}) \text{ vraie}\big)$.
Donc, par le principe de récurrence, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{la suite } a \text{ est croissante, et : } \forall n \geq 2, \ \ a_n > 0}.$$

$\boxed{\textbf{I.5.b.}}$ *Le résultat demandé est en fait dû au fait que* ***les suites de terme général*** $\boldsymbol{x_1^n}$, $\boldsymbol{x_2^n}$ ***et*** $\boldsymbol{x_3^n}$ ***forment une base de*** **E**. *Mais, plus modestement, la suggestion de l'énoncé est de faire le lien entre les seconds membres du système* **(S)** *et les premières valeurs de a, en faisant jouer l'isomorphisme* $\phi$.

◇ **Par les règles de calcul dans** $\mathbb{R}^3$, un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système $(S)$ si et seulement si $\underline{\lambda_1.(1, x_1, x_1^2) + \lambda_2.(1, x_2, x_2^2) + \lambda_3.(1, x_3, x_3^2) = (0, 0, 1)}$.
Ce qui s'écrit encore :

$$\left|\lambda_1.\phi\left((x_1^n)_{n\geq 0}\right) + \lambda_2.\phi\left((x_2^n)_{n\geq 0}\right) + \lambda_3.\phi\left((x_3^n)_{n\geq 0}\right) = (0, 0, 1).\right.$$

En utilisant de plus la **linéarité de** $\phi$, et que : $(0, 0, 1) = \phi(a)$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ \text{solution de } (S) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \Big(\phi(\underbrace{\lambda_1.(x_1^n)_{n\geq 0} + \lambda_2.(x_2^n)_{n\geq 0} + \lambda_3.(x_3^n)_{n\geq 0}}_{=(\lambda_1.x_1^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n)_{n\geq 0}}) = \phi(a)\Big).$$

Et comme $\phi$ est **bijective**, donc injective, l'égalité à droite équivaut à l'égalité de la suite $a$ et de la suite de terme général $\lambda_1.x_1^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n$.
Ainsi :

$$\Big(\big((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ solution de } (S)\big) \Longleftrightarrow \Big(\forall n \geq 0 : \ \ a_n = \lambda_1.x_1^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n\Big).$$

---

(*) **Plus astucieusement** : puisque le système $(S)$ est invariant par permutation des entiers 1, 2 et 3, on peut affirmer que, si on reprend de façon littérale la démonstration utilisée pour montrer que $\lambda_3 = 1/\theta(x_1, x_2, x_3)$, en changeant systématiquement les indices 1 en 2, 2 en 3, et 3 en 1, donnera que : $\lambda_2 = 1/\theta(x_2, x_3, x_1)$. De même, en changeant $(1, 2, 3)$ en $(3, 1, 2)$, il vient $\lambda_1 = 1/\theta(x_3, x_1, x_2)$.

En reprenant la résolution de $(S)$ menée aux **I.4.a.** et **I.4.b.**, on en déduit que :

$\boxed{\text{il existe un unique triplet } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que pour tout } n \text{ entier naturel : } a_n = \lambda_1.x_1^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n, \text{ et ce triplet est le triplet déterminé en I.4.a. et I.4.b.}}$.

**I.5.c.** Par définition de la suite $b$ (licite car $a_n > 0$ pour $n \geq 2$), et en utilisant l'expression ci-dessus du terme général de $a$, on a, pour $n \geq 2$ :

$$\textbf{(6)} \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda_1.x_1^{n+1} + \lambda_2.x_2^{n+1} + \lambda_3.x_3^{n+1}}{\lambda_1.x_1^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n}.$$

*La détermination de la limite de $b$ est alors question de* ***comparaison des suites géométriques de raisons $x_1$, $x_2$ et $x_3$***(*).

◇ Par les **factorisations *ad hoc***, (licites car $x_3$ et $\lambda_3 > 0$), le quotient précédent, s'écrit, pour tout $n \geq 2$ :

$$\forall n \geq 2,\ b_n = \frac{x_3^{n+1}}{x_3^n}.\frac{\lambda_1.(x_1/x_3)^{n+1} + \lambda_2.(x_2/x_3)^{n+1} + \lambda_3}{\lambda_1.(x_1/x_3)^n + \lambda_2.(x_2/x_3)^n + \lambda_3} = x_3.\frac{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n}.$$

**Or**, d'après **I.2.**, $|x_1| < |x_2| < |x_3|$, donc $\left|\frac{x_1}{x_3}\right| < 1$ et $\left|\frac{x_1}{x_3}\right| < 1$, les suites géométriques de raison $\frac{x_1}{x_3}$ et $\frac{x_1}{x_3}$ tendent vers 0, et le quotient dans la dernière expression de $b_n$ tend vers 1. On peut alors conclure que : $\boxed{\text{la suite } b \text{ converge vers } x_3}$.

**I.6.a** *Comme toujours dans les constructions d'algorithmes, votre guide doit être de réaliser le plus d'**économies de temps de calcul**. Typiquement, ici, il ne faut pas calculer chaque $a_n$ directement car le calcul de $\lambda_1^n$ nécessite $n$ opérations, et donc celui de $a_n = \lambda_1.x^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n$ en nécessite lui $3.n + 5$ (trois fois $n$ opérations pour les puissances, trois multiplications par les $\lambda_i$ et deux additions).* ***En revanche***, *le calcul de $a_n$ par $a_n = a_{n-1} + 2 \times a_{n-2} - a_{n-3}$ en nécessite 3 !.*

◇ Programme de calcul de $a_n$ et $b_n$ $(2 \leq n \leq 100)$ :

*L'énoncé n'est pas très précis concernant la destination du programme : souhaite-t-on **afficher** ou **stocker** les valeurs calculées ?* Dans la première éventualité, on définira cinq variables jouant le rôle de $b_n$, $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$ et $a_{n-3}$, dans le second, on utilisera deux tableaux de 100 cases pour stocker les valeurs $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ et $b_0, b_1, \ldots, b_{100}$. On adoptera ici, la **première méthode** (réservant l'autre pour le **D.1.**). En ce cas, puisque la suite $a$ est définie par une relation de récurrence **d'ordre 3**, il faudra **garder** en permanence la **mémoire des trois dernières valeur de la suite** (c'est le rôle des variables $u$, $v$, $w$).

* **Variable $n$ :** variable entière correspondant au rang du terme calculé.
* **Variable $a$ :** variable entière égale à $a_{n+1}$ (il est facile de montrer par récurrence que $a$ est à valeurs entières, et on sait que $a$ est positive)
* **Variables $u, v, w$ :** variables entières égales respectivement à $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$.
* **Variable $b$ :** variable réelle égale à $b_n$.

Dans cette méthode, on prêtera la plus grande attention à la réaffectation aux variables $u, v$ et $w$ des valeurs $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$. En effet, au départ d'une exécution des instructions de la boucle **for**, $(u, v, w) = (a_n, a_{n-1}, a_{n-2})$, où $n$ est égal à la valeur actuelle du compteur de la boucle. En fin de boucle, on donne à $w$ la valeur de $v$, de sorte que $w$ vaut alors $a_{n-1}$ et non plus $a_{n-2}$, puis on donne à $v$ la valeur de $u$ (encore égal à $a_n$), enfin par l'instruction "$u := a$", on donne à $u$ la valeur de $a_{n+1}$. Ainsi, lorsque la boucle se termine : $(u, v, w) = (a_{n+1}, a_n, a_n)$, de sorte que,

(*) Au fond : $\lim_{n\to\infty} b_n = x_3$ car de $|x_1| < |x_2| < |x_3|$, on tire que : $x_1^n$, $x_2^n = o(x_3^n)$.

au départ de la boucle suivante, on a bien de nouveau, ($n$ ayant augmenté de 1), $(u, v, w) = (a_n, a_{n-1}, a_{n-2})$. Mais **l'ordre des réaffectations est crucial**, car si l'on programme en fin de boucle, par exemple "$u := a$ ; $v := u$ ; $w := v$", au lieu de "$w := v$ ; $v := u$ ; $u := a$", alors, au départ de la boucle suivante on aura, $n$ ayant augmenté de 1, $(u, v, w) = (a_n, a_n, a_n)$ et de gros ennuis !

