



**DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Trabajo Práctico 3

## Técnicas Algorítmicas Avanzadas

---

Viernes 9 de Mayo de 2014

Algoritmos y Estructuras de Datos III

Entrega de TP

### Grupo 7

Integrante	LU	Correo electrónico
Barrios, Leandro E.	404/11	ezequiel.barrios@gmail.com
Benegas, Gonzalo	958/12	gsbenegas@gmail.com
Melnik, Jonathan	571/09	jonathanmelnik@gmail.com
Vanecek, Juan	169/10	juann.vanecek@gmail.com



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Instrucciones de compilación</b>	<b>5</b>
<b>3. Pautas generales de medición</b>	<b>6</b>
<b>4. Pautas para la generación de grafos</b>	<b>7</b>
<b>5. Desarrollo del TP</b>	<b>10</b>
5.1. Backtracking . . . . .	10
5.1.1. Descripción . . . . .	10
5.1.2. Complejidad . . . . .	11
5.1.3. Experimentación . . . . .	12
5.2. Greedy . . . . .	16
5.2.1. Descripción . . . . .	16
5.2.2. Complejidad . . . . .	18
5.2.3. Familias Malas - Greedy A: utiliza la función de peso $f_A$ . . . .	19
5.2.4. Familias Malas - Greedy B: utiliza la función de peso $f_B$ . . . .	20
5.2.5. Familias Malas - Greedy C: utiliza la función de peso $f_C$ . . . .	21
5.2.6. Conclusión: unificación de las tres heurísticas . . . . .	21
5.2.7. Experimentación . . . . .	21
5.3. Local Search . . . . .	24
5.3.1. Solución inicial . . . . .	24
5.3.2. Definición de la vecindad . . . . .	24
5.3.3. Pseudocódigo . . . . .	25
5.3.4. Complejidad . . . . .	26
5.3.5. Familias malas . . . . .	28
5.3.6. Experimentación . . . . .	30
5.4. GRASP . . . . .	34

5.4.1.	Solución inicial . . . . .	34
5.4.2.	Criterio de terminación . . . . .	34
5.4.3.	Búsqueda local . . . . .	37
5.4.4.	Pseudocódigo . . . . .	37
5.4.5.	Complejidad . . . . .	39
5.4.6.	Experimentación . . . . .	39
5.5.	Comparativa . . . . .	43
<b>6.</b>	<b>Apéndices</b>	<b>45</b>
6.1.	Código Fuente (resumen) . . . . .	45
6.1.1.	Backtracking . . . . .	45
6.1.2.	Greedy . . . . .	46
6.1.3.	Local Search . . . . .	47
6.1.4.	Grasp . . . . .	50

# 1. Introducción

En este trabajo práctico nos piden analizar el problema del *Camino Acotado de Costo Mínimo (CACM)*, y desarrollar distintos algoritmos para resolverlo.

Dado un Grafo  $G = (V, E)$ , dos funciones de peso  $\omega_1, \omega_2 : V \mapsto \mathbb{R}_+$ , un natural  $K$  y dos nodos  $u, v \in V$ , el problema consiste en encontrar, entre todos los caminos  $P$  entre  $u$  y  $v$  que cumplen  $\omega_1(P) \leq K$ , el que minimice  $\omega_2(P)$ .

Donde si  $w$  es una función de peso definida sobre aristas, se entiende  $w(P)$  como

$$\sum_{e \text{ arista de } P} w(e)$$

*CACM* es un problema conocido, y tiene muchas aplicaciones en la vida real. Una agencia de vuelos puede estar interesada en ofrecer el viaje más corto entre dos ciudades, dado un cliente con un presupuesto acotado. Los nodos representan ciudades.  $u$  y  $v$  son las ciudades de origen y destino, respectivamente. Una arista es un vuelo particular entre dos ciudades. El peso por  $\omega_1$  es el costo del pasaje y el peso por  $\omega_2$  es la duración del vuelo. Un camino es una secuencia de vuelos, es decir, un vuelo que puede o no tener escalas.  $K$  viene a ser el presupuesto del cliente. El camino buscado es entonces el que, entre todos los vuelos (con o sin escalas) entre la ciudad de origen y destino que el cliente puede pagar, tiene la menor duración.

Otro ejemplo similar está relacionado con el Mapa Interactivo de la Ciudad de Buenos Aires. Se busca llegar de un punto de la ciudad a otro en el menor tiempo, aunque se puede especificar la máxima cantidad de metros por caminar. Los nodos son alturas de calles, es decir puntos geográficos sobre alguna calle. Una arista entre dos nodos es un segmento de calle - junto con un medio de transporte - que une dos puntos geográficos. El peso por  $\omega_1$  es la longitud del segmento si el medio de transporte es 'caminar' y 0 si no. El peso por  $\omega_2$  es el tiempo que demora recorrer el segmento usando el correspondiente medio de transporte. El valor  $K$ , especificado por el usuario, es la máxima cantidad de metros que está dispuesto a caminar. Un camino entre un punto  $u$  de origen a otro punto  $v$  de destino es una sucesión de segmentos recorridos con un correspondiente medio de transporte. Se busca, entre todos los caminos cuyos metros caminados totales no exceden  $K$ , el de menor duración.

Un ejemplo reciente fue obtenido del *MIT Technology Review*<sup>1</sup>. [FIXME] guarda que este es maximo, explicar

Aunque *CACM* es un problema conocido, no se conocen algoritmos polinomiales que lo resuelvan y se estima que pertenece al conjunto de problemas NP. En este trabajo se analizaran varios métodos para resolverlo: una solución exacta y 5 aproximaciones a través de heurísticas. En concreto, se implementarán los siguientes algoritmos:

1. Un *Backtracking* como algoritmo exacto.

---

<sup>1</sup>[technologyreview.com/view/528836/forget-the-shortest-route-across-a-city-new-algorithm-finds-the-most-beautiful/](https://technologyreview.com/view/528836/forget-the-shortest-route-across-a-city-new-algorithm-finds-the-most-beautiful/)

2. Una heurística *constructiva greedy*.
3. Una heurística de *búsqueda local*.
4. Una heurística *GRASP*.

El enfoque estará puesto en experimentar sobre cada uno de estos algoritmos, analizando su complejidad y la calidad de las soluciones en el caso de las heurísticas. Se intentará definir diferentes familias de grafos sobre los cuales poder obtener resultados concluyentes sobre el comportamiento del algoritmo.

## 2. Instrucciones de compilación

Para compilar el proyecto completo: entrar en la carpeta `src` y correr `make all`.

Para compilar cada una de las partes por separado: en la carpeta `src`, estan las carpetas `backtracking`, `grasp`, `greedy_heuristic_{A,B,C}` y `local_search`. Se puede compilar cada parte de forma independiente, entrando en cada carpeta y ejecutando `make`.

Funcionamiento de los archivos `Makefile`:

- Hay un archivo `Makefile.common` que se usa como input para los `Makefile` del resto de las carpetas. La sintaxis para incluirlo es: `include ../Makefile.common`
- Por defecto, compila el archivo que tenga el mismo nombre de la carpeta, y busca el `.cpp` y el `.h`. Por ejemplo, si estamos en la carpeta `backtracking` va a buscar `backtracking.cpp` y `backtracking.h` y lo va a compilar en `backtracking`.
- Siempre va a crear una carpeta `OBJS` en donde guarda los archivos `.o`
- Cuando se desean incluir archivos que se encuentren en la carpeta `common`, se debe anteponer `COMMON_OBJS` al `include`:

```
COMMON\_OBJS := ClassName1 ClassName2
include ../Makefile.common
```

en donde `ClassName` es el nombre de la clase. Por ejemplo, `COMMON_OBJS := Graph Edge`

- Se pueden agregar targets específicos que luego del `include ../Makefile.common`.

### 3. Pautas generales de medición

Para medir cierto valor durante la ejecución de un algoritmo frente a una determinada instancia, se tomaron los siguientes recaudos:

- Se ejecutó el algoritmo frente a la misma instancia una cierta cantidad de veces, en este trabajo cincuenta veces fue suficiente.
- De todos los valores obtenidos se descartaron aquellos que sean menores al percentil 25 o mayores al percentil 75.
- Los valores restantes fueron ordenados y se tomó como valor final a la mediana.



## 4. Pautas para la generación de grafos

Se generaron dos familias principales de instancias de CACM:

- Instancia ‘*aleatoria*’ El objetivo fue generar una instancia de la que no se pueda suponer nada, para evitar cualquier tipo de sesgo.

Se tomó un valor fijo de cota para todos los parametros, llamado  $C$ .

- $n$  se eligió uniformemente entre  $\{1, \dots, C\}$ .
- $k$  se eligió uniformemente entre  $\{1, \dots, C\}$ .
- $u$  se eligió uniformemente entre  $\{1, \dots, n\}$ .
- $v$  se eligió uniformemente entre  $\{1, \dots, n\}$ .
- $m$  se eligió uniformemente entre  $\{0, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$ .
- Para cada arista se eligieron como extremos dos enteros uniforme entre  $\{1, \dots, n\}$  (si los nodos correspondientes ya eran adyacentes, se vuelve a elegir). Los pesos según  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se eligieron como valores de punto flotante uniformemente en el intervalo  $(0, C]$ .

Observación:  $C$  depende del algoritmo para el que haya sido generada la instancia. Por ejemplo, para el *backtracking* no tiene sentido usar  $C > 30$ , pues el tiempo de ejecución puede llegar a ser demasiado grande.

- Instancia ‘*mágica*’

Estas instancias fueron generadas para la medición de calidad de las heurísticas. Se conoce de antemano el valor de la solución óptima, lo que en instancias generales solo se podría saber corriendo un algoritmo exacto, que puede tardar mucho en grafos grandes. Además se pretende que el peso de las aristas esté *balanceado*, es decir, a pesos bajos por  $\omega_1$  correspondan pesos altos por  $\omega_2$ , y a la inversa.

- $n$  es elegida como parámetro.
- $k$  vale  $n - 1$ .
- $u$  vale 1.
- $v$  vale  $n$ .
- $m$  se eligió uniformemente entre  $\{n - 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$ .
- primero se agregan las siguientes  $n - 1$  aristas:  $(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n)$  formando un camino hamiltoniano entre  $u$  y  $v$ . Los pesos de estas aristas, según tanto  $\omega_1$  como  $\omega_2$ , van a ser 1. De esta forma generamos un camino  $I$  válido, ya que  $\omega_1(I)$  vale  $n - 1 \leq k$ .
- Para las aristas que quedan se eligen como extremos dos enteros  $a, b$  uniformemente entre  $\{1, \dots, n\}$  (si los nodos correspondientes ya eran adyacentes, se vuelve a elegir). El peso va a guardar relación con  $|b - a|$ , valor que denotaremos *diff*.

El peso según  $\omega_1$  va a ser generado de manera uniforme entre  $\{0, \dots, 2 * diff\}$ . De esta forma la esperanza del peso va a ser  $diff$ . El peso según  $\omega_2$  va a valer  $2 * diff$  menos el peso según  $\omega_1$ . De esta forma la esperanza de este peso también va a valer  $diff$ . Así quedan balanceados los dos pesos simétricamente alrededor de  $diff$ . Por ejemplo, si tenemos la arista  $(1, 9)$ ,  $diff$  vale 8. Si  $\omega_1$  resulta 6, entonces  $\omega_2$  lo fijamos en 10.

Sea  $P$  un camino, entonces la esperanza de su peso - tanto por  $\omega_1$  como por  $\omega_2$  - es la sumatoria de las esperanzas de las aristas que lo constituyen. Es la sumatoria del  $diff$  de cada arista. Los caminos que nos interesan van de  $u$  a  $v$ . Cualquier camino de 1 a  $n$  va a tener una suma de  $diff$  mayor o igual a  $n - 1$ , ya que por cada unidad que uno avanza entre 1 y  $n$  utilizando una arista, la arista suma 1 a su  $diff$ . Como se deben avanzar  $n - 1$  unidades, entonces la sumatoria de los  $diff$  va a ser mayor o igual a  $n - 1$ .

Lo importante es que el centro de simetría de los pesos de  $P$  - la sumatoria de los  $diff$  - va a ser mayor o igual que  $n - 1$ . Luego, si  $\omega_2(P) < n - 1$ , entonces  $\omega_1(P) = 2 * \text{sumatoria}(diff) - \omega_2(P) > n - 1$ . Por lo tanto no sería un camino válido pues se excedería del valor de  $k$ . Entonces el camino óptimo tiene  $\omega_2 \geq n - 1$ . El camino  $I$  (válido) definido previamente es, entonces, uno de los caminos óptimos. En la familia de grafos *magica* sabemos luego que el camino óptimo tiene  $\omega_1 = n - 1$ .

Otra ventaja de generar grafos de esta forma es que permite una gran cantidad de caminos alternativos para llegar de  $u$  a  $v$ . Se espera que estos nodos sean los más alejados entre si en todo el grafo, ya que para llegar de 1 a  $n$  las aristas del camino van a tener una sumatoria de  $diff$  - que es la esperanza de la longitud del camino - de por lo menos  $n - 1$ . La esperanza de distancia para cualquier camino entre el nodo 1 y el nodo  $n/2$ , por ejemplo, es mayor a  $n/2 - 1$ .

Si uno forma un camino entre 1 y  $n$  como secuencia creciente de vértices, éste tiene esperanza de peso  $n - 1$ . Por ejemplo:

- $1 \rightarrow n$                       La esperanza de peso es  $n - 1$
- $1 \rightarrow n/2 \rightarrow n$               La esperanza de peso es  $(n/2 - 1) + (n/2) = n - 1$
- $1 \rightarrow 7 \rightarrow n$                 La esperanza de peso es  $(6 + (n - 7)) = n - 1$

Entonces todos las secuencias crecientes de vertices que empiezan en 1 y terminan en  $n$  van a ser candidatos a ser el camino óptimo, ya que todos tienen la esperanza de peso - tanto por  $\omega_1$  como por  $\omega_2$  - alrededor de  $n - 1$ , que es el valor de  $k$ . Esto permite un análisis más interesante de la calidad de las distintas heurísticas.

Para cada familia de instancias, se consideraron tres subfamilias:

- *Densidad baja*

La cantidad de aristas se definió de antemano como  $3n$ , es decir,  $O(n)$ .

- *Densidad media*

La cantidad de aristas se definió de antemano como  $n\sqrt{n}$ , es decir,  $O(n\sqrt{n})$ .

- *Densidad alta*

La cantidad de aristas se definió de antemano como la máxima:  $\frac{n(n-1)}{2}$  es decir,  $O(n^2)$ .

