Árboles

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Árboles

Definición:

- Un **árbol** es un grafo conexo sin circuitos simples.

Árboles

Teorema: Dado un grafo $G = (V, X)$ son equivalentes:

1. G es un árbol.
2. G es un grafo sin circuitos simples, pero si se agrega una arista e a G resulta un grafo con exactamente un circuito simple, y ese circuito contiene a e.
3. Existe exactamente un camino simple entre todo par de nodos.
4. G es conexo, pero si se quita cualquier arista a G queda un grafo no conexo.

Lema 1: Sea $G = (V, X)$ un grafo conexo y $e \in X$. $G - e$ es conexo si y solo si e pertenece a un circuito simple de G.

Lema 2: La concatenación de dos caminos distintos entre un par de vértices contiene un circuito simple.

Árboles

Definición:

- Una **hoja** es un nodo de grado 1.

Lema 2: Todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas.

Lema 3: Sea $G = (V, X)$ árbol. Entonces $m = n - 1$.

Corolario 1: Sea $G = (V, X)$ sin circuitos simples y c componentes conexas. Entonces $m = n - c$.

Corolario 2: Sea $G = (V, X)$ con c componentes conexas. Entonces $m \geq n - c$.

Árboles

Teorema: Dado un grafo G son equivalentes:

1. G es un árbol.
2. G es un grafo sin circuitos simples y $m = n - 1$.
3. G es conexo y $m = n - 1$.

Árboles orientados

Definiciones:

- Un **árbol orientado** es un grafo orientado G tal que:
  1. El grafo no orientado subyacente es un árbol.
  2. En G existe un nodo r tal que existe un camino orientado desde r a todos los demás nodos (cualquier nodo es alcanzable desde r por un camino orientado).
  3. $d_{IN}(v) = 1 \ \forall v \in V \setminus \{r\}$ y $d_{IN}(r) = 0$.

Árboles enraizados

Definiciones:

- En un árbol no orientado podemos definir un nodo cualquiera como raíz.
- El **nivel** de un nodo de un árbol es la distancia de ese nodo a la raíz.
- La **altura** h de un árbol es la longitud desde la raíz al nodo más lejano.
- Un árbol se dice (exactamente) **m-ario** si todos sus nodos, salvo las hojas y la raíz tienen grado (exactamente) a lo sumo $m + 1$ y la raíz (exactamente) a lo sumo m.
- Un árbol se dice **balanceado** si todas sus hojas están a nivel h o $h - 1$.
- Un árbol se dice **balanceado completo** si todas sus hojas están a nivel h.

Árboles enraizados

Definiciones:

- Los nodos **internos** de un árbol son aquellos que no son ni hojas ni la raíz.

¿Cuántos nodos tiene en total un árbol exactamente m-ario que tiene i nodos internos?

Árboles enraizados

Teorema:

- Un árbol m-ario de altura h tiene a lo sumo m^h hojas.
- Un árbol m-ario con l hojas tiene $h \geq \lceil \log_m l \rceil$.
- Si T es un árbol exactamente m-ario balanceado entonces $h = \lceil \log_m l \rceil$.

Recorrido de grafos

```
(marcar nodo s)
pred(s) := 0
next := 1
order(s) := next
LIST := {s}
mientras LIST ≠ ∅ hacer
    elegir un nodo i de LIST
    si existe (i,j) tal que j sin marcar entonces
        (marcar nodo j)
        pred(j) := i
        next := next + 1
        order(j) := next
        LIST := LIST ∪ {j}
    else LIST := LIST \ {i}
retornar order
```

Recorrido de grafos

- **BFS** (Breadth-First Search): Lista implementada como cola.
- **DFS** (Depth-First Search): Lista implementada como pila.

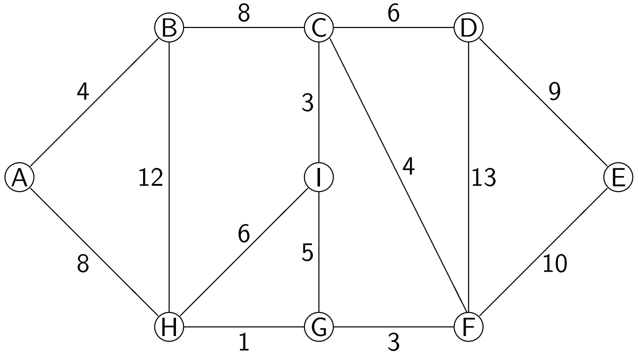
Árbol generador mínimo

Definiciones:

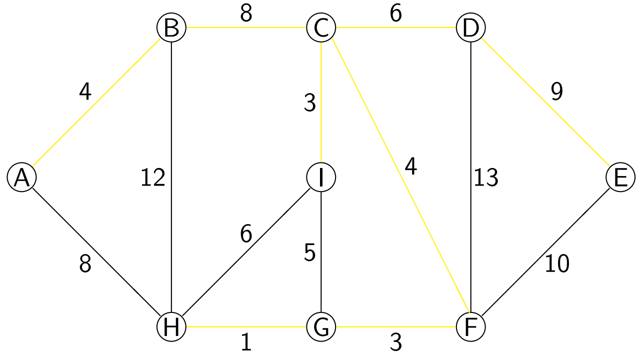
- Dado un grafo G, un **árbol generador** de G es un subgrafo de G que es un árbol y tiene el mismo conjunto de nodos que G.
- Sea $T = (V, X)$ un árbol y $l : X \to R$ una función que asigna longitudes (o pesos) a las aristas de T. Se define la **longitud** de T como $l(T) = \sum_{e \in T} l(e)$.
- Dado un grafo $G = (V, X)$ un **árbol generador mínimo** de G, T, es un árbol generador de G de mínima longitud, es decir

$$l(T) \leq l(T') \; \forall T' \text{ árbol generador de } G.$$

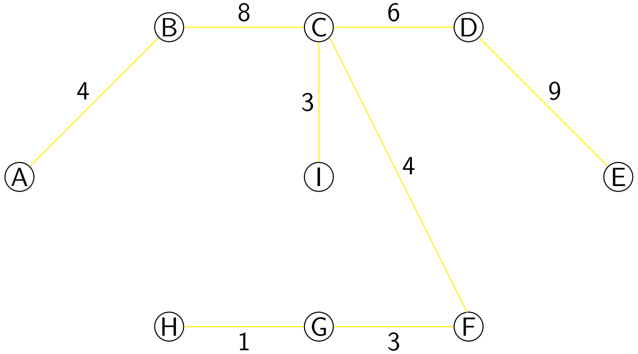
Ejemplo de AGM



Ejemplo de AGM



Ejemplo de AGM



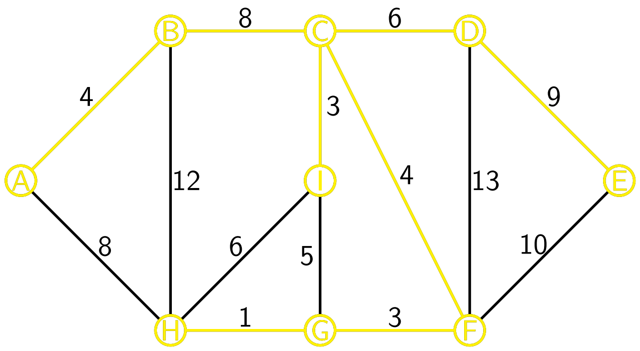
Algoritmo de *Prim*

Entrada: $G = (V, X)$ grafo conexo con una función $l : X \to R$.

V_T `:=` $\{u\}$ `(`u `cualquier nodo de` G`)`
X_T `:=` $\emptyset$
i `:= 1`
mientras $i \leq n - 1$ **hacer**
    `elegir` $e = (u, v) \in X$ `tal que` $l(e)$ `sea mínima`
      `entre las aristas que tienen un extremo`
      $u \in V_T$ `y el otro` $v \in V \setminus V_T$
    X_T `:=` $X_T \cup \{e\}$
    V_T `:=` $V_T \cup \{v\}$
    i `:=` $i + 1$
retornar $T = (V_T, X_T)$

Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



Algoritmo de *Prim*

Lema:

Sea $T = (V, X_T)$ un árbol generador de $G = (V, X)$. Si $e \in X$ y $e \notin X_T$ y $f \in X_T$ una arista del ciclo de $T + e$. Entonces $T' = (V, X_T \cup \{e\} \setminus \{f\})$ es árbol generador de G.

Proposición:

Sea G un grafo conexo. Sea $T_k = (V_{Tk}, X_{Tk})$ el árbol que el algoritmo de *Prim* determina en la iteración k, para $0 \leq k \leq n-1$. T_k es un subárbol de un árbol generador mínimo de G.

Teorema:

El algoritmo de *Prim* es correcto, es decir dado un grafo G conexo determina un árbol generador mínimo de G.

El algoritmo *Prim* es un algoritmo goloso.

Algoritmo de *Kruskal*

Entrada: $G = (V, X)$ grafo conexo con una función $l : X \to R$.

X_T := $\emptyset$
i := 1
mientras $i \leq n-1$ **hacer**
  elegir $e \in X$ tal que $l(e)$ sea mínima entre las
   aristas que no forman circuito con las
   aristas que ya están en X_T
  X_T := $X_T \cup \{e\}$
  i := $i + 1$
retornar $T = (V, X_T)$

Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin circuitos