De ce dernier résultat, on tire que : $\min(MY_m) = \min(MY) - \min Y$, et la minoration précédente : $\min MY_m \geq d.\max Y_m$ peut s'écrire :

$$(6) \quad \min MY - \min Y \geq d.\max Y_m.$$

Si l'on remarque enfin que :

$$\max Y_m = \max_{1\leq j\leq r} (Y_m)_j = \max_{1\leq j\leq r} (Y_j - \min Y) = (\max_{1\leq j\leq r} Y_j) - \min Y = \max Y - \min Y$$

il vient par (6) : $\min MY - \min Y \geq d.(\max Y - \min Y)$,

ce qui équivaut à : $\boxed{\min MY \geq d.\max Y + (1-d).\min Y}$.

4.b. *La question est plus ardue, car vous pouvez partir dans de nombreuses directions infructueuses. Si l'idée ne vient pas,* ***laissez-vous guider par la structure de l'énoncé*** *: cette question suit la question 4.a. et vous remarquerez avec profit que les deux expressions à comparer sont les mêmes qu'en 4.a., à condition d'échanger* min *et* max. *D'un point de vue mathématique, il est à remarquer que* ***le minimum et le maximum sont deux notions jumelles***. En effet, ***et tout est là***, pour tout vecteur colonne Y de $\mathbf{R}^r$:

(7) $\min(Y) = -\max(-Y)$ et en changeant Y en $-Y$: $\max(Y) = -\min(-Y)$.

Démontrons-le :

$\max(-Y)$ désigne le plus petit des réels de la famille finie $\{-y_j\}_{1\leq j\leq r}$, donc il existe $i_0 \in [\![1,r]\!]$ tel que : $\max(-Y) = -y_{i_0}$ et $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $-y_i \leq \max(-Y)$.

Dans ces conditions, en passant aux opposés : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $-\max(-Y) \leq y_i$.

Il apparaît donc que $-\max(-Y)$ minore les réels y_j pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, et que c'est une valeur ***atteinte***, car pour $i = i_0$, $y_i = -\max(-Y)$.

Par conséquent : $-\max(-Y) = \min Y$. ***(C.Q.F.D.)***

En appliquant (7) à MY, il vient : $\max MY = -\min(-MY)$, ou encore $-\max MY = \min[M(-Y)]$. En invoquant alors le **4.a.**, on a aussi :

$\min[M(-Y)] \geq d.\max(-Y) + (1-d).\min(-Y)$, où, par (7) :

$\min[M(-Y)] = -\max MY$, $\max(-Y) = -\min Y$, et $\min(-Y) = -\max Y$.

Donc cette inégalité s'écrit encore : $-\max MY \geq -d.\min Y - (1-d).\max Y$,

et on obtient le résultat demandé en passant aux opposés :

$$\boxed{\max MY \leq d.\min Y + (1-d).\max Y}.$$

4.c. Reprenons les derniers résultats, en vue de majorer $\max MY - \min MY$:

- L'inégalité obtenue au **4.a.**, après multiplication par -1, s'écrit :

$$-\min MY \leq -d.\max Y - (1-d).\min Y$$

- et l'inégalité du **4.b.** s'écrit, elle :

$$\max MY \leq d.\min Y + (1-d).\max Y$$

En sommant ces deux inégalités, il vient donc :

$$\max MY - \min MY \leq -d.\max Y + d.\min Y - (1-d).\min Y + (1-d).\max Y.$$

En effectuant alors sur le membre de droite, d'abord deux **factorisations partielles** par $-d$ et par $(1-d)$, puis **une factorisation de l'ensemble** par $(\max Y - \min Y)$, il vient : $\boxed{\max MY - \min MY \leq (1-2.d).(\max Y - \min Y)}$.

5.a. **Le résultat précédent prête à itération.** Il s'énonce :

(8) | $\forall Y$, vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$: $\max MY - \min MY \leq (1-2.d).(\max Y - \min Y)$.

Si on applique alors ce résultat, non plus à une colonne Y, mais à une colonne MY, il vient : | $\max[M(MY)] - \min[M(MY)] \leq (1-2.d).[\max(MY) - \min(MY)]$.

c'est-à-dire : $\max(M^2Y) - \min(M^2Y) \leq (1-2.d).[\max(MY) - \min(MY)]$,

où l'on peut majorer $(\max Y - \min Y)$ par (8), ce qui donne :

| $\max(M^2Y) - \min(M^2Y) \leq (1-2.d)^2.[\max Y - \min Y]$.

◇ *On comprend l'astuce, et l'on est alors prêt à* montrer **par récurrence**, pour $n \geq 0$, la propriété : | $(\mathcal{P}_n)$: $\max(M^nY) - \min(M^nY) \leq (1-2.d)^n.[\max Y - \min Y]$.

- $(\mathcal{P}_0)$ est vraie, en effet : $\max(M^0Y) - \min(M^0Y) = \max Y - \min Y$, car M^0 est la matrice identité I, et $(1-2.d)^0.[\max Y - \min Y] = \max Y - \min Y$, car $(1-2d)^0 = 1$. L'inégalité est donc vérifiée, c'est même une égalité.
- Supposons que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$. D'après (8), appliquée au vecteur colonne M^nY, on a :

  | $\max[M(M^nY)] - \min[M(M^nY)] \leq (1-2d).[\max(M^nY) - \min(M^nY)]$.

  Or, $M(M^nY) = M^{n+1}Y$, et puisque $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, on peut majorer le crochet du second membre. On obtient alors :

  | $\max(M^{n+1}Y) - \min(M^{n+1}Y) \leq (1-2d).(1-2d)^n.(\max Y - \min Y)$.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Ainsi, **par le principe de récurrence**, il est établi que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \max(M^nY) - \min(M^nY) \leq (1-2.d)^n.[\max Y - \min Y]}.$$

5.b. *On examine la monotonie de la suite* $(\max M^nY)_{n\geq 0}$, *comme toujours!, en examinant, pour* $n \in \mathbf{N}$, *le signe de la différence* $\max M^{n+1}Y - \max M^nY$.
De nouveau ***parce que*** $\boldsymbol{M^{n+1}Y = M(M^nY)}$, *on peut ramener le problème à l'examen du signe de la différence* $\max \boldsymbol{MZ} - \max \boldsymbol{Z}$, *pour un vecteur colonne quelconque* $Z \in \mathbf{R}^r$. ***On aura ensuite le résultat attendu en substituant*** $\boldsymbol{M^nY}$ ***à*** $\boldsymbol{Z}$.

◇ Pour tout vecteur colonne $Z = {}^t(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $\mathbf{R}^r$:

| $\max(MZ) = \max_{1\leq i\leq r}(MZ)_j$ et pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $(MZ)_i = \sum_{j=1}^r p_{i,j}.z_j$.

Or, pour tout $1 \leq i \leq r$, $z_i \leq \max Z$, et, **parce que les cœfficients $p_{i,j}$ sont positifs**, on en déduit : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $p_{i,j}.z_j \leq p_{i,j}.\max Z$,

puis, en sommant ces inégalités pour i fixé et j variant de 1 à r :

| $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $(MZ)_i = \sum_{j=1}^r (p_{i,j}.z_j) \leq \sum_{j=1}^r p_{i,j}.\max Z$.

Et enfin, comme $\sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1$ (*c.f.* **2.a.**), $\sum_{j=1}^r p_{i,j}.\max Z = \max Z.\sum_{j=1}^r p_{i,j} = \max Z$. D'où la majoration finale : | $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $(MZ)_i \leq \max Z$,

de laquelle on déduit : | $\max(MZ) \leq \max Z$, ou encore : $\max(MZ) - \max Z \leq 0$.

◇ Pour $Z = M^nY$ $(n \in \mathbf{N})$: $\max(M^{n+1}Y) - \max(M^nY) \leq 0$, et l'on peut conclure :

$$\boxed{\text{pour tout vecteur colonne } Y \in \mathbf{R}^r, \text{ la suite } (\max M^nY)_{n\geq 0} \text{ est décroissante}}.$$

◇ Pour l'étude de la monotonie de la suite $(\min M^nY)_{n\geq 0}$, on reprend le résultat (7) (*c.f.* **4.b.**), pour affirmer que : | $\forall n \in \mathbf{N}$, $\min(M^nY) = -\max(-M^nY)$.

Comme $M^n(-Y) = -M^nY$, et qu'en vertu du résultat précédent, valable pour tout vecteur colonne Y (donc pour "$-Y$"), la suite $\left(\max\left[M^n(-Y)\right]\right)_{n\geq 0}$ est décroissante :

$$\boxed{\text{la suite de terme général } \min(M^nY) = -\max(-M^nY) \text{ est croissante}}.$$

5.c Pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, $y_i(n) = (M^nY)_i$ et par définition de $\min M^nY$ et $\max M^nY$:

$$\min M^nY \leq y_i(n) \leq \max M^nY.$$

À ce stade, il est utile de connaître le ***théorème des suites adjacentes****, dont l'énoncé est le suivant :*

> *Si (a_n) et (b_n) sont deux suites à valeurs dans $\mathbf{R}$, telles que :*
> - *(a_n) est croissante et (b_n) est décroissante*
> - *$\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leq b_n$ (hypothèse facultative)*
> - *$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$*
>
> ***alors****, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune $l \in \mathbf{R}$.*

On va démontrer ce théorème ***sur l'exemple*** *pour* $(\min(M^nY))$ *et* $(\max(-M^nY))$.

◇ La suite $(\min(M^nY))_{n\geq 0}$ est **croissante**, donc elle est **minorée par son premier terme** $M^0Y = Y$, *i.e.* : $(\forall n \in \mathbf{N})$ $\min(Y) \leq \min(M^nY)$. De même, la suite $(\max(M^nY))_{n\geq 0}$, **décroissante**, est **majorée par son premier terme**, donc : $(\forall n \in \mathbf{N})$ $\max(M^nY) \leq \max(Y)$. Enfin, **par définition** de $\min(M^nY)$ et $\max(M^nY)$: $(\forall n \in \mathbf{N})$ $\min(M^nY) \leq \max(M^nY)$.

En conséquence :

$$\min(Y) \leq \min(M^nY) \leq \max(M^nY) \leq \max(Y) \quad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

On en déduit que <u>la suite</u> $(\min(M^nY))_{n\geq 0}$ est majorée par $\max Y$. Comme elle est aussi croissante, elle <u>converge vers une limite l</u>, d'après le **théorème de la limite monotone**. De même, il apparaît que <u>la suite</u> $(\max(M^nY))$ est minorée par $\min Y$. Cette suite, décroissante, par le même théorème, elle <u>converge donc vers une limite l'</u>.

• **De l'inégalité** $\min(M^nY) \leq \max(M^nY)$, l'on tire encore que <u>la suite de terme général</u> $\max(M^nY) - \min(M^nY)$ <u>est positive</u>. De plus, en invoquant le résultat du **5.a.**, on a :

$$\forall n \geq 0, \ 0 \leq \max(M^nY) - \min(M^nY) \leq (1-2.d)^n.\left[\max Y - \min Y\right].$$

Or, d'après le **3.a.**, $0 < d \leq 1/2$ donc $-1/2 \leq d < 0$ et $0 \leq 1 - 2.d < 1$. Par suite : $\lim_{n\to\infty}(1-2.d)^n = 0$. Par conséquent, d'après le **théorème d'encadrement pour les suites réelles**, la double inégalité précédente donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \max(M^nY) - \min(M^nY) = 0.$$

Et comme les suites $(\min(M^nY))_{n\geq 0}$ et $(\max(M^nY))_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers l et l' :

$$\lim_{n\to+\infty} \max(M^nY) - \min(M^nY) = l - l' = 0, \quad \text{donc} \quad l = l'.$$

• Ainsi, **il existe** pour $(\min(M^nY))_{n\geq 0}$ et $(\max(-M^nY))_{n\geq 0}$ **une limite commune** que l'on peut noter $\boldsymbol{z}$.

Comme pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\min(M^nY) \leq y_i(n) \leq \max(M^nY)$, par le théorème d'encadrement encore : $\lim_{n\to+\infty} y_i(n) = z$.

Concluons :

$$\boxed{\text{il existe } z \in \mathbf{R} \text{ tel que : } \quad \forall i \in \{1,\ldots,r\}, \ \lim_{n\to+\infty} y_i(n) = z}.$$

6.a. *On doit maintenant établir un résultat sur les cœfficients de M^n alors que l'on vient d'en obtenir un sur les composantes de M^nY, pour Y vecteur colonne quelconque* *de* $\mathbf{R}^r$. *On se rappelera donc utilement que* ***si l'on multiplie une matrice*** $\boldsymbol{A}$***,*** $\boldsymbol{r\times r}$***, par le i-ème vecteur de la base canonique de*** R^r***, on obtient la j-ème colonne de A.*** *C'est ce qui va permettre d'opérer la transition de* M^nY *à* M^n.

◇ Il vient d'être établi que, pour tout vecteur colonne Y de $\mathbf{R}^r$, chaque composante $y_i(n)$ de M^nY tend vers la même limite z, et $z = \lim_{n\to+\infty} M^nY$, donc, **$M$ étant fixée**, cette limite ne dépend que de Y. On peut donc la noter : $z(Y)$.

Ainsi, si l'on pose $Y = Y_j$, avec Y_j le j-ème vecteur colonne de la base canonique de $\mathbf{R}^r$, **alors, il existe $w_j = z(Y_j) \in$** $\mathbf{R}$, tel que, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(M^nY_j)_i = w_j$, où, on le rappelle, $(M^nY_j)_i$ est le i-ème cœfficient de (M^nY_j).

Or, par ailleurs :

$$M^nY_j = \begin{pmatrix} p_{1,1}(n) & \dots & p_{1,r}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r,1}(n) & \dots & p_{r,r}(n) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{ligne } 1 \\ \vdots \\ \text{ligne } j \\ \vdots \\ \text{ligne } r \end{array} = \begin{pmatrix} p_{1,j}(n) \\ \vdots \\ p_{r,j}(n) \end{pmatrix}.$$

c'est-à-dire que : $\forall\, i \in [\![1,r]\!]$, $(M^nY_j)_i = p_{i,j}(n)$. **On peut donc conclure que** :

$$\boxed{\forall j \in \{1,\dots,r\}, \text{ il existe } w_j \in \mathbf{R}, \text{ tel que : } \quad \forall i \in [\![1,r]\!],\ \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}(n) = w_j}.$$

6.b. Pour tout i compris entre 1 et r, w_i est la limite de la suite $(p_{i,j}(n))_{n\geq 0}$, donc :

(9) $\sum_{j=1}^r w_j$ est la limite de la suite $\left(\sum_{j=1}^r p_{i,j}(n)\right)_{n\geq 0}$.