## 5. Desarrollo del TP

### 5.1. Backtracking

#### 5.1.1. Descripción

El algoritmo a cada paso tiene un camino  $P = [v_1 = u, \dots, v_{i-1}]$  e intenta agregar al camino un nuevo nodo  $v_i$  de la adyacencia de  $v_{i-1}$ , hasta que llega al nodo destino  $V$ . De esta forma recorre todos los caminos entre  $U$  y  $V$ . De entre todos los caminos tales que el peso por  $\omega_1$  es menor o igual a  $K$ , se guarda el de menor  $\omega_2$ .

Se implementaron las siguientes podas:

- Se exploran solamente caminos simples. Si un camino tiene ciclos, removiéndolo se obtiene uno con menor longitud tanto en  $\omega_1$  como en  $\omega_2$ . Por lo tanto la solución que buscamos no puede tener ciclos, y nos restringimos a caminos simples. La poda se implementó guardando un arreglo que marca para cada nodo si es parte del camino o no. No se agrega nuevamente si ya es parte del camino.
- Si el camino parcial  $P = [v_1 = u, \dots, v_{i-1}]$  cumple:  
 $\omega_1(P)$ , sumado a la distancia según  $\omega_1$  entre  $v_{i-1}$  y  $V$ , es mayor que  $K$   
 entonces se abandona la rama, es decir, no se recorren los caminos que empiezan en  $P$ , ya que cualquiera de éstos no va a cumplir con la restricción de que  $\omega_1$  sea menor o igual a  $K$ .
- Si el camino parcial  $P = [v_1 = u, \dots, v_{i-1}]$  cumple:  
 $\omega_2(P)$ , sumado a la distancia según  $\omega_2$  entre  $v_{i-1}$  y  $V$ , es mayor o igual que el peso según  $\omega_2$  del mejor camino encontrado hasta el momento  
 entonces se abandona la rama, es decir, no se recorren los caminos que empiezan en  $P$ , ya que cualquiera de éstos no va a proporcionar una solución mejor que la ya encontrada.

Para saber las distancias entre todos los vértices y  $v$ , al principio se corre dos veces Dijkstra, utilizando como peso primero  $\omega_1$  y luego  $\omega_2$ .

A continuación, el pseudocódigo de la función **backtrack**.

---

**Algoritmo 1** backtrack(Edge e)

---

```

1: Node n ← e.toNode
2: currentBranch.path.push_back(n)
3: currentBranch.totalOmega1 += e.omega1
4: currentBranch.totalOmega2 += e.omega2
5: visited[n] ← true
6: podar ← currentBranch.totalOmega1 + distanceToVOmega1[n] > K or current-
   Branch.totalOmega2 + distanceToVOmega2[n] ≥ bestSolutionFound.totalOmega2
7: si not podar entonces
8:     si n = V entonces
9:         bestSolutionFound ← currentBranch
10:    sino
11:        para each Node a in adjacencyList[n] hacer
12:            si not visited[a] entonces
13:                Edge f = incidenceMatrix[n][a]
14:                backtrack(f)
15:            fin si
16:        fin para
17:    fin si
18: fin si
19: currentBranch.path.pop_back()
20: currentBranch.totalOmega1 -= e.omega1
21: currentBranch.totalOmega2 -= e.omega2
22: visited[n] ← false

```

---

### 5.1.2. Complejidad

[FIXME] hacer, te tiene que dar  $(n+1)!$

### 5.1.3. Experimentación

Se efectuó una experimentación sobre el tiempo de ejecución del algoritmo. Primero se evaluó sobre instancias *aleatorias*, de distinto tamaño de entrada. Se obtuvieron dos conclusiones importantes.

Primero, la curva que se puede observar representa una función que crece cada vez más rápido, es decir que no es lineal. Al mismo tiempo, no parece crecer tan rápido como la función factorial que expresa la complejidad teórica del algoritmo.

Segundo, hay mucha amplitud de valores para tamaños de entrada similares. Esto puede deberse a la naturaleza aleatoria de la instancia. Los nodos de origen y destino pueden estar muy cerca o muy lejos, puede haber muchos o pocos caminos entre ellos.

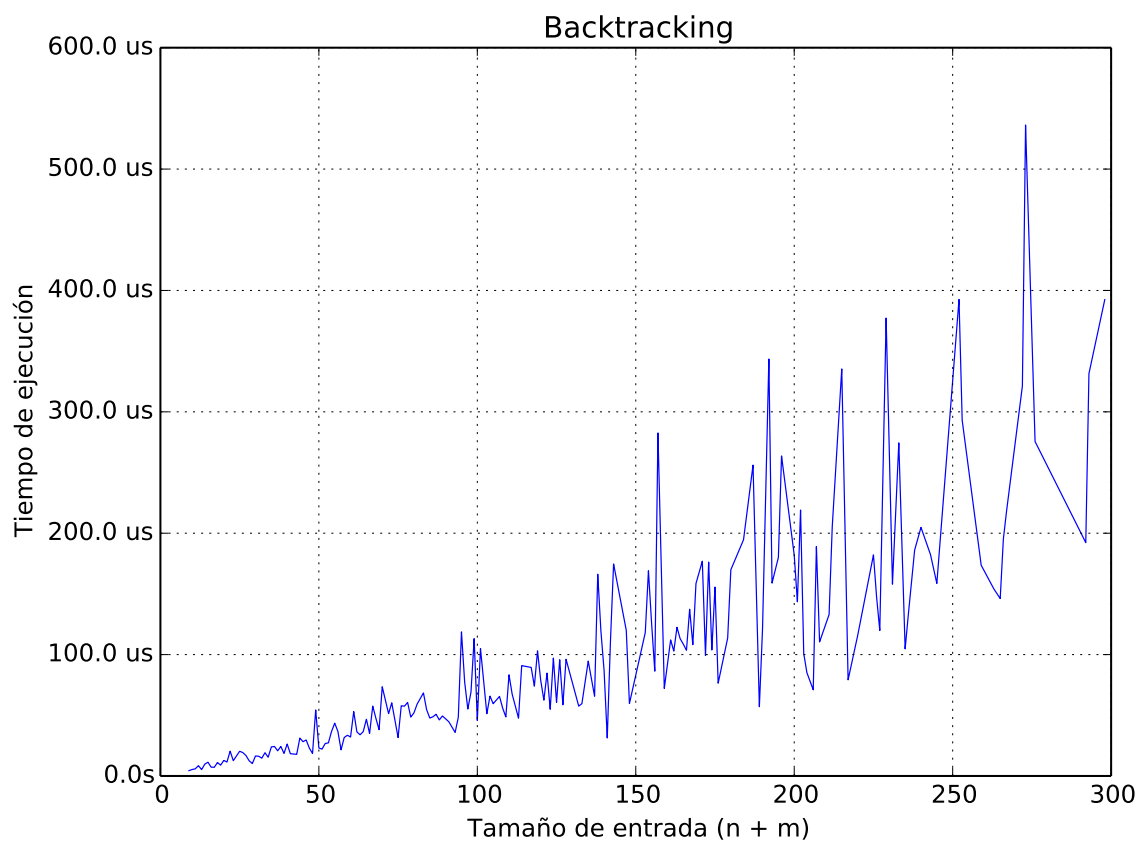


Figura 1: Tiempo de ejecución de *backtracking* en instancias *aleatorias*

A continuación evaluamos el comportamiento del algoritmo frente a instancias *mágicas*. Se notaron grandes diferencias con la experimentación anterior.

Como primera impresión, se puede observar una curva que parece ser la característica de las funciones factoriales. Los tiempos de ejecución fueron mucho mayores que frente a instancias *aleatorias*. Para los mismos tamaños de entrada, en las últimas no se llegó a tiempos de 1 milisegundo, mientras que en las primeras se superó ampliamente el segundo.

La explicación que se encuentra, según lo desarrollado en la sección de *Generación de instancias*, es que las instancias *mágicas* proveen una gran cantidad de caminos entre  $u$  y  $v$  que son candidatos a ser el óptimo. Mientras que las instancias *aleatorias* no garantizan ni la lejanía de  $u$  y  $v$  ni una gran cantidad de caminos candidatos a ser el óptimo. Probablemente una vez que se encuentre el camino las otras ramas de solución se puedan descartar rápidamente.

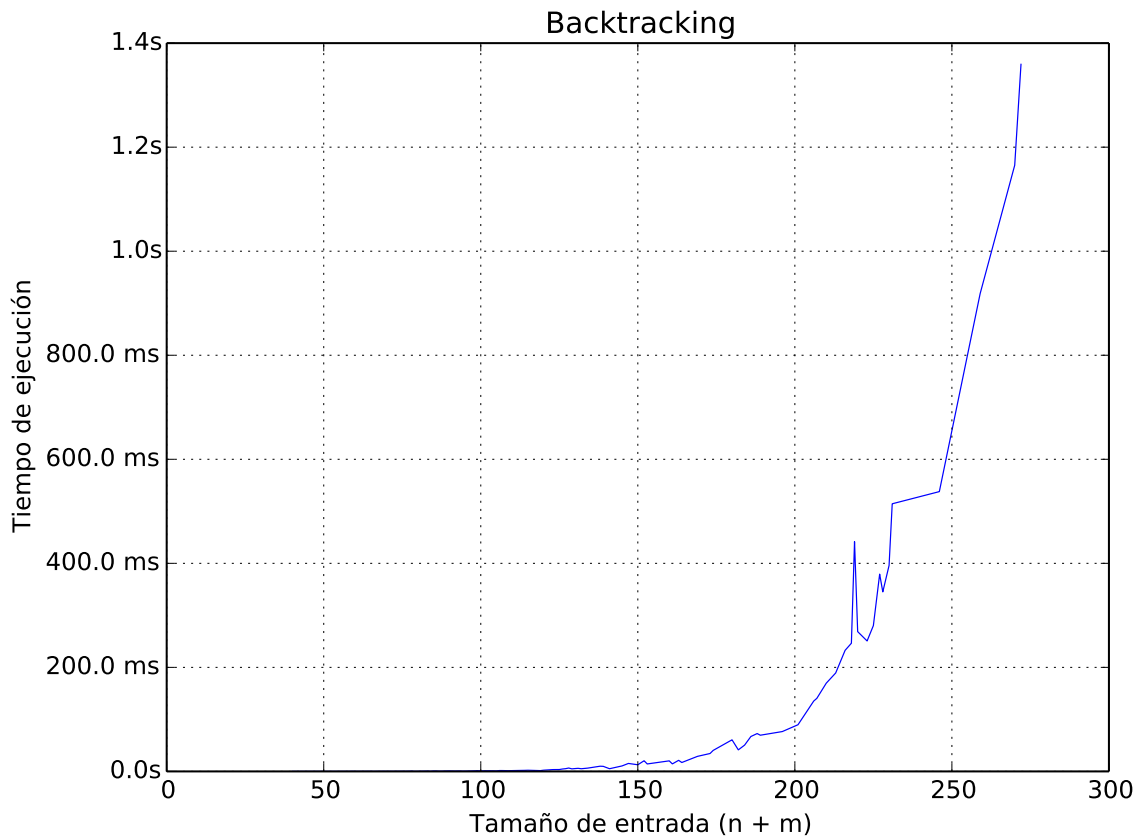


Figura 2: Tiempo de ejecución de **backtracking** en instancias *mágicas*

Se quiso investigar la performance del algoritmo en relación a  $n$ , la cantidad de nodos.

Para ello se generaron instancias *mágicas* de distintos valores de  $n$ , y con  $m$  fijo en la mitad de las aristas posibles, es decir  $\frac{n(n-1)}{4}$ .

Para ver la magnitud de los valores fue apropiada una escala logarítmica. Se puede percibir una muy ligera concavidad positiva de la curva, lo que vendría a indicar que la función crece más rápido que una exponencial(en escala logarítmica toda recta con pendiente  $m$  representa la función  $m^x$ ). Con estos resultados se añade evidencia al cálculo de complejidad efectuado, que indica una complejidad factorial en función de  $n$ .

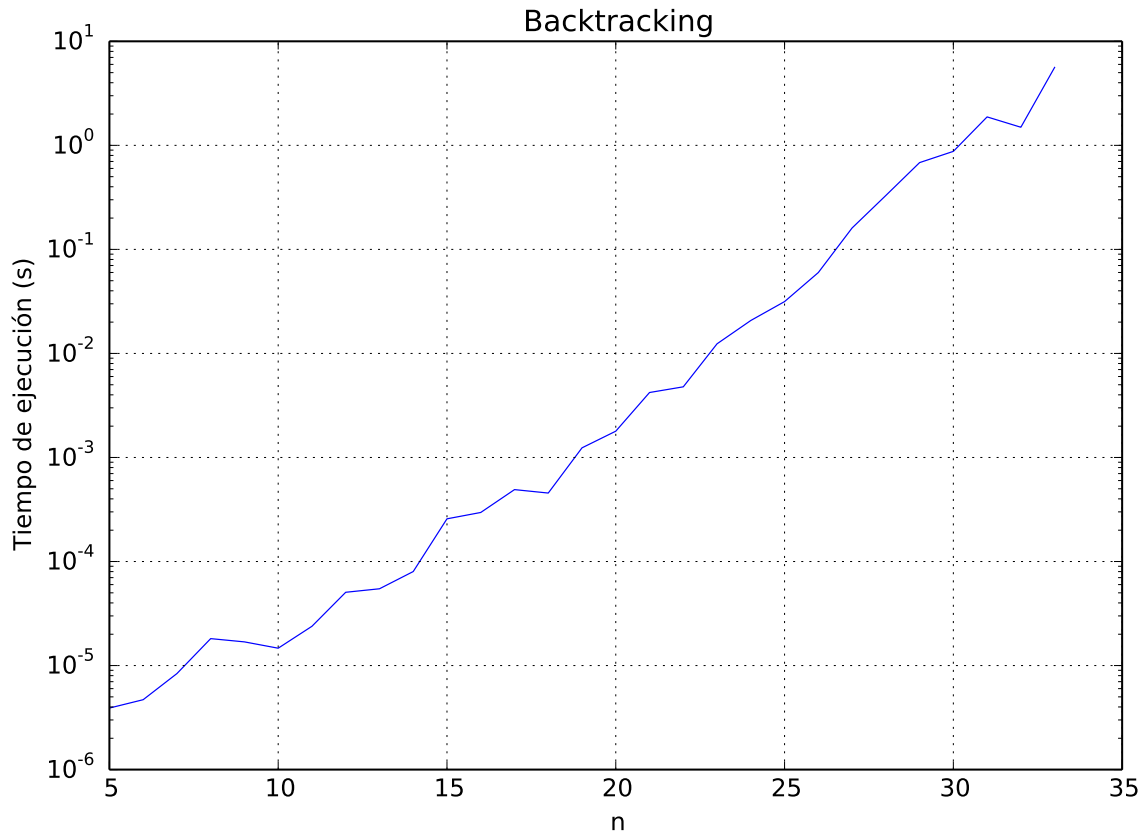


Figura 3: Tiempo de ejecución de **backtracking** en instancias *mágicas*, en función de  $n$



A continuación se exploró el comportamiento del algoritmo en función de  $m$ , la cantidad de aristas. El valor de  $n$  estuvo fijo en 25 y la cantidad de aristas se varió entre  $n - 1$  y la máxima cantidad para un grafo de 25 vertices.

