Algortimos para determinar Caminos Mínimos en Grafos

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Camino mínimo en grafos

Sea $G = (V, X)$ un grafo y $l : X \to R$ una función de longitud/peso para las aristas de G.

Definiciones:

- La **longitud** de un camino C entre dos nodos v y u es la suma de las longitudes de las aristas del camino:

$$l(C) = \sum_{e \in C} l(e)$$

- Un **camino mínimo** C^0 entre u y v es un camino entre u y v tal que $l(C^0) = \min\{l(C) | C$ es un camino entre u y $v\}$. Puede haber varios caminos mínimos.

Camino mínimo en grafos

Dado un grafo G, se pueden definir tres variantes de problemas sobre caminos mínimos:

Único origen - único destino: Determinar un camino mínimo entre dos vértices específicos, v y u.

Único origen - múltiples destinos: Determinar un camino mínimo desde un vértice específico v al resto de los vértices de G.

Múltiples orígenes - múltiples destinos: Determinar un camino mínimo entre todo par de vértices de G.

Todos estos conceptos se pueden adaptar cuando se trabaja con un grafo orientado.

Camino mínimo en grafos

- **Aristas con peso negativo:** Si el grafo G no contiene ciclos de peso negativo o contiene alguno pero no es alcanzable desde v, entonces el problema sigue estando bien definido, aunque algunos caminos puedan tener longitud negativa. Sin embargo, si G tiene algún ciclo con peso negativo alcanzable desde v, el concepto de camino de peso mínimo deja de estar bien definido.
- **Circuitos:** Un camino mínimo no puede contener circuitos.
- **Propiedad de subestructura óptima de un camino mínimo:** Dado un digrafo $G = (V, X)$ con una función de peso $l : X \to R$, sea $P : v_1 \dots v_k$ un camino mínimo de v_1 a v_k. Entonces $\forall 1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{v_i v_j}$ es un camino mínimo desde v_i a v_j.

Camino mínimo en grafos - Único origen-múltiples destinos

Problema: Dado $G = (V, X)$ un grafo y $l : X \to R$ una función que asigna a cada arco una cierta longitud y $v \in V$ un nodo del grafo, calcular los caminos mínimos de v al resto de los nodos.

Algoritmo de Dijkstra (1959)

Asumimos que las longitudes de las aristas son positivas.
El grafo puede ser orientado o no orientado.

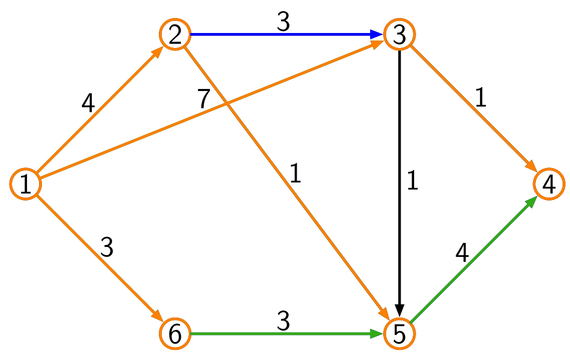
$S := \{v\}, \ \pi(v) := 0$
para todo $u \in V$ **hacer**
  si $(v, u) \in X$ **entonces**
    $\pi(u) := l(v, u)$
  si no
    $\pi(u) := \infty$
  fin si
fin para
mientras $S \neq V$ **hacer**
  `elegir` $w \in V \setminus S$ `tal que` $\pi(w) = \min_{u \in V \setminus S} \pi(u)$
  $S := S \cup w$
  para todo $u \in V \setminus S$ **y** $(w, u) \in X$ **hacer**
    si $\pi(u) > \pi(w) + l(w, u)$ **entonces**
      $\pi(u) := \pi(w) + l(w, u)$
    fin si
  fin para
fin mientras
retornar π