**Voici, ce qu'il est possible de proposer** (si on ne souhaite qu'**afficher** les valeurs de la suite) :

(Programme affichant successivement les valeurs $a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, a_{200}, b_{200}$)

```
program Cent_premieres_valeurs;
var a, u, v, w, n : integer;
var b : real;
begin
  u := 1; v := 0; w := 0; {initialisation : u = a2, v = a1, w = a0}
  for n := 2 to 200 do begin
    writeln( 'Valeur de a(', n, ') : ', u ) ;
    {Affiche la valeur de an, a2 à la première exécution}
    a := u + 2 * v - w; {Calcul de an+1 ; à la première exécution, on calcule a3}
    writeln( 'Valeur de b(', n, ') : ', a/u ) ;
    {Affiche la valeur de bn, b2 à la première exécution}
    w := v; v := u; u := a;
    {réaffectations : w devient an-1, v ← an et u ← an+1. Attention à l'ordre}
  end ;
end ;
```

**I.6.b.** Voici, à la précision $10^{-4}$, les valeurs fournies par la calculatrice, pour $b_n$ $(2 \leq n \leq 10)$ :

| | | |
|---|---|---|
| $b_2 = 1$ | $b_3 = 3$ | $b_4 = 1,3333$ |
| $b_5 = 2,2500$ | $b_6 = 1,5556$ | $b_7 = 2,0000$ |
| $b_8 = 1,6786$ | $b_9 = 1,8936$ | $b_{10} = 1,7416$ |

## .PARTIE II.

**A.1.** Pour tout $n \geq 2$, en reprenant l'expression (6) :

$$\boldsymbol{b_n - x_3} = \frac{\lambda_1.x_1^{n+1}+\lambda_2.x_2^{n+1}+\lambda_3.x_3^{n+1}}{\lambda_1.x_1^n+\lambda_2.x_2^n+\lambda_3.x_3^n} - x_3$$

$$= \frac{\lambda_1.(x_1^{n+1}-x_1^n.x_3)+\lambda_2.(x_2^{n+1}-x_2^n.x_3)+\lambda_3.(x_3^{n+1}-x_3^n.x_3)}{\lambda_1.x_1^n+\lambda_2.x_2^n+\lambda_3.x_3^n} = \frac{\lambda_1.(x_1-x_3).x_1^n+\lambda_2.(x_2-x_3).x_2^n}{\lambda_1.x_1^n+\lambda_2.x_2^n+\lambda_3.x_3^n}.$$

**Au voisinage de** $+\infty$, parce que $|x_2| < |x_1|$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_2^n}{x_3^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n = 0$, et donc : $\underline{x_2^n = \mathrm{o}(x_1^n)}$, et de même, parce que $|x_2| < |x_1| < |x_3|$, $x_1^n,\ x_2^n = \mathrm{o}(x_3^n)$.

Ces relations de domination permettent de donner un **équivalent pour le numérateur et le dénominateur de** $\varepsilon_n = b_n - x_3$.

En reprenant l'expression ci-dessus :

$$\textbf{(7)}\quad \varepsilon_n = b_n - x_3 = \frac{\lambda_1.(x_1 - x_3).x_1^n + \lambda_2.(x_2 - x_3).x_2^n}{\lambda_1.x_1^n + \lambda_2.x_2^n + \lambda_3.x_3^n},\ i.e.$$

$$\varepsilon_n = b_n - x_3 = \frac{\lambda_1.(x_1 - x_3).\mathrm{o}(x_3^n) + \lambda_2.(x_2 - x_3).x_2^n}{\lambda_1.\mathrm{o}(x_3^n) + \lambda_2.\mathrm{o}(x_3^n) + \lambda_3.x_3^n}.$$

On poursuit alors en **grâce aux opérations usuelles** suivantes sur les petits "o" :

pour $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$, trois suites réelles, $\alpha$, $\beta$ deux réels, on a, au voisinage de l'infini pour $n$ :

*i)* si $v_n = o(u_n)$, et $w_n = o(u_n)$, alors : $\alpha v_n = o(u_n)$, $\alpha v_n + \beta w_n = o(u_n)$

*ii)* si $\alpha \neq 0$, $\alpha.u_n + o(u_n) \sim_{+\infty} \alpha.u_n$.

Il vient, **par *i)*** :
$$\varepsilon_n = b_n - x_3 = \frac{\lambda_2.(x_2 - x_3).x_2^n + o(x_2^n)}{\lambda_3.x_3^n + o(x_3^n)},$$
puis, **par *ii)***, sachant que $\lambda_2(x_2 - x_3) \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ :
$$\varepsilon_n \sim_{+\infty} \frac{x_2^n}{x_3^n}.\frac{\lambda_2.(x_2 - x_3)}{\lambda_3}.$$
Ce qui est le résultat attendu :
$$\boxed{\varepsilon_n = b_n - x_3 \sim_{+\infty} \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n.\frac{\lambda_2.(x_2-x_3)}{\lambda_3}}.$$

$\boxed{\textbf{A.2.}}$ Rappelons que, **d'après la définition du cours** de l'équivalence de deux suites :
$$\left(\varepsilon_n \sim \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n.\frac{\lambda_2.(x_2-x_3)}{\lambda_3}\right) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{il existe une suite } (\rho_n), \text{ telle que : } \rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ \text{et : } \textbf{(8)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n.\frac{\lambda_2.(x_2-x_3)}{\lambda_3}.(1+\rho_n) \end{pmatrix}.$$
D'après **A.1.**, il existe donc une telle suite $(\rho_n)$, et parce qu'elle converge vers 0, la suite $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est **bornée**.

Par suite, la suite de terme général $\frac{\lambda_2.(x_2-x_3)}{\lambda_3}.(1+\rho_n)$ est elle aussi bornée, et donc **majorée en valeur absolue par un réel $K \geq$ o**, de sorte que, de (8), qui donne : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ |\varepsilon_n| = \left|\frac{x_2}{x_3}\right|^n.\left|\frac{\lambda_2.(x_2-x_3)}{\lambda_3}.(1+\rho_n)\right|\right)$, on déduit le résultat attendu :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |\varepsilon_n| \leq K.\left|\frac{x_2}{x_3}\right|^n,\ i.e.\ |b_n - x_3| \leq K.\left|\frac{x_2}{x_3}\right|^n}.$$

$\boxed{\textbf{B.1.a.}}$ ***i)*** Par définition, les éléments de $\mathrm{E}(\beta)$ sont des suites réelles, donc $\mathrm{E}(\beta)$ est <u>inclus dans l'espace vectoriel réel</u> des suites réelles, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ : $\mathrm{E}(\beta) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Par ailleurs, pour tous $u$, $v \in \mathrm{E}(\beta)$, $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ :

- puisque $u$ et $v$ appartiennent à $\mathrm{E}(\beta)$, il existe $p_1$ et $p_2$, deux indices, $M_1$ et $M_2$, deux constantes réelles positives, tels que :
$$\forall n \geq p_1,\ |u_n| \leq M_1.|\beta^n|, \qquad \forall n \geq p_2,\ |v_n| \leq M_2.|\beta^n|.$$
et donc, puisqu'aussi $\beta > 0$ par hypothèse, en posant $\boldsymbol{p = \max(p_1, p_2)}$ :
$$\forall n \geq p,\quad |u_n| \leq M_1.\beta^n,\quad \text{et :}\quad |v_n| \leq M_2.\beta^n.$$
- par suite, pour la suite $w = \lambda.u + \mu.v$, de terme général $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$, on a, par application de l'**inégalité triangulaire** :
$$\forall n \geq \boldsymbol{p},\quad |w_n| \leq |\lambda|.|u_n| + |\mu|.|v_n| \leq |\lambda|.M_1.\beta^n + |\mu|.M_2.\beta^n.$$

Donc, on montre que, pour la suite $w = \lambda.u+\mu.v$, il existe un indice $p$ ( $= \max(p_1,p_2)$ ) et une constante $M$ ($M = |\lambda|.M_1.\beta^n + |\mu|.M_2$), tels que : <u>$\forall n \geq p,\quad |w_n| \leq M.\beta^n$</u>.