Nuevamente con escala logarítmica, se observó un gran crecimiento en el tiempo de ejecución a medida que se aumenta  $m$ . Esto era predecible ya que se aumenta el tamaño de la adyacencia de los vértices y por lo tanto la cantidad de iteraciones del ciclo en el algoritmo. A más alto nivel, la cantidad de caminos entre  $u$  y  $v$  tiende a aumentar. Sin embargo, la curva observada tiene concavidad negativa, por lo que representa a una función que crece más lento que una exponencial.

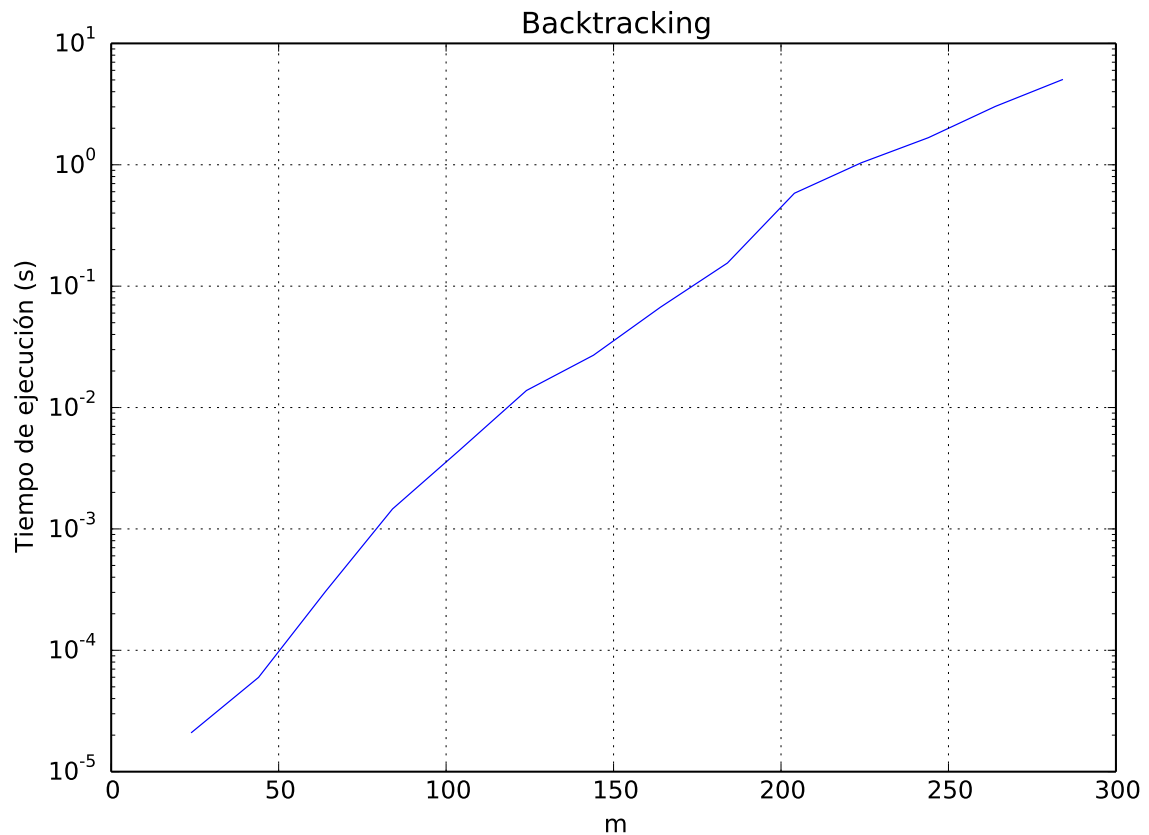


Figura 4: Tiempo de ejecución de **backtracking** en instancias *mágicas*, en función de  $m$

## 5.2. Greedy

### 5.2.1. Descripción

Frente a un problema, un algoritmo goloso va armando la solución global usando la heurística de elegir a cada paso la solución óptima local. En general estos algoritmos son eficientes y simples de diseñar e implementar, pero puede ser que nunca lleguen a la solución óptima global del problema.

De acuerdo a la definición de Brassard<sup>2</sup>, un algoritmo goloso se compone de los siguientes elementos:

1. Un concepto de candidato, y una estructura de solución a partir de candidatos.
2. Un conjunto de candidatos que ya han sido considerados y seleccionados.
3. Un conjunto de candidatos considerados y rechazados.
4. Una función que comprueba si cierto conjunto de candidatos constituye una solución a nuestro problema, ignorando si es o no óptima por el momento.
5. Una función de factibilidad, que determina si es o no posible completar el conjunto añadiendo otros candidatos para obtener al menos una solución de nuestro problema.
6. Una función de selección que indica en cualquier momento cuál es el más promotor de los candidatos restantes, que no han sido seleccionados ni rechazados.
7. Una función objetivo, que da el valor de la solución que hemos hallado.

**[FIXME]** ver la correccion de estatico/dinamico

Lo que busca el algoritmo goloso es encontrar la secuencia de candidatos que constituya una solución, y que optimice el valor de la función objetivo. Este algoritmo avanza paso a paso. Inicialmente, el conjunto de elementos seleccionados está vacío. Entonces, en cada paso se considera añadir a este conjunto el mejor candidato sin considerar los restantes, de acuerdo a nuestra función selección. Si el conjunto ampliado de candidato seleccionados ya no fuera factible, rechazamos el candidato que estamos considerando en ese momento. Sin embargo, si el conjunto aumentado sigue siendo factible, entonces añadimos el candidato actual al conjunto de candidatos seleccionados, en donde pasará a estar desde ahora en adelante. Cada vez que se amplía el conjunto de candidatos seleccionados, comprobamos si éste constituye ahora una solución para nuestro problema. A partir de este esquema, al agregar siempre soluciones óptimas locales a mi conjunto, al finalizar lo que se espera encontrar es la solución óptima global.

El algoritmo de Dijkstra para encontrar caminos mínimos en un grafo pesado es un algoritmo goloso, que funciona y es correcto, como lo fue demostrado por Bassard et al. en el libro mencionado.

---

<sup>2</sup>Brassard G., Bratley P., *Fundamental of Algorithmics*, Prentice Hall, 1996. (c)

Dado un grafo  $G = (V, X)$ , Dijkstra guarda un conjunto  $S$  de nodos que ya fueron recorridos y un vector  $\pi$  con la distancia mínima encontrada de un nodo  $u$  a todo el resto. Como invariante, el valor de  $\pi$  de los nodos en  $S$  ya es su distancia a  $u$ . En cada fase de Dijkstra, se selecciona un nuevo nodo de  $V \setminus S$  cuyo valor en  $\pi$  sea mínimo y se añade a  $S$ , actualizando si es necesario  $\pi$ . Al finalizar,  $\pi$  es el vector con la mínima distancia a todos los nodos.

Para resolver el problema se va a implementar Dijkstra con tres funciones objetivo diferentes, que toman una arista y devuelven un peso para ella:

1.  $f_A(e) = \omega_1(e)$
2.  $f_B(e) = \omega_2(e)$
3.  $f_C(e) = \omega_1(e)\omega_2(e)$

A continuación detallamos el pseudocódigo de Dijkstra parametrizado para ejecutarse con distintas funciones de peso. La implementación utiliza un heap para mantener la lista de nodos no visitados.

---

**Algoritmo 2 Dijkstra**


---

In: Grafo  $G = (V, X)$ , nodo inicial  $v_0$ , ObjectiveFunction  $f$

Out: Arreglo  $\pi$  con camino mínimo en función de  $f$  a cada nodo

Arreglo *previo* con nodo anterior en el camino mínimo, para cada nodo

```

1:  $\pi(v) = \infty \quad \forall v \in V$ 
2:  $previo(v) = null \quad \forall v \in V$ 
3:  $\pi(v_0) = 0$ 
4:  $S = \emptyset$ 
5: para  $i = 1 \dots n - 1$  hacer
6:    $v \leftarrow$  nodo de  $V \setminus S$  de mínimo  $\pi$ .
7:   para each  $w \in V \setminus S$  adyacente a  $v$  hacer
8:     si  $\pi(v) + f((v, w)) < \pi(w)$  entonces
9:        $\pi(w) = \pi(v) + f((v, w))$ 
10:       $previo[w] \leftarrow v$ 
11:   fin si
12: fin para
13:  $S = S \cup \{v\}$ 
14: fin para
15: retornar  $\pi, previo$ 
    
```

---

---

**Algoritmo 3** Reconstrucción del camino mínimo

---

```
1:  $path \leftarrow []$ 
2:  $actual = v$ 
3: mientras  $previo[actual] \neq null$  hacer
4:    $path.push\_front(actual)$ 
5:    $actual \leftarrow previo[actual]$ 
6: fin mientras
7: retornar  $path$ 
```

---

**5.2.2. Complejidad**

De acuerdo al libro de Brassard antes mencionado, la complejidad de Dijkstra implementada sobre un heap es  $O(m \log n)$ . Se utilizó la implementación `priority_queue` de la *Standard Template Library* de  $C++$  que garantiza la complejidad de heap<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>[http://www.cplusplus.com/reference/queue/priority\\_queue/priority\\_queue/](http://www.cplusplus.com/reference/queue/priority_queue/priority_queue/)

### 5.2.3. Familias Malas - Greedy A: utiliza la función de peso $f_A$

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , obtenemos el camino mínimo entre  $u$  y  $v$  según  $\omega_1$ .

A continuación definimos una familia de grafos en los cuales nuestro algoritmo puede devolver resultados muy malos.

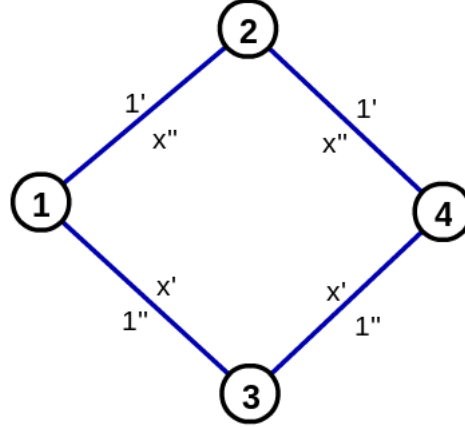


Figura 5: Familia de grafos malos para el Greedy A. En adelante, con un apóstrofe haremos referencia al peso por  $\omega_1$  y con dos al peso por  $\omega_2$

Para ir de 1 a 4 hay dos caminos posibles:  $(C_1) 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ;  $(C_2) 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$$\omega_1(C_1) = 2 \quad (1)$$

$$\omega_2(C_1) = 2x \quad (2)$$

$$\omega_1(C_2) = 2x \quad (3)$$

$$\omega_2(C_2) = 2 \quad (4)$$

Supongamos que  $K$  vale  $2x$ , es decir, los dos caminos son válidos. Nuestro algoritmo elige  $C_1$ .  $\frac{\omega_2(C_1)}{\omega_2(C_2)} = x$ . Como  $x$  lo podemos variar, este cociente puede ser tan grande como queramos. Es decir que el algoritmo goloso puede devolver una solución arbitrariamente alejada de la óptima.

El algoritmo puede encontrar una solución no factible. En ese caso, se sabe que no existe una solución posible, ya que la solución encontrada tiene un valor por  $\omega_1$  menor o igual al de cualquier otro camino.

#### 5.2.4. Familias Malas - Greedy B: utiliza la función de peso $f_B$

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , obtenemos el camino mínimo entre  $u$  y  $v$  según  $\omega_2$ .

A continuación definimos una familia de grafos en los cuales nuestro algoritmo puede devolver resultados muy malos.

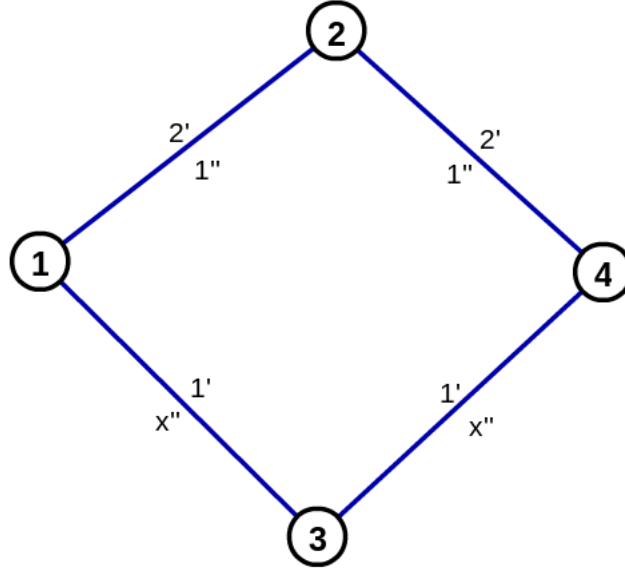


Figura 6

Para ir de 1 a 4 hay dos caminos posibles:  $(C_1) 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ;  $(C_2) 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$

$$\omega_1(C_1) = 4 \quad (5)$$

$$\omega_2(C_1) = 2 \quad (6)$$

$$\omega_1(C_2) = 2 \quad (7)$$

$$\omega_2(C_2) = 2x \quad (8)$$

Supongamos que  $K$  vale 2. Nuestro algoritmo elige  $C_1$ , pero al no ser válido, se ve obligado a devolver “no”. Pero  $C_2$  era una solución válida. Ésto se cumple para cualquier valor de  $x$ .

Esta heurística, si devuelve una solución válida, entonces devuelve la solución óptima. Sin embargo, en cualquier instancia interesante de  $CACM$  - que no se reduzca a encontrar el camino mínimo por  $\omega_2$  - la heurística devolvería un camino inválido.

### 5.2.5. Familias Malas - Greedy C: utiliza la función de peso $f_C$

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , obtenemos el camino mínimo entre  $u$  y  $v$  según  $\omega_1\omega_2$ .

Esta heurística se puede comportar de la misma forma que el Greedy B, si consideramos la familia mala de grafos desarrollada para el Greedy B, restringiendonos a valores de  $x$  mayores a 2. Se elegiría  $C_1$  para minimizar el producto de las funciones de peso. Como no es válido, se deberá devolver “no”, a pesar de que  $C_2$  era válido.