Algoritmo de Dijkstra (1959) - Determina camino mínimo

$S := \{v\}, \ \pi(v) := 0, \ pred(v) := 0$
para todo $u \in V$ **hacer**
  si $(v, u) \in X$ **entonces**
    $\pi(u) := l(v, u), \ pred(u) := v$
  si no
    $\pi(w) := \infty, \ pred(w) := \infty$
  fin si
fin para
mientras $S \neq V$ **hacer**
  `elegir` $w \in V \setminus S$ `tal que` $\pi(w) = \min_{u \in V \setminus S} \pi(u)$
  $S := S \cup w$
  para todo $u \in V \setminus S$ **y** $(w, u) \in X$ **hacer**
    si $\pi(u) > \pi(w) + l(w, u)$ **entonces**
      $\pi(u) := \pi(w) + l(w, u)$
      $pred(u) := w$
    fin si
  fin para
fin mientras
retornar $\pi, \ pred$

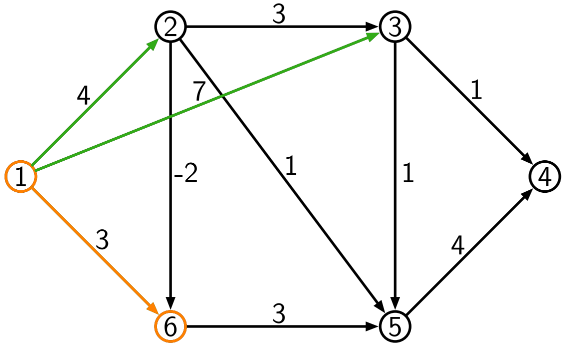
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5, 3, 4\}$ $\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 3)$



Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



¡Ya no actualizará $\pi(6)$!

Algoritmo de Dijkstra

Lema: Dado un grafo orientado G con pesos positivo en las aristas, al finalizar la iteración k el algoritmo de Dijkstra determina el camino mínimo entre el nodo v y los nodos de S_k (donde S_k conjunto S al finalizar la iteración k).

Teorema: Dado un grafo orientado G con pesos positivo en las aristas, el algoritmo de Dijkstra determina el camino mínimo entre el nodo v y el resto de los nodos de G.

Algoritmo de Ford (1956)

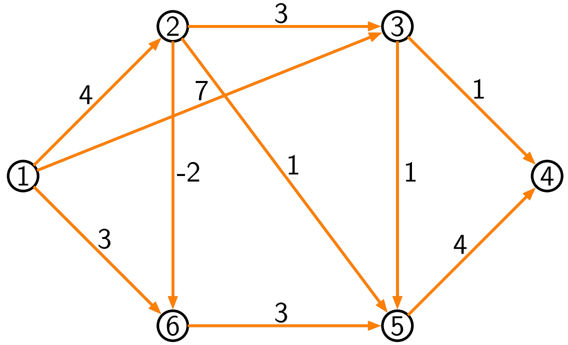
Asumimos que el grafo es orientado y no tiene circuitos de longitud negativa.

$\pi(v) := 0$
para todo $u \in V \setminus \{v\}$ **hacer**
  $\pi(u) := \infty$
fin para
mientras `hay cambios en` π **hacer**
  $\pi' := \pi$
  para todo $u \in V \setminus \{v\}$ **hacer**
    $\pi(u) := \min(\pi(u), \min_{(w,u) \in X} \pi'(w) + l(w,u))$
  fin para
fin mientras
retornar π

Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2 $\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 2)$

$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



Algoritmo de Ford (1956)

Teorema:

Dado un grafo orientado G sin circuitos de longitud negativa, el algoritmo de **Ford** determina el camino mínimo entre el nodo v y todos los demás.

- ¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Ford?
- ¿Qué pasa si aplicamos Ford a un grafo no orientado?
- Mejora del cálculo de π
- ¿Cómo podemos modificar el algoritmo de Ford para detectar si hay circuitos de longitud negativa?

Algoritmo de Ford (1956)

Asumimos que el grafo es orientado. Detecta si hay circuitos de longitud negativa.

