Álgebra I - Final

Leandro Ezequiel Barrios

28/07/2015

1. Sea $\mathfrak{R}$ la relación en $A := \{10, ..., 1000\}$ definida por $(n : m) \neq 1$.

1.a. Determine si $\mathfrak{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

1.b. Encuentre la cantidad de $m \in A$ tales que $m\mathfrak{R}12$

2. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^{182} - 26 : 130) = 13$. Calcule $(a^{25} - 39 : 2 \cdot 5^3 \cdot 13^2)$

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, encuentre el resto de dividir por 7 a n^{3n}en términos de una congruencia apropiada de n.

- Supongo $n \underset{(7)}{\equiv} 0$,

$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 0^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\boxed{n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 0}$$

- Supongo $n \underset{(7)}{\equiv} 1$,

$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\boxed{n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1}$$

- Supongo $n \underset{(7)}{\equiv} 2$,

$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 2^{3n} \underset{(7)}{\equiv} \left(2^3\right)^n \underset{(7)}{\equiv} 8^n(7) \underset{(7)}{\equiv} 1^n \underset{(7)}{\equiv} 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\boxed{n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1}$$

- Supongo $n \underset{(7)}{\equiv} 3$,

$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 3^{3n} \underset{(7)}{\equiv} \left(3^3\right)^n \underset{(7)}{\equiv} 27^n \underset{(7)}{\equiv} 6^n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6^n$$

...además,

$$n \underset{(7)}{\equiv} 3 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 7k + 3$$

...entonces, para algún $k \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^n = 6^{7k+3} \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} \left(6^7\right)^k * 6^3 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} \left(6 * \left(6^2\right)^3\right)^k * 6 * 6^2 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * \left(36^3\right)^k * 6 * 36 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * \left(1^3\right)^k * 6 * 1 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * 1^k * 6 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * 6 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\begin{array}{llll}
Caso: \ k \underset{(2)}{\equiv} 0 & \Leftrightarrow k+1 \underset{(2)}{\equiv} 1 & \Leftrightarrow n = 7k+3 \underset{(2)}{\equiv} 3 \underset{(2)}{\equiv} 1 & \\
 & \Rightarrow n^{3n} & \underset{(7)}{\equiv} 6^{k+1} & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} 6^k * 6 & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} \left(6^2\right)^{k/2} * 6 & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} 1^k * 6 & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} 6 & \\
 & & & \\
Caso: \ k \underset{(2)}{\equiv} 1 & \Leftrightarrow k+1 \underset{(2)}{\equiv} 0 & \Leftrightarrow n = 7k+3 \underset{(2)}{\equiv} 7+3 \underset{(2)}{\equiv} 0 & \\
 & \Rightarrow n^{3n} & \underset{(7)}{\equiv} 6^{k+1} & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} \left(6^2\right)^{(k+1)/2} & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} 1^{(k+1)/2} & \\
 & \cdots & \underset{(7)}{\equiv} 1 &
\end{array}
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{c}
n \underset{(2)}{\equiv} 0 \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1 \\
n \underset{(2)}{\equiv} 1 \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6
\end{array}}
$$

- Supongo $n \equiv 4(7)$,

$$n^{3n} \equiv 4^{3n} \equiv \left(4^3\right)^n \equiv 64^n \equiv 1^n \equiv 1(7)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{n^{3n} \equiv 1(7)}$$

- Supongo $n \underset{(7)}{\equiv} 5$,

$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 5^{3n} \underset{(7)}{\equiv} \left(5^3\right)^n \underset{(7)}{\equiv} 125^n \underset{(7)}{\equiv} 6^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6^n$$

...además,

$$n \underset{(7)}{\equiv} 5 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 7k + 5$$

...entonces, para algún $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^n \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^{7k+5} \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} \left(6^7\right)^k * 6^5 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} \left(6 * \left(6^2\right)^3\right)^k * 6 * \left(6^2\right)^2 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * \left(36^3\right)^k * 6 * 36^2 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * \left(1^3\right)^k * 6 * 1^2 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * 1^k * 6 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * 6 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
Caso: \ k \underset{(2)}{\equiv} 0 \quad \Leftrightarrow k+1 \underset{(2)}{\equiv} 1 \quad \Leftrightarrow n = 7k+5 \underset{(2)}{\equiv} 5 \underset{(2)}{\equiv} 1 \\
\qquad\qquad\qquad \Rightarrow n^{3n} \quad \underset{(7)}{\equiv} 6 \\
\\
Caso: \ k \underset{(2)}{\equiv} 1 \quad \Leftrightarrow k+1 \underset{(2)}{\equiv} 0 \quad \Leftrightarrow n = 7k+5 \underset{(2)}{\equiv} 7+5 \underset{(2)}{\equiv} 0 \\
\qquad\qquad\qquad \Rightarrow n^{3n} \quad \underset{(7)}{\equiv} 1
\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} n \underset{(2)}{\equiv} 0 \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1 \\ n \underset{(2)}{\equiv} 1 \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6 \end{array}}$$

- Supongo $n \equiv 6(7)$,

$$n^{3n} \equiv 6^{3n} \equiv \left(6^3\right)^n \equiv 216^n \equiv 6^n(7)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n^{3n} \equiv 1(7)$$

...además,

$$n \underset{(7)}{\equiv} 6 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 7k + 6$$

...entonces, para algún $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^n \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^{7k+6} \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} (6^7)^k * 6^6 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} (6 * (6^2)^3)^k * (6^2)^3 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * (36^3)^k * 36^3 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * (1^3)^k * 1^3 \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k * 1^k \\
n^{3n} &\underset{(7)}{\equiv} 6^k
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
Caso: \ k \underset{(2)}{\equiv} 0 & \Leftrightarrow k+1 \underset{(2)}{\equiv} 1 \quad \Leftrightarrow n = 7k+6 \underset{(2)}{\equiv} 6 \underset{(2)}{\equiv} 0 \\
& \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6^k \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} (6^2)^{k/2} \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 36^{k/2} \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 1^{k/2} \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 1 \\
Caso: \ k \underset{(2)}{\equiv} 1 & \Leftrightarrow k+1 \underset{(2)}{\equiv} 0 \quad \Leftrightarrow n = 7k+6 \underset{(2)}{\equiv} 7+6 \underset{(2)}{\equiv} 1 \\
& \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6^k \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 6^{k-1+1} \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 6^{k-1} * 6 \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 6^{2*(k-1)/2} * 6 \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} (6^2)^{(k-1)/2} * 6 \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 36^{(k-1)/2} * 6 \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 1^{(k-1)/2} * 6 \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 1^{k/2} * 6 \\
& \cdots \underset{(7)}{\equiv} 6
\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} n \underset{(2)}{\equiv} 0 \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 1 \\ n \underset{(2)}{\equiv} 1 \Rightarrow n^{3n} \underset{(7)}{\equiv} 6 \end{array}}$$

4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ el polinomio $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

4.a. Prueba que f es irreductible en $\mathbb{Q}[X]$.

4.b. Para cada número natural n calcule $(f : X^n - 1)$.

4.c. Pruebe que si $p \in \mathbb{Q}[X]$ tiene como raíz a alguna raíz quinta primitiva de la unidad, entonces todas las raíces quintas primitivas de la unidad son raíces de p