Or, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$: $\forall\, n > 0$, $\sum_{j=1}^r p_{i,j}(n) = 1$ (*c.f.* **2.a.**), donc, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, la suite $\left(\sum_{j=1}^r p_{i,j}(n)\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante dont le terme général vaut 1, elle converge donc vers 1.

On peut donc conclure, en comparant ce résultat avec (9), **par unicité de la limite d'une suite réelle**, que : $\boxed{\sum_{j=1}^r w_j = 1}$.

6.c. Considérons, comme il est dit, le produit M^nM, pour n entier naturel. Il s'agit de la matrice de cœfficient générique, ligne i, colonne j $(1 \leq i,j \leq r)$:

$$(M^nM)_{i,j} = \sum_{k=1}^r p_{i,k}(n).p_{k,j}.$$

On peut, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,r\}^2$, **passer à la limite sur cette égalité**, pour n tendant vers $+\infty$, puisque la suite de terme général $((M^nM)_{i,j})_{n\geq 0}$ est une combinaison linéaire des suites $(p_{i,k}(n))_{n\geq 0}$, qui sont, chacune, convergent vers w_k.

On obtient ainsi : $\lim_{n\to+\infty}(M^nM)_{i,j} = \sum_{k=1}^r w_k.p_{k,j}$.

Or, d'après **1.a.**, $\sum_{k=1}^r w_k.p_{k,j} = (WM)_j$, donc, en fait, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(M^nM)_{i,j} = (WM)_j.$$

Comme d'autre part, $(M^nM)_{i,j} = (M^{n+1})_{i,j} = p_{i,j}(n+1)$, et que, puisque $(p_{i,j}(n))_{n\geq 0}$ converge vers w_j : $\lim_{n\to+\infty} p_{i,j}(n+1) = w_j$, on a une deuxième expression de $\lim_{n\to+\infty}(M^nM)_{i,j}$: $\lim_{n\to+\infty}(M^nM)_{i,j} = w_j$.

De la comparaison de ces deux expressions, on déduit, **par unicité de la limite**, que : pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$: $(WM)_j = w_j$.

w_j étant la j-ème composante du vecteur colonne W, WM et W ont donc des composantes toutes égales et par conséquent : $\boxed{WM = W}$.

6.d. Considérons un vecteur ligne $Z = (z_1, \ldots, z_r)$ de $\mathbf{R}^r$, tel que :

$\sum_{i=1}^r z_i = 1$, et $ZM = Z$.

• Sachant que $ZM = Z$, une récurrence (*c.f.* **2.d.**) donne que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $ZM^n = Z$. **Or**, le j-ème cœfficient de la ligne ZM^n vaut $\sum_{i=1}^r z_i.p_{i,j}(n)$, donc de $ZM^n = Z$, on déduit :

(10) $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, $\sum_{i=1}^r z_i.p_{i,j}(n) = z_j$.

Pour tout j $(1 \leq j \leq r)$, la suite de terme général $\left(\sum_{i=1}^r z_i.p_{i,j}(n)\right)_{n\geq 0}$ est donc la suite constante de terme général z_j, mais aussi c'est une combinaison linéaire des suites convergentes $(p_{i,j}(n))_{n\geq 0}$, de limites respectives w_i (*c.f.* **6.a.**), donc, sa limite s'exprime de deux façons :

$$\textbf{(11)} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^r z_i.p_{i,j}(n) = \sum_{i=1}^r z_i.w_j, \text{ et par (10), } \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^r z_i.p_{i,j}(n) = z_j.$$

Puisque w_j est indépendant de i, on a encore : $\sum_{i=1}^r z_i.w_j = w_j.\sum_{i=1}^r z_i$, et comme par hypothèse $\sum_{i=1}^r z_i = 1$, on vérifie que : $\sum_{i=1}^r z_i.w_j = w_j$. Donc, de (11), l'on déduit, par unicité de la limite, que : $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, $z_j = w_j$. **Par conséquent** :

si Z vérifie les hypothèses de l'énoncé :

Z et W ont mêmes composantes et sont donc égaux.

Ainsi, W est un vecteur satisfaisant aux conditions imposées à Z (d'après **6.c.**), et l'on vient d'établir que c'est le seul. On peut donc conclure :

$$\boxed{W \text{ est l'unique vecteur ligne } Z = (z_1, \ldots, z_r) \text{ de } \mathbf{R}^r, \text{ tel que } \sum_{i=1}^r z_i = 1 \text{ et } ZM = Z}.$$

7.a. **Dans les hypothèses du 7.**, c'est à M^N que l'on peut appliquer les résultats des questions **3.**, **4.**, **5.** et **6.**. En effet, M^N satisfait à toutes les hypothèses requises :

$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, r\}^2$, $p_{i,j}(N) > 0$, et, d'après **2.a.** :

$\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, $\sum_{j=1}^r p_{i,j}(N) = 1$.

Le but de la question étant d'établir que le résultat du ***6.a.*** *est toujours valable, considérant que* ***6.a.*** *est une conséquence directe de* ***5.c.***, ***on s'attachera à montrer que le résultat du 5.c. est encore valable pour M dans les hypothèses du 7.***.

◇ Pour tout Y, vecteur colonne de $\mathbf{R}^r$, **les résultats du *5.* sont encore valables si les cœfficients de M ne sont pas strictement positifs**, à l'exception du résultat sur la suite $(\max(M^nY) - \min(M^nY))_{n\geq 0}$, dont on ne peut plus montrer qu'elle tend vers 0(*)(car en reprenant **3.a.** on trouve : $0 \leq 1 - 2d \leq 1$ et non plus

(*) Au lieu de la méthode proposée, reposant sur l'étude de deux suites extraites, on peut montrer le résultat, aussi (et c'est le sens de l'indication de l'énoncé), en considérant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la partie entière k' de k/N, en effet, on a : $k' \leq k/N$, *i.e.* $k'N \leq k$, et (grâce à **4.c.** qui s'applique, avec $M^{k'N}Y$ au lieu de Y), il vient (en utilisant aussi que $0 \leq 1 - 2d \leq 1$) :

$$\left[\max M^kY - \min M^kY\right] \leq (1-2.d)^{k-k'N}.\left[\max M^{k'N}Y - \min M^{k'N}Y\right] \leq \left[\max M^{k'N}Y - \min M^{k'N}Y\right].$$

Ensuite, on montre que le majorant tend vers 0 car pour M^N et non M, le **5.c** s'applique, et en particulier, $\lim_{k\to\infty} \max(M^N)^kY - \min(M^N)^kY = 0$. On récupère ainsi, pour M, le résultat du **5.c.**, et par suite celui de **6.c.**.

$0 \leq 1-2d < 1$). **En particulier**, il reste vrai, pour les mêmes raisons, que **les suites** $(\max(M^nY))_{n\geq 0}$ **et** $(\min(M^nY))_{n\geq 0}$ **sont convergentes**, et si l'on note l et l' leurs limites respectives, il s'ensuit qu'aussi :

$$\textbf{(12)}\quad \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{k\to+\infty} \max\left[(M^N)^k.Y\right] = \lim\limits_{k\to+\infty} \max\left[M^{Nk}.Y\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \max\left[M^nY\right] = l, \\ \text{et : } \lim\limits_{k\to+\infty} \min\left[(M^N)^k.Y\right] = \lim\limits_{k\to+\infty} \min\left[M^{Nk}.Y\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \min\left[M^nY\right] = l'. \end{array} \right.$$

Et **puisqu'en revanche**, les résultats **3.**, **4.**, **5.** et **6.**, sont vrais pour M^N au lieu de M, il est avéré que **les suites** $\left(\max[(M^N)^k.Y]\right)_{k\geq 0}$ **et** $\left(\min[(M^N)^k.Y]\right)_{k\geq 0}$ (*c.f.* **5.c.**) **admettent une limite commune**, que l'on peut noter $z_N(Y)$ (*c.f.* **6.a.**), et en conjuguant avec (12), il vient : $\quad z_N(Y) = l = l'$

Par suite, puisque $l = l'$, il vient, comme dans la démonstration du **5.c.**, que :

$\lim_{n\to+\infty} y_i(n)$ existe et vaut $l = z_N(Y)$.

◇ Ainsi, le résultat du **6.a.** est encore valable sous les nouvelles hypothèses faites sur M. Il en découle, puisqu'on a toujours, $(\forall i \in [\![1,r]\!]), (\forall n \in \mathbf{N})\ \sum_{j=1}^r p_{i,j}(n) = 1$, que les résultats du **6.b.** et du **6.c.** sont encore valables, et donc :

$$\boxed{\text{il existe } W = (w_1,\ldots,w_r) \in \mathbf{R}^r \text{ tel que : } \forall i,j \in \{1,\ldots,r\},\ \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}(n) = w_j}.$$

$\boxed{\textbf{7.b.}}$ Puisque les résultats des **6.a.**, **6.b.**, **6.c.** sont encore valables, et que le résultat du **6.d.** en découle, moyennant que M vérifie : $(\forall i \in [\![1,r]\!]), (\forall n \in \mathbf{N})\ \sum_{j=1}^r p_{i,j} = 1$ (ce qui est vrai dans les hypothèses du **7.**), le résultat de **6.d.** est encore vrai :

$$\boxed{W \text{ est l'unique vecteur ligne } Z = (z_1,\ldots,z_r) \text{ de } \mathbf{R}^r, \text{ tel que } \sum_{i=1}^r z_i = 1 \text{ et } ZM = Z}.$$

$\boxed{\textbf{7.c.}}$ *Procédons comme au* ***6.d.***, et **considérons un vecteur colonne Y de $\mathbf{R}^r$ ($Y = {}^t(y_1,\ldots,y_r)$) tel que $\sum_{j=1}^r y_j = 1$ et $MY = Y$.**

◇ Sachant que $MY = Y$, on montre par récurrence (*c'est sans difficulté*) que, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\underline{M^nY = Y}$. Or, le i-ème cœfficient de M^nY vaut $\sum_{j=1}^r p_{i,j}(n)y_j$ (*c.f.* **1.b.**), donc de $M^nY = Y$, on déduit : $\quad \forall i \in \{1,\ldots,r\},\quad \sum_{j=1}^r p_{i,j}(n)y_j = y_i,$

Pour tout i $(1 \leq i \leq r)$, la suite de terme général $\left(\sum_{i=1}^r p_{i,j}(n)y_j\right)_{n\geq 0}$ est donc la **suite constante** de terme général y_i, **mais aussi** c'est une **combinaison linéaire des suites convergentes** $\left(p_{i,j}(n)\right)_{n\geq 0}$, de limites respectives w_j, **donc** :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^r p_{i,j}(n)y_j$ vaut d'une part y_i, et d'autre part $\sum_{j=1}^r w_j.y_j$.

Ainsi, **par unicité de la limite d'une suite**, tous les y_i $(1 \leq i \leq n)$ sont égaux à $\sum_{j=1}^r w_j.y_j$. Et si l'on note α cette valeur commune (indépendante de i), puisque, $(\forall i \in \{1,\ldots,r\})$, $y_i = \alpha$, on a : $\quad$ **(13)** $\sum_{j=1}^r y_j = \sum_{j=1}^r \alpha = \alpha.\sum_{j=1}^r 1 = \alpha.r.$

Or, **par hypothèse** $\sum_{j=1}^r y_j = 1$, donc, on tire de (13) que : $\quad \alpha.r = 1$, *i.e.* $\alpha = \frac{1}{r}$.

Ainsi, on a montré que :

si un vecteur colonne Y de $\mathbf{R}^r$ est tel que $\sum_{j=1}^r y_j = 1$ et $MY = Y$,
alors celui-ci est nécessairement égal à $(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$.

Un tel vecteur est donc **unique**.

$\diamond$ **Réciproquement**, si $Y = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$, alors :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r} y_j = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{r} = \frac{r}{r} = 1, \quad \text{et, pour tout } i \in \{1, \ldots, r\} : \\ (MY)_i = \sum_{j=1}^{r} p_{i,j}.y_j = \sum_{j=1}^{r} p_{i,j}.\frac{1}{r} = \frac{1}{r}.\underbrace{\sum_{j=1}^{r} p_{i,j}}_{=1 \text{ (par hypothèse sur } M)} = \frac{1}{r}.1 = Y_i \end{cases}$$

Donc, $Y = (\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$ est tel que $\sum_{j=1}^{r} y_j = 1$ et $MY = Y$. Après **l'unicité**, on a donc montré **l'existence** d'un vecteur colonne satisfaisant aux conditions.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{il existe un unique vecteur colonne } Y = {}^t(y_1, \ldots, y_r) \text{ de } \mathbf{R}^r, \\ \text{tel que } \sum_{i=1}^{r} y_j = 1 \text{ et } MY = Y : \quad \text{c'est le vecteur colonne } Y = {}^t(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}) \end{array}}.$$

8.a. $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3$ vérifie l'équation $WM = W$ si et seulement si :

$$(w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (w_1 \ w_2 \ w_3) \iff (\mathcal{S}) \begin{cases} \frac{1}{2}.w_1 + \frac{1}{2}.w_2 + \frac{1}{4}.w_3 = w_1 \\ \frac{1}{4}.w_1 \qquad\quad + \frac{1}{4}.w_3 = w_2 \\ \frac{1}{4}.w_1 + \frac{1}{2}.w_2 + \frac{1}{4}.w_3 = w_3 \end{cases}$$

En commençant par multiplier toutes les lignes de $(\mathcal{S})$ par 4, on obtient la succession suivante de systèmes équivalents à $(\mathcal{S})$:

$$\begin{cases} 2.w_1 + 2.w_2 + w_3 = 4.w_1 \\ w_1 \qquad\quad + w_3 = 4.w_2 \\ w_1 + 2.w_2 + 2.w_3 = 4.w_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2.w_1 + 2.w_2 + w_3 = 0 \\ 2.w_1 - 4.w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 + 2.w_2 - 2.w_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_2 - L_3}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\iff}} \begin{cases} w_1 + 2.w_2 - 2.w_3 = 0 \\ \qquad 6.w_2 - 3.w_3 = 0 \\ \quad - 6.w_2 + 3.w_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\iff}} \begin{cases} w_1 \qquad\quad - w_3 = 0 \\ \qquad 2.w_2 - w_3 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs W solutions de l'équation $WM = W$ sont donc (en posant $w_2 = \alpha$) : | les vecteurs de la forme $(2.\alpha, \alpha, 2.\alpha)$, avec α réel quelconque.

