Option Informatique MP – DS01

Durée 4h.

Le devoir se compose de 14 exercices totalement indépendants

Vous devez traiter les questions avec soin et clarté.

Les programmes doivent être commentés suffisamment pour être lisibles sans effort.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque, mais il ne faut pas les enchevêtrer, prenez des copies séparées si nécessaire.

Il n'est pas du tout nécessaire de tout traiter pour réussir.

Exercice 1

Prévoir la réponse de l'interprète de commande après les deux définitions suivantes :

```
# let a =
    let a = 3 and b = 2 in
       let a = a + b and b = a - b in
          a - b ;;
 ???
# let b = 2 in a - b * b ;;
 ???
```

Exercice 2

Définir en Caml les deux fonctions suivantes :

$$f : (p,q) \longmapsto \begin{cases} q & \text{si } p = 0 \\ f(p-1,q)+1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : (p,q) \longmapsto \begin{cases} q & \text{si } p = 0 \\ g(p-1,q+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Que calculent-elles ?

Exercice 3

Définir en Caml une fonction récursive calculant le produit de deux entiers naturels en suivant le principe de la multiplication égyptienne, qui utilise les formules :

$$p \times q = \begin{cases} \left(\frac{p}{2}\right) \times (2q) & \text{si } p \text{ est pair} \\ \left(\frac{p-1}{2}\right) \times (2q) + q & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Rédiger en suivant le même principe une fonction qui calcule q^p lorsque p et q sont des entiers.

Exercice 4

On souhaite représenter un ensemble par une liste, chaque élément de l'ensemble ne devant apparaître qu'une seule fois dans la liste, à un emplacement arbitraire.

a) Définir une fonction `intersection` qui calcule l'intersection de deux ensembles. Évaluer son coût en fonction des cardinaux de ces ensembles.

b) Définir de même l'union et la différence symétrique de deux ensembles.

c) Rédiger enfin une fonction `egal` qui détermine si deux ensembles sont égaux.

Évaluer le coût de chacune de ces fonctions.

Note : le coût de la fonction signifie « complexité » de la fonction.

Exercice 5

a) Définir une fonction `swap` de type *'a ref –> 'a ref –> unit* qui permute le contenu de deux références de même type.

b) Déterminer le type et le rôle de la fonction suivante :

```
let f x y =
  x := !x + !y ;
  y := !x - !y ;
  x := !x - !y ;;
```

Qu'en pensez-vous ?

Pour les exercices 6, 7 et 8, on rappelle que le style impératif utilise les boucles et les références, tandis que le style fonctionnel utilise les fonctions récursives.

Exercice 6

Il n'existe pas de fonction Caml calculant x^n lorsque x est de type *int*, on se propose d'en définir une.

a) En utilisant la relation $x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$, rédiger une fonction effectuant ce calcul, dans un style fonctionnel puis dans un style impératif. Combien de multiplications sont effectuées pour calculer x^n ?

b) Reprendre ces questions en utilisant cette fois les relations :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (x \cdot x)^p & \text{si } n = 2p \\ x \cdot (x \cdot x)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

Exercice 7

Déterminer le type et le rôle de la fonction suivante, puis la réécrire dans un style fonctionnel :

```
let f a b =
  let u = ref a and v = ref b in
    while !v <> 0 do
      let w = !v in v := !u mod !v ;
                    u := w
      done ;
    !u ;;
```

Exercice 8

Un *palindrome* est une chaîne de caractères qui peut être lue indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche en conservant le même sens. À titre d'exemple, on peut citer :

– `eluparcettecrapule` (élu par cette crapule) ;
– `tulastropecrasecesarceportsalut` (tu l'as trop écrasé, César, ce Port Salut).

L'objectif de cet exercice est d'écrire deux versions d'une fonction `palindrome`, de type *string –> bool*, testant si une chaîne de caractère est un palindrome.
La première version devra être écrite dans un style impératif :

> un mot $a_0 \cdots a_{n-1}$ est un palindrome si et seulement si $a_0 = a_{n-1}$, $a_1 = a_{n-2}$, etc.