On a donc montré que :

***ii)*** E est <u>stable par combinaisons linéaires</u>.

**En conclusion**, par ***i)*** et ***ii)***, il est établi que :

$\boxed{\mathrm{E}(\beta) \text{ est un \textbf{sous-espace vectoriel} de l'espace vectoriel des suites réelles}}$.

$\boxed{\textbf{B.1.b.}}$ Pour toute suite $u = (u_n) \in \mathrm{E}(\beta)$, on a, pour une constante $M \geq 0$, à partir d'un certain rang $p$ : $0 \leq |u_n| \leq M.\beta^n$, et l'on sait que si $0 \leq \beta < 1$, alors $\beta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc, par le **théorème d'encadrement** : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. **D'où le résultat** :

$\boxed{\text{si } \beta < 1, \text{ alors toutes les suites élément de } \mathrm{E}(\beta) \text{ convergent vers } 0}$.

**B.1.c.** Considérons une suite géométrique $u$ de raison $\lambda$, de premier terme 1, avec $\lambda$ tel que $0 < \lambda \leq \beta$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda^n$, et comme $0 \leq \lambda \leq \beta$ : $|u_n| = \lambda^n \leq \beta^n$. Donc, en prenant $p = 0$ et $M = 1$, on constate que $u$ appartient à $\mathrm{E}(\beta)$.
On conclut donc que : $\boxed{\text{si } (\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda^n), \text{ avec } 0 < \lambda \leq \beta, \text{ alors } (u_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}(\beta)}$.

**B.1.d.** Pour deux suites $u$ et $w$ définies comme dans l'énoncé, il existe, pour $u$, puisque $u \in \mathrm{E}(\beta)$, un indice $p$ et une constante $M$, tels que : $\forall n \geq p,\ |u_n| \leq M.\beta^n$.
**Par conséquent**, la division par $w_n$ étant licite car on suppose que $w_n \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) :

$$\textbf{(9)}\quad \forall n \geq p,\ |u_n w_n| \leq M.\beta^n.|w_n|, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_n}{w_n}\right| \leq M.\frac{\beta^n}{|w_n|}.$$

On peut alors invoquer que, **par définition**, l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} w_n = l$ ($l \in \mathbb{R}_+^*$) se traduit par :

$$\textbf{(10)}\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0, \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\quad |w_n - l| \leq \varepsilon,\quad i.e.\quad l - \varepsilon \leq w_n \leq l + \varepsilon.$$

Et l'on tire de (10) (***la méthode est usuelle***), en prenant $\varepsilon = l/2 > 0$ (ou tout autre valeur assurant que $l - \varepsilon > 0$) que :

il existe $n_0 \geq 0$ tel que : $\forall n \geq n_0,\quad l - \frac{l}{2} \leq w_n \leq l + \frac{l}{2},\quad i.e.\quad \frac{l}{2} \leq w_n \leq \frac{3l}{2}$.

**Ainsi**, pour tout $n \geq n_0$, on a, **d'une part** : $w_n \geq \frac{l}{2} > 0$ (en rappelant que $l > 0$ par hypothèse), d'où l'on tire que $0 \leq \frac{1}{w_n} \leq \frac{2}{l}$, et **d'autre part** : $0 \leq w_n \leq \frac{3l}{2}$.
Ces deux dernières majorations permettent de donner à (9) le prolongement suivant :

$$\textbf{(11)}\quad \forall n \geq \max(p, n_0),\ |u_n w_n| \leq \frac{3lM}{2}.\beta^n, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_n}{w_n}\right| \leq \frac{2M}{l}.\beta^n.$$

**Ce qui établit que les suites $uv$ et $u/v$ sont éléments de** $\mathrm{E}(\beta)$, en prenant, si on veut coller à définition de l'appartenance à $\mathrm{E}(\beta)$, pour $uv$ l'indice $p' = \max(p, n_0)$ et la constante $M' = (3Ml)/2$, et pour $u/v$, $p'' = p'$ et $M'' = (2M)/l$.
On conclut donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour toute suite } u \in \mathrm{E}(\beta), \text{ et toute suite } w \text{ convergeant vers une limite } l \in \mathbb{R}_+^* \\ \text{sans qu'aucun de ses termes soit nul : } \quad u.v \in \mathrm{E}(\beta), \quad \text{et} \quad u/v \in \mathrm{E}(\beta)\end{array}}.$$

**B.2.a.** En reprenant l'expression (7) (voir **A.1.**) de $\varepsilon_n$, et en y divisant numérateur et dénominateur par $\lambda_3.x_3^n \neq 0$, il vient :

$$\varepsilon_n = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}.(x_1 - x_3).\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.(x_2 - x_3).\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n}{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n + 1}.$$

Donc, **en posant**, pour tout $n \geq 0$ : $\boxed{\alpha_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n}$.

on peut vérifier que la suite de terme général est une combinaison linéaire de suites géométriques de limite nulle (car $|x_1/x_3| < 1$ et $|x_1/x_3| < 1$), et donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \varepsilon_n = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n.(x_1 - x_3) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n.(x_2 - x_3)}{1 + \alpha_n}, \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0}.$$

$\boxed{\textbf{B.2.b.}}$ *Faut-il répéter que l'on tire de* ***I.2.*** *que :* $|x_2| < |x_1|$, $\left|\frac{x_1}{x_3}\right| < 1$ *et* $\left|\frac{x_2}{x_3}\right| < 1$ *?*
Toujours est-il qu'il s'ensuit :

$$\left|\frac{x_2}{x_3}\right| = \frac{|x_2|}{|x_3|} < \frac{|x_1|}{|x_3|} = \left|\frac{x_1}{x_3}\right| \; ; \; \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_2}{x_3}\right| . \left|\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right| \text{ et } \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2 = \left|\frac{x_1}{x_3}\right| . \left|\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right| .$$

Et donc :

$$\boxed{\beta = \max\left\{\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2\right\} < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|}.$$

◇ Le résultat proposé (1) peut aussi être compris comme un résultat sur le comportement de $\varepsilon_n = b_3 - x_3$ au voisinage de $+\infty$ ($\varepsilon_n = \gamma(x_1/x_3)^n + O(\beta^n)$), aussi reprend-on la dernière écriture de $\varepsilon_n$ ($n \in \mathbb{N}$) obtenue au **B.2.a.**, où $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, en la décomposant en une somme pour se rapprocher du résultat :

$$\textbf{(12)} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{1+\alpha_n} . \frac{\lambda_1}{\lambda_3} . \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n . (x_1 - x_3) + \frac{1}{1+\alpha_n} . \frac{\lambda_2}{\lambda_3} . \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n . (x_2 - x_3).$$

Il convient alors d'***observer l'expression*** et de remarquer que :

- pour le second terme de la somme dans (12) :

  puisque pour la valeur choisie de $\beta$, $\lambda = |x_2/x_3| < \beta$, d'après **B.1.c.** :

  | la suite $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ (avec $\lambda = |x_2/x_3|$) est élément de $\mathrm{E}(\beta)$.

  **Or,** de **par la définition de la relation "$O$"**, la condition "$|u_n| \leq M\,|v_n|$" portant sur la suite $(|u_n|)$, il est clair que, pour tous $(u_n)$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

  $$\left( (u_n = O(v_n)) \iff ( |u_n| = O(v_n) ) \right).$$

  **Donc**, on a aussi : $\left(\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n\right)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}(\beta)$, et comme $\mathrm{E}(\beta)$ est un *s.e.v.* de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

  | la suite $\mu$, de terme général $\mu_n = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} . \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n . (x_2 - x_3)$ est élément de $\beta$.