Si **de plus**, on impose que : $\sum_{j=1}^{3} w_j = 1$, il vient :

| $w_1 + w_2 + w_3 = 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 5\alpha = 1$ *i.e.* $\alpha = 1/5$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{il existe un unique vecteur ligne } W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{R}^3, \\ \text{tel que } \sum_{j=1}^{3} w_j = 1 \text{ et } WM = W : \quad \text{c'est le vecteur ligne } W = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \end{array}}.$$

8.b. La matrice M de la question **8.** est telle que **la somme de ses cœfficients, pour chaque ligne vaut 1**, mais, tous ses cœfficients ne sont pas strictementpositifs. En revanche, **on peut vérifier que M^2** (*le lecteur calculera !*), elle, **est à cœfficients tous positifs**. Donc, M est telle que le **7.** s'applique.

$\diamond$ Par suite, en vertu de **7.b.**, le vecteur $W = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$, obtenu précédement <u>est</u> le vecteur défini au **7.a.**, et est donc tel que : ▌ $\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $\lim_{n \to +\infty} p_{i,j}(n) = w_j$.

Comme $w_1 = \frac{2}{5}$, $w_2 = \frac{1}{5}$ et $w_3 = \frac{2}{5}$, on a donc :

$$\boxed{\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \lim_{n \to +\infty} p_{i,1}(n) = \lim_{n \to +\infty} p_{i,3}(n) = \frac{2}{5} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} p_{i,2}(n) = \frac{1}{5}}.$$

ÉPREUVE A

Durée 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les candidats doivent traiter les deux problèmes qui sont totalement indépendants.

PROBLÈME I

Le but de ce problème est l'étude de la suite u, indexée par $\mathbb{N}^*$ et définie par :

▷ son premier terme u_1 strictement positif.

▷ la relation, pour tout n entier naturel non nul :

(1) $u_{n+1} = u_n\left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Partie A *Définition de la suite à l'aide d'une suite de fonctions.*

1. Prouver que si u admet une limite dans $\mathbb{R}$, elle est nécessairement égale à 0 ou 1.

2.a. Justifier l'existence d'une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

▷ Pour tout x réel positif : $f_1(x) = x$

▷ Pour tout n entier naturel non nul et tout x réel positif :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right)$$

2.b. Exprimer, pour n entier naturel non nul, u_n en fonction de f_n et de u_1.

3. Dans cette question n est un entier naturel non nul fixé. En raisonnant par récurrence, justifier les résultats suivants.

3.a. f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3.b. $f_n(0) = 0$

3.c. $f_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3.d. Pour tout réel strictement positif m, il existe un unique réel x strictement positif, tel que : $f_n(x) = m$

Partie B *Étude d'un cas particulier.*

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul on peut définir deux réels uniques α_n et β_n par les conditions :

$$\begin{cases} f_n(\alpha_n) &= 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) &= 1 \end{cases}$$

Justifier, pour $n \geq 2$, la relation :

$$0 < \alpha_n < \beta_n < 1$$

On notera respectivement α et β les suites indexées par $\mathbb{N}^*$, de terme général α_n et β_n.

2.a. Justifier, pour n non nul, les inégalités :

$$\begin{cases} f_{n+1}(\alpha_n) & < & 1 - \frac{1}{n+1} \\ f_{n+1}(\beta_n) & > & 1 \end{cases}$$

2.b. En déduire, en utilisant la monotonie de f_{n+1} que α est strictement croissante et β strictement décroissante.

2.c. Montrer que α et β convergent respectivement vers L et L' vérifiant :

$$0 < L \leq L' < 1$$

3. On notera u^L la suite définie, pour tout n non nul, par la relation :

$$u_n^L = f_n(L)$$

3.a. Justifier les inégalités :

$$1 - \frac{1}{n} < f_n(L) \leq f_n(L') < 1$$

En déduire que la suite u^L converge vers 1 et est strictement croissante.

3.b. Montrer que, pour $u_1 \neq L$, le signe de la quantité : $f_n(u_1) - f_n(L)$ est indépendant de n entier naturel non nul. Vérifier de plus que l'on a :

$$|u_n - u_n^L| \geq |u_1 - L|$$

3.c. En déduire l'égalité : $L = L'$.

Partie C *Nature de la suite suivant le choix de son premier terme.*

1. Dans cette question on suppose : $u_1 > L$

1.a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n} + u_n + u_n^L \geq 2 - \frac{1}{n}$$

1.b. En déduire, pour tout $n \geq 2$:

$$\left(u_{n+1} - u_{n+1}^L\right) \geq \frac{3}{2} \times \left(u_n - u_n^L\right)$$

puis que la suite u est croissante et tend vers l'infini.

2. Dans cette question on suppose : $u_1 < L$

2.a. Justifier l'existence d'un entier p tel que l'on ait :

$$u_1 < \alpha_p < L$$

En déduire qu'on a, pour tout $n \geq p$:

$$u_n < 1 - \frac{1}{n}$$

2.b. Montrer qu'à partir du rang p, la suite u est décroissante, puis qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.

PROBLÈME II

Dans ce problème, on notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 1$) et à cœfficients complexes. $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$, I est la matrice unité et Id est l'endomorphisme identité sur $\mathbb{C}^n$.

Rappels et résultat admis
On rappelle que si une matrice admet n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, que les espaces propres sont de dimension 1 et que tout système constitué de n vecteurs propres associés aux n valeurs propres est une base de $\mathbb{C}^n$.

Question préliminaire :
Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

Partie A : *Une méthode d'inversion de matrice de passage de vecteurs propres.*

1. Dans cette question, M est une matrice dont le terme de la ligne i et de la colonne j est noté $m_{i,j}$. On désignera par D la matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont notés $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Déterminer le terme de la ligne i et de la colonne j des matrices $M \times D$ et $D \times M$. Quel est l'effet sur la matrice M d'une multiplication à droite ou à gauche par D ?

2. On suppose désormais que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit P une matrice inversible. Montrer que l'égalité : $A \times P = P \times D$ équivaut au fait que, pour tout j, le j-ième vecteur colonne de P est un vecteur propre pour A associé à λ_j.

3. Dans toute la suite, on notera $P = (p_{i,j})$ une matrice dont, pour tout j, le j-ième vecteur colonne est un vecteur propre pour λ_j relativement à la matrice A. La matrice $Q = (q_{i,j})$ jouera le même rôle (avec les mêmes valeurs propres) pour la matrice ${}^tA$.

3.a. Justifier l'égalité : $${}^tQ \times A = D \times {}^tQ$$

3.b. En déduire : $$A \times ({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1} \times D$$
puis l'existence d'une matrice diagonale inversible Δ telle que l'on ait :
$$({}^tQ)^{-1} = P \times \Delta$$
Indication : On pourra interpréter les vecteurs colonnes de $({}^tQ)^{-1}$ en termes de vecteurs propres.

3.c. On note $\delta_1, \ldots, \delta_n$ les cœfficients de la diagonale de Δ. Après avoir justifié la relation :
$$\Delta \times {}^tQ = P^{-1}$$
montrer qu'ils sont déterminés par la relaton :
$$\delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i} q_{k,i} = 1$$

4. Application : Montrer que si les valeurs propres de A sont toutes non nulles, alors A est inversible et que le terme de la i-ième ligne et j-ième colonne de A^{-1} vérifie :
$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k} q_{j,k}}{\lambda_k}$$

Partie B : *Application au calcul de l'inverse d'une matrice.*
Dans toute cette partie on considère l'élément de $\mathcal{E}$ défini par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.a. m désigne dans cette question un entier naturel vérifiant : $1 \leq m \leq n$. Justifier, pour tout k entier naturel la relation :

$$\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) \times \sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$$

1.b En déduire que le vecteur V_m dont la k-ième composante (pour $1 \leq k \leq n$) est égale à :

$$\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$$

est un vecteur propre pour A asssocié à la valeur propre λ_m que l'on explicitera en fonction de m.

1.c. Montrer alors que A admet n valeurs propres distinctes non nulles.

2. on reprend désormais les notations de la partie A.

2.a. En utilisant ce qui précède, expliciter $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ pour i et j variant de 1 à n.

2.b. Dans cette question x est un élément de $]0, \pi[$. Justifier la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \times \cos(n+1)x$$

En déduire une expression en fonction de n et de x de la somme :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx)$$

2.c. En utilisant la formule trouvée dans la question 3.c. de la partie A, montrer que δ_i ne dépend pas de i et donner sa valeur en fonction de n.

3. En déduire le cœfficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A^{-1}.

Corrigé

PROBLÈME I

.PARTIE A.

$\boxed{\text{I.A.1.}}$ Par les **théorèmes usuels sur les limites** (somme, produit de suites admettant une limite finie), **s'il existe $l \in \mathbb{R}$**, tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors :

$\|$ $\lim_{n\to+\infty} u_n.\left(u_n + \frac{1}{n}\right) = l\,(l+0) = l^2$, et $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.

Donc, **par passage à la limite** sur $u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$, il vient, pour l : $\|$ $l^2 = l$.
Cette équation, qui se factorise en $l(l-1) = 0$, a pour solutions 0 et 1, et donc :

$$\boxed{\text{si } u \text{ converge vers une limite } l \in \mathbb{R}, \text{ alors nécessairement : } l = 0 \text{ ou } l = 1}.$$

$\boxed{\textbf{I.A.2.a.}}$ *Peu de choses à dire, si ce n'est que*, la condition donnée sur f_1 impose de prendre pour f_1 la fonction $f_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$ et que si, pour $n \geq 1$, f_n existe et est définie sur $\mathbb{R}_+$, alors, en posant $f_{n+1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_n(x).(f_n(x) + 1/n)$, f_{n+1} est bien une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, et c'est la seule possible.

$\boxed{\textbf{I.A.2.b.}}$ *Comme toujours, on pourra examiner les premiers termes de la suite pour* ***faire une conjecture****, avérée ensuite par récurrence.* En l'espèce, le premier terme de la suite est quelconque, strictement positif, ce qui permet néanmoins de noter que $u_1 = f_1(u_1)$, et pour u_2, qui par définition vaut $u_2 = u_1.(u_1 + 1) > 0$, u_2 s'écrit aussi :

$$|\ u_2 = f_1(u_1).\left(f_1(u_1) + \tfrac{1}{2}\right) = f_2(u_1).$$

En conséquence, **on posera l'hypothèse de récurrence suivante**, pour $n \geq 1$:

$$\|\ (\mathcal{H}_n) :\ u_n > 0, \text{ et } u_n = f_n(u_1).$$

- Au rang $n = 1$: puisque f_1 est la fonction, $x \mapsto x$, , définie sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.
- Si on suppose que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$: alors, puisque **par définition de la suite** $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n\geq 1}}$, $u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$, et que, d'après $(\boldsymbol{\mathcal{H}_n})$, $\boldsymbol{u_n > 0}$, il vient que u_{n+1} est strictement positif, ce qui permet de lui appliquer f_{n+1} (définie sur $\mathbb{R}_+$) et d'écrire, en utilisant de plus la **définition de la suite de fonctions** $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n\geq 1}}$ et bien sûr aussi $(\mathcal{H}_n)$:

$$\|\ u_{n+1} = u_n\left(u_n + \tfrac{1}{n}\right) = f_n(u_1)\left(f_n(u_1) + \tfrac{1}{n}\right) = f_{n+1}(u_1),$$

ce qui établit que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Ainsi, $(\mathcal{H}_1)$ est vraie, et $\big((\mathcal{H}_n) \text{ vraie }\big) \Longrightarrow \big((\mathcal{H}_{n+1}) \text{ vraie }\big)$, donc, **par le principe de récurrence** :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n = f_n(u_1) \text{ (et } u_n > 0)}.$$

$\boxed{\textbf{I.A.3.a.b.c. et d.}}$ On montrer l'ensemble des résultats du **3.** grâce à l'hypothèse de récurrence globale, énoncé pour $n \geq 1$, par :

$(\mathcal{H}_n)$
- f_n est continue et strictement croisssante sur $\mathbb{R}_+$.
- $f_n(0) = 0$.
- $f_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- $\forall\, m > 0$, il existe un unique $x > 0$, tel que $f_n(x) = m$.

- Au rang $n = 1$: les trois premières propriétés sont vérifiées par f_1, de façon immédiate, et pour la quatrième, il est aussi évident que pour tout $m > 0$, l'équation $f_1(x) = m$ a pour unique solution $x = m > 0$. Ainsi, $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.
- Si on suppose que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 1$, alors :

  * la fonction f_{n+1}, définie par $f_n(x).(f_n(x) + 1/n)$ apparaît comme le **produit de deux fonctions continues**, et donc, f_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}_+$. Et, pour ce qui est de la **monotonie** de f_{n+1}, puisque f_n est supposée strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0, pour tout couple de réels positifs (x, x'), tel que $x < x'$:

  (1) $\|$ $0 \leq f_n(x) < f_n(x')$, et donc : $0 \leq f_n(x) + \frac{1}{n} < f_n(x') + \frac{1}{n}$.

Par la propriété : $(0 \leq a < c,\ 0 \leq b < d) \Longrightarrow (ac < bd)$, la **positivité de tous les réels considérés** permet de déduire des inégalités (1), que :

$0 \leq f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right) < f_n(x')\left(f_n(x') + \frac{1}{n}\right)$, *i.e.* : $0 \leq f_{n+1}(x) < f_{n+1}(x')$.

On a donc établi que f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$*$ puisque $(\forall\, x \geq 0)$, $f_{n+1}(x) = f_n(x).(f_n(x) + 1/n)$: $(f_n(0) = 0) \Longrightarrow (f_{n+1}(0) = 0)$,

et aussi : $f_{n+1} \geq f_n^2(x)$, d'où : $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f_{n+1}(x) = +\infty\right)$.

$*$ Enfin, puisque f_{n+1} est **continue, strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+$, f_{n+1} définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image, image égale à $[f_{n+1}(0), \lim_{x \to +\infty} f_{n+1}(x)[$. Comme il est établi que f_{n+1} est nulle en 0, et tend vers $+\infty$ pour $x \longrightarrow +\infty$, l'image de $\mathbb{R}_+$ par f_{n+1} est donc égale à $\mathbb{R}_+$, de sorte que f_{n+1} définit en fait une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. **Par suite** :

pour tout $m \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique antécédent $x \in \mathbb{R}_+$ de m par f_{n+1}.