### 5.2.6. Conclusión: unificación de las tres heurísticas

Las tres heurísticas *GreedyA*, *GreedyB* y *GreedyC* no son muy útiles por separado. Se considerara la heurística *Greedy* como:

---

#### Algoritmo 4 Greedy

---

```

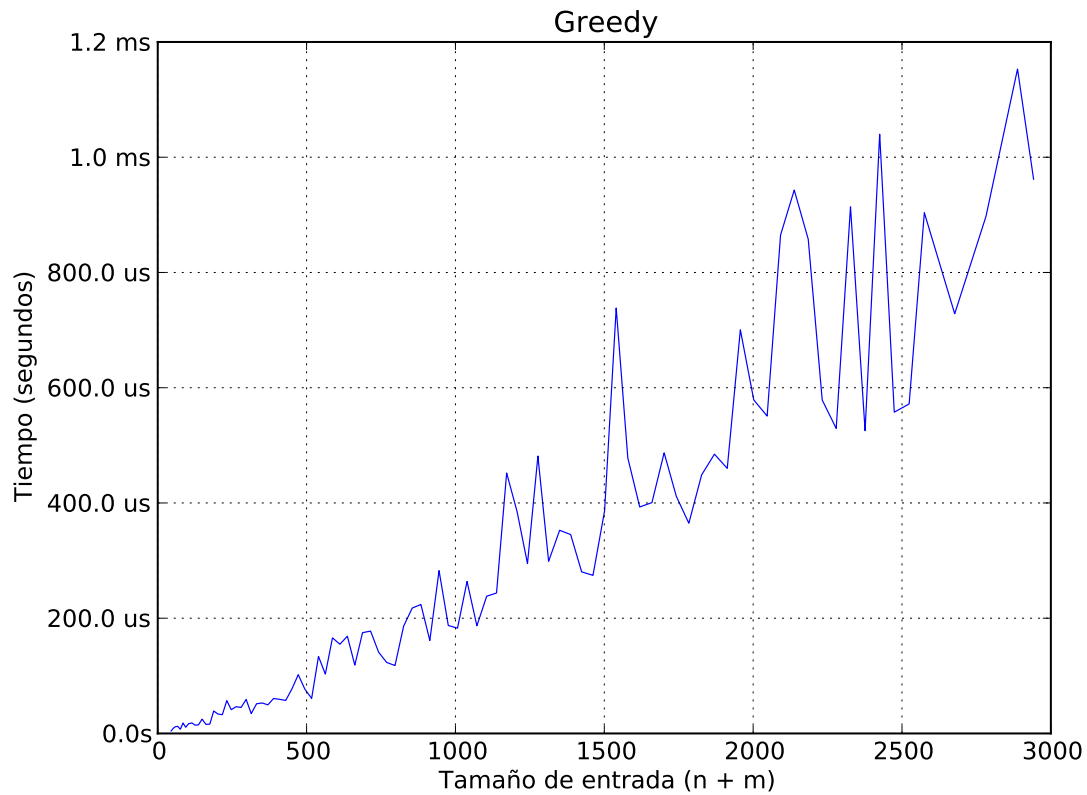
1:  $pathB \leftarrow GreedyB()$ 
2: si  $valido?(pathB)$  entonces
3:   retornar  $pathB$ 
4: fin si
5:  $pathA \leftarrow GreedyA()$ 
6:  $pathC \leftarrow GreedyC()$ 
7: si  $valido?(pathC)$  entonces
8:   si  $\omega_2(pathA) < \omega_2(pathC)$  entonces
9:     retornar  $pathA$ 
10:   sino
11:     retornar  $pathC$ 
12:   fin si
13: fin si
14: si  $valido?(pathA)$  entonces
15:   retornar  $pathA$ 
16: sino
17:   retornar no
18: fin si
    
```

---

### 5.2.7. Experimentación

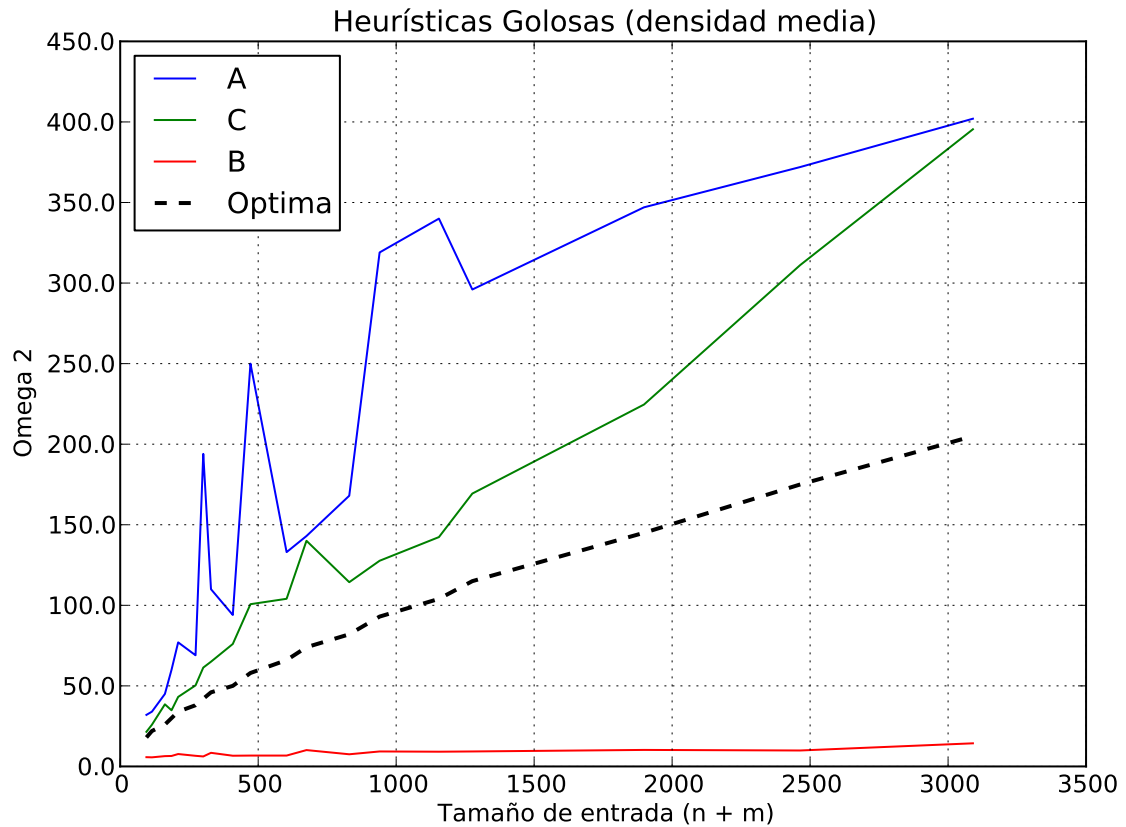
Resulta importante destacar las decisiones que tomamos para la generación de grafos. Nos cercioramos primero de que exista un camino entre  $u$  y  $v$  que cumpla con la restricción de  $k$ . Luego fuimos agregando caminos, como para dar varias opciones a los algoritmos, con la particularidad de que eran *balanceados*. Ésto significa que si el peso según  $\omega_1$  del camino era bajo, entonces le asignábamos un  $\omega_2$  alto. Más aún, para todo camino  $C$  entre  $u$  y  $v$ ,  $\omega_1(C)$  y  $\omega_2(C)$  estaban distribuidos simetricamente con respecto a  $k$ . Es decir, el camino  $P$  más corto según  $\omega_2$  que cumpla con la restricción de  $k$  era tal que  $\omega_1(P) = \omega_2(P) = k$ . En particular, nosotros insertábamos este camino  $P$  en el grafo, de modo que llevamos cuenta del valor de la solución óptima. Ésto nos va

a facilitar evaluar la calidad de una solución cuando la instancia es muy grande como para correr el backtracking.



Se puede interpretar la curva de tiempo de ejecución vs. tamaño de entrada como una función cercana a la lineal, aunque se puede percibir que está ligeramente por encima de ésta.





Lo que salta a simple vista es el bajo peso según  $\omega_2$  de la heurística B. ¡Pareciera ser mejor solución que la óptima! Sin embargo, recordando lo expuesto previamente, nos damos cuenta que si el peso según  $\omega_2$  es menor que el de la óptima, entonces el peso según  $\omega_1$  es mayor que el de la óptima, es decir, que  $k$ . Por lo tanto no son soluciones válidas. Ésto era de esperar - la heurística B sólo va construyendo su solución sin reparar siquiera en  $\omega_1$ .

Por otro lado tenemos la heurística A, que sólo mira  $\omega_1$  y por lo tanto termina bastante alejada de la solución óptima. La heurística C resultó ser un acierto, se acerca bastante a la solución válida, pero no descuida el mantenerse dentro de la cota de  $k$ .

### 5.3. Local Search

La búsqueda local es un método heurístico para mejorar una dada solución factible a un problema. Se basa en, a partir de una solución inicial  $s$ , mejorar esa solución iterativamente, tomando la mejor solución de un conjunto de vecinos de  $s$ . El conjunto de los vecinos se determina mediante algún criterio y se usa una función objetivo para comparar las soluciones en la vecindad de  $s$  y discernir cual es la mejor.

La búsqueda local se puede expresar de la siguiente manera:

Sea  $s \in S$  una solución inicial  
 Mientras exista  $s' \in N(s)$  con  $f(s') < f(s)$ :  
 $s \leftarrow s'$

Siendo  $N(s)$  la vecindad de  $s$  y  $f$  la función objetivo que se quiere minimizar. Una versión de la búsqueda local se encarga además de que el vecino que elige minimice la función objetivo entre todas los vecinos.

#### 5.3.1. Solución inicial

Como solución inicial se utilizó la heurística **Greedy** desarrollada en el punto anterior, consistente en elegir la mejor de tres corridas del algoritmo de Dijkstra con distintas funciones de peso.

#### 5.3.2. Definición de la vecindad

En cada iteración definimos la vecindad de  $s$ ,  $N(s)$ , de la siguiente manera: dado el grafo  $G$ , y una solución formada por un camino  $c \in G$ , definimos sus soluciones vecinas como aquellas resultantes de tomar un subcamino  $d_{n_1, n_2} \subseteq c$  entre un par de nodos  $n_1, n_2$  cualesquiera, y reemplazarlo por otro camino  $d_{n_1, n_2}^*$  en  $G$ , de tal forma que el camino  $c^* = c - d_{n_1, n_2} + d_{n_1, n_2}^*$  resultante cumpla:

- $\omega_1(c^*) \leq K$
- $\omega_2(c^*) < \omega_2(c)$

De la forma descripta, dada una solución formada por un camino  $c$  definimos su vecindad como el conjunto  $S^*$  de todos los caminos  $c^*$  posibles.

Corremos previamente  $n$  veces Dijkstra, desde cada nodo. Guardamos los resultados en una matriz tal que en la posición  $[i][j]$  guarda el camino mínimo del nodo  $i$  al  $j$ . Cada camino  $d_{n_1, n_2}^*$  es el camino mínimo entre  $n_1$  y  $n_2$  según  $\omega_2$ , se obtiene de la matriz. Debe además cumplir  $\omega_1(c^*) \leq K$ . De todos los  $c^*$ , se elige el que minimice  $\omega_2$ . Esto se enmarca en la elección de vecinos utilizando el método *Steepest Descent* consistente en elegir al vecino que minimice la función objetivo.

Ahora, para calcular  $\omega_2(c^*)$ , lo calculamos como

$$\omega_2(c) - \omega_2(d_{n_1, n_2}) + \omega_2(d_{n_1, n_2}^*)$$

, valores que ya tenemos calculados.

### 5.3.3. Pseudocódigo

El algoritmo está implementado en la función **main**:

---

**Algoritmo 5** *main*(int tipo\_solucionInicial, Graph g, Nodo n1, Nodo n2)

---

```

1: crearMatrizCaminosMinimos(g)
2: Solution solucion = Greedy(g, n1, n2)
3: si  $\omega_1(\text{solucion}) \leq K$  entonces
4:   mientras True hacer
5:     Solution nuevaSolucion = dameMejorVecino(solucion)
6:     si nuevaSolucion == NULL entonces
7:       break
8:     fin si
9:     solucion = nuevaSolucion
10:  fin mientras
11: fin si

```

---



---

**Algoritmo 6** *dameMejorVecino*(Solution solucionOriginal)

---

```

1: Solution mejorSolucion = &solucionOriginal
2: vector<int> nodos = &nodos(solucionOriginal)
3: para i=0; i < size(nodos); i++ hacer
4:   para j=i+1; j < size(nodos); j++ hacer
5:     Solution subSolucion = crearSubSolucionEntre(solucionOriginal, nodos[i],
nodos[j])
6:     Solution solucion_ij = dameCaminoResueltoEntre(nodos[i], nodos[j])
7:     Solution nuevaSolucion_omega2 = omega2(solucionOriginal) - omega2(subSolucion) +
omega2(solucion_ij)
8:     Solution nuevaSolucion_omega1 = omega1(solucionOriginal) - omega1(subSolucion) +
omega1(solucion_ij)
9:     si nuevaSolucion_omega2 < omega2(mejorSolucion) && nuevaSolucion_omega1 <= K en-
tonces
10:      mejorSolucion = crearSolucionReemplazandoCamino(solucionOriginal,
solucion_ij)
11:   fin si
12: fin para
13: fin para
14: return mejorSolucion

```

---

---

**Algoritmo 7** *crearSolucionReemplazandoCamino*(Solution orig, Solution sub)
 

---

```

1: Solution res
2: res = obtenerCaminoHasta(nodos(sub)[0])
3: res += sub
4: int subSize = size(nodos(sub))
5: res += obtenerCaminoDesde(nodos(sub)[subSize-1])
6: return res

```

---

**[FIXME]** poner la parte de remover caminos en el pseudo del main, y capaz agregar el pseudo de la funcion

### 5.3.4. Complejidad

Implementamos el algoritmo en la función *main*. La complejidad del algoritmo resulta la suma de obtener la solución inicial y el ciclo que se usa para mejorarla buscando un mejor vecino en cada iteración. Además, en *main*, inicialmente, se llama a una función *crearMatrizCaminosMinimos*, que abordaremos más adelante.