  Enfin, parce qu'aussi la suite $w$ de terme général $w_n = 1/(1+\alpha_n)$ converge vers $l = 1 \neq 0$ et ne s'annule pas (on vérifie que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$), il vient en utilisant **B.1.d.** que :

  | la suite $\mu.w$, de terme général $\frac{1}{1+\alpha_n} . \frac{\lambda_2}{\lambda_3} . \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n . (x_2 - x_3)$ appartient à $\mathrm{E}(\beta)$,

  *i.e.*

  $$\textbf{(13)} \quad \frac{1}{1+\alpha_n} . \frac{\lambda_2}{\lambda_3} . \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n . (x_2 - x_3) = O(\beta^n).$$

- pour le premier terme de la somme dans (13)(*):

  **En posant** $\gamma = (x_1 - x_3) . \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, ce premier terme s'écrit : **(14)** | $\gamma . \frac{1}{1+\alpha_n} . \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n$.

  Puisque $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, on peut substituer $\alpha_n$ à $x$ dans le DL(0) (DL en 0) : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x.\tilde{\varepsilon}(x)$, où $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et on obtient, en reprenant la définition de $\alpha_n$ : $\frac{1}{1+\alpha_n} = 1 - \alpha_n + \alpha_n.\tilde{\varepsilon}(\alpha_n)$ ce qui donne ensuite pour (14) :

  $$\textbf{(15)} \quad \gamma . \frac{1}{1+\alpha_n} . \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = \gamma \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n - \gamma . \alpha_n . \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n . (1 + \tilde{\varepsilon}(\alpha_n)) \text{ où } \tilde{\varepsilon}(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

---

(*) Comme $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, on peut noter déjà que : $\gamma . \frac{1}{1+\alpha_n} . (x_1/x_3)^n \sim_{+\infty} \gamma . (x_1/x_3)^n$, *i.e.* $\gamma . \frac{1}{1+\alpha_n} . (x_1/x_3)^n = \gamma . (x_1/x_3)^n + \gamma . (x_1/x_3)^n . \theta_n$, avec $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$, et l'on peut en déduire que : $\gamma . \frac{1}{1+\alpha_n} . (x_1/x_3)^n = \gamma . (x_1/x_3)^n + O\left((x_1/x_3)^n\right)$ (car $\theta_n$ est borné). Mais cela est insuffisant car pour obtenir le résultat attendu (1), il faudrait pouvoir ramener $O\left((x_1/x_3)^n\right)$ à un $O(\beta^n)$ ce qui ne se peut car $x_1/x_3 > \beta$. En conséquence, il faut être plus précis sur le comportement de $1/(1+\alpha_n)$, et ne pas se contenter de ce que $\lim_{n\to\infty} 1/(1+\alpha_n) = 1$

**Ainsi**, par (13) et (15), (12) donne, en changeant $\varepsilon_n$ en $b_n - x_3$ :

$$\textbf{(16)}\quad b_n = x_3 + \gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n - \gamma.\alpha_n.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n)) + O(\beta^n).$$

Reste à **montrer que** la suite $t$ de terme général $t_n = -\gamma.\alpha_n.(x_1/x_3)^n.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n))$, **est dominée par la suite** $(\beta^n)$, *i.e.* $t_n = O(\beta^n)$ ou encore $t \in \mathrm{E}(\beta)$.

• Puisque $\lim_{n\to\infty} \tilde{\varepsilon}(\alpha_n) = 0$, **la suite de terme général** $-\gamma.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n))$ **est bornée**, donc, il existe $n_0 \geq 0$, et $M_0 \geq 0$ tels que : $\quad \forall n \geq n_0, \quad |-\gamma.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n))| \leq M_0$.

On a alors, pour $n \geq n_0$ :

$$\textbf{(17)}\quad \left|-\gamma.\alpha_n.\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^n.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n))\right| \leq M_0.\left|\alpha_n.\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^n\right|$$

• En reprenant la définition de $\alpha_n$ (*c.f.* **B.2.a.**), on a ensuite :

$$\textbf{(18)}\quad \alpha_n.\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^n = \left[\tfrac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^n + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\tfrac{x_2}{x_3}\right)^n\right].\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^n = \tfrac{\lambda_1}{\lambda_3}.\left(\tfrac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_3}.\left(\tfrac{x_2 x_1}{x_3^3}\right)^n.$$

Or, **par définition de** $\beta$ : $\frac{x_1^2}{x_3^2}$, $\frac{x_2x_1}{x_3^3}$ sont inférieurs ou égaux à $\beta$, en valeur absolue, donc, par les propriétés de la valeur absolue, en particulier l'inégalité triangulaire, la dernière égalité dans (18) donne :

$$\textbf{(19)}\quad \left|\alpha_n.\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^n\right| \leq \left|\tfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|.\left|\tfrac{x_1^2}{x_3^2}\right|^n + \left|\tfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\right|.\left|\tfrac{x_2x_1}{x_3^3}\right|^n \leq \left[\left|\tfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right| + \left|\tfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\right|\right].\beta^n$$

**En conclusion**, de **(17)** et **(19)**, on tire que, pour $p = n_0$ et $M = M_0.\left[\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right| + \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right|\right]$, on a :

$$\forall n \geq p, \quad |-\gamma.\alpha_n.(x_1/x_3)^n.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n))| \leq M.\beta^n.$$

On a donc montré que : $t_n = O(\beta^n)$.

Ainsi, dans l'égalité (16), $-\gamma.\alpha_n.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n.(1+\tilde{\varepsilon}(\alpha_n)) + O(\beta^n)$, est la somme de deux suites dominées par $(\beta^n)$ (*i.e.* deux suites de $\mathrm{E}(\beta)$). Parce que $\mathrm{E}(\beta)$ est un **espace vectoriel**, cette somme est aussi élément de $\mathrm{E}(\beta)$, et donc on peut conclure :

$$(\underline{1})\quad \boxed{b_n = x_3 + \gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)}.$$

$\boxed{\textbf{C.1.}}$ *On va reprendre* ($\underline{1}$) *pour exprimer* $b_{n+1}$, $b_n$ *et* $b_{n-1}$ *dans le quotient* $c_n$ *pour* $n \geq 3$. *Pour cela, il faut examiner ce que représente le terme "*$O(\beta^n)$*" dans* ($\underline{1}$), *quand on remplace* $n$ *par* $n+1$ *ou* $n-1$.

◇ **Dans** ($\underline{1}$), **le terme "$O(\beta^n)$"**, représente, par définition le terme général d'une suite (ici la suite $t$, *c.f.* **B.2.b.**) telle qu'il existe un indice $p$ et une constante $M$, tels que :

$$\textbf{(20)}\quad \forall n \geq p, \quad |t_n| \leq M.\beta^n,$$

Par suite, en effectuant les changements d'indices $n' = n-1$, et $n' = n+1$, on deduit de (20), dans cet ordre, les deux résultats suivants :

$$\forall n \geq \max(p-1, 0)^{(*)}, \quad |t_{n+1}| \leq M.\beta^{n+1}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq p+1, \quad |t_{n-1}| \leq M.\beta^{n-1}.$$

**Une division par $\beta$ étant licite** car $\beta > 0$ (en tant que maximum de trois nombres strictement positifs, *c.f.* **définition de** $\beta$), on annoncer **de façon équivalente** que :

$$\forall n \geq \max(p, 1), \quad |t_{n+1}| \leq (M\beta).\beta^n, \quad \text{et} \quad \forall n \geq p+1, \quad |t_{n-1}| \leq (M/\beta).\beta^n.$$

(*) on prend $n \geq \max(p-1, 0)$ et non $n \geq p-1$, au cas où $p$ serait égal à 0.