Et si $m > 0$, cet antécédent est strictement positif car $f_{n+1}(0) = 0 \neq m$ (il est donc exclu que l'antécédent de m soit nul).

Ainsi on a montré que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

En conclusion, tout a été démontré pour pouvoir affirmer, par le **principe de récurrence**, que : $\boxed{\text{les résultats de } \mathbf{3.a.}, \mathbf{b.}, \mathbf{c.} \text{ et } \mathbf{d.} \text{ sont avérés pour tout } n \geq 1}$.

.Partie B.

I.B.1. Il est demandé que α_n et β_n soient les **antécédents**, respectivement, de $1 - 1/n$ et 1 par f_{n+1}, **or**, pour tout $n \geq 1$, $1 - 1/n$ et 1 sont deux réels **strictement positifs**, donc, en vertu du **A.3.d.**, il existe, pour $1 - \frac{1}{n}$ d'une part, et 1 d'autre part, un **unique** antécédent par f_n, antécédents que l'on peut noter respectivement α_n et β_n. ***C.Q.F.D.***

◇ On peut noter, en considérant f_1, que : $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$. Pour $n \geq 2$, on vérifie que : $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$, donc, **par la stricte croissance de f_n sur** $\mathbb{R}_+$, les antécédents de ces trois réels par f_n sont «*rangés dans le même ordre*», *i.e.* : **(2)** $0 < \alpha_n < \beta_n$.

• Pour la majoration stricte de β_n par 1 : *il s'agit d'étudier la suite* $(f_n(1))_{n \geq 1}$, et c'est encore **question de récurrence**. Aux rangs 1 et 2, par définition de f_2 et f_1 :

$$f_1(1) = 1, \text{ et } f_2(1) = f_1(1).(f_1(1) + 1) = 1.(1 + 1) = 2$$

puis, si à un rang $n \geq 2$, on suppose que : $f_n(1) > 1$, alors, **par définition de f_{n+1}** :

$$\text{puisque } f_n(1) + \tfrac{1}{n} \geq 0, \quad f_{n+1}(1) = f_n(1).\left(f_n(1) + \tfrac{1}{n}\right) \geq f_n(1) + \tfrac{1}{n} > 1.$$

On a donc, **par récurrence**, que : $\forall n \geq 2,\ f_n(1) > 1$.

Par suite, et parce que $f_n(\beta_n) = 1$: $\forall\, n \geq 2$, $f_n(\beta_n) < f_n(1)$, et donc, par **stricte croissance de f_n sur** $\mathbb{R}_+$: **(3)** $\forall\, n \geq 2$, $\beta_n < 1$.

En conclusion, par (2) et (3) : $\boxed{\forall\, n \geq 2, \quad 0 < \alpha_n < \beta_n < 1}$.

I.B.2.a. Par les définitions de f_{n+1}, sachant que $f_n(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n}$ et $f_n(\beta_n) = 1$:

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \underline{f_n(\alpha_n)}.\left[\underline{f_n(\alpha_n)} + \tfrac{1}{n}\right] = \left[1 - \tfrac{1}{n}\right].\left[\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}\right] = \left[1 - \tfrac{1}{n}\right].1 = 1 - \tfrac{1}{n}$$

$$f_{n+1}(\beta_n) = \underline{f_n(\beta_n)}.\left[\underline{f_n(\beta_n)} + \tfrac{1}{n}\right] = 1.\left[1 + \tfrac{1}{n}\right] = 1 + \tfrac{1}{n}.$$

On a donc : $f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n}$; $f_{n+1}(\beta_n) = 1 + \frac{1}{n}$, et comme : $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ et $1 - \frac{1}{n} > 1$, il vient : $\boxed{\text{pour } n \geq 1, \quad f_{n+1}(\alpha_n) < 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ et } f_{n+1}(\beta_n) > 1}$.

I.B.2.b. Par définition de α_{n+1} et de β_{n+1}, les inégalités précédentes (*c.f.* **B.2.a.**), s'écrivent encore : $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, et $f_{n+1}(\beta_n) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$.
et comme par **stricte croissance** de f_{n+1} : $f_{n+1}(a) < f_{n+1}(b) \Longrightarrow a < b$, il s'ensuit que :
$$\forall n \geq 1, \quad \alpha_n < \alpha_{n+1}, \text{ et } \quad \beta_n > \beta_{n+1}.$$
D'où le résultat : $\boxed{\alpha \text{ est strictement croissante, et } \beta \text{ strictement décroissante}}$.

I.B.2.c. Compte-tenu des résultats de **B.2.1.** et **B.2.b.**, on peut écrire, pour tout $n \geq 1$: $0 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \ldots < \beta_{n+1} < \beta_n < \ldots < \beta_3 < \beta_2 < 1$.

• Pour tout $n \geq 2$, α_n est majoré par β_n, et par 1 (*c.f.* **B.1.**), donc la suite α est **croissante (B.2.b.)** et **majorée par 1**, donc : $\boxed{\alpha \text{ converge vers une limite } L \leq 1}$.

• De même, toujours par la triple inégalité du **B.2.1.**, la suite β est **minorée par 0**. Elle est aussi **décroissante** (*c.f.* **B.2.b.**), donc : $\boxed{\beta \text{ converge vers une limite } L' \geq 0}$.

*Pour ce qui est de montrer que $0 < L \leq L' < 1$, un passage à la limite direct sur la triple inégalité du **B.2.1.** : $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$, valable pour $n \geq 2$, donne : $0 \leq L \leq L' \leq 1$, **(les inégalités strictes se transforment en inégalités larges)** et c'est insuffisant. On doit donc procéder comme suit.*

◇ Le **B.1.** donne pour $n = 2$: $0 < \alpha_2 < \beta_2 < 1$, et pour $n \geq 2$: $\alpha_n < \beta_n$. Comme de plus, α est **croissante**, et β **décroissante**, on en déduit :
$$\textbf{(4)} \quad 0 < \alpha_2 < \alpha_n < \beta_n < \beta_2 < 1,$$
puis, par **passage à la limite**, sachant que les suites α et β sont convergentes, il vient : $0 < \alpha_2 \leq L \leq L' \leq \beta_2 < 1$. Il est donc avéré que : $\boxed{0 < L \leq L' < 1}$.

I.B.3.a. Encore grâce au **B.1.** et à la **stricte monotonie** des suites α et β, on a, pour tous $n \geq 2$ et $p > n$: $0 < \alpha_n < \alpha_p < \beta_p < \beta_n < 1$, et comme $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$ (vu au **B.1**), on peut généraliser : $\forall n \geq 1, \, p > n \; : \; \alpha_n < \alpha_p < \beta_p < \beta_n$.
Ce qui donne, **par passage à la limite pour $p \longrightarrow +\infty$** :
$$\forall n \geq 1 \; : \; \alpha_n < L \leq L' < \beta_n.$$
Il s'ensuit, par la **stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$**, puis par définition de α_n et β_n :
$\forall n \geq 1 \; : \; f_n(\alpha_n) < f_n(L) \leq f_n(L') < f_n(\beta_n)$, *i.e.* $\boxed{1 - \frac{1}{n} < f_n(L) \leq f_n(L') < 1}$.

◇ Si l'on ne garde de la triple inégalité précédente que ce qui concerne le terme général de la suite u^L, on a : $1 - \frac{1}{n} < f_n(L) < 1$, *i.e.* : $1 - \frac{1}{n} < u_n^L < 1$.

Ce qui donne, puisque $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, par application du **théorème d'encadrement** : $1 \leq \lim_{n \to +\infty} u_n^L \leq 1$, *i.e.* $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n^L = 1}$.

◇ Par ailleurs, la **monotonie de la suite u^L** s'étudie en comparant, pour $n \geq 1$, les valeurs de $u_{n+1}^L = f_{n+1}(L)$ et de $u_n^L = f_n(L)$.
Et comme, **par définition de f_{n+1}**, $f_{n+1}(L) = f_n(L).\left(f_n(L) + \frac{1}{n}\right)$, il vient :
$$u_{n+1}^L - u_n^L = f_{n+1}(L) - f_n(L) = f_n(L).\left(f_n(L) + \tfrac{1}{n} - 1\right) = f_n(L).\Big(f_n(L) - \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\Big),$$

et comme on a montré que $1-\frac{1}{n} < f_n(L)$, il s'ensuit que, pour $n \geq 1$: $u^L_{n+1} - u^L_n > 0$, et donc que :

$$\boxed{u^L \text{ est strictement croissante}}.$$

B.3.b. ***Il convient ici de remettre les choses au clair**, compte-tenu de la **complexité croissante** du problème. Ainsi, rappelons que $\boldsymbol{u_1}$ n'est rien d'autre que le premier terme, **choisi arbitrairement**, dans $\mathbb{R}_+^*$, de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, déterminée par $u_1 > 0$, et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n.(u_n + 1/n)$, $(\forall n \geq 1)$, tandis que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est définie, **indépendamment de** $(\boldsymbol{u_n})$, par la donnée de f_1, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_1(x) = x$, et la relation de récurrence : $f_{n+1} = f_n\left(f_n + \frac{1}{n}\right)$, $(\forall n \geq 1)$. De même, $L = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$, qui peut se noter aussi, puisque chaque f_n est bijective (**c.f. A.3.d.**), $L = \lim_{n\to+\infty} f_n^{-1}(1-\frac{1}{n})$, est **indépendant de** $(\boldsymbol{u_n})$ **et donc de** $\boldsymbol{u_1}$. Et voilà l'intérêt de ces rappels, il est de saisir que :*

▌ *le signe de quantité $\boldsymbol{f_n(u_1) - f_n(L)}$, n'a à voir qu'avec la **monotonie de** $\boldsymbol{f_n}$.*

◇ u_1 étant, par définition, **arbitrairement choisi**, si $u_1 \neq L$, deux cas sont à envisager : $u_1 < L$ et $u_1 > L$, et puisque, pour tout $n \geq 1$, $\boldsymbol{f_n}$ **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+$ (*c.f.* **A.3.a.**) : ▌$f_n(u_1)$ et $f_1(L)$ « *sont rangés dans le même ordre* ». Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad f_n(u_1) - f_n(L) \text{ est du signe de } u_1 - L}.$$

◇ Par définition de u^L, $f_n(L) = u^L_n$, et d'après le **A.2.b.**, $f_n(u_1) = u_n$, donc :

▌ $u_n - u^L_n$ est égal à la quantité précédente : $f_n(u_1) - f_n(L)$.

*D'où l'idée d'une **démonstration par récurrence** du résultat, utilisant le lien entre f_{n+1} et f_n.* On va montrer que ***la suite** $\left(|\boldsymbol{u_n - u^L_n}|\right)_{n\geq 1}$ **est croissante**.*

En effet, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_1) - f_{n+1}(L) &= f_n(u_1).(f_n(u_1) + \tfrac{1}{n}) - f_n(L).(f_n(L) + \tfrac{1}{n}) \\ &= f_n^2(u_1) - f_n^2(L) + \tfrac{1}{n}.[f_n(u_1) - f_n(L)] \\ &= [f_n(u_1) - f_n(L)].(f_n(u_1) + f_n(L)) + \tfrac{1}{n}.[f_n(u_1) - f_n(L)] \\ &= [f_n(u_1) - f_n(L)].(f_n(u_1) + f_n(L) + \tfrac{1}{n}). \end{aligned}$$

Ce qui donne, **en valeur absolue** :

(5) ▌ $\forall n \geq 1, \quad |f_{n+1}(u_1) - f_{n+1}(L)| = |f_n(u_1) - f_n(L)|.|f_n(u_1) + f_n(L) + \frac{1}{n}|$.

Or, grâce à **B.3.a.** : $f_n(L) > 1 - \frac{1}{n}$, et $f_n(u_1) \geq 0$ car f_n est **positive** (puisque f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(0) = 0$, *c.f.* **A.3.**), donc :

$$f_n(u_1) + f_n(L) + \tfrac{1}{n} \geq 0 + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{n}, \quad i.e. \quad ▌ f_n(u_1) + f_n(L) + \tfrac{1}{n} \geq 1.$$

Par conséquent, (5) donne :

$$|f_{n+1}(u_1) - f_{n+1}(L)| \geq |f_n(u_1) - f_n(L)|$$

Soit, en revenant à la suite $\left(|u_n - u^L_n|\right)_{n\geq 1}$:

$$▌ |u_{n+1} - u^L_{n+1}| \geq |u_n - u^L_n|.$$

La suite $\left(|u_n - u^L_n|\right)_{n\geq 1}$ est donc **croissante**, et comme son **premier terme** vaut : $u_1 - u^L_1 = u_1 - f_1(L) = u_1 - L$, il vient :

$$\textbf{(6)} \quad \boxed{|u_n - u^L_n| \geq |u_1 - L|}.$$

I.B.3.c. Le résultat précédent **B.3.b.** est valable pour toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de premier terme $u_1 > 0$ et satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n.(u_n + 1/n)$. **En particulier**, on peut appliquer **B.3.b.** pour $u_1 = L'$, auquel cas on notera $u_n = u^{L'}_n$

(en effet, d'après **A.2.b.**, $u_n = f_n(u_1)$, donc si $u_1 = L'$: $u_n = f_n(L') = u_n^{L'}$). Pour $u_1 = L'$, le résultat de **B.3.b.** s'énonce : **(7)** $\left|u_n^{L'} - u_n^L\right| \geq |L' - L|$.

Or, d'après **B.3.a.** : $\lim_{n\to+\infty} u_n^{L'} = \lim_{n\to+\infty} u_n^L = 1$, donc, on peut **passer à la limite pour n tendant vers l'infini dans (7)**, ce qui donne :

$$\left|\lim_{n\to+\infty} u_n^{L'} - \lim_{n\to+\infty} u_n^L\right| \geq |L' - L|, \quad i.e. \quad 0 = |L' - L|.$$

On a ainsi montré que : $\boxed{L = L'}$.

.Partie C.

$\boxed{\textbf{I.C.1.a}}$ En vertu de **B.3.b.**, pour tout $n \geq 1$, $u_n - u_n^L = f_n(u_1) - f_n(L)$ est du signe de $u_1 - L$, donc est **positif** sous l'hypothèse de cette question **C.1.** ($u_1 > L$). Par suite, on peut **écrire (7) sans valeurs absolues**, et l'on obtient :

$$u_n - u_n^L \geq u_1 - L > 0, \text{ donc } u_n > u_n^L.$$

Par suite : $\frac{1}{n} + u_n + u_n^L \geq \frac{1}{n} + 2u_n^L$, et comme $u_n^L = f_n(L)$ est minoré par $1 - \frac{1}{n}$ (*c.f.* **B.3.a.**), on en tire : $\frac{1}{n} + u_n + u_n^L \geq \frac{1}{n} + 2.\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, *i.e.* **(8)** $\boxed{\frac{1}{n} + u_n + u_n^L \geq 2 - \frac{1}{n}}$.