Para obtener la solución inicial, usamos *obtenerSolucionInicial*. Esta función devuelve un camino mínimo entre 2 nodos llamando a *resolverConDijkstra* con alguna función objetivo (*Greedy\_A* o *Greedy\_C*). La función *resolverConDijkstra* primero ejecuta Dijkstra para encontrar todos los caminos mínimos entre  $n_1$  y los demás nodos y después hace un recorrido inverso desde  $n_2$  hasta  $n_1$  para dar con el camino mínimo entre ellos. Como se comprobó en el apartado anterior, la complejidad de Dijkstra es  $O(m \log(n))$  y el recorrido inverso es  $O(n)$ , por lo que en total la complejidad de *obtenerSolucionInicial* es  $O(m \log(n))$ . Cabe notar que la función objetivo usada en Dijkstra no influye en la complejidad, ya que solo compara los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , por lo que tiene complejidad  $O(1)$ .

Para mejorar la solución usamos un ciclo y en cada iteración obtenemos el mejor vecino del camino actual usando *dameMejorVecino*. Ejecutamos el ciclo mientras en la última iteración hayamos encontrado una mejora al camino actual. Dado que un vecino consiste en reemplazar la porción del camino actual que une 2 nodos  $n_1$  y  $n_2$  por el camino mínimo según  $\omega_2$  entre ellos, y que cada vez que se hace el reemplazo se disminuye  $\omega_2$  del camino actual, se pueden hacer a lo sumo tantos reemplazos como caminos mínimos entre todo par de nodos del grafo existan. La cantidad de caminos mínimos entre todo par de nodos de un grafo es  $n * (n - 1) / 2$ , ya que cada nodo tiene un camino mínimo hacia todos los demás y no a sí mismo. Esto es, si hay  $n$  nodos, el nodo  $n_1$ , tiene un camino mínimo hacia los nodos  $n_2, \dots, n_n$ , el nodo  $n_2$  tiene un camino hacia  $n_3, \dots, n_n$  ya que no se vuelve a contar el camino entre  $n_1$  y  $n_2$  y así hasta  $n_{n-1}$  que tiene un camino hasta  $n_n$ . Luego, la cantidad máxima de iteraciones es  $n * (n - 1) / 2$ .

Para analizar la complejidad de cada iteración hay que analizar la complejidad de *dameMejorVecino*. Lo primero que hace la función es obtener el arreglo de nodos de la solución pasada por parámetro, que llamamos *solucionOriginal*. Cómo el camino de *solucionOriginal* está representado como una lista de ejes, lo que hace es iterar por todos los ejes y tomar el *nodo1* del eje y al final adicionar el *nodo2* del último eje. Por

ende, tomando  $t$  como la cantidad de nodos en el camino, en cada iteración, por cada eje del camino, se toma un nodo y esto se hace  $t-1$  veces y luego se añade el nodo final. Como  $t$  puede ser a lo sumo  $n$ , entonces la complejidad de esto resulta  $O(n^2)$ . Luego de ejecuta un doble *for* de  $t*(t-1)/2$  iteraciones, que en cada iteración intenta mejorar el mejor camino encontrado hasta el momento, que llamamos mejorSolucion. Inicialmente mejorSolucion es igual a solucionOriginal. Para encontrar una mejor solución en cada iteración hacemos lo siguiente:

- Creamos el subcamino de solucionOriginal entre los nodos  $n_1$  y  $n_2$ .
- Obtenemos el camino mínimo entre los nodos  $n_1$  y  $n_2$ .
- Obtenemos un nuevo camino reemplazando el el subcamino entre los nodos  $n_1$  y  $n_2$  por el camino mínimo entre ellos.

Para crear el subcamino de solucionOriginal entre  $n_1$  y  $n_2$  usamos crearSubSolucionEntre. Esta función recibe un par de nodos y un camino y devuelve el subcamino que une a los nodos. Para esto tiene que recorrer a lo sumo todos los nodos del camino, o sea  $t$ , que puede ser a lo sumo  $n$ .

Para obtener el camino mínimo entre los nodos  $n_1$  y  $n_2$  usamos una optimización que es que en la función *main*, al comienzo, ejecutamos crearMatrizCaminosMinimos que crea una matriz de caminos mínimos entre todo par de nodos del grafo. Generamos esta matriz ejecutando Dijkstra para todos los nodos usando como función objetivo  $\omega_2$ . Usamos esta matriz para obtener en  $O(1)$  el camino mínimo entre los nodos  $n_1$  y  $n_2$ . Como crearMatrizCaminosMinimos ejecuta un Dijkstra por cada nodo, su complejidad es  $O(n * (m \log n))$ .

Para obtener el nuevo camino reemplazando el subcamino entre  $n_1$  y  $n_2$  por el camino mínimo entre ellos, usamos crearSolucionReemplazandoCamino. Lo que hacemos es generar una nueva solución que es la concatenación de 3 caminos: el camino mínimo entre  $n_1$  y  $n_2$  y los dos pedazos del camino original sin el subcamino que unía  $n_1$  y  $n_2$ . Para crear el camino, hay que recorrer el solucionOriginal y añadir todos los nodos hasta  $n_1$  y luego añadir todos los nodos del camino mínimo y al final añadir todos los nodos desde  $n_2$  hasta el final de solucionOriginal. Por ende es como iterar sobre el nuevo camino que a lo sumo puede tener  $n$  nodos y por ende la complejidad resulta  $O(n)$ .

Entonces, resulta ser que encontrar el mejor vecino, consiste en ejecutar el doble *for* de algo que tiene complejidad  $O(n + 1 + n)$ , o sea  $O(n)$ , entonces en total es  $O(n^2 * n) = O(n^3)$ .

Como habíamos explicado que dameMejorVecino se ejecuta en un ciclo de hasta  $n*(n-1)/2$  iteraciones, o sea  $O(n^2)$ , y entonces resulta que la complejidad de encontrar el mejor vecino es  $O(n^2 * n^3) = O(n^5)$ .

Finalmente la complejidad total resulta ser la suma de las complejidades de crearMatrizCaminosMinimos, 2 veces obtenerSolucionInicial y  $n^2$  veces dameMejorVecino. Es decir,  $O(n * (m \log n)) + 2 * (m \log n) + n^5 = O(n^5)$ .

### 5.3.5. Familias malas

Veamos que nuestra heurística de búsqueda local puede quedar arbitrariamente lejos de la solución óptima.

Presentamos la siguiente familia de grafos:

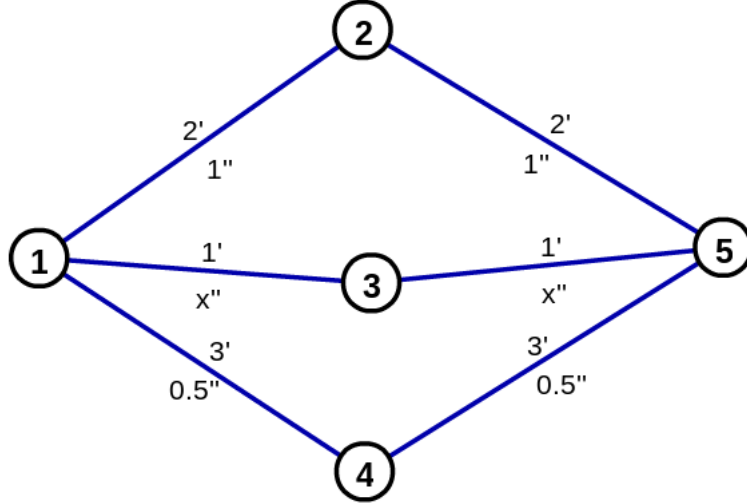


Figura 7

Para ir de 1 a 5 hay tres caminos posibles:  $(C_1)$   $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ ;  $(C_2)$   $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ ;  $(C_3)$   $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ;

$$\omega_1(C_1) = 4 \quad (9)$$

$$\omega_2(C_1) = 2 \quad (10)$$

$$\omega_1(C_2) = 2 \quad (11)$$

$$\omega_2(C_2) = 2x \quad (12)$$

$$\omega_1(C_3) = 6 \quad (13)$$

$$\omega_2(C_3) = 1 \quad (14)$$

Supongamos que  $K$  vale 4. Como decíamos, partimos del camino mínimo entre  $u$  y  $v$  de acuerdo a  $\omega_1$ ,  $C_2$ . El algoritmo va a intentar intercambiar  $C_2$  por  $C_3$ , el camino que minimiza  $\omega_2$ . Sin embargo, como éste se pasa del límite  $K$ , el algoritmo no puede seguir y devuelve  $C_2$ . Sin embargo  $C_1$  era una solución mejor.

$$\frac{\omega_2(C_2)}{\omega_2(C_1)} = x.$$

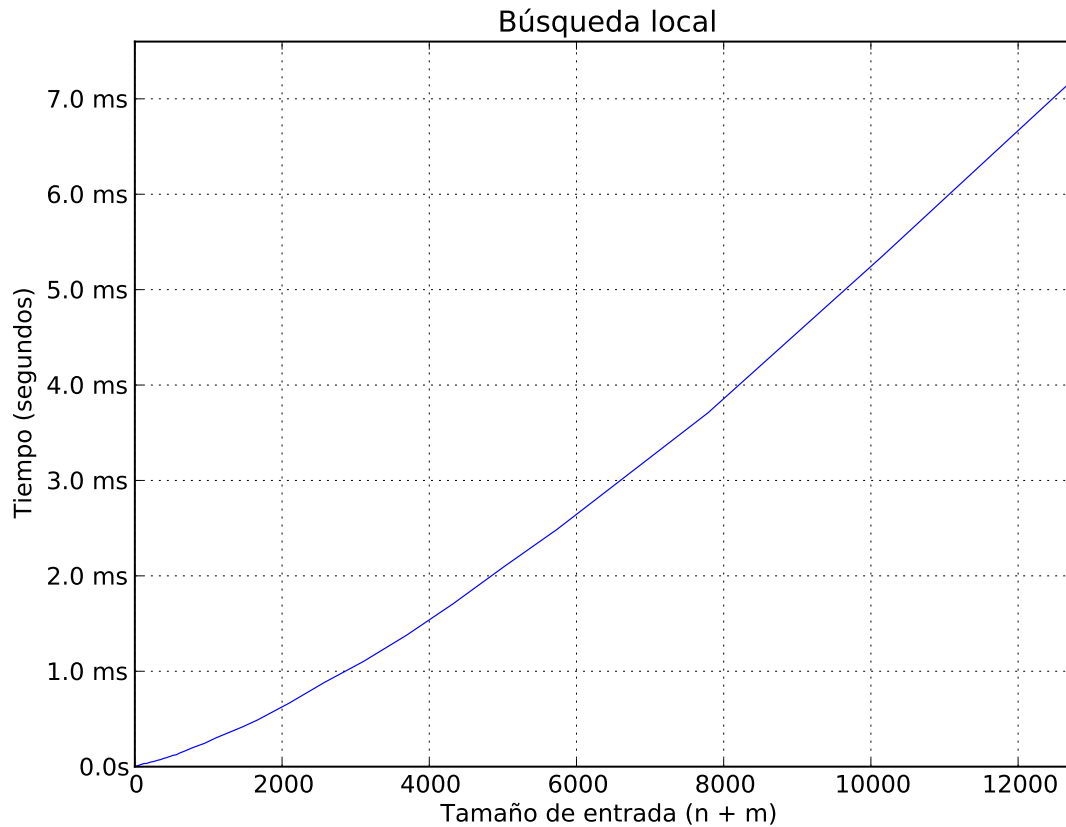
Haciendo crecer el valor de  $x$  podemos encontrar grafos en los que nuestro algoritmo devuelve una solución arbitrariamente lejos de la óptima.

En general, la heurística falla cuando los caminos mínimos por  $\omega_2$  entre todo par de

nodos tienen un valor de  $\omega_1$  demasiado alto, que deja a la solución sin vecinos factibles ya que éstos se sobrepasan de la restricción de  $K$ .

### 5.3.6. Experimentación

Pudimos analizar el tiempo de ejecución frente a grafos de un tamaño considerable. A continuación presentamos un gráfico.