Considérant la définition de $E(\beta)$, on a donc montré d'une façon générale que :

si $(t_n)_{n\geq 0}$ est dominée par $(\beta^n)_{n\geq 0}$, alors les suites de termes généraux respectifs $t_{n-1}$ et $t_{n+1}$ sont aussi du type $\boldsymbol{O(\beta^n)}$, *i.e.* :
$$\left(t_n = O(\beta^n)\right) \implies \left(t_{n-1} = O(\beta^n) \text{ et } t_{n+1} = O(\beta^n)\right).$$

**En conséquence**, pour la suite $(b_n)$ définie au **I.5.c.**, en vertu de (1) et par ce dernier résultat, pour $n \geq 3$(*):
$$b_{n-1} = x_3 + \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n), \text{ et } b_{n+1} = x_3 + \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^n),$$
ce qui donne :
$$b_{n+1} - b_n = \left[x_3 + \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^n)\right] - \left[x_3 + \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)\right].$$

Puis, parce $E(\beta)$ est un espace vectoriel, une différence de "$O(\beta^n)$" est encore du type $O(\beta^n)$, donc, en développant :
$$b_{n+1} - b_n = \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} - \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n) = \gamma\left(\tfrac{x_1}{x_3} - 1\right).\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)$$
On aboutit donc enfin à :
$$b_{n+1} - b_n = \gamma.\tfrac{x_1 - x_3}{x_3}.\left(\tfrac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n).$$

Un calcul analogue donnant : $b_n - b_{n-1} = \gamma.\frac{x_1-x_3}{x_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)$, on peut écrire, pour $c_n$ $(n \geq 3)$ :
$$c_n = \frac{b_{n+1}-b_n}{b_n - b_{n-1}} = \frac{\gamma.\frac{x_1-x_3}{x_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)}{\gamma.\frac{x_1-x_3}{x_3}.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} = \frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + \frac{x_3}{\gamma.(x_1-x_3)}.O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + \frac{x_3}{\gamma.(x_1-x_3)}.O(\beta^n)}$$
puis, comme, encore par la **structure d'espace vectoriel de** $E(\beta)$ (*c.f.* **B.1.a.**), pour toute constante $K \in \mathbb{R}$, $K.O(\beta^n) = O(\beta^n)$, on peut encore simplifier et écrire :

$$\forall n \geq 3, \quad c_n = \frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)}.$$ On peut alors former la différence $\boldsymbol{c_n - \frac{x_1}{x_3}}$ :

$$c_n - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n} + O(\beta^n) - \frac{x_1}{x_3}.\left[\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)\right]}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} = \frac{O(\beta^n) - \frac{x_1}{x_3}.O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)}.$$

**Or,** $O(\beta^n) - \frac{x_1}{x_3}.O(\beta^n) = O(\beta^n)$ ($E(\beta)$ **est un** $\boldsymbol{e.v.}$), donc : $c_n - \frac{x_1}{x_3} = \frac{O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)}$.

Reste alors à **montrer que** : $\frac{O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} = O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^{n}\right]$.

Commençons par faire apparaître le quotient $x_3/x_1$ par une factorisation du dénominateur par $(x_1/x_3)^{n-1}$ :
$$\textbf{(21)} \qquad \frac{O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{n-1}.\frac{O(\beta^n)}{1 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{n-1}.O(\beta^n)}$$

On peut alors terminer en deux temps, montrant d'abord que $\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{n-1}.O(\beta^n) = O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^{n}\right]$.

- pour trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ telles que : $v_n = O(u_n)$, on a, par définition, qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$, tels que : $\forall n \geq p, \quad |v_n| \leq M.u_n$.

(*) $n \geq 3$ pour que $b_{n-1}$ soit défini.

**Par suite**, pour tout $n \geq p$, on a encore : $|w_n.v_n| \leq M.(w_n.u_n)$, ce qui est l'exacte traduction de ce que : $w_n.v_n = O(w_n.u_n)$.

**On a donc montré que**, pour toutes suites réelles $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ :

$$\textbf{(22)}\ \big(v_n = O(u_n)\big) \implies \big(w_n.v_n = O(w_n.u_n)\big).$$

On en déduit ici (avec aussi le fait que $K.O(\beta^n) = O(\beta^n)$) :

$$\underline{\left(\tfrac{x_3}{x_1}\right)^{n-1}.O(\beta^n)} = \tfrac{x_3}{x_1}.\left(\tfrac{x_3}{x_1}\right)^{n}.O(\beta^n) = \tfrac{x_3}{x_1}.O\left[\left(\tfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right] = \underline{O\left[\left(\tfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}. \quad (C.Q.F.D.)$$

Ainsi, en revenant à $c_n - \frac{x_1}{x_3}$ *via* (22) :

$$\textbf{(23)} \quad \forall\, n \geq 3, \quad c_n - \tfrac{x_1}{x_3} = \left(\tfrac{x_3}{x_1}\right)^{n-1}.\frac{O(\beta^n)}{1+\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{n-1}.O(\beta^n)} = \frac{O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}{1+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}.$$

• On peut alors invoquer le résultat non encore utilisé de **B.1.d.** sur le quotient de deux éléments d'un *e.v.* $\mathrm{E}(\beta)$.

En effet, si l'on note respectivement $u_n$ et $w_n$ pour le numérateur et le dénominateur de $c_n - \frac{x_1}{x_3}$ dans la dernière écriture obtenue, on a, pour tout $n \geq 3$ :

$$u_n = o\left[\left(\tfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right] \quad \text{et} \quad w_n = 1 + t_n, \text{ avec } t_n = o\left[\left(\tfrac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right].$$

Ainsi, $u \in \mathrm{E}\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)$, et pour $w$, on peut tenir le raisonnement suivant :

> Puisque $t_n = o\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$, on a : $t = (t_n)_{n\geq 3} \in \mathrm{E}\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)$.
> Or, $\beta < \frac{x_1}{x_3}$ (*c.f.* **B.2.b.**), donc $\frac{\beta x_3}{x_1} < 1$, et on en déduit, par le **B.1.b.**, que tout élément de $\mathrm{E}\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)$ tend vers 0. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.
> Par suite :
> $$\lim_{n\to\infty} w_n = 1 + \lim_{n\to\infty} t_n = 1.$$

**En conséquence**, $u \in \mathrm{E}\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)$, et $w$ est une suite de limite finie non nulle, et on peut affirmer que $w$ ne s'annule pas car $w$ a pour terme général le dénominateur du quotient égal à $c_n - \frac{x_1}{x_3}$ et $c_n - \frac{x_1}{x_3}$ est défini pour $n \geq 3$. **On peut donc appliquer le résultat du B.1.d.(*)quotient la suite $(u_n/w_n)_{n\geq 3}$**.

Il s'ensuit que : $u_n/w_n \in \mathrm{E}\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)$, et donc que : $\forall\, n \geq 3$, $c_n - \frac{x_1}{x_3} = o\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$.

D'où le résultat :

$$(\underline{2}) \quad \boxed{c_n = \frac{x_1}{x_3} + O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}.$$

**C.2.** Pour $n \geq 3$, en reprenant les expressions de $b_n$ et $b_{n-1}$ déduites de ($\underline{1}$) et l'expression ($\underline{2}$) de $c_n$ :

$$d_n = \frac{b_{n+1}-c_n b_n}{1-c_n} = \frac{\left[x_3+\gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1}+O(\beta^n)\right]-\left(\frac{x_1}{x_3}+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]\right)\left[x_3+\gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n+O(\beta^n)\right]}{1-\left(\frac{x_1}{x_3}+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]\right)}$$

et après développement et la simplification $\gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} - \gamma\frac{x_1}{x_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = 0$ au numérateur :

$$d_n = \frac{(x_3-x_1)+O(\beta^n)-\frac{x_1}{x_3}O(\beta^n)-x_3.O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]-\gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n.O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]-O(\beta^n).O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}{1-\frac{x_1}{x_3}-O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}.$$

(*) peu importe pour le rang à partir duquel les suites considérées sont définies (ici à partir du rang 3) pour que **B.1.d.** soit valable.

En vertu des règles de calculs avec les "$O$" mises au jour jusqu'à présent, on peut effectuer les simplifications suivantes :

- $O(\beta^n) - \frac{x_1}{x_3}O(\beta^n) = O(\beta^n)$ et $-x_3.O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] = O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]$
- $-\gamma.\Big(\frac{x_1}{x_3}\Big)^n.O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] = -\gamma.O\Big[\Big(\frac{x_1}{x_3}\Big)^n.\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] = -\gamma.O\big[\beta^n\big] = O\big[\beta^n\big]$
- $-O(\beta^n).O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] = O\Big[\beta^n\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] = O\Big[\Big(\frac{\beta^2 x_3}{x_1}\Big)^n\Big]$

(on a utilisé la **règle (23)** et la **structure d'*e.v.*** de E($\beta$) et E $\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]$).