$\boxed{\textbf{I.C.1.b.}}$ *Il a déjà été établi une minoration analogue à celle que l'on demande ici* : si l'on reprend l'inégalité (6), établie au **B.3.b.**, en revenant aux notations u_n et u_n^L, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \left|u_{n+1} - u_{n+1}^L\right| = \left|u_n - u_n^L\right|.\left|u_n + u_n^L + \frac{1}{n}\right|,$$

et **sous l'hypothèse $u_1 > L$**, on peut là encore **ôter les valeurs absolues**. On obtient :

$$u_{n+1} - u_{n+1}^L = \left(u_n - u_n^L\right).\left(u_n + u_n^L + \frac{1}{n}\right),$$

puis par (8), comme $u_{n+1} - u_{n+1}^L \geq 0$, et $u_n - u_n^L \geq 0$:

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} - u_{n+1}^L \geq \left(u_n - u_n^L\right).\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Et enfin, puisque pour $n \geq 2$: $2 - \frac{1}{n} \geq 2 - \frac{1}{2}$, *i.e.* $2 - \frac{1}{n} \geq \frac{3}{2}$, il vient :

$$\textbf{(9)} \quad \boxed{\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} - u_{n+1}^L \geq \frac{3}{2} \times \left(u_n - u_n^L\right)}.$$

◇ **Si l'on utilise (9) pour étudier la monotonie de u**, on en tire une **minoration de u_{n+1}** et il vient, pour $n \geq 2$: **(10)** $u_{n+1} - u_n \geq u_{n+1}^L + \frac{3}{2}.\left(u_n - u_n^L\right) - u_n$.

Et le minorant peut encore s'écrire, ***avec astuce*** :

$$\textbf{(11)} \quad \begin{aligned} u_{n+1}^L + \tfrac{3}{2}.\left(u_n - u_n^L\right) - u_n &= u_{n+1}^L + \tfrac{3}{2}.u_n - \tfrac{3}{2}.u_n^L - u_n \\ &= \left(u_{n+1}^L - u_n^L\right) + \tfrac{1}{2}.\left(u_n - u_n^L\right) \end{aligned}$$

Or, $u_n - u_n^L > 0$ (car $u_1 - L > 0$), et $u_{n+1}^L - u_n^L > 0$ (car $\left(u_{n+1}^L - u_n^L\right)_{n\geq 1}$ est strictement croissante (*c.f.* **B.3.a.**)), donc, par (11), **le minorant dans (10) est positif**. Par conséquent : $\boxed{\text{la suite } u \text{ est croissante}}$.

• D'autre part, **par une récurrence** sans difficulté, on aussi tirer de (9) que :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n - u_n^L \geq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-2}.\left(u_2 - u_2^L\right).$$

et comme $u_2 - u_2^L \geq u_1 - u_1^L$ (*c.f.* **B.3.b.**), *i.e.* $u_2 - u_2^L \geq u_1 - L > 0$, on a :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n - u_n^L \geq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-2}.\left(u_1 - L\right) > 0.$$

On en déduit, **puisque** : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$ et $u_1 - L > 0$, que :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ tend vers l'infini}}.$$

$\boxed{\textbf{I.C.2.a.}}$ Puisque $\lim_{p\to+\infty}\alpha_p = L$, par la **définition de la limite d'une suite**, pour tout $\varepsilon > 0$:

(12) | il exite un rang p_ε tel que : $\forall n \geq p_\varepsilon, \quad |\alpha_n - L| \leq \varepsilon$, *i.e.* $L-\varepsilon \leq \alpha_n \leq L+\varepsilon$.

Or, la suite α est **strictement croissante** (*c.f.* **B.2.b.**), donc on peut **remplacer** $\alpha_n \leq L+\varepsilon$ par $\underline{\alpha_n < L}$ et puisque **par hypothèse** $\boldsymbol{u_1 < L}$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $L-\varepsilon > u_1$(*) et ainsi, (12) s'écrit :

| il existe $p \geq 0$ tel que : $\forall n \geq p, \ u_1 < \alpha_n < L$, et en particulier $\boxed{u_1 < \alpha_p < L}$.

◇ Pour tout $n \geq p$, on a montré que : $\underline{u_1 < \alpha_n < L}$, et puisque pour tout $n \geq 1$ f_n est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+$ (*c.f.* **A.3.a.**), on peut **composer cette inégalité par** $\boldsymbol{f_n}$, ce qui donne : $f_n(u_1) < f_n(\alpha_n) < f_n(L)$, c'est-à-dire : $\boxed{u_n < 1-\frac{1}{n}} < u_n^L$, en utilisant les notations et la définition de α_n.

$\boxed{\textbf{I.C.2.b.}}$ *L'énoncé ne donnant pas d'indication, si ce n'est le* ***C.2.a.****, on peut présumer que la méthode est élémentaire. En effet*, pour tout $n \geq p$, en utilisant la **définition par récurrence de** $\boldsymbol{u_{n+1}}$:

$$\textbf{(13)} \ | \ u_{n+1} - u_n = u_n.(u_n + \tfrac{1}{n}) - u_n = u_n.\big(u_n + \tfrac{1}{n} - 1\big).$$

Or, comme $n \geq p$: $u_n < 1 - \frac{1}{n}$ (*c.f.* **C.2.a.**), donc : | $u_n + \frac{1}{n} - 1 < 0.$

Donc, on déduit de (13), **puisque $\boldsymbol{u_n = f_n(u_1)}$ est positif** : | $u_{n+1} - u_n < 0.$

Ainsi : $\boxed{\text{la suite } u \text{ est décroissante}}$.

◇ La suite u est donc **décroissante** et **minorée par 0** (la suite u est positive), donc $\underline{u \text{ est convergente}}$, et d'après le **A.1.**, sa limite vaut $\underline{0}$ ou $\underline{1}$. Or, comme, **par hypothèse,** $\boldsymbol{u_1 < L}$, comme $\boldsymbol{L < 1}$ (*c.f.* **B.2.c.**), et comme **u est décroissante**, on vérifie que :

$\forall n \geq 1,\ u_n \leq u_1 < L < 1$, et par passage à la limite : | $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq u_1 < L < 1.$

Il est donc **exclu** que u converge vers 1, et par suite, **nécessairement** :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } 0}.$$

PROBLÈME II

.Question préliminaire.

Le résultat demandé, sur les valeurs propres, repose sur le fait que ***l'inversibilité d'une matrice équivaut à celle de sa transposée.***

Voici deux démonstrations élémentaires de cette dernière propriété ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) :

1. La première démonstration utilise la **définition de l'inversibilité d'une matrice carrée** et la propriété de calcul : $\boldsymbol{{}^t(AB) = {}^tB.{}^tA}$.

   Par définition, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

   $$\Big(A \text{ est inversible}\Big) \iff \Big(\text{il existe } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que : } AB = BA = I_n\Big).$$

(*) On choisit usuellement $\varepsilon = (L-u_1)/2$, de sorte que $L-\varepsilon$ est le milieu du segment $[u_1, L]$. Ceci étant, on peut imaginer que le correcteur se contentera, à titre de justification, de ce que la suite u est **strictement croissante, de limite $\boldsymbol{L}$**, sans attendre le détail de la démonstration.

Or, $AB = BA = I_n$ équivaut à : ${}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tI_n$, et donc, **par la propriété citée**, puisqu'aussi ${}^tI_n = I_n$, à : ${}^tB.{}^tA = {}^tA.{}^tB = I_n$.
Par conséquent (dans ce qui suit, C existe : c'est ${}^tB$) :

$$\Big(A \text{ est inversible}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists\ C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que : } C.{}^tA = {}^tA.C = I_n\Big)$$

On a donc montré que : $\Big(A \text{ est inversible}\Big) \Longleftrightarrow \Big({}^tA \text{ est inversible}\Big)$.

La seconde démonstration est plus simple encore :

2. Puisque l'on sait que **une matrice et sa transposée ont même rang**, et que pour toute matrice carrée d'ordre n, $\boldsymbol{A}$ **est inversible si et seulement si** $\boldsymbol{A}$ **est de rang** $\boldsymbol{n}$, il vient :

$$\Big(A \text{ inversible}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\text{rg}(A) = n\Big) \Longleftrightarrow \Big(\text{rg}({}^tA) = n\Big) \Longleftrightarrow \Big({}^tA \text{ inversible}\Big)$$

Revenons à la question posée, et montrons que toute valeur propre de $A \in \mathcal{E}$ est valeur propre de ${}^tA$ et réciproquement, ce qui établira le résultat.

◇ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}\Big(\lambda \text{ est valeur propre de } A\Big) &\Longleftrightarrow \Big(\text{il existe } X \in \mathbb{C}^n,\ X \neq 0 \text{ tel que : } AX = \lambda X\Big)\\ &\Longleftrightarrow \Big((A - \lambda.I)X = 0 \text{ admet une solution non nulle}\Big)\\ &\Longleftrightarrow \Big((A - \lambda.I) \text{ non-inversible}\Big).\end{aligned}$$

Et de même, on a :

$$\Big(\lambda \text{ est valeur propre de } {}^tA\Big) \Longleftrightarrow \Big(({}^tA - \lambda.I) \text{ non-inversible}\Big).$$

Puisque, par la propriété établie précédemment, **l'inversibilité de** $(\boldsymbol{A} - \lambda.\boldsymbol{I})$ **équivaut à celle de sa transposée, égale à** ${}^t\boldsymbol{A} - \lambda.\boldsymbol{I}$, on en déduit le résultat :

$$\Big(\lambda \text{ valeur propre de } A\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lambda \text{ valeur propre de } {}^tA\Big),\ i.e.\ \boxed{\begin{array}{c}A \text{ et } {}^tA \text{ ont les}\\ \text{mêmes valeurs propres}\end{array}}.$$

.Partie A.

$\boxed{\textbf{II.A.1.}}$ Si on note : $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n\\ 1 \le j \le n}}$, et pour $D = \text{Diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, de la même façon : $D = (d_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n\\ 1 \le j \le n}}$, alors on peut rappeler la **formule de calcul du cœfficient générique**, ligne i, colonne j, des matrices produits $\boldsymbol{MD}$ et $\boldsymbol{DM}$:

(14) $(MD)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} d_{k,j}$, et **(15)** $(DM)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} m_{k,j}$.

Or, puisque $\boldsymbol{D}$ **est diagonale**, dans la somme de (14), le cœfficient $d_{k,j}$ est nul s'il est hors-diagonale, *i.e.* si $k \neq j$, et vaut, si $k = j$, $d_{j,j} = \lambda_j$, donc **la somme se réduit à un seul terme non nul, pour** $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}$, ce qui donne :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad (MD)_{i,j} = m_{i,j} d_{j,j} = m_{i,j}.\lambda_j.$$

De même, pour (15), $d_{i,k} \neq 0$ seulement si $i = k$, et donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad (DM)_{i,j} = d_{i,i} m_{i,j} = \lambda_i.m_{i,j}.$$

De façon plus lisible, on a montré que :

$\boxed{\text{La multiplication à droite par } D \text{, a pour effet, pour tout } 1 \le j \le n \text{, de multiplier la } j\text{-ième colonne de } M \text{, par } \lambda_j}$

$$MD = \begin{pmatrix} m_{1,1}\lambda_1 & m_{1,2}\lambda_2 & \ldots & m_{1,n}\lambda_n \\ m_{2,1}\lambda_1 & m_{2,2}\lambda_2 & \ldots & m_{2,n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1}\lambda_1 & m_{n,2}\lambda_2 & \ldots & m_{n,n}\lambda_n \end{pmatrix}$$

Et de façon semblable :

$$\boxed{\text{La multiplication à gauche par } D\text{, a pour effet, pour tout } 1 \leq i \leq n\text{, de multiplier la } i\text{-ième colonne de } M\text{, par } \lambda_i} \quad DM = \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{1,1} & \lambda_1 m_{1,2} & \dots & \lambda_1 m_{1,n} \\ \lambda_2 m_{2,1} & \lambda_2 m_{2,2} & \dots & \lambda_2 m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n m_{n,1} & \lambda_n m_{n,2} & \dots & \lambda_n m_{n,n} \end{pmatrix}$$

II.A.2. P désignant une matrice inversible, **par multiplication à gauche par P^{-1}** :

$$\textbf{(16)} \quad AP = PD \iff P^{-1}AP = D.$$

Puis, en tant que matrice **inversible** de $\mathcal{E} = \mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$:

> P peut être interprétée comme une matrice de passage de $\mathcal{B}$, base canonique de $\mathbb{C}^n$, à la base $\mathcal{B}'$, constituée des n vecteurs colonnes de P.