$\pi(v) := 0,\ \ i := 0$
para todo $u \in V \setminus \{v\}$ **hacer**
    $\pi(u) := \infty$
fin para
mientras `hay cambios en` π **y** $i < n$ **hacer**
    $i := i + 1$
    para todo $uV \setminus \{v\}$ **hacer**
        $\pi(u) := \text{mín}(\pi(u), \text{mín}_{(w,u)\in X}\, \pi(w) + l(w,u))$
    fin para
fin mientras
si $i = n$ **entonces**
    retornar `"Hay circuitos de longitud negativa."`
si no
    retornar π
fin si

Algoritmos matriciales

Sea $G = (\{1, \dots, n\}, X)$ un digrafo y $l : X \to R$ una función de longitud/peso para las aristas de G. Definimos las siguientes matrices:

- $L \in R^{n\times n}$, donde los elementos l_{ij} de L se definen como:

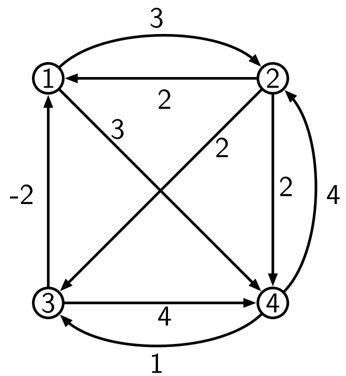
$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ l(i \to j) & \text{si } i \to j \in X \\ \infty & \text{si } i \to j \notin X \end{cases}$$

- $D \in R^{n\times n}$, donde los elementos d_{ij} de D se definene como:

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{longitud del camino mínimo orientado de } i \text{ a } j & \text{si existe alguno} \\ \infty & \text{si no} \end{cases}$$

D es llamada matriz de distancias de G.

Algoritmos matriciales



$$L = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 3 & \infty & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & \infty & 0 & 1 \\ 4 & \infty & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Algoritmo de Floyd (1962)

Llamamos $v_1, \dots, v_n$ a los nodos de G. El algoritmo de Floyd se basa en lo siguiente:

1. Si $L^0 = L$ y calculamos L^1 como

$$l^1_{ij} = \text{mín}(l^0_{ij}, l^0_{i1} + l^0_{1j})$$

   l^1_{ij} es la longitud de un camino mínimo de i a j con nodo intermedio v_1 o directo.

2. Si calculamos L^k a partir de L^{k-1} como

$$l^k_{ij} = \text{mín}(l^{k-1}_{ij}, l^{k-1}_{ik} + l^{k-1}_{kj})$$

   l^k_{ij} es la longitud de un camino mínimo de i a j cuyos nodos intermedios están en $\{v_1, \dots, v_k\}$.

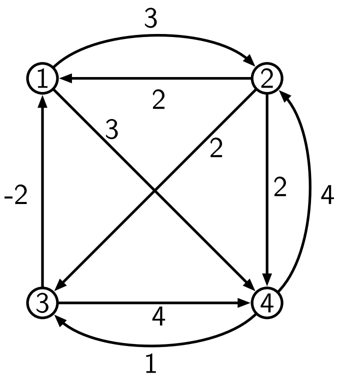
3. $D = L^n$

Algoritmo de Floyd (1962)

Asumimos que el grafo es orientado y que no hay circuitos de longitud negativa.

$L^0 := L$
para k **desde** 1 **a** n **hacer**
  para i **desde** 1 **a** n **hacer**
    para j **desde** 1 **a** n **hacer**
      $l^k_{ij} := \text{mín}(l^{k-1}_{ij}, l^{k-1}_{ik} + l^{k-1}_{kj})$
    fin para
  fin para
fin para
retornar L^n

Algoritmo de Floyd (1962) - Ejemplo



$L^0 =$

	1	2	3	4
1	0	3	5	3
2	0	0	2	2
3	-2	1	0	1
4	2	4	4	0

$D = L^4 =$

	1	2	3	4
1	0	3	5	3
2	0	0	2	2
3	-2	1	0	1
4	2	4	4	0

$k = 3$ $i = 4$ $j = 3$

Algoritmo de Floyd (1962)

Lema: Al finalizar la iteración k del algoritmo de Floyd, l_{ij} es la longitud de los caminos mínimos desde v_i a v_j cuyos nodos intermedios son elementos de $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Teorema: El algoritmo de Floyd determina los caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo orientado sin circuitos negativos.