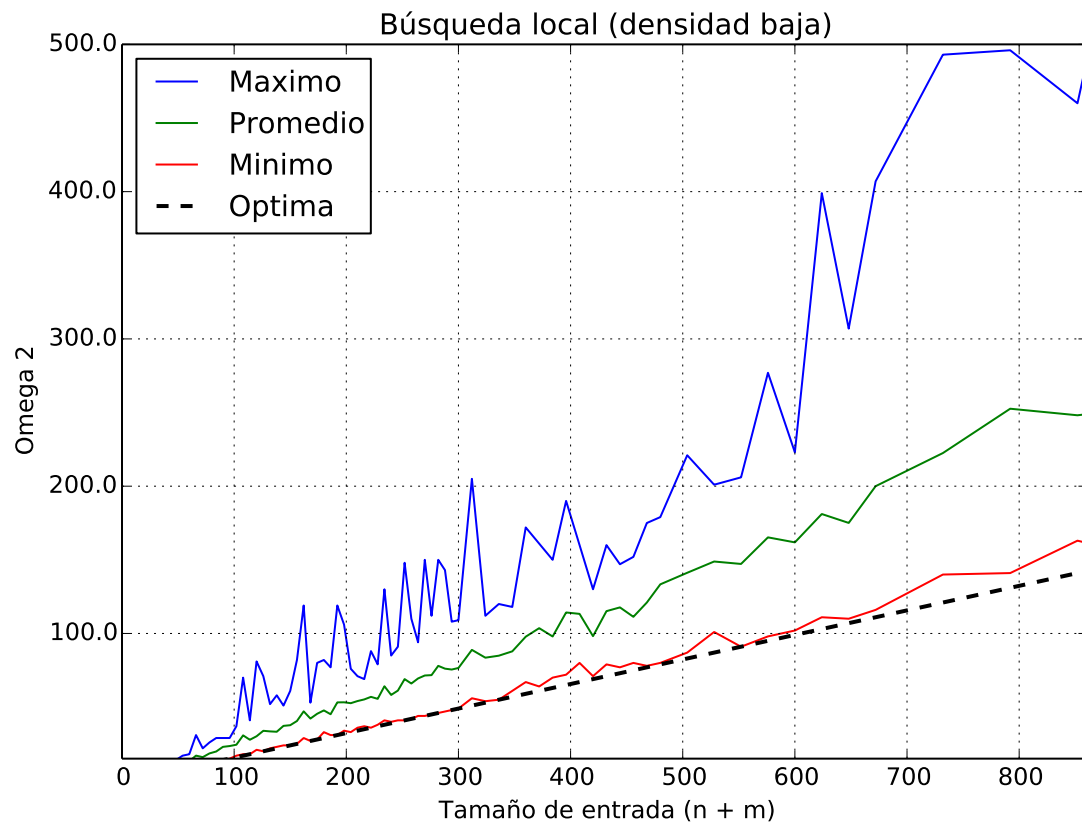


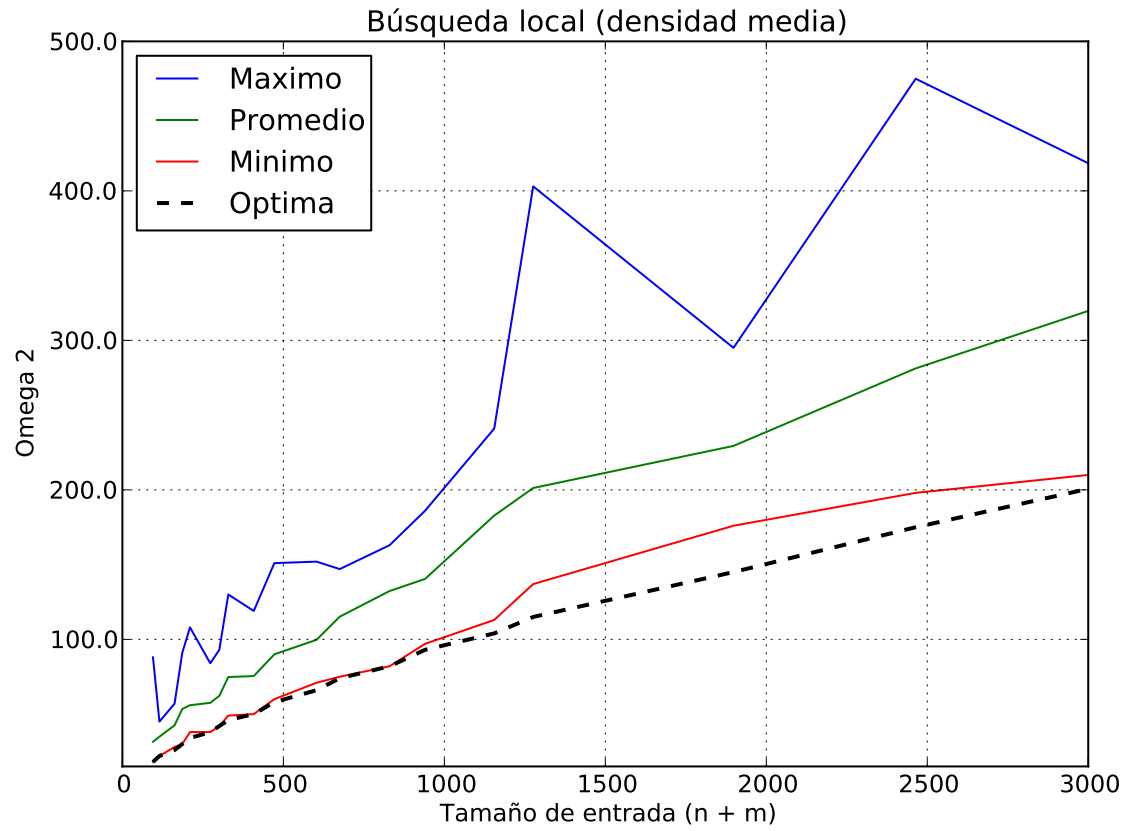
Se puede percibir el carácter no lineal de la complejidad. Sin embargo no se evidencia a luces claras la cota teórica de  $n^5$  desarrollada previamente. Puede ser necesario un tamaño mayor para poder apreciar esa complejidad, o quizás la cota teórica no se alcanza en la práctica. Probablemente haya un factor que se amortice, habiendo escapado de nuestro escrutinio.

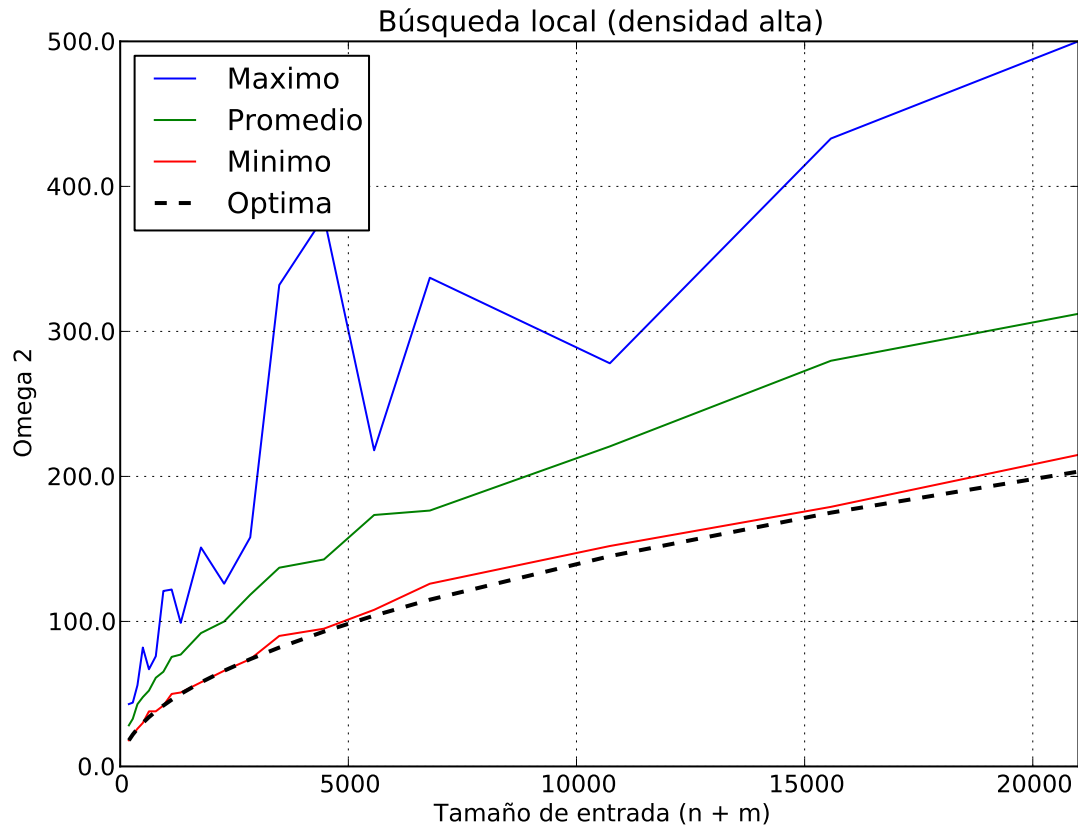
Experimentamos con distintas densidades de grafos. Primero con grafos densos, es decir con una cantidad de aristas del orden de  $n^2$ . Luego con grafos de densidad media, con una cantidad de aristas del orden de  $\sqrt{n} * n$ . Finalmente probamos con grafos raros, con una cantidad de aristas del orden de la cantidad de nodos. Para cada grupo de grafos, analizamos diferentes rangos de tamaños de entrada, con el objetivo de demostrar que el algoritmo mantiene ciertas propiedades, más allá del tamaño.

Se generan cien instancias para cada tamaño de entrada. En los siguientes gráficos se pueden observar comparados el mejor resultado, el peor resultado, y el resultado promedio para cada tamaño de entrada.









En los tres gráficos se puede notar, a medida que aumenta el tamaño de la entrada, una mayor amplitud de resultados. Ésto tiene cierta intuición. Se generan muchas instancias para cada tamaño. A medida que aumenta la cantidad de aristas y vértices, aumenta la variedad entre las instancias generadas. Por eso se puede ver una gran diferencia de resultado entre instancias del mismo tamaño. La solución media, no obstante, parece preservar cierta distancia relativa a la solución óptima. La mejor solución encontrada siempre está muy cerca de la solución óptima. Ésto se evidencia particularmente en el tercer gráfico, lo que atribuimos a la mayor densidad que le permite al algoritmo tener una vecindad amplia para recorrer.

## 5.4. GRASP

La metaheurística Grasp consiste en generar varias soluciones iniciales a partir de una heurística golosa aleatorizada y correr búsqueda local sobre ellas. La solución final es la mejor encontrada tras todas las búsquedas locales. Sea  $S$  el conjunto de soluciones iniciales, el algoritmo que se usa es el siguiente:

Mientras no se alcance el criterio de terminación:

    Obtener  $s \in S$  mediante una heurística golosa aleatorizada.

    Mejorar  $s$  mediante búsqueda local.

    Recordar la mejor solución obtenida hasta el momento.

### 5.4.1. Solución inicial

Usamos Dijkstra como nuestra heurística golosa, pero modificado para agregarle aleatoriedad. El factor aleatorio consiste en que en cada iteración de Dijkstra, en vez de tomar el nodo no visitado que minimiza la función objetivo, tomamos uno de entre los  $\beta$ <sup>4</sup> menores, al azar.

Dada la aleatoriedad de la solución inicial, es posible que ésta no sea factible. En caso de obtener una solución de ese tipo, no ejecutamos búsqueda local.

Utilizamos Dijkstra con la función de peso  $\omega_1$ . De esta forma se intenta dar variedad a las soluciones iniciales, pero al mismo tiempo que éstas sean factibles - es decir, que cumplan con la restricción de  $\omega_1 < K$  - en su mayoría.

### 5.4.2. Criterio de terminación

Usamos 3 criterios de terminación distintos al mismo tiempo. De alcanzarse alguno de los criterios, se termina la ejecución del algoritmo.

Los criterios que usamos son:

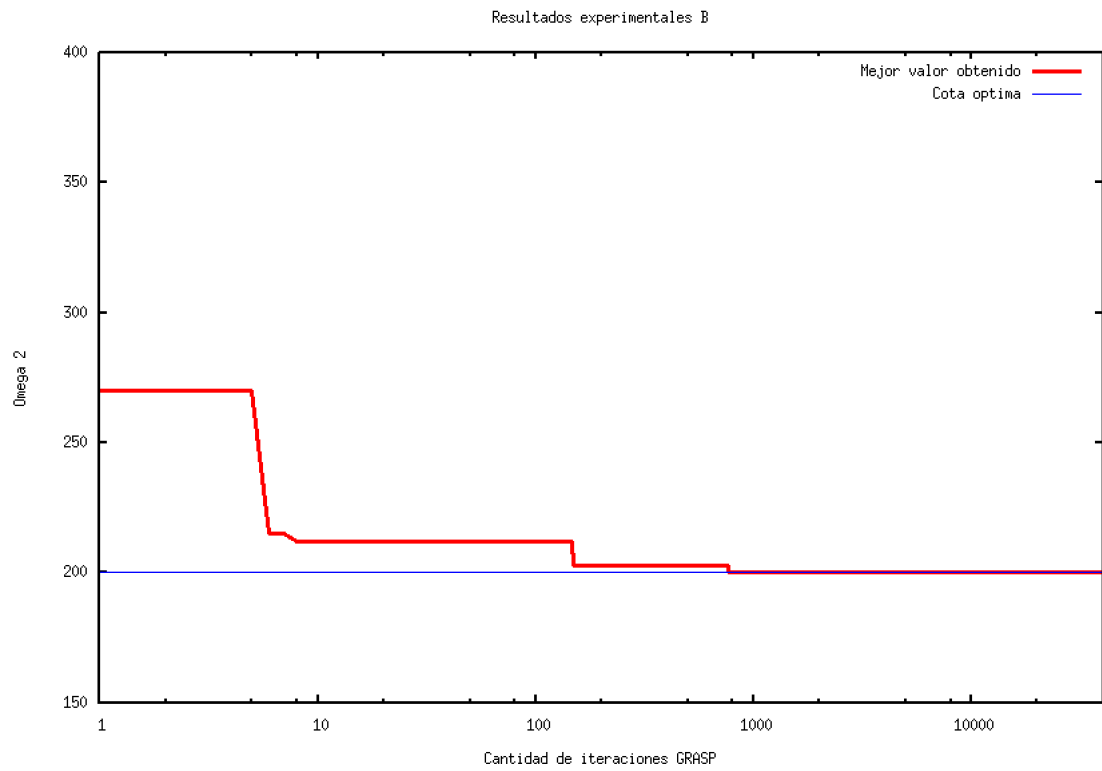
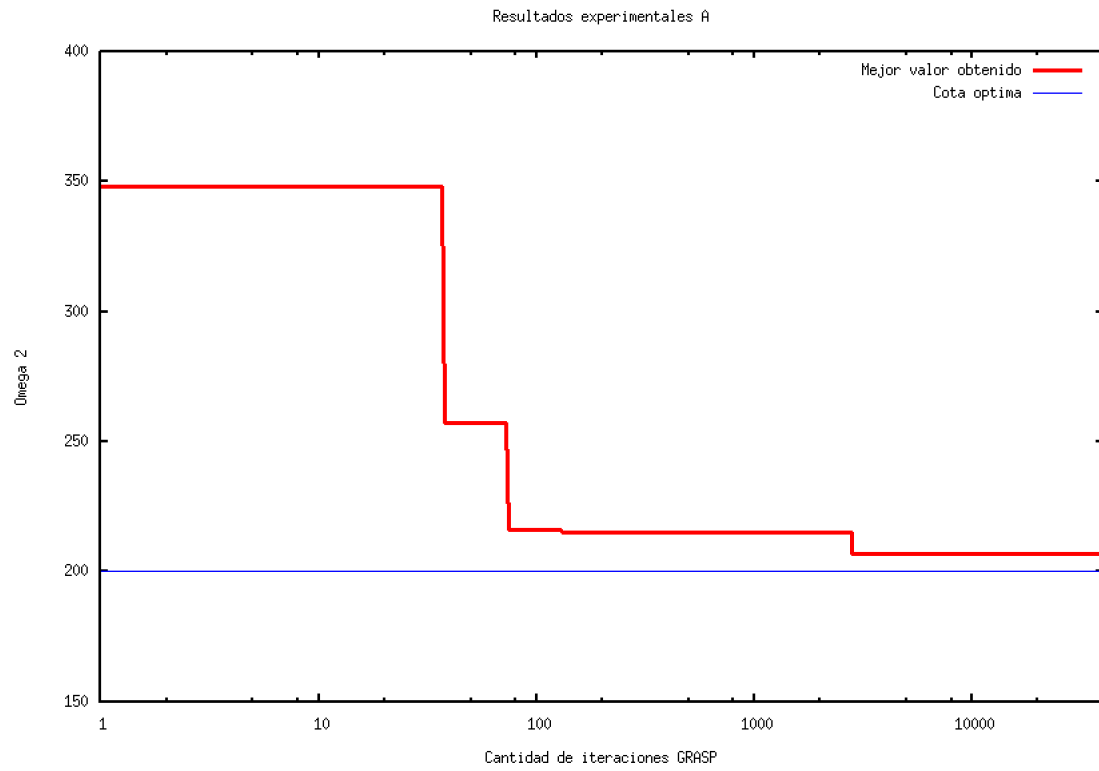
- Cantidad máxima de iteraciones.
- Cantidad máxima de iteraciones sin haber encontrado mejoras.
- Cantidad máxima de iteraciones sin haber encontrado una solución inicial factible.