• **Dans cette interprétation**, si on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A, *i.e.* tel que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}[f]$, alors :

$$D = P^{-1}AP \text{ est la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}' : \ D = \text{mat}_{\mathcal{B}'}[f].$$

Enfin, **D étant diagonale**, $D = \text{Diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, si on note $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ et, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, P_j la matrice colonne des coordonnées de e'_j dans $\mathcal{B}$, alors :

$$\textbf{(17)} \quad (D = \text{mat}_{\mathcal{B}'}[f]) \iff (\forall\, 1 \leq j \leq n, \quad f(e'_j) = \lambda_j . e'_j \ \ i.e. \ \ AP_j = \lambda_j P_j).$$

<u>**En conclusion**</u>, on a donc, par (16) et (17), l'équivalence suivante :

$$(AP = PD) \iff (\forall\, 1 \leq j \leq n, \quad AP_j = \lambda_j P_j),$$

Ce qui est bien l'expression du résultat demandé :

$$\boxed{AP = PD \text{ équivaut au fait que pour tout } j\text{, le } j\text{-ième vecteur colonne de } P\text{, } P_j\text{, est propre pour } A \text{ et la valeur propre } \lambda_j}.$$

II.A.3. *Pour ce qui suit, notons que :*

> *On travaille sur une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donnée, admettant n valeurs propres distinctes, donc, en vertu des* ***Rappels et résultats admis****, A est* <u>*diagonalisable*</u>*.*
> *Ainsi,* <u>*il existe bien*</u> *au moins une matrice P telle que spécifiée dans l'énoncé : il faut et il suffit de prendre une* **matrice de passage** *de la base canonique à une base de vecteurs propres pour A, pourvu que l'on s'assure que, pour tout j, le j-ième vecteur de la nouvelle base est bien propre pour la valeur propre λ_j, c'est-à-dire, pourvu que l'on range les vecteurs propres dans le bon ordre .*

On notera en particulier, qu'une matrice P, telle que décrite par l'énoncé est nécessairement **inversible** (c'est une matrice de passage donc P^{-1} existe), et, d'après **A.2.**, vérifie l'égalité :

$$\textbf{(18)} \quad AP = PD.$$

Enfin, puisque d'après la **question préliminaire**, A et ${}^tA$ ont les **mêmes valeurs propres**, les remarques précédentes - qui reposent sur le fait que A appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$ et admet n valeurs propres distinctes (égales à celles de D), s'appliquent de même à ${}^tA$ et donc <u>il existe aussi</u> une matrice Q telle que celle de l'énoncé, et pareillement, Q est **inversible** et vérifie l'égalité analogue de (18) :

$$\textbf{(19)} \quad {}^tAQ = QD.$$

II.A.3.a. On a montré que la matrice Q vérifie (19), et on constate que **par transposition** :

$$(19) \ \ ({}^tA.Q = Q.{}^tD) \iff \left({}^t({}^tA.Q) = {}^t(Q.{}^tD)\right) \iff ({}^tQ.{}^t({}^tA) = {}^tD.{}^tQ).$$

Or, $\underline{{}^t({}^tA) = A}$ (propriété de la transposition), et ${}^tD = D$, car **D est diagonale**, donc ${}^tQ.{}^t({}^tA) = {}^tD.{}^tQ$ s'écrit aussi :

$$\boxed{{}^tQ.A = D.{}^tQ}.$$

II.A.3.b. Dans la **question préliminaire**, on a rappelé que :

$$(Q \text{ inversible }) \iff ({}^tQ \text{ inversible }).$$

La matrice Q considérée ici étant inversible, **en multipliant à gauche et à droite** l'égalité obtenue au **A.3.a. par** $({}^t\boldsymbol{Q})^{-1}$, on obtient :

$$\underbrace{({}^tQ)^{-1}.({}^tQ}_{=I}A).({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}.(D\underbrace{{}^tQ).({}^tQ)^{-1}}_{=I}, \text{ soit : } \textbf{(20)} \quad A.({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}.D.$$

◇ L'égalité obtenue est du type étudié en **A.2.** "$AP = PD$", ainsi, d'après **A.2.**, (20) équivaut au fait que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

le j-ième vecteur colonne de $({}^tQ)^{-1}$ (notons-le $\left[({}^tQ)^{-1}\right]_j$) est propre pour A, associé à la valeur propre λ_j.

Peut-on avoir $({}^tQ)^{-1} = P \times \Delta$? ***Oui !***, car, aussi, pour tout j ($1 \leq j \leq n$), **le j-ième vecteur de P, noté P_j, est propre pour A, associé à** λ_j, donc, pour tout j compris entre 1 et n :

$\left[({}^tQ)^{-1}\right]_j$ et P_j sont tous deux éléments du *s.e.v.* propre, noté E_j, relatif à λ_j.

Or, chaque *s.e.v.* propre E_j est de dimension 1 (*c.f.* **Rappels**), donc :

$\left[({}^tQ)^{-1}\right]_j$ et P_j sont colinéaires,

et comme $P_j \neq 0$ (c'est un vecteur propre), **la colinéarité équivaut à l'existence**, pour chaque j compris entre 1 et n, **d'un réel**, δ_j, tel que : $\left[({}^tQ)^{-1}\right]_j = \delta_j.P_j$.

(et δ_j est non nul également puisque $\left[({}^tQ)^{-1}\right]_j \neq 0$ car c'est un vecteur propre de ${}^tQ$).

Ainsi, on a montré que :

il existe un n-uplet $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, tel que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne de $({}^tQ)^{-1}$ est le produit de la j-ième colonne de P par δ_j.

Ce qui **se traduit matriciellement**, d'après l'interprétation donnée au **A.1.** du produit MD, par le fait que : $({}^tQ)^{-1} = P \times \Delta$, si l'on pose $\Delta = \text{Diag}\,[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n]$.

Et Δ est **inversible**, car on a montré que ses cœfficients diagonaux, δ_j, sont non nuls.

On peut donc conclure : $\boxed{\text{il existe une matrice diagonale } \Delta = \text{Diag}\,[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n], \text{ inversible et telle que } ({}^tQ)^{-1} = P \times \Delta}$.

II.A.3.c. En multipliant l'égalité $({}^tQ)^{-1} = P.\Delta$, par P^{-1} à gauche, et par ${}^tQ$ à droite, il vient :

$$\left(({}^tQ)^{-1} = P.\Delta\right) \iff \left(P^{-1}.\underbrace{({}^tQ)^{-1}.{}^tQ}_{=I} = \underbrace{P^{-1}.P}_{=I}.\Delta.{}^tQ\right) \iff \left(P^{-1} = \Delta.{}^tQ\right)$$

Et donc l'égalité établie au **A.3.b.** est équivalente à : **(21)** $\boxed{\Delta.{}^tQ = P^{-1}}$.

Pour établir ensuite le lien entre la formule préliminaire (21) et le résultat demandé, il convient de noter que ce dernier fait intervenir les ***cœfficients de P, Q et Δ****, dans une expression proche, sinon égale, à l'expression du cœfficient générique d'un* ***produit matriciel****, qu'il conviendrait de reconnaître.*

Pour arriver plus sûrement au résultat, *on cherchera d'abord à reconnaître ce cœfficient générique pour se ramener à (21), plutôt que le contraire (ce qui revient à «**partir du plus compliqué pour aller au plus simple**»), démarche* a priori *la plus raisonnable.*

◇ On reconnaît, (***on doit reconnaître !***), dans la relation proposée, qui s'écrit aussi : $\delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \delta_i.p_{k,i}.q_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \underline{p_{k,i}.\delta_i}.q_{k,i}$, le cœfficient générique, ligne k, colonne i, du produit $P.\Delta$: $(P.\Delta)_{k,i} = p_{k,i}\delta_i$ (*c.f.* **A.1.** : $(MD)_{i,j} = m_{i,j}\lambda_j$).

On peut ainsi **poursuivre la réécriture** du membre de gauche de l'égalité proposée, en utilisant ensuite la **définition des cœfficients de ^tQ** en fonction de ceux de Q :

$$\delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \underline{p_{k,i}.\delta_i}.\underline{\underline{q_{k,i}}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{(P.\Delta)_{k,i}}.\underline{\underline{(Q)_{k,i}}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{(P.\Delta)_{k,i}}.\underline{\underline{(^tQ)_{i,k}}}\ .$$

On achève alors en **reconnaissant** dans la dernière somme, moyennant l'interversion $(P.\Delta)_{k,i}.(^tQ)_{i,k} = (^tQ)_{i,k}.(P.\Delta)_{k,i}$, l'expression du **cœfficient diagonal, ligne i, colonne i, du produit $(P\Delta).^tQ$**. Par ce constat, on écrit :

$$\textbf{(22)}\quad \delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}(P.\Delta)_{k,i}.(^tQ)_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}(^tQ)_{i,k}.(P.\Delta)_{k,i} = \left(^tQ.P.\Delta\right)_{i,i}\ .$$

Or, **le produit $^tQ.P.\Delta$ est connu**. En effet, **à partir de (21)**, il vient, en multipliant à gauche par P : **(23)** $P.\Delta.^tQ = I$.

En multipliant à droite par $\left(^tQ\right)^{-1}$, on en déduit que :

(24) $\underline{P.\Delta \text{ est l'inverse de } ^tQ}$, et donc aussi : $^tQ.P.\Delta = I$.

De l'égalité $^tQ.P.\Delta = I$, on tire que **les cœfficients diagonaux de $^tQ.P.\Delta$ sont égaux à 1**, et, par (24), que :

$$\forall\, 1 \le i \le n, \quad \delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{k,i} = \left(^tQ.P.\Delta\right)_{i,i} = 1.$$

$\boxed{\text{II.A.4.}}$ **(Application)** *Le premier résultat à établir est quasiment du* ***cours*** *et se traite rapidement :*

$$(A \text{ inversible}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A - \lambda.I \text{ inversible} \\ \text{pour } \lambda = 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \text{ n'est pas valeur} \\ \text{propre de } A \end{pmatrix}.$$

Donc, si les valeurs propres de A sont toutes **non nulles** : $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

On note alors : $A^{-1} = (b_{i,j})$.

◇ *De même, c'est parce que les valeurs propres de A sont toutes non nulles que la somme $\sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}q_{j,k}}{\lambda_k}$ a un sens (on peut diviser par λ_k). On va maintenant «**analyser cette somme**», comme on l'a fait précédemment pour $\delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{k,i}$.*

La somme présentée fait intervenir, les cœfficients de P, Δ, Q et les réels $1/\lambda_k$. **Or**, $1/\lambda_k$ est le **cœfficient générique de la matrice D^{-1}**, en effet, rappelons que :

les valeurs propres de A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, étant, par hypothèse, non nulles, $D = \text{Diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ est inversible, et, comme pour toute matrice diagonale inversible : $\boldsymbol{D^{-1}} = \text{Diag}\,[\mathbf{1/\lambda_1}, \ldots, \mathbf{1/\lambda_n}]$.

Grâce aux formules du A.1., on reconnaît donc que :

$$\delta_k p_{i,k} = p_{i,k}\delta_k = (P\Delta)_{i,k}, \quad \text{et} \quad q_{j,k}.\frac{1}{\lambda_k} = (Q)_{j,k}.(D^{-1})_{k,k} = (QD^{-1})_{j,k}.$$

Ce qui donne la réécriture :

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}q_{j,k}}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} (p_{i,k}\delta_k).(q_{j,k}.\frac{1}{\lambda_k}) = \sum_{k=1}^{n} (P\Delta)_{i,k}.(QD^{-1})_{j,k},$$

et, **de nouveau**, il s'agit de **passer à la transposée** pour $\boldsymbol{QD^{-1}}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}q_{j,k}}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} (P\Delta)_{i,k}.(QD^{-1})_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} (P\Delta)_{i,k}.\left({}^t(QD^{-1})\right)_{k,j},$$

afin de reconnaître finalement que :

$$\textbf{(25)} \quad \sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}q_{j,k}}{\lambda_k} = \left(P\Delta.{}^t(QD^{-1})\right)_{i,j}.$$

Or, comme D^{-1} est diagonale : ${}^t(D^{-1}) = D^{-1}$, et $\underline{{}^t(QD^{-1})} = {}^t(D^{-1}).{}^tQ = \underline{D^{-1}.{}^tQ}$, donc, par (25) :

la somme proposée est le terme générique du produit $P\Delta.{}^t(QD^{-1}) = P\Delta.D^{-1}.{}^tQ$.

- On aura donc établi le résultat demandé si l'on montre que : $A^{-1} = P.\Delta.D^{-1}.{}^tQ$.

Or, l'égalité du **A.3.** : ${}^tQA = D{}^tQ$ équivaut à $A = ({}^tQ)^{-1}D{}^tQ$, puis par **passage à l'inverse** :

$$A^{-1} = \left(({}^tQ)^{-1}D{}^tQ\right)^{-1} = \underline{({}^tQ)^{-1}}.D^{-1}.{}^tQ,$$

et comme, par (24), $\underline{({}^tQ)^{-1}} = P.\Delta$, on vérifie que de fait : $A^{-1} = P.\Delta.D^{-1}.{}^tQ$, ce qui établit le résultat :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (A^{-1})_{i,j} = b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}q_{j,k}}{\lambda_k}}.$$

.Partie B.

$\boxed{\textbf{II.B.1.a.}}$ Il s'agit de l'application des **formules de duplication**. Ici, on appliquera :

$2\cos a.\cos b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, avec $a = \frac{m.\pi}{n+1}$ et $b = \frac{km.\pi}{n+1}$. $\boldsymbol{C.Q.F.D.}$

$\boxed{\textbf{II.B.1.b.}}$ Pour $1 \leq k \leq n$, **notons** v_k^m la k-ième composante de V_m, (on a donc : $v_k^m = \sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$), et **vérifions que $\boldsymbol{AV_m}$ est colinéaire à $\boldsymbol{V_m}$**, par un calcul direct.

La k-ième composante de AV_m, $(AV_m)_k$, $1 \leq k \leq n$, est donnée par la formule :

$(AV_m)_k = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}v_l^m$, si on note : $A = (a_{i,j})$.

Et en distinguant suivant les valeurs de k, on vérifie que :

- <u>pour $k=1$</u> : seuls les deux premiers cœfficients de la première ligne de A sont non nuls, et en conséquence : $(AV_m)_1 = a_{1,1}v_1^m + a_{1,2}v_2^m$. Puis, en remplaçant $a_{1,2}$ et $a_{1,2}$ par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}(AV_m)_1 &= a_{1,1}v_1^m + a_{1,2}v_2^m \\ &= 2\sin\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right) - \sin\left(\tfrac{2m\pi}{n+1}\right) \\ &= 2\sin\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right) - 2\sin\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right)\cos\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right) \quad (\sin 2x = 2\sin x\cos x)\end{aligned}$$

<u>donc</u> : $(AV_m)_1 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right).\sin\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)$.

- <u>pour $2 \leq k \leq n-1$</u> : les cœfficients non nuls de la k-ième ligne de A sont $a_{k,k-1}$, $a_{k,k}$ et $a_{k,k+1}$, et on obtient :

$$(AV_m)_k = a_{k,k-1}v_{k-1}^m + a_{k,k}v_k^m + a_{k,k+1}v_{k+1}^m$$

$$\begin{aligned}(AV_m)_k &= -1.\sin\left(\tfrac{(k-1)m\pi}{n+1}\right) + 2\sin\left(\tfrac{km\pi}{n+1}\right) - 1.\sin\left(\tfrac{(k+1)m\pi}{n+1}\right)\\ &= 2\sin\left(\tfrac{km\pi}{n+1}\right) - \left[\sin\left(\tfrac{(k+1)m\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\tfrac{(k-1)m\pi}{n+1}\right)\right]\\ &= 2\sin\left(\tfrac{km\pi}{n+1}\right) - 2\cos\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right).\sin\left(\tfrac{km\pi}{n+1}\right) \quad \text{(d'après } \mathbf{B.1.a.}\text{)}\end{aligned}$$

donc : $(AV_m)_k = 2\left(1-\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right).\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$.