- ¿Cuál es la complejidad de algoritmo de Floyd?
- ¿Cuánta memoria requiere?
- ¿Cómo podemos hacer si además de las longitudes queremos determinar los caminos mínimos?
- ¿Cómo se puede adaptar para detectar si el grafo tiene circuitos de longitud negativa?

Algoritmo de Floyd (1962)

$L^0 := L$
para k **desde** 1 **a** n **hacer**
  para i **desde** 1 **a** n **hacer**
    si $l_{ik}^{k-1} \neq \infty$ **entonces**
      si $l_{ik}^{k-1} + l_{ki}^{k-1} < 0$ **entonces**
        retornar "Hay circuitos negativos."
      fin si
      para j **desde** 1 **a** n **hacer**
        $l_{ij}^{k} := \text{mín}(l_{ij}^{k-1}, l_{ik}^{k-1} + l_{kj}^{k-1})$
      fin para
    fin si
  fin para
fin para
retornar L

Algoritmo de Dantzig (1966)

Al finalizar la iteración $k-1$, el algoritmo de Dantzig genera una matriz de $k \times k$ de caminos mínimos en el subgrafo inducido por los vértices $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Calcula la matriz L^{k+1} a partir de la matriz L^k para $1 \leq i, j \leq k$ como:

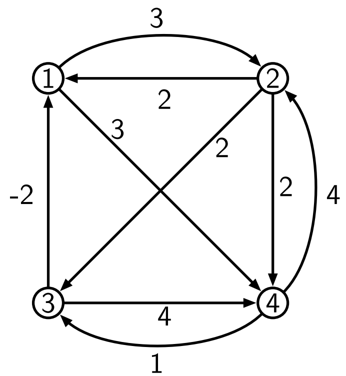
- $L_{i,k+1}^{k+1} = \text{mín}_{1 \leq j \leq k}(L_{i,j}^k + L_{j,k+1}^k)$
- $L_{k+1,i}^{k+1} = \text{mín}_{1 \leq j \leq k}(L_{k+1,j}^k + L_{j,i}^k)$
- $L_{i,j}^{k+1} = \text{mín}(L_{i,j}^k, L_{i,k+1}^k + L_{k+1,j}^k)$

Asumimos que el grafo es orientado. Detecta si hay circuitos de longitud negativa.

Algoritmo de Dantzig (1966)

para k **desde** 1 **a** $n-1$ **hacer**
  para i **desde** 1 **a** k **hacer**
    $L_{i,k+1} := \text{mín}_{1 \leq j \leq k}(L_{i,j} + L_{j,k+1})$
    $L_{k+1,i} := \text{mín}_{1 \leq j \leq k}(L_{k+1,j} + L_{j,i})$
  fin para
  $t := \text{mín}_{1 \leq i \leq k}(L_{k+1,i} + L_{i,k+1})$
  si $t < 0$ **entonces**
    retornar "Hay circuitos de longitud negativa"
  fin si
  para i **desde** 1 **a** k **hacer**
    para j **desde** 1 **a** k **hacer**
      $L_{i,j} := \text{mín}(L_{i,j}, L_{i,k+1} + L_{k+1,j})$
    fin para
  fin para
fin para
retornar L

Algoritmo de Dantzig (1966) - Ejemplo



$k = 4$

$L =$

	1	2	3	4
1	0	3	5	3
2	0	0	2	2
3	-2	1	0	1
4	2	4	4	0

Algoritmo de Dantzig (1966)

Lema Al finalizar la iteración $k-1$ del algoritmo de Dantzig, la matriz de $k \times k$ generada contiene la lobgitud de los caminos mínimos en el subgrafo inducido por los vértices $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Teorema: El algoritmo de Dantzig determina los caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo orientado sin circuitos.

- ¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Dantzig?
- ¿Qué diferencia tiene con el algoritmo de Floyd?
- ¿Qué ventajas o desventajas tiene?