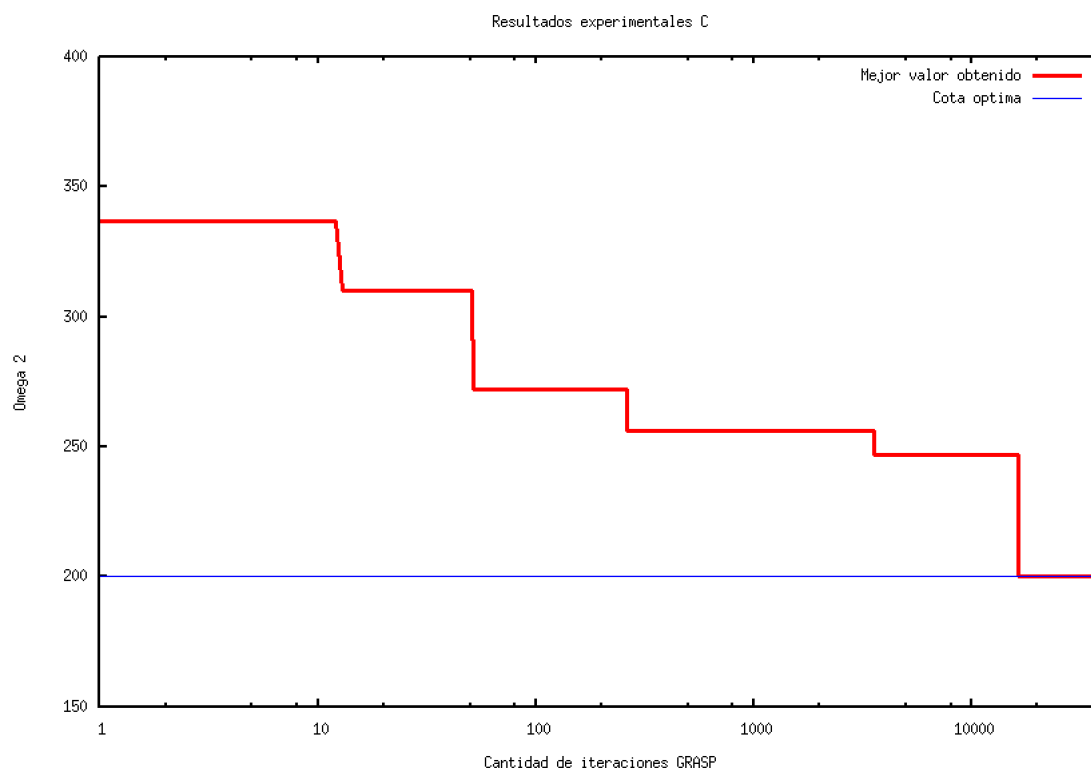
Parametrizamos estos criterios usando  $n$ . Para elegir valores adecuados realizamos distintas experimentaciones sobre grafos de tipo *mágico* con baja, media y alta densidad. Los resultados obtenidos se pueden ver en los siguientes gráficos:

---

<sup>4</sup>: Luego de experimentar con distintos valores, encontramos que  $\beta=10$  era un valor que presentaba suficiente aleatoriedad.

## TP2: TÉCNICAS ALGORITMICAS AVANZADAS





Las experimentaciones A, B y C corren GRASP usando grafos de 200 nodos y 400, 4000 y 10000 ejes respectivamente. Cada una ejecuta 40000 iteraciones.

Usamos escala logarítmica para facilitar la visualización de los resultados.

Cada figura muestra como evoluciona el valor de  $\omega_2$  a medida que aumentan las iteraciones. Además graficamos el camino óptimo con  $\omega_2$  igual a la cantidad de nodos del grafo, o sea 200, para poder comparar con los valores obtenidos.

Nuestro razonamiento para tomar valores óptimos para los criterios fue elegirlos de manera que se adecúen a grafos de variada densidad. Analizando los gráficos obtuvimos que el algoritmo puede tardar hasta aproximadamente 10000 iteraciones sin encontrar mejoras. Ese valor lo obtuvimos del anteúltimo salto de la experimentación C y corresponde a  $n^2/4$ .

La máxima cantidad de iteraciones necesarias para encontrar un valor cercano al óptimo fue máxima en la experimentación C también. De alrededor de 20000 iteraciones, o  $n^2/2$ .

Para elegir un valor para la cantidad máxima de iteraciones sin haber encontrado una solución inicial factible, tomamos el mismo valor que para la cantidad máxima de iteraciones sin haber encontrado mejoras, o sea  $n^2/4$ . Nuestro razonamiento es que si no se encontró una solución inicial factible, tampoco se mejoró la última solución encontrada y por ende nos sirve para acotar el valor para ese criterio.

Además de encontrar valores adecuados para esos criterios, encontramos interesante como influye la densidad de los grafos en el comportamiento del algoritmo. A baja

densidad le cuesta más encontrar una buena solución inicial y aun más mejorar la última solución encontrada. Razonamos que en la experimentación A hay pocos caminos, dada la baja densidad, y hay menos chances de encontrar los mejores caminos, ya que son pocos. Y creemos que por eso sucede que no se llega al óptimo luego de 40000 iteraciones, ya que posiblemente no exista ningún camino óptimo o las chances de encontrarlo son muy bajas.

El experimento que muestra el mejor comportamiento del algoritmo es el B, o sea usando densidad media. Logra encontrar el camino óptimo mucho antes de llegar a nuestra cota para la cantidad de iteraciones: tarda alrededor de 1000 iteraciones, muy por debajo de las  $20000(n^2/2)$  iteraciones que usamos como cota. Además logra encontrar un camino inicial bastante mejor que las otras dos experimentaciones ( $\omega_2 = 250$  frente a  $\omega_2=300+$  de A y C).

Por último, creemos que la experimentación C muestra un caso característico de GRASP, ya que se que mejora la solución escalonadamente hasta dar con la óptima luego de varias mejoras parciales.

#### 5.4.3. Búsqueda local

La búsqueda local que realizamos es la misma que en el apartado anterior.

#### 5.4.4. Pseudocódigo

El algoritmo está implementado en la función `main`:

---

**Algoritmo 8** *main*(int tipo\_solucionInicial, Graph g, Nodo n1, Nodo n2)

---

```

1: crearMatrizCaminosMinimos(g)
2: int  $n = |nodes(g)|$ 
3: int iteracionesSinMejorarCount = 0
4: int iteracionesSinMejorarMax = n
5: int iteracionesMax =  $n * \log(n)$ 
6: int iteracionesSinInitialPathCount = 0
7: int iteracionesSinInitialPathMax = n
8: mejorSolucion = NULL
9: para i=0; i<iteracionesMax; i++ hacer
10:     Solution solucion = obtenerSolucionInicial(tipo_solucionInicial, g, n1, n2)
11:     si  $\omega_1(solucion) > K$  entonces
12:         iteracionesSinInitialPathCount++
13:         si iteracionesSinInitialPathCount  $\geq$  iteracionesSinInitialPathMax entonces break
14:     fin si
15:     fin si
16:     si  $\omega_1(solucion) \leq K$  entonces
17:         mientras True hacer
18:             Solution nuevaSolucion = dameMejorVecino(solucion)
19:             si nuevaSolucion == NULL entonces
20:                 break
21:             fin si
22:             solucion = nuevaSolucion
23:         fin mientras
24:         si mejorSolucion == NULL entonces
25:             mejorSolucion = solucion
26:         sino si  $\omega_2(solucion) < \omega_2(mejorSolucion)$  entonces
27:             mejorSolucion = solucion
28:         sino
29:             iteracionSinMejorarCount++
30:         fin si
31:     fin si
32:     si iteracionesSinMejorarCount > iteracionesSinMejorarMax entonces
33:         break
34:     fin si
35: fin para

```

---



---

**Algoritmo 9** *obtenerSolucionInicial*(int tipo, Graph g, Nodo n1, Nodo n2)

---

```

1: si tipo == Greedy_C entonces
2:     return resolverConDijkstraAleatorio(g, n1, n2, ObjectiveFunctionC)
3: fin si
4: return resolverConDijkstraAleatorio(g, n1, n2, ObjectiveFunctionA)

```

---

Las demás funciones tienen el mismo pseudocódigo que en Búsqueda local.



### 5.4.5. Complejidad

El algoritmo se ejecuta en un ciclo hasta cumplir con alguno de los criterios de terminación. Dado que el criterio de mayor valor es la cantidad de iteraciones totales (*iteracionesMax*), tomamos ese valor como cota para calcular la complejidad. Cada iteración del ciclo es casi idéntica a la ejecución de búsqueda local. La única diferencia es cómo se obtiene la solución inicial. Para encontrar la solución inicial se usa `resolverConDijkstraAleatorio`. Esta función, en vez de tomar el nodo no visitado con  $\omega_2$  mínimo, toma uno entre los *beta* menores. Pero resulta que la complejidad no se altera con este cambio, ya que Dijkstra itera sobre todos los nodos de cualquier manera y lo único que cambia es el orden en que se toma el nodo no visitado.

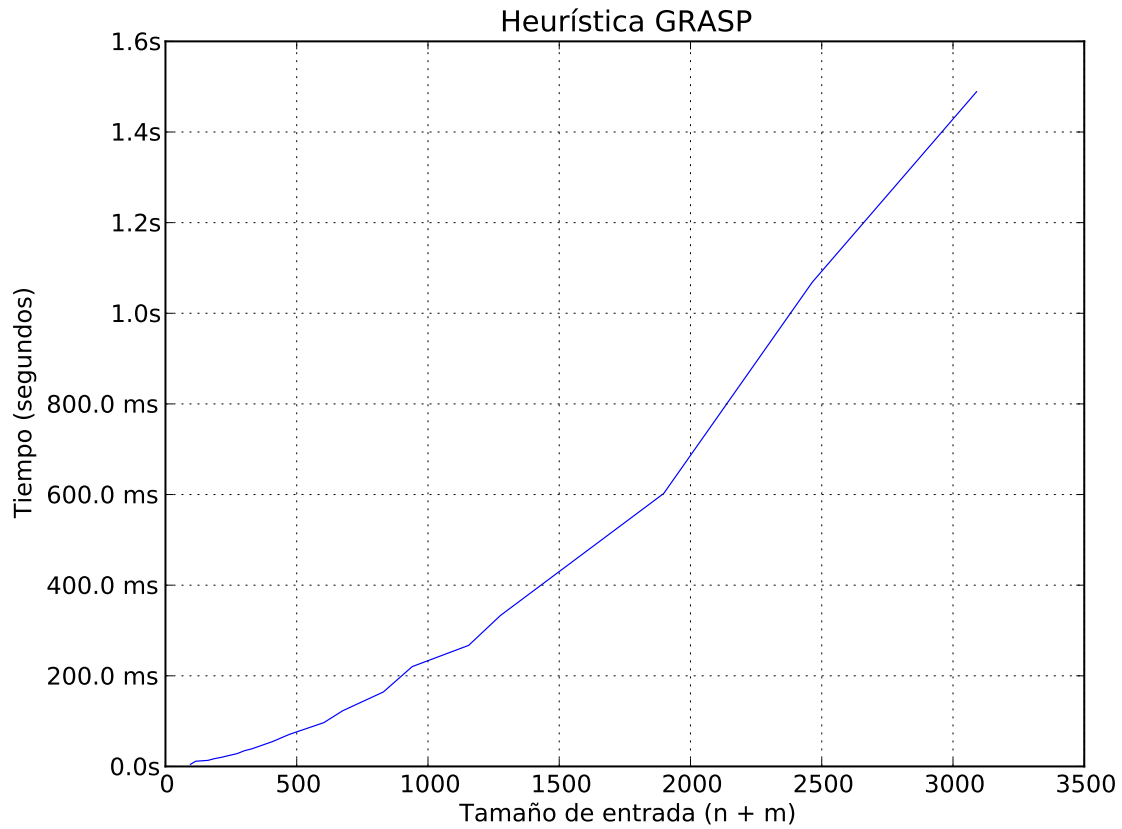
Vale hacer una aclaración que es que como se usa una cola con prioridad para los nodos no visitados en Dijkstra, para sacar uno entre los *beta* menores, hay que remover los primeros *beta* nodos de la cola y luego volver a agregar todos menos uno que es con el que nos quedamos. Como remover y agregar de la cola con prioridad toma  $O(\log(n))$ , entonces para remover y agregar los *beta* nodos se toma  $O((\text{beta} + \text{beta} - 1) * \log(n))$ , pero como *beta* es constante entonces la complejidad resulta  $O(\log(n))$ .

Por lo tanto la complejidad de `resolverConDijkstraAleatorio` no resulta diferente `resolverConDijkstra`, usada en búsqueda local y por ende la complejidad de cada iteración resulta igual a la complejidad de una ejecución de búsqueda local, o sea tiene complejidad  $O(n^5)$ .

Luego la complejidad total es  $O(n^5 * \text{iteracionesMax}) = O(n^5 * n * \log(n)) = O(n^6 * \log(n))$ .