- pour $k = n$:

$$\begin{aligned}(AV_m)_n &= a_{n,n-1}v_{n-1}^m + a_{n,n}v_n^m = -1.\sin\left(\tfrac{(n-1)m\pi}{n+1}\right) + 2\sin\left(\tfrac{nm\pi}{n+1}\right)\\ &= 2\sin\left(\tfrac{nm\pi}{n+1}\right) - \left[\underline{\sin\left(\tfrac{(n+1)m\pi}{n+1}\right)} + \sin\left(\tfrac{(n-1)m\pi}{n+1}\right)\right]\end{aligned}$$

où l'on a **rajouté** de force dans l'expression le terme **nul**, $\sin\left(\frac{(n+1)m\pi}{n+1}\right) = \sin(m\pi)$, ce qui permet, après application de la formule du **B.1.** pour $k = m$, de conclure que :

$$(AV_m)_n = 2\left(1-\cos\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right)\right).\sin\left(\tfrac{nm\pi}{n+1}\right).$$

Au vu des trois formules obtenues, pour les différentes valeurs de k, il apparaît :

si on pose $\lambda_m = 2\left(1-\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right)$, que : $\forall\, 1 \le k \le n, \quad (AV_m)_k = \lambda_m v_k^m$.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\begin{array}{l} AV_m = \lambda_m V_m \text{ i.e. , pour tout } m,\ 1 \le m \le n,\ V_m \text{ est un vecteur}\\ \text{propre de } A \text{, associé à la valeur propre : } \lambda_m = 2\left(1-\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right)\right)\end{array}}.$$

Pour la suite, on pourra profiter de la réécriture possible de λ_m :

$$\textbf{(26)}\quad \lambda_m = 2\left(1-\cos\left(\tfrac{m\pi}{n+1}\right)\right) = 4.\sin^2\left(\tfrac{m\pi}{2(n+1)}\right),$$

où l'on a utilisé que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$.

II.B.1.c. Pour tout $1 \le m \le n$: $0 \le \frac{1}{2(n+1)}\pi \le \frac{m}{2(n+1)}\pi \le \frac{n}{2(n+1)}\pi < \frac{1}{2}\pi$, donc $\left\{\frac{m\pi}{2(n+1)}\right\}_{1\le m\le n}$ est une **famille de n réels distincts** de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme la fonction sinus carré est **strictement monotone** sur cet intervalle, il en est de même pour la famille $\left\{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2(n+1)}\right)\right\}_{1\le m\le n}$, et aussi, puisque la fonction sinus **ne s'annule pas** sur cet intervalle, la famille ne contient pas 0.

En conséquence, par (26) :

la famille $\{\lambda_m\}_{1\le m\le n}$, est une famille de n réels **distincts**, qui sont chacun valeur propre de A, d'après **B.1.b.**.

A étant d'ordre n (*i.e.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), A admet **au plus** n valeurs propres, et donc **on peut conclure** :

$\boxed{A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes, non nulles, égales à } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$.

On notera que par suite :

les résultats de la **Partie A** s'appliquent ici à A, y compris **A.4.**.

II.B.2.a. Puisque la matrice P doit être constituée de vecteurs colonnes P_1, P_2, ..., P_n propres respectivement pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de A, il est **naturel et légitime**, en vertu du **B.1.b.**, de choisir pour matrice P la matrice constituée des vecteurs colonnes $V_1, V_2, \ldots, V_n$, dans cet ordre. Ce qui revient à poser :

$$\boxed{P = (p_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}, \quad \text{avec :} \quad p_{i,j} = v_i^j = \sin\left(\tfrac{ij\pi}{n+1}\right)}.$$

• Pour ce qui est du choix de Q, puisque l'on peut constater que : $A = {}^tA$, **on est en droit de choisir $Q = P$**. On a donc aussi :

$$\boxed{Q = (q_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}, \quad \text{avec :} \quad q_{i,j} = \sin\left(\tfrac{ij\pi}{n+1}\right)}.$$

II.B.2.b. *Question sans surprise, on ne peut plus* ***classique*** : La somme proposée est la **partie réelle** de $\sum_{k=1}^n e^{2ikx}$, somme des n premiers termes de la **suite géométrique**, de raison e^{2ix} et de premier terme e^{2ix}.
La raison étant **différente de 1** (car $x \in \,]0,\pi[$, donc $2x \in \,]0,2\pi[$ et $e^{2ix} \neq 1$), on a donc, par une **formule de cours** : $\sum_{k=1}^n e^{2ikx} = e^{2ix}.\frac{1-e^{2inx}}{1-e^{2ix}}$.
On **extrait** ensuite la **partie réelle** de cette expression *d'une façon tout aussi convenue* :

$$e^{2ix}.\frac{1-e^{2inx}}{1-e^{2ix}} = e^{2ix}.\frac{e^{2inx}-1}{e^{2ix}-1} = e^{2ix}.\frac{e^{inx}.(e^{inx}-e^{-inx})}{e^{ix}.(e^{ix}-e^{-ix})}$$
$$= e^{i(n+1)x}.\frac{(e^{inx}-e^{-inx})/(2i)}{(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)} = e^{i(n+1)x}.\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.$$

puis, en revenant aux parties réelles :

$$\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \mathrm{Re}\Big[\sum_{k=1}^n e^{2ikx}\Big] = \mathrm{Re}\left[e^{i(n+1)x}.\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}\right] = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.\mathrm{Re}\left[e^{i(n+1)x}\right]$$

D'où le résultat :

$$\textbf{(27)} \quad \boxed{\forall x \in \,]0,\pi[, \quad \sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.\cos\left[(n+1)x\right]}.$$

◇ Par la formule : $\cos(2kx) = \cos^2(kx) - \sin^2(kx) = 1 - 2\sin^2(kx)$, ou encore : $\sin^2(kx) = \frac{1}{2}\left[1-\cos(2kx)\right]$, le lien est facile à faire. Pour tout $x \in \,]0,\pi[$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin^2(kx) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left[1-\cos(2kx)\right] = \frac{1}{2}.\left(\sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \cos(2kx)\right),$$

donc, par (27) :

$$\textbf{(28)} \quad \boxed{S_n(x) = \frac{1}{2}.\left(n - \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.\cos(n+1)x\right)}.$$

II.B.2.c. Par la formule du **A.3.c.**, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$: $\delta_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^n p_{k,i}q_{k,i}}$
(la division par la somme est licite car $\delta_i.\sum_{k=1}^n p_{k,i}q_{k,i} = 1$ implique qu'elle est non nulle). **Compte-tenu du choix de P et Q** (*c.f.* **B.2.a.**), on a donc :

$$\textbf{(29)} \quad \underline{\delta_i} = \left[\sum_{k=1}^n \sin\left(\tfrac{ki\pi}{n+1}\right).\sin\left(\tfrac{ki\pi}{n+1}\right)\right]^{-1} = \left[\sum_{k=1}^n \sin^2\left(\tfrac{ki\pi}{n+1}\right)\right]^{-1} = \underline{\left[S_n\left(\tfrac{i\pi}{n+1}\right)\right]^{-1}}.$$

Or, puisque, pour i compris entre 1 et n, $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{i\pi}{n+1} \leq \frac{n\pi}{n+1} < \pi$, (29) s'applique avec $x = \frac{i\pi}{n+1}$ et donne :

$$\textbf{(30)} \quad S_n\left(\tfrac{i\pi}{n+1}\right) = \tfrac{1}{2}.\left(n - \tfrac{\sin(\frac{ni\pi}{n+1})}{\sin(\frac{i\pi}{n+1})}.\cos\tfrac{(n+1)i\pi}{n+1}\right),$$

et **pour montrer que δ_i est indépendant de i**, on peut utiliser que :
$\cos\frac{(n+1)i\pi}{n+1} = \cos(i\pi) = (-1)^i$, et $\sin(\frac{ni\pi}{n+1}) = \sin\left(i\pi - \frac{i\pi}{n+1}\right)$ d'où l'on tire, grâce à $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$: $\sin(\frac{ni\pi}{n+1}) = (-1)^{i+1}\sin\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$.

Par substitution dans (30) on obtient alors :

$$\textbf{(31)}\quad S_n\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{2}.\left[n - (-1)^{i+1}.(-1)^i\right] = \frac{n+1}{2}.$$

Ceci étant, le **plus astucieux**, pour arriver à ce résultat, est d'utiliser la formule du **A.1.**, avec $m = i$ et $k = n+1$, pour réexprimer, dans (31) le produit $\sin(\frac{i\pi}{n+1}).\cos\frac{(n+1)i\pi}{n+1}$.

On termine, en conjuguant (29) et (31), ce qui donne :

$$\boxed{\forall\, 1 \leq i \leq n, \quad \delta_i \text{ est indépendant de } i,\ \delta_i \text{ vaut } \frac{2}{n+1}}.$$

II.B.3. Par la formule du **A.4.**, pour tous i et j compris entre 1 et n :

$$\left(A^{-1}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}q_{j,k}}{\lambda_k}.$$

ce qui compte-tenu de ce que :

$$\delta_k = \frac{2}{n+1}, \qquad \lambda_k = 4.\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$$
$$p_{i,k} = \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \qquad q_{j,k} = \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right)$$

donne :

$$\boxed{\left(A^{-1}\right)_{i,j} = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right).\sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right)}{2.\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}}.$$

ÉPREUVE B

Durée 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Rappels.

• On dit qu'une variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, si elle prend les valeurs 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $(1-p)$.

• Si U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant sur $\mathbb{R}$ des densités respectives f_U et f_V, alors une densité de la variable aléatoire $U+V$ est donnée par la formule :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t-x) \times f_V(x)dx$$

PARTIE I

Dans toute cette partie p est un réel qui vérifie : $0 < p < 1$. On note X la variable de Bernoulli de paramètre p et S_n la variable binomiale de paramètres (n,p) où n est un entier naturel non nul.

1. En utilisant la formule de Bienaymé-Tchebichev, justifier pour tout ε strictement positif la relation :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

2. Pour tout t réel strictement positif, on pose :

$$g(t) = E[e^{-tX}]$$

2.a. Calculer $g(t)$ en fonction de t et de p.

2.b. Justifier l'égalité :

$$E\left[\exp\left(-t\frac{S_n}{n}\right)\right] = \left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

3. Dans toute la fin de cette partie, a est un réel qui vérifie : $0 < a < p < 1$ et t est un réel strictement positif fixé.

3.a. Montrer l'égalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P\left[\exp\left(-t\left[\frac{S_n}{n} - a\right]\right) \geq 1\right]$$

3.b. Montrer que, pour toute variable aléatoire Y prenant un nombre fini de valeurs positives, on a l'inégalité :

$$P(Y \geq 1) \leq E[Y]$$

3.c. Déduire de ce qui précède :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

4.a. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation :

$$u(x) = ax + \ln(1 - p + pe^{-x})$$

Construire le tableau des variations de u et montrer que u atteint en un point x_0 de $\mathbb{R}^{*+}$ un minimum que l'on peut noter $-M$, où M est un réel strictement positif.

4.b. Après avoir justifié la relation :

$$\ln\left(e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right) = n\,u\left(\frac{t}{n}\right)$$

justifier l'inégalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nM}$$

4.c. Donner une interprétation probabiliste de ce résultat pour : $a = p - \varepsilon$, où ε est un réel strictement positif.

PARTIE II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul, X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance m et un écart-type σ ; on considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que X. On définit alors les variables aléatoires réelles :

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{et} \quad S_n = \frac{Y_n}{n}$$

Question préliminaire : Déterminer l'espérance et la variance de S_n. Quelle est la limite de la variance de S_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat en termes probabilistes.

A. *Un résultat d'approximation à l'aide de la loi de Bernoulli.*

Dans cette sous-partie, X suit une loi de Bernoulli de paramètre m $(0 \leq m \leq 1)$.

A.1. Déterminer les valeurs prises par S_n et sa loi.

A.2. Dans cette question, u désigne une fonction continue sur $[0,1]$. K est un réel strictement positif, tel que, pour tout x de $[0,1]$ on ait :

$$|u(x)| \leq K$$

A.2.a. Expliciter la quantité :

$$E[u(S_n)] - u(m)$$

sous forme d'une somme indexée par un entier k variant entre 0 et n.

A.2.b. Soit ε un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif, tel que, pour tout élément x de $[0,1]$, on ait l'implication :

$$(|x - m| < \alpha) \rightarrow \left(|u(x) - u(m)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On note alors :

$$I_1 = \left\{k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n \text{ et } \left|\frac{k}{n} - m\right| < \alpha\right\}$$

$$\text{et} \quad I_2 = \left\{k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n \text{ et } \left|\frac{k}{n} - m\right| \geq \alpha\right\}$$

En remarquant que tout entier k compris entre 1 et n est élément, soit de I_1, soit de I_2, montrer que :

$$\left|E[u(S_n)] - u(m)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + 2K \times P[|S_n - m| \geq \alpha]$$

A.2.c. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que, pour tout réel ε strictement positif, on a, pour n suffisamment grand :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k u\left(\frac{k}{n}\right) m^k (1-m)^{n-k} - u(m)\right| < \varepsilon$$

B. *Un calcul de limite à l'aide de la loi exponentielle.*
Dans cette question, m est un réel strictement positif et X suit une loi exponentielle de paramètre $1/m$.

B.1.a. Donner l'espérance et l'écart-type de X en fonction de m. En déduire l'espérance et la variance de S_n en fonction de m et de n.

B.1.b. Montrer par récurrence sur n qu'une densité de Y_n est donnée par la formule :

$$\begin{cases} f_n(x) &= \dfrac{1}{(n-1)!} \times \dfrac{x^{n-1}}{m^n} \exp(-\dfrac{x}{m}) \quad \text{si} \quad x \geq 0 \\ f_n(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

B.2. Dans cette question, u désigne une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ par une constante K ; ε est un réel strictement positif et on notera α un réel strictement positif tel que l'implication suivante soit vraie pour tout x réel positif :

$$(|x - m| < \alpha) \Longrightarrow \left(|u(x) - u(m)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

f est une densité d'une variable Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, d'espérance m et de variance V.

B.2.a. Montrer que la variable aléatoire réelle $u(Z)$ admet une espérance.

B.2.b. En s'inspirant de la méthode suivie au A.2.b., justifier l'inégalité :

$$\left|E[u(Z)] - u(m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2K \times \frac{V}{\alpha^2}$$

B.2.c. En déduire que la suite de terme général $E[u(S_n)]$ converge vers $u(m)$.