Grâce à ces simplifications, on réécrit le numérateur dans la dernière expression de $d_n$ et on obtient :

$$\textbf{(24)}\quad d_n = \frac{(x_3 - x_1) + O(\beta^n) + O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] + O\Big[\Big(\frac{\beta^2 x_3}{x_1}\Big)^n\Big]}{1 - \frac{x_1}{x_3} - O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]}.$$

Une nouvelle simplification du numérateur vient du **B1.c.**. En effet :

- **on peut comparer** les suites de terme général $\beta^n$, $(\beta x_3/x_1)^n$ et $(\beta^2 x_3/x_1)^n$ : puisque $0 < x_1 < x_3$ (*c.f.* **I.2.**), on a $\dfrac{x_3}{x_1} > 1$, et $\dfrac{x_1}{x_3} < 1$, d'autre part, il vient de la définition de $\beta$ que $\beta > 0$ et (*c.f.* **B.2.d.**) $\beta < \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|$, *i.e.* $\beta < \dfrac{x_1}{x_3}$.

  En conséquence :
  $\beta < \beta.\dfrac{x_3}{x_1}$ (en multipliant l'inégalité $1 < \frac{x_3}{x_1}$ par $\beta > 0$)
  $\beta^2.\dfrac{x_3}{x_1} < \beta.\dfrac{x_3}{x_1}$ (en multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $\frac{x_3}{x_1} > 0$)

  On en déduit, d'après le **B.1.c.** :
  $$\textbf{(25)}\quad \beta^n = O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big] \text{ et } \Big(\frac{\beta^2 x_3}{x_1}\Big)^n = O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big].$$

- **D'autre part**, pour $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites réelles :
  si $u_n = O(v_n)$, *i.e.* s'il existe $p$ et $M$ tel que $\forall n \geq p,\quad |u_n| \leq M.|u_n|$
  et si $v_n = O(w_n)$, *i.e.* s'il existe $p'$ et $M'$ tel que $\forall n \geq p',\quad |v_n| \leq M'.|w_n|$
  alors, pour tout $n \geq \max(p, p')$, $\quad |u_n| \leq M.M'.|w_n|$

  **On a donc établi que :**
  $$\big(u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(w_n)\big) \Longrightarrow \big(u_n = O(w_n)\big)$$
  (on dit que la relation "$O$" est transitive)

  **En conséquence**, on tire de (25) que :
  **(26)** si une suite est dominée par $\beta^n$, alors elle est dominée par $\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n$
  si une suite est dominée par $\Big(\frac{\beta^2 x_3}{x_1}\Big)^n$, alors elle est dominée par $\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n$.

**On peut, donc, au numérateur de $d_n$ dans (23)**, remplacer $O(\beta^n)$ et $O\Big[\Big(\frac{\beta^2 x_3}{x_1}\Big)^n\Big]$ par $O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]$, puis cette somme de trois suites dominées par $\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n$ par une seule suite nommée $O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]$. $d_n$ s'écrit alors :

$$\textbf{(27)}\quad d_n = \frac{(x_3 - x_1) + O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]}{1 - \frac{x_1}{x_3} - O\Big[\Big(\frac{\beta x_3}{x_1}\Big)^n\Big]}.$$

*On pourrait encore simplifier et on arriverait à* $\boldsymbol{d_n \sim_{+\infty} x_3}$. *Mais pour obtenir le* *résultat demandé (**plus précis**).* On poursuit **en considérant $d_n - x_3$** :

$$d_n - x_3 = \frac{(x_3-x_1)+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}{1-\frac{x_1}{x_3}-O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]} - x_3 = \frac{(x_3-x_1)+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]-x_3.\left(\frac{(x_3-x_1)}{x_3}+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]\right)}{\frac{(x_3-x_1)}{x_3}+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}.$$

Puis, après développement du numérateur, les termes $(x_3 - x_1)$ et $x_3.\frac{(x_3-x_1)}{x_3}$ s'éliminant, les deux autres termes étant dominés par $\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n$, on a :

$$d_n - x_3 = \frac{O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}{\frac{(x_3-x_1)}{x_3}+O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}.$$

**Il faut alors remarquer**, (*c.f.* simplification du quotient obtenu en (22) au **C.1.**), que le quotient obtenu est du type $u_n/w_n$, où $u_n$ est le terme général d'une suite dominée par $\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n$ et $w_n$, le terme général d'une suite ne s'annulant pas ( $d_n - x_3$ est défini pour tout $n \geq 3$) et tendant vers la limite non nulle $\frac{(x_3-x_1)}{x_3}$ (car $0 < \frac{\beta x_3}{x_1} < 1$, donc la suite notée $O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$ au dénominateur tend vers 0 (*c.f.* **B.1.b.**)).

**Par conséquent**, le **B.1.d.** s'applique et donne que la suite de terme général $u_n/w_n$ (c'est-à-dire $d_n - x_3$) appartient à $\mathrm{E}\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]$. **On peut donc conclure** :

$$(\underline{3}) \quad \boxed{d_n - x_3 = O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right]}.$$

**C.3.** *La **rapidité de la convergence** d'un suite $(u_n)$ vers une limite $l$ s'évalue par l'étude de la suite de terme général $\boldsymbol{u_n - l}$. Typiquement on évalue la **vitesse de convergence de $(u_n)$ vers $l$** en majorant la différence $u_n - l$ par une suite $(w_n)$ bien connue (souvent une suite géométrique, comme vous avez pu l'observer dans d'autres problèmes). **Plus $w_n$ tend rapidement vers 0, plus la convergence est rapide**, c'est-à-dire que, pour une précision $\varepsilon > 0$ donnée, on a besoin de calculer $u_n$ jusqu'à un rang moins élevé pour que $u_n$ donne une valeur approchée de $l$ à $\varepsilon$ près.*

**Ici**, on dispose de deux suites convergeant vers $x_3$, à savoir $(b_n)$ et $(d_n)$.

Pour $(b_n)$, on a, d'après ($\underline{1}$) : $b_n = x_3 + \gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)$, et comme $0 < \beta < x_1/x_3$, on peut, par transitivité (*c.f.* **(26)**) résumer cette information en : $b_n = x_3 + O\left[\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right]$

D'après ce dernier résultat, le résultat ($\underline{3}$), et la définition de la relation de domination, on sait, qu'il existe deux constantes $K$ et $K'$, telles qu'au delà d'un certain rang :

$$|b_n - x_3| < K.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n, \quad \text{et} \quad |d_n - x_3| < K'.\beta^n$$

**Puisque $\beta < x_1/x_3$**, la suite de terme général $K.\beta^n$ converge plus vite vers 0 que la suite de terme général $K'.\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n$, ce qu'on peut asseoir par le fait que : $\beta^n = o\left[\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right]$.

**En ce sens,** $\boxed{\text{la suite } (d_n) \text{ converge plus rapidement vers } x_3 \text{ que la suite } (b_n)}$.

**D.1.** *Comme il en était convenu, on va proposer un **algorithme utilisant des tableaux**, et permettant donc de garder en mémoire tous les termes calculés. Bien sûr, **le coût du programme en terme d'utilisation de mémoire en est accru**,* *ce qui peut être critiqué. En revanche, sa lisibilité en sera meilleure, le nom des différentes variables pouvant correspondre à leur appelation réelle.*

**Puisque l'on va utiliser des tableaux**, on doit impérativement définir un **type** "tableau". Si, dans un but simplificateur, on veut utiliser le même "type" pour les quatre suites, si on veut que le numéro de place dans le tableau corresponde à la valeur de l'indice pour le terme de la suite stocké (de sorte que, par exemple **la cellule de tableau "c[44]" contient effectivement la valeur $c_{44}$**), et si enfin on veut calculer $d_n$ jusqu'à $n = 50$, **il faut choisir un type de tableau réel, et comportant 52 cases** (car le calcul de $d_{50}$ nécessite la valeur de $b_{51}$, et le calcul de $b_{51}$ celui de $a_{52}$.