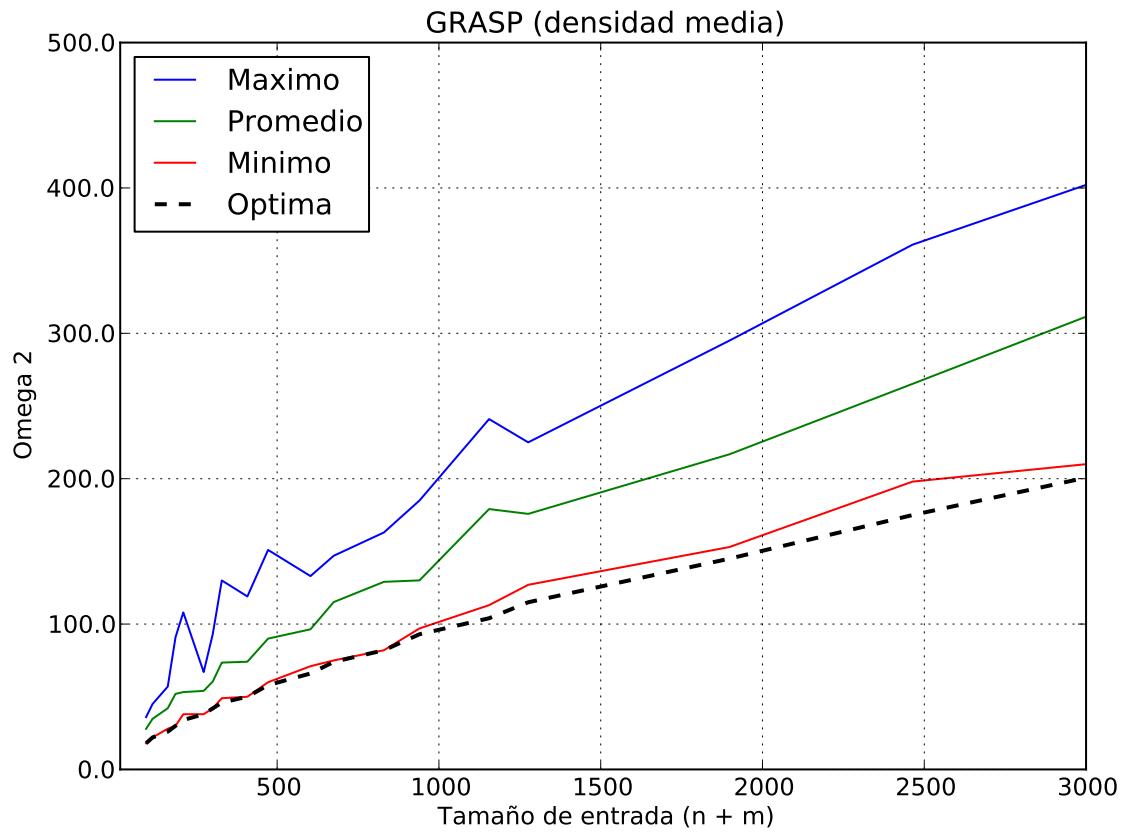
### 5.4.6. Experimentación

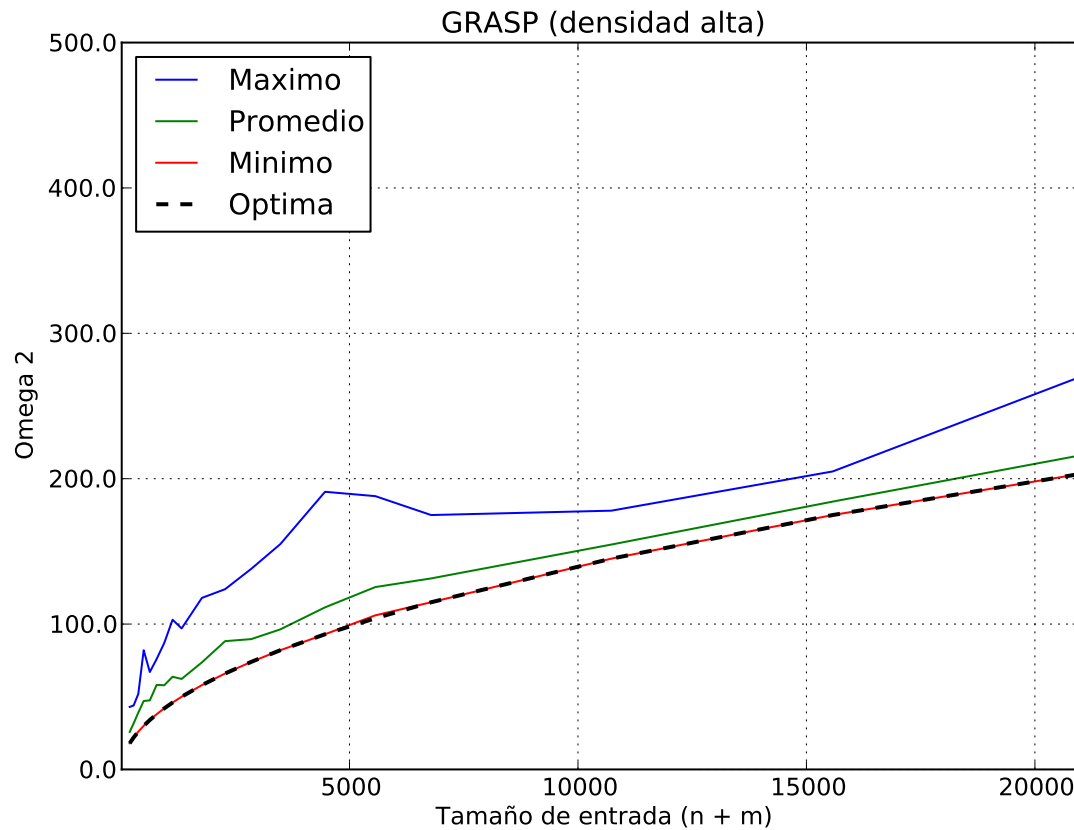
A continuación presentamos los resultados de la experimentación del tiempo de ejecución de la metaheurística GRASP.



No se pareciera estar frente a una polinomio de grado 6, sin embargo, es evidente que tiene mucha más concavidad que la gráfica de la búsqueda local. Ésto proviene trivialmente del hecho de repetir una cantidad que puede llegar a ser  $n * \log(n)$  veces la búsqueda local.

Pasamos a experimentar con la calidad de la solución.

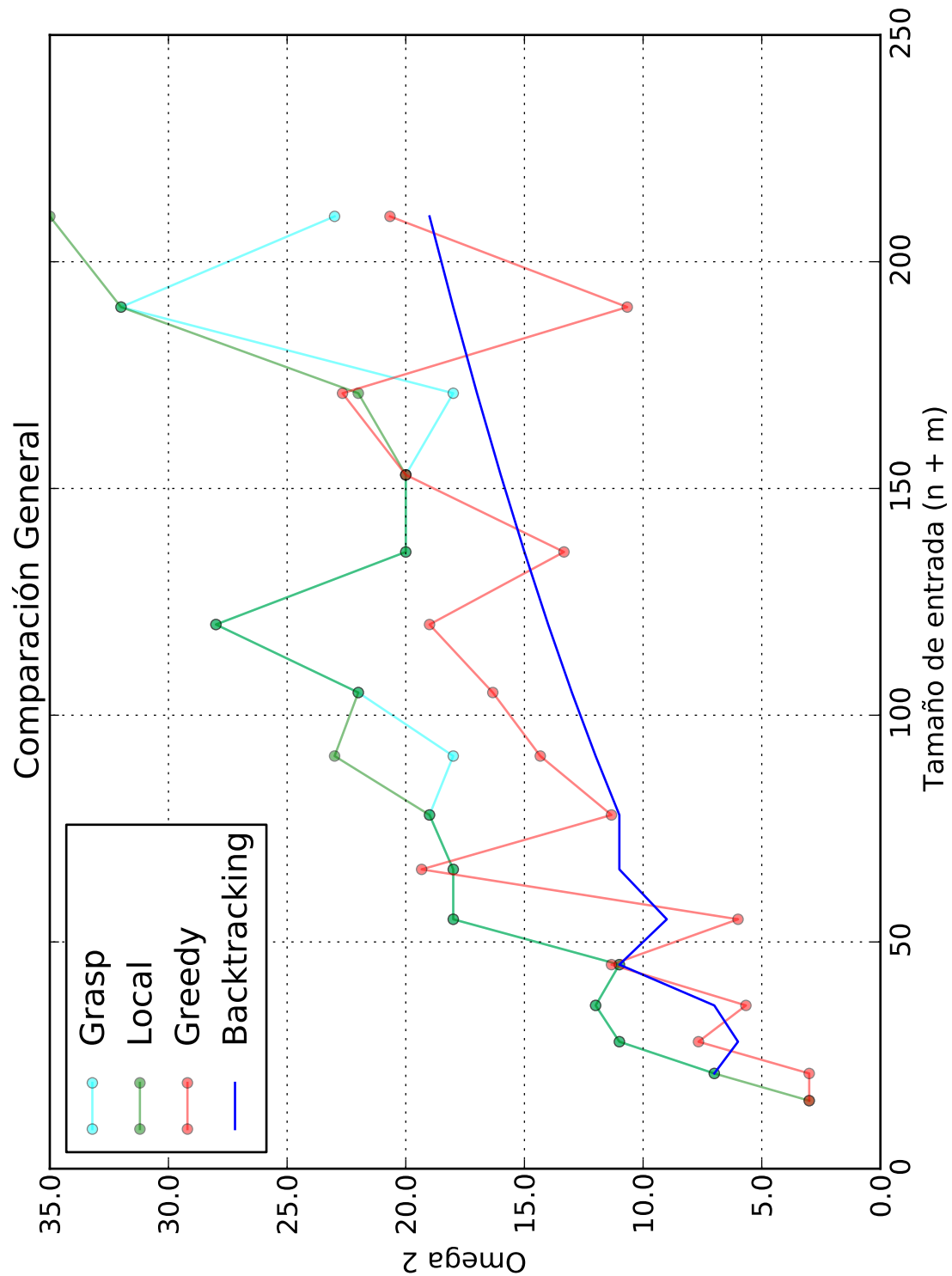




Grata fue la sorpresa al ver a GRASP en acción. Al igual que la búsqueda local, el resultado mínimo de nuestro algoritmo está muy cerca del óptimo. Pero esta vez hemos logrado reducir la amplitud entre nuestros resultados y de esta forma acercar todo el cuerpo de nuestras soluciones a la solución óptima. Los buenos resultados obtenidos se deben a la naturaleza de GRASP, que consiste en iterativamente correr una búsqueda local sobre múltiples soluciones iniciales generadas con un componente aleatorio. El repetir el experimento disminuye la varianza y garantiza una mejor solución final.

## 5.5. Comparativa

Se testó arduamente la relación entre los distintos algoritmos analizados en este TP. Luego de ponerlos a prueba bajo entradas generadas de forma pseudoaleatoria, obtuvimos el resultado representado en la siguiente figura:



Asumimos trivialmente que el backtracking es el algoritmo que logra una mejor **calidad** al momento de obtener la solución, característica que sólo puede ser contrastada frente al inmenso tiempo que el mismo demora en correr. Resulta también interesante observar el comportamiento del **algoritmo goloso**, el cual presenta ejecuciones relativamente buenas, mientras que otras ejecuciones directamente no encuentran el algoritmo (se pasan del K); para poder representar este fenómeno se las representó por debajo del algoritmo exacto, de forma tal que se entiende que en las instancias en que el local arrojó un valor menor al backtracking, es porque la solución obtenida no era factible. Por otra parte, el tiempo de esta heurística es mínimo frente a todo el resto de los algoritmos, representando una buena opción para realizar un “acercamiento rápido” o “estimación” a la solución, ya sea obteniendo una válida o inválida. Aun así, también es necesario destacar que así como muchas de las instancias obtenidas son “buenas” desde cierto punto de vista, es notable el hecho de que muchas veces los resultados obtenidos son, aunque factibles, extremadamente malos en relación a la solución exacta. Esto último nos permite inferir que este tipo de heurísticas no nos permiten realizar una estimación “segura” sobre la factibilidad o calidad del resultado obtenido, siendo su resultado más bien una especie de “tiro de ruleta”. Finalmente podemos observar a las heurísticas locales y GRASP, las cuales presentan soluciones en común, dado que GRASP es básicamente una “aplicación iterativa” de la local, combinada con un factor de aleatoriedad y ciertos criterios de terminación. Así, el resultado no nos sorprende al mostrarnos lo que de cierta forma ya esperábamos, la heurística de GRASP se comporta siempre “mejor o igual” que la local, es decir, existen instancias en que gracias a la aplicación de la aleatoriedad en el goloso inicial, y debido a la iteración, se logra una mejoría notable de la calidad de la solución. Por otro lado, aunque GRASP presenta la desventaja de tener un costo temporal mayor a la local, luego de realizar un correcto **tuneo** de los criterios de finalización logramos establecer una buena relación tiempo/calidad.

## 6. Apéndices

### 6.1. Código Fuente (resumen)

#### 6.1.1. Backtracking

```

int N, M, U, V, K;
Graph *G;
vector<bool> visitados;
Solucion mejorSolucion;
Solucion ramaActual;

void backtrack(Node actual, Node padre) {
    // primero agrego el nodo
    ramaActual.camino.push_back(actual);

    Edge *e = G->getEdge(padre, actual);

    if (actual != padre) { // me cubro del nodo inicial
        ramaActual.sumaOmega1 += e->omega1;
        ramaActual.sumaOmega2 += e->omega2;
    }
    ramaActual.cantAristas++;
    visitados[actual] = true;

    if (ramaActual.sumaOmega1 > K) {
        // no haces nada
    } else if (actual == V) {
        if (ramaActual.sumaOmega2 < mejorSolucion.sumaOmega2)
            mejorSolucion = ramaActual;
    } else { // llamas a la recursion
        vector<Node> vecinos = G->getAdjacent(actual);
        for (int i = 0; i < vecinos.size(); i++) {
            Node vecino = vecinos[i];
            if (! visitados[vecino]) {
                backtrack(vecino, actual);
            }
        }
    }
    // dejas todo como estaba, antes de retornar
    ramaActual.camino.pop_back();
    if (actual != padre) {
        ramaActual.sumaOmega1 -= e->omega1;
        ramaActual.sumaOmega2 -= e->omega2;
    }
    ramaActual.cantAristas--;
    visitados[actual] = false;
}

```

## 6.1.2. Greedy

```

void DijkstraSolution::getPath(int toNode, Graph* graph, vector<Edge*> &path,
                               double &totalOmega1, double &totalOmega2) {

    int prevNode = prevNodes[toNode-1];
    totalOmega1 = 0;
    totalOmega2 = 0;
    list<Edge*> pathList;
    while (prevNode != -1) {
        Edge* edge = graph->getEdge(prevNode, toNode);
        pathList.push_front(new Edge(prevNode, toNode, edge->omega1, edge->omega2));
        totalOmega1 += edge->omega1;
        totalOmega2 += edge->omega2;
        toNode = prevNode;
        prevNode = prevNodes[prevNode-1];
    }

    // toNode va cambiando dentro del while
    // si llegado a este punto, toNode != fromNode, significa que no hay camino
    // entre toNode y fromNode
    if(toNode != fromNode) {
        totalOmega1 = INF;
        totalOmega2 = INF;
        // el path que se devuelve en la solucion queda vacio
    } else {
        // solo devuelvo un camino si existe un camino posible entre fromNode y toNode
        path.resize(pathList.size());
        int index = 0;
        for(list<Edge*>::iterator it = pathList.begin(); it != pathList.end(); it++) {
            path[index] = *it;
            index++;
        }
    }
}

template<class ObjectiveFunction>
void GreedyHeuristic<ObjectiveFunction>::resolveInstance( ProblemInstance* instance ){
    // creo el dijkstra
    Dijkstra<ObjectiveFunction> dijkstra;
    // creo la solucion
    DijkstraSolution sol( instance->graph->nodeCount, instance->u );
    // cargo en la solucion, todos los paths del dijkstra desde el nodo inicial
    dijkstra.findPath( instance->graph, &sol );
    // obtengo el path que me interesa
    sol.getPath( instance->