B.2.d. Justifier :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} \times \int_0^{+\infty} u(x) \left(\frac{nx}{m}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{nx}{m}\right) \times \frac{n}{m} dx\right] = u(m)$$

<u>PARTIE III</u> *Une formule d'inversion pour la transformée de Laplace.*
Dans toute cette partie f est une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ et on suppose que c'est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

1.a. Montrer que, pour tout n entier naturel et tout λ réel strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à A, on ait :

$$0 \leq e^{-\lambda x} x^n \leq 1$$

1.b. En déduire que, pour tout n entier naturel, on peut poser :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{*+},\ I_n(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^n f(x)dx$$

On notera en particulier L l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $L(\lambda) = I_0(\lambda)$.

2. On désigne désormais par λ_0 un réel strictement positif fixé.

2.a. Justifier que, pour tout réel λ strictement supérieur à $\lambda_0/2$ et tout x réel positif, on a :

$$|e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0)e^{-\lambda_0 x}| \leq x^2 \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}$$

2.b. En déduire, pour tout réel λ strictement supérieur à $\lambda_0/2$ et différent de λ_0, et pour tout réel A positif :

$$\left|\int_0^A \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x}}{\lambda - \lambda_0} f(x)dx + \int_0^A x e^{-\lambda_0 x} f(x)dx\right| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2} \int_0^A x^2 e^{-\frac{\lambda_0}{2}x} f(x)dx$$

puis que L est dérivable en λ_0, avec :

$$L'(\lambda_0) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_0 x} x f(x)dx$$

2.c. Montrer plus généralement que, pour tout n, L admet en λ_0 une dérivée à l'ordre n donnée par la formule :

$$L^{(n)}(\lambda_0) = (-1)^n I_n(\lambda_0)$$

3. En utilisant le résultat de la question II.B.2.d, montrer que, si on suppose de plus que f est continue et bornée, alors, pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$, la suite de terme général :

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \times \left(\frac{n}{x}\right)^n \times L^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)$$

converge vers $f(x)$.

Corrigé

.PARTIE I.

I.1. S_n suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, son **espérance** vaut $\boldsymbol{np}$ et sa **variance** $\boldsymbol{np(1-p)}$. Par les propriétés générales de l'espérance et de la variance, on a donc pour la V.A. S_n/n :

$$E(\tfrac{S_n}{n}) = \tfrac{1}{n}E(S_n) = \tfrac{np}{n} = p, \quad \text{et :} \quad V(\tfrac{S_n}{n}) = \tfrac{1}{n^2}V(S_n) = \tfrac{np(1-p)}{n^2} = \tfrac{p(1-p)}{n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $(P(|E(X)| \geq \varepsilon) \leq V(X)/\varepsilon^2)$, s'écrit donc, pour S_n/n :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\tfrac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}}.$$

I.2.a. **D'après le cours**, pour toute fonction u définie sur $\mathbb{R}$ et une V.A. discrète Z prenant un nombre fini de valeurs : $Z(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,

$u(Z)$ est une V.A. dont l'espérance est donnée par la **formule de transfert** :

$$E(u(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} u(x_k).P(X = x_k).$$

Ici, pour tout $t > 0$, la **formule de transfert** appliquée à X pour la fonction u, $x \mapsto e^{-t.x}$, donne :

$$g(t) = E(e^{-tX}) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{-tk}.P(X = k).$$

X suivant une loi de Bernoulli, de paramètre p, on a donc :

$\forall t > 0,\ g(t) = e^{-t.0}.P(X = 0) + e^{-t.1}P(X = 1)$, soit : $\boxed{g(t) = (1-p) + p.e^{-t}}$.

I.2.b. La **même formule**, appliquée à S_n pour la fonction $u : x \mapsto \exp\left(-t.\frac{x}{n}\right)$, donne, puisque X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$E\left[\exp\left(-t\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \exp\left(-t\frac{k}{n}\right).P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \exp\left(-t\frac{k}{n}\right).C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Il suffit alors de **reconnaître** dans la dernière somme **un développement du binôme** :

$$\sum_{k=0}^{n} \exp\left[-t\frac{k}{n}\right].C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.\left[pe^{-\frac{t}{n}}\right]^k.(1-p)^{n-k} = \left[pe^{-\frac{t}{n}} + (1-p)\right]^n,$$

pour **conclure** :

$$\textbf{(1)}\quad \boxed{E(e^{-t\frac{S_n}{n}}) = \left[1 - p + p.e^{-\frac{t}{n}}\right]^n = [g(\tfrac{t}{n})]^n}.$$

I.3.a. *Il s'agit ici, non pas de travailler avec les propriétés des probabilités, mais directement* ***sur les événements.***

Parce que t est strictement positif, on a les égalités d'événements suivantes :

$$\left(\tfrac{S_n}{n} \le a\right) \overset{t>0}{\iff} \left(t\left(\tfrac{S_n}{n} - a\right) \ge 0\right) \iff \left(-t\left(\tfrac{S_n}{n} - a\right) \ge 0\right) \iff \left(e^{-t[\frac{S_n}{n} - a]} \ge 1\right),$$

où l'on termine en utilisant la **croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.**
Les événements étant égaux, on a pour les probabilités aussi :

$$\textbf{(2)}\quad \boxed{P(\tfrac{S_n}{n} \le a) = P(e^{-t[\frac{S_n}{n} - a]} \ge 1)}.$$

I.3.b. Pour une V.A. Y prenant un nombre fini de valeurs positives $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k.P(Y = x_k).$$

D'autre part, $\boldsymbol{P(Y \ge 1)}$, puisque l'événement $(Y \ge 1)$ est la réunion **disjointe** des événements $(Y = x_k)$ pour $x_k \ge 1$, **s'écrit** : $P(Y \ge 1) = \sum_{k \text{ tel que } x_k \ge 1} P(Y = x_k)$.

Aussi obtient-on le résultat par les minorations suivantes de $E(Y)$:

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k.P(Y = x_k) \ge \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ \text{tel que } x_k \ge 1}} x_k.P(Y = x_k), \quad \left(\begin{array}{c}\text{car c'est une somme} \\ \text{de réels positifs}\end{array}\right)$$

puis, dans la dernière somme, parce que les réels x_k sont ≥ 1, et que $P(Y = x_k) \ge 0$, on a : $x_k.P(Y = x_k) \ge P(Y = x_k)$ et donc :

$$E(Y) \ge \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ \text{tel que } x_k \ge 1}} P(Y = x_k), \text{ i.e.} \quad \textbf{(3)}\quad \boxed{E(Y) \ge P(Y \ge 1)}.$$

I.3.c. Appliqué à la V.A. $Y = \exp\left(-t\left[\frac{S_n}{n} - a\right]\right)$, qui **prend un nombre fini de valeurs**, à savoir $\left\{\exp\left(-t\left[\frac{k}{n} - a\right]\right)\right\}_{0 \le k \le n}$ - car $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, (3) s'écrit :

$$P(e^{-t[\frac{S_n}{n} - a]} \ge 1) \le E(e^{-t[\frac{S_n}{n} - a]}),$$

où $E(e^{-t[\frac{S_n}{n}-a]}) = E(e^{ta}e^{-t\frac{S_n}{n}}) = e^{ta}.E(e^{-t\frac{S_n}{n}})$, par **linéarité de l'espérance**.

Ainsi, ces résultats, conjugués à (2), donnent :

$P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq e^{ta}.E(e^{-t\frac{S_n}{n}})$, puis par (1) : $\boxed{P(\frac{S_n}{n} \leq a) \leq e^{ta}.[g(\frac{t}{n})]^n}$.

I.4.a. $u(x) = ax + \ln(1-p+pe^{-x})$ est défini **si et seulement si** : $1-p+pe^{-x} > 0$.
Or, la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $p > 0$, donc :

$\forall x \geq 0,\ 1-p+p.e^{-x} > 1-p > 0$ (car **par hypothèse** $p \in]0,1[$).

Par suite, en tant que **composée, puis somme**, de fonctions définies et dérivables, **u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$**, et par les formules correspondantes de dérivation, pour tout $x \geq 0$: $u'(x) = a + \frac{(-p.e^{-x})}{1-p+p.e^{-x}} = \frac{a(1-p+p.e^{-x})-p.e^{-x}}{1-p+p.e^{-x}} = \frac{p(a-1).e^{-x}+a(1-p)}{1-p+p.e^{-x}}$.

On a montré précédemment que le dénominateur est strictement positif, donc :

(4) $u'(x)$ est du signe du numérateur, noté $N(x)$.

Comme, **par hypothèse**, $0 < a < p < 1$:

- $(N(x) > 0) \iff \left(e^{-x} < \frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right)$, car $p(a-1) = -p(1-a) < 0$.
  $\iff \left(x > -\ln\left[\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right]\right)$, $\left(\text{car } x \mapsto e^{-x} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}\right)$.
- $(N(x) < 0) \iff \left(x < -\ln\left[\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right]\right)$, par les mêmes arguments,
- $(N(x) = 0) \iff \left(x = x_0 = -\ln\left[\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right]\right)$.

Par conséquent :

0 admet, par N, un antécédent unique x_0, $x_0 = -\ln\left[\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right]$, strictement positif (car $N(0) \neq 0$), et N est strictement négative sur $[0, x_0[$ et strictement positive sur $]x_0, +\infty[$.

On en tire, par (4), les **variations de u sur $\mathbb{R}_+$** :

x	0		x_0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	0	$\searrow$	$\pm u(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

moyennant les calculs complémentaires suivants :

- $u(0) = \ln(1-p+p.1) = 0$
- pour la limite en $+\infty$, on utilise que $\lim_{x\to+\infty}(1-p+p.e^{-x}) = 1-p > 0$, et l'on obtient, **par composition** $\lim_{x\to+\infty} \ln(1-p+p.e^{-x}) = \ln(1-p)$, puis :
  $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [ax + \ln(1-p+p.e^{-x})] = \lim\limits_{x\to+\infty} ax = +\infty$ (car $a > 0$).

On constate donc que, u est strictement décroissante sur $[0, x_0]$, strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$, et par suite :

u admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$, atteint en $x_0 > 0$ ($x_0 = -\ln\left[\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right]$), et on peut noter $u(x_0) = -M$, avec $M > 0$, car sur $[0, x_0]$, u décroît strictement de 0 à $u(x_0)$.

I.4.b. Considérant l'expression de g obtenue au **I.2.a.**, et les **propriétés du logarithme** : $\ln\left(e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right) = \ln(e^{at}) + n.\ln\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right] = at + n.\ln\left[1 - p + p.e^{-\frac{t}{n}}\right]$.

Reste alors à **factoriser par n**, pour obtenir : $\boxed{\ln\left(e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right) = n.u\left(\frac{t}{n}\right)}$.

◇ Par bijectivté de la fonction exponentielle, on a donc, de façon équivalente : $e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = e^{n.u\left(\frac{t}{n}\right)}$. Ce qui permet de réécrire la majoration du **I.3.c.**, sous la forme : $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{n.u\left(\frac{t}{n}\right)}$.

L'inégalité étant vraie pour tout $t > 0$, elle est **en particulier** vraie pour $\boldsymbol{t = nx_0 > 0}$, valeur pour laquelle elle s'écrit : $\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nM}}$, car $u\left[\frac{(nx_0)}{n}\right] = -M$ (*c.f.* **4.a.**).

I.4.c. Si a est de la forme $a = p - \varepsilon > 0$ ($\varepsilon > 0$), ce qui assure bien que $0 < a < p < 1$, l'égalité précédente s'écrit :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-nM} \iff (5)\ P\left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right) \leq e^{-nM}.$$

On peut déjà signaler que par la formule obtenue :

> $\forall \varepsilon > 0$, la probabilité pour que S_n/n soit inférieur à p de plus de ε tend vers 0, et ce de façon « ***exponentielle*** ».

◇ Ceci étant, *l'inégalité obtenue rappelle celle de* ***Bienaymé-Tchebychev,*** *avec une autre expression du majorant*. On peut préciser et étayer cette conjecture, en recherchant ce qui manque pour poursuivre le parallèle avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, à savoir **une majoration de $P\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right)$, permettant avec (5) de majorer finalement $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$, à l'instar de l'inégalité de B.T.**.

Pour ce faire, on reprendra les étapes ayant amené à (5) :

Comme au **I.3.a.**, et en vue d'utiliser (3) :

$\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \overset{t>0}{\iff} \left(t\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \geq 0\right) \iff \left(e^{t\left[\frac{S_n}{n} - a\right]} \geq 1\right)$, donc :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = P\left(e^{t\left[\frac{S_n}{n} - a\right]} \geq 1\right) \overset{c.f.(3)}{\leq} E\left(e^{t\left[\frac{S_n}{n} - a\right]}\right) = e^{-at}E\left(e^{t\left[\frac{S_n}{n}\right]}\right).$$

Enfin, la formule (3) étant valable pour tout t réel, on peut réécrire le majorant à l'aide de g. On obtient : $\forall t \geq 0,\ P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-at}.\left[g\left(-\frac{t}{n}\right)\right]^n$.

À ce stade, on peut poser $v(x) = -ax + \ln(1 - p + p.e^x)$ et alors le majorant s'écrit $e^{nv\left(\frac{t}{n}\right)}$. Ensuite, l'étude de v met à jour, sous l'hypothèse $\mathbf{0 < p < \underline{a} < 1}$, l'existence d'un minimum pour v, atteint en $x_1 = \ln\left[\frac{a(1-p)}{p(1-a)}\right] > 0$, et noté $-M'$.

Par suite, pour $a = p + \varepsilon$, et $t = nx_1$, **il vient** : $P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-nM'}$.

On peut alors conclure :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nM} + e^{-nM'}.$$

Et en remarquant que les valeurs des maxima de u et de v sont fonctions de p et de ε, on peut noter : $\tilde{M}(p,\varepsilon) = \min(M, M')$, on a donc établi, pour une V.A. S_n suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$, que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel strictement positif $\tilde{M}(p,\varepsilon)$ tel que :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\tilde{M}(p,\varepsilon)} \quad (\textit{Loi des grandes déviations}).$$

On a donc une inégalité qui, comme celle de Bienaymé-Tchebychev, démontre la **loi faible des grands nombres**, mais cette fois, pour $\varepsilon > 0$ donné, on a pû **préciser la vitesse de convergence vers 0**, en « $e^{-\alpha n}$ » au lieu de « $\frac{1}{n}$ » comme dans B.T.