**Les définitions des différentes suites, impose** encore d'avoir calculé les termes de $(b_n)$ jusqu'au rang 4, et donc ceux de $a$ jusqu'au rang 5, avant d'attaquer le calcul de $c_3$ et $d_3$, il faut donc une étape préparatoire pour calculer les premiers termes de $a$ et $b$, et par la suite, dans la boucle principale, **garder une avance de deux rangs sur le calcul des termes de $(a_n)$, et un avance d'un rang pour $(b_n)$.**

Voici, ce que l'on peut proposer(*), en gardant en mémoire les valeurs des termes des quatres suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 2}$, $(c_n)_{n\geq 3}$ et $(d_n)_{n\geq 3}$.

(Programme stockant dans un tableau "$d$" les valeurs $d_3, d_4, \ldots, d_{50}$)

```
program Cinquante_premieres_valeurs;
type liste_des_valeurs = array [0..52] of real ;
var a, b, c, d : liste_des_valeurs;
var n : integer;
begin
  a[0] := 0; a[1] := 0; a[2] := 1; {initialisation pour la suite a}
  for n := 2 to 4 do begin
    b[n] := a[n + 1]/a[n];
    a[n + 1] := a[n] + 2 * a[n - 1] - a[n - 2] {calcul de b2, b3, b4, a3, a4, a5}
  end ;
  for n := 3 to 50 do begin
    c[n] := (b[n + 1] - b[n])/(b[n] - b[n - 1]);
    d[n] := (b[n + 1] - c[n] * b[n])/(1 - c[n]);
    a[n + 2] := a[n + 1] + 2 * a[n] - a[n - 1]; b[n + 1] := a[n + 2]/a[n + 1];
  end ;
  for n := 2 to 50 do
  writeln( 'Valeur de b(', n, ') : ', b[n] ) ; {Affiche la liste des valeurs de b2, ..., b50}
  for n := 3 to 50 do
  writeln( 'Valeur de d(', n, ') : ', d[n] ) ; {Affichage de d3, ..., b50}
end ;
```

**Parce qu'un tel programme**, qui stocke les valeurs de la suite $d$ dans un tableau (et accessoirement celles des suites $a$, $b$ et $c$) ne servirait à rien en lui-même, car personne ne pourrait accéder aux résultats (on n'a pas inséré de **WRITE** dans l'algorithme

(*) Comme au **I.6.a.**, bien que l'énoncé ne demande ni les déclarations de variables, ni les procédures d'entrée-sortie, on définit ici le programme entièrement, et ce pour l'information du lecteur !

principal de calcul), **on a terminé, par une boucle affichant la liste des valeurs de $b$ puis la liste des valeurs de $d$.** Ce qui permet de comparer les vitesses de convergence respectives de $b$ et $d$ vers $x_3$.
*Bien sûr, pour justifier la quantité de mémoire allouée au stockage, il serait préférable de faire un usage plus riche des quatre tableaux que l'on a remplis !*

**D.2.** Voici, à la précision $10^{-4}$, les valeurs fournies par la calculatrice, pour $d_n$ $(2 \leq n \leq 10)$ :

| | | |
|---|---|---|
| $d_3 = 2,0909$ ; | $d_4 = 1,9247$ ; | $d_5 = 1,8549$ |
| $d_6 = 1,8266$ ; | $d_7 = 1,8135$ ; | $d_8 = 1,8074$ |
| $d_9 = 1,8046$ ; | $d_{10} = 1,8032$ | |

On peut constater que sur cette liste de 10 valeurs, $d$ se rapproche d'une valeur pouvant constituer une approximation de $x_3$ à la précision $10^{-2}$, à savoir $1,08$, tandis qu'au **I.6.b.**, on ne pouvait pas même espérer une estimation à $10^{-1}$ près au vu de la liste des valeurs $b_2, \ldots, b_10$. **Ce qui va dans le sens d'une plus grande rapidité de convergence pour $(d_n)$.**

**Banque G2E 99** —— Étude d'une surface définie en cartésiennes - Sommes de V.A. —— Durée 4 h 00

## Problème n° 1

*On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M$ de coordonnées $x$, $y$ et $z$ dans l'espace géométrique qui vérifient l'équation*

$$(E) \qquad x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy = 1.$$

1) Étudier l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y + 2z = 0$, en la décrivant complètement.

2) Écrire l'équation $(E)$ sous la forme

$$^tX.A.X = 1$$

où $X$ désigne le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et $^tX$ sa transposée, en explicitant la matrice $A$.

3) Caractériser le noyau et l'image de l'application linéaire représentée par la matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, en précisant une base de chacun de ces sous-espaces.

4) Déterminer les valeurs propres de $A$. Pourquoi la matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

5) Diagonaliser $A$ avec une matrice de passage dont les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire soient deux à deux perpendiculaires, de longueur unité pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$).

6) Comment s'écrit l'équation $(E)$ dans les coordonnées du nouveau repère ainsi construit ?

7) Dessiner l'**allure** de l'ensemble $\mathcal{E}$. Que représente l'intersection étudiée en 1) ?

## Problème n° 2

Les questions 1) et 2) d'une part, 3) et 4) d'autre part peuvent être traitées de façon indépendante.

*Dans tout le problème on désigne par $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires* **positives** *sur l'espace $\Omega$ muni de la probabilité* **P, mutuellement indépendantes et de même loi.** *On lui associe la nouvelle suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie :*

$$S_0 = 0$$

*et, pour tout entier positif*

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

1) Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et donner un exemple de situation pratique conduisant à considérer une telle loi.

*On* **rappelle** *(et ce point sera* **admis** *sans démonstration) que la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$, de densité $f$ et $g$, est donnée par la densité $f * g$ définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

*pour tout $x$ réel.*

2) Si la loi commune des variables aléatoires $X_k$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi de la variable $S_n$ ; bien sûr la démonstration est exigée !

*Dans les questions 3) et 4), on suppose que chaque variable aléatoire $X_k$ est discrète, qu'elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ selon la loi uniforme.*

3) Calculer la fonction génératrice de chaque variable aléatoire $S_n$.

4) a) Étant donnée une suite $(a_j)_{j=0}^{j=J}$, montrer que le polynôme en $z$

$$\sum_{j=0}^{J}(a_j - a_{j-1})z^j$$

où il est convenu que $a_{-1} = 0$, s'écrit encore

$$(1-z)\sum_{j=0}^{J-1} a_j z^j + a_J z^J \ .$$

b) En dérivant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$, déterminer celui de $\dfrac{1}{(1-z)^{n+1}}$ pour $n$ entier positif, en précisant le rayon de convergence.

c) Utiliser ces résultats pour calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $S_n$.

*A partir de la question 5) on abandonne les hypothèses sur les $X_k$ faites aux questions 3) et 4).*

5) Montrer que, pour tout nombre positif $t$, et chaque entier positif $n$

$$P(S_n \leq t) \leq e^t q^n$$

où $q$ désigne l'espérance de chaque variable aléatoire $e^{-X_k}$. (On écrira l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}$ sous la forme $\{\omega \in \Omega \mid e^{-S_n(\omega)} \geq e^{-t}\}$).

6) a) Calculer la valeur de $q$ lorsque la loi commune des $X_k$ est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

b) On suppose que les variables aléatoires $X_k$ sont discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et de loi donnée par

$$\mathbf{P}(X_k = n) = p_n.$$

À quelle condition le nombre $q$ correspondant est-il $< 1$ ?

*À partir de la question 7) on suppose la condition $q > 1$ vérifiée.*

7) a) Expliquer l'égalité entre l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $S_n(\omega)$ ait une limite quand $n \longrightarrow \infty$ et l'ensemble

$$\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}$$

b) Montrer que, pour tout nombre positif $t$, on a

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\}\Big) = 0$$

c) Quelle conclusion pouvez-vous tirer de ce qui précède ?