La seconde version sera écrite dans un style fonctionnel :

> un mot $a_0 \cdots a_{n-1}$ de longueur supérieure ou égale à 2 est un palindrome si et seulement si $a_0 = a_{n-1}$ et si $a_1 \cdots a_{n-2}$ est un palindrome.

Exercice 9

Dans cet exercice, on représente un polynôme à coefficients entiers $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ par le tableau de ses coefficients $[|a_0; a_1; \cdots; a_{n-1}|]$, et on souhaite, étant donné $b \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathrm{P}(b)$.

a) La méthode naïve consiste à itérer la suite $u_1, u_1, \ldots, u_n$ définie par $u_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k b^k$. Rédiger une fonction qui calcule $\mathrm{P}(b)$ par cette méthode. Combien d'additions et de multiplications effectue-t-elle ?

b) La méthode de Hörner est basée sur l'égalité suivante : $\mathrm{P}(b) = a_0 + b\left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1} b^k\right)$. Rédiger une fonction qui calcule $\mathrm{P}(b)$ par cette méthode. Combien d'additions et de multiplications effectue-t-elle ?

c) Écrire enfin une fonction qui calcule le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X} + b)$.

Exercice 10

Dans cet exercice, on considère un tableau d'entiers bi-dimensionnel b tel que chaque ligne et chaque colonne soit rangée par ordre croissant. Voici un exemple d'un tel tableau, à 4 lignes et 5 colonnes :

2	14	25	30	69
3	15	28	30	81
7	15	32	43	100
20	28	36	58	101

Le but de l'exercice est de rechercher efficacement un élément v dans un tel tableau.
Pour simplifier, on supposera que ce tableau comporte $n = 2^k$ lignes et colonnes.

a) On distingue les deux valeurs $x = b\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ et $y = b\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+1\right)$. Montrer que si $v > x$, on peut éliminer une partie (à préciser) du tableau pour poursuivre la recherche.
Préciser ce qu'il est possible de faire lorsque $v < y$.

b) En déduire une méthode « diviser pour régner » pour résoudre ce problème, et préciser le coût dans le pire des cas, en nombre de comparaisons, de cette méthode.

Exercice 11

Implémenter l'algorithme de tri fusion.

Exercice 12

Étant donnée une suite finie d'entiers $x = (x_1, \dots, x_n)$, on appelle *inversion* de x tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $x_i > x_j$. Par exemple, $(2, 3, 1, 5, 4)$ possède 3 inversions : les couples $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$. On s'intéresse au calcul du nombre d'inversions de x.

a) Rédiger en Caml l'algorithme naïf, et montrer que son coût est un $\Theta(n^2)$. On représentera les suites finies d'entiers par le type *int vect*.

b) Adopter une méthode « diviser pour régner » pour faire mieux (indication : adapter l'algorithme de tri fusion).

Exercice 13

on considère un système de monnaie utilisant p types de pièces différentes de valeurs respectives $S = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f(n, S)$ le nombre minimal de pièces nécessaires pour décomposer l'entier n dans ce système de monnaie.
Établir une relation de récurrence vérifiée par $f(n, S)$ et en déduire un algorithme dynamique permettant le calcul de cette quantité.
Modifier ensuite votre algorithme pour afficher une décomposition optimale.

Exercice 14

En partant du sommet du triangle ci-dessous et en se déplaçant vers les nombres adjacents de la ligne inférieure, le total maximum que l'on peut obtenir pour relier le sommet à la base est égal à 23 :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{3} & & & \\ & & \mathbf{7} & & 4 & & \\ & 2 & & \mathbf{4} & & 6 & \\ 8 & & 5 & & \mathbf{9} & & 3 \end{array}$$

$$3 + 7 + 4 + 9 = 23$$

Rédiger une fonction calculant le total maximum d'un chemin reliant le sommet à la base d'un tel triangle de hauteur n. On pourra considérer que les valeurs de ce triangle sont stockées dans un tableau bi-dimensionnel $n \times n$ (autrement dit, `t.(i).(j)` contient la $(j+1)^e$ valeur de la $(i+1)^e$ ligne).