*Pour $\omega$ dans $\Omega$ tel que la suite $(S_n(\omega))_{n\geq 0}$ tende vers l'infini, et pour tout $t$ positif donné, on définit le nombre entier positif $\nu_t(\omega)$ par la condition*

$$S_{\nu_t(\omega)-1}(\omega) \leq t \leq S_{\nu_t(\omega)}(\omega)$$

*avec la convention $S_{-1}(\omega) = 0$.*

8) a) Pour chaque entier $n$ positif ou nul, on désigne par $F_n$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $S_n$ : montrer que pour tout nombre $t$ positif, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ converge.

b) Montrer que $\nu_t$ est une variable aléatoire dont l'espérance $\mathbf{E}(\nu_t)$ coïncide avec la somme de la série précédente.

9) On suppose que chaque variable aléatoire $X_k$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ positif : montrer alors que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathbf{E}(\nu_t) = \frac{1}{\mathbf{E}(X_k)}.$$

# Corrigé

## .Problème n°1.

$\boxed{1.1}$ <u>Intersection de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$</u> : *L'idée générale, pour mener à bien l'étude de l'intersection de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{P}$, est de décrire cette intersection par des* ***équations plus simples*** *que les équations initiales suivantes :*

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \{M(x,y,z) \ / \ x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy = 1 \text{ et } y + 2z = 0\}$$

**Ici**, on peut utiliser la <u>seconde équation</u> pour éliminer $y$ dans la première.
On procèdera comme suit.

◇ Un point $M$, de coordonnées $(x, y, z)$, appartient à $\mathcal{E} \cap \mathcal{P}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy = 1 & (1) \\ y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$

**En utilisant (2)**, on peut substituer $-2z$ à $y$ dans (1). Le membre de gauche de (1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy} &= x^2 + 3(-2z)^2 - 3z^2 - 8(-2z)z + 2zx - 4x(-2z) \\ &= x^2 + 12z^2 - 3z^2 + 16z^2 + 2zx + 8xz = \underline{x^2 + 25z^2 + 10xz} \end{aligned}$$

**Ainsi**, pour $M(x, y, z)$ vérifiant (2), (1) équivaut à : **(1')** $x^2 + 25z^2 + 10xz = 1$.

Il importe alors de remarquer que **$(x^2 + 25z^2 + 10xz)$ se factorise en $(x + 5z)^2$**, et que, par suite, (1') équivaut à : **(1")** $(x + 5z = 1 \text{ ou } x + 5z = -1)$.

**<u>En conclusion</u>** : (1 et 2) équivaut à (1" et 2), c'est-à-dire que :

$$M\ (x, y, z) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{P} \iff \begin{cases} x + 5z = 1 \text{ ou } x + 5z = -1 & (1") \\ y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

ou encore, **en introduisant** les **deux plans**, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, dont les équations sont empruntées à (1") :

$$M\ (x, y, z) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{P} \iff \left( (S_1) \begin{cases} x + 5z = 1 & (\mathcal{P}_1) \\ y + 2z = 0 & (\mathcal{P}) \end{cases}, \text{ ou } (S_2) \begin{cases} x + 5z = -1 & (\mathcal{P}_2) \\ y + 2z = 0 & (\mathcal{P}) \end{cases} \right).$$

**On constate alors que** les deux systèmes obtenus correspondent aux équations cartésiennes d'une droite de l'espace, respectivement : $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}$.

**En conséquence**, il apparaît que : $\boxed{\mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2}$.

◇ Pour achever de décrire l'intersection $\mathcal{E} \cap \mathcal{P}$, **on peut caractériser chacune des droites par deux points** (ou par un point et un vecteur directeur).

- <u>Caractérisation de $\mathcal{D}_1$</u> : En imposant $z = 1$ dans le système $(S_1)$, on obtient que $\boxed{M_1(6; -2; 1) \in \mathcal{D}_1}$. De même, en imposant $z = 2$, il vient que $\boxed{N_1(11; -4; 2) \in \mathcal{D}_1}$.
- <u>Caractérisation de $\mathcal{D}_2$</u> : De même, pour $\mathcal{D}_2$, en cherchant les points de côte $z = 1$ et $z = 2$, grâce au le système $(S_2)$, on obtient que $\boxed{M_2(4; -2; 1),\ N_2(9; -4; 2) \in \mathcal{D}_2}$.

**1.2.** <u>Réécriture de (E)</u> : $X$ désignant une colonne à 3 lignes, la forme attendue nécessite l'utilisation d'une matrice carrée 3 × 3. **Mais**, et **c'est une imprécision de l'énoncé**, il convient de **choisir une matrice symétrique**(*).

Dans ces conditions on pose :

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, auquel cas on obtient, en effectuant, *par exemple*, d'abord le produit $AX$, et en le multipliant ensuite à gauche par ${}^tX$ :

$${}^tXAX = a.x^2 + d.y^2 + f.z^2 + 2b.xy + 2c.xz + 2e.yz.$$

En identifiant cette dernière expression avec le membre de gauche de l'équation (E), il apparaît que la proposition suivante convient :

$$\boxed{\text{(E) s'écrit } {}^tXAX = 1, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}}.$$

(*) Si on ne fait pas ce choix d'imposer $A$ symétrique, alors l'identification ne suffit pas à fixer la valeurs des éléments extra-diagonaux de $A$ (on les choisit donc avec un arbitraire) et alors on court le risque qu'il soit impossible de répondre à la question 5.

$\boxed{\textbf{1.3.}}$ Noyau de l'endomorphisme $f$ de matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ :
Un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées $X = {}^t(x \quad y \quad z)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, appartient à $\ker(f)$ si et seulement si $AX = 0$, *i.e.* si et seulement si $(x, y, z)$ est solution du système :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ x & - & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. .$$

La méthode du pivot de Gauss, appliquée pour la résolution de ce système, donne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ x & - & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \Longleftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, les deux dernières équations étant équivalentes, le système (S) équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y - z \\ y & = & -2z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5z \\ y & = & -2z \end{array}\right. .$$

Les solutions de $(S)$ ont donc pour forme générale : $(-5z, -2z, z)$, où $z$ est un réel quelconque. Donc :

$$\boxed{\ker(f) = VECT\,[(5;2;-1)]}\,.$$

$\diamondsuit$ Image de $f$ :
$f$ étant linéaire, on sait que $\mathrm{Im}f = VECT[f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$ où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et la lecture de $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}[f]$ donne :

$$f(e_1) = (1;-2;1), \qquad f(e_2) = (-2;3;-4), \qquad f(e_3) = (1;-4;-3).$$

Puisque, $\ker(f)$ est de dimension 1, l'application du théorème du rang donne que :

$$\dim \mathrm{Im}f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2.$$

et donc : tout couple de 2 vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}f$ forme une base de $\mathrm{Im}f$.
Comme $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre (*au lecteur de vérifier*), il vient que :

$$\boxed{\mathrm{Im}f = VECT[f(e_1), f(e_2)] = VECT[(1;-2;1),(-2;3;-4)]}$$

$\boxed{\textbf{1.4.}}$ Diagonalisabilité de A : Les valeurs propres de $A$ sont les réels $\lambda$ tels que $A - \lambda I$ est non-inversible, *i.e.* tels que $A$ soit de rang maximal (ici de rang 3). Or, **par la méthode du pivot de Gauss**, toutes les matrices suivantes ont même rang :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \\ \longrightarrow \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_1 - (1-\lambda)L_3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3-\lambda \\ 0 & -5-\lambda & -10-2\lambda \\ 0 & 2-4\lambda & 4-2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -4L_2 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3-\lambda \\ 0 & 22 & 44+6\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 2-4\lambda & 4-2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow 11L_3 - (1-2\lambda)L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3-\lambda \\ 0 & 22 & 44+6\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \theta(\lambda) \end{pmatrix}$$

où, $\underline{\theta(\lambda) = 60\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^3}$.

Ainsi, $A - \lambda.I$ a même rang que la dernière matrice obtenue. Celle-ci, étant triangulaire supérieure, elle est de rang 3 si et seulement si tous ses pivots sont non nuls, donc :

$A - \lambda I$ est non-inversible si et seulement si $60\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^3 = 0$.

Or,

$$60\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^3 = (2\lambda)(60 + \lambda - \lambda^2) = (2\lambda)(5 + \lambda)(6 - \lambda)$$

donc,

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } 0, \text{ -5 et } 6}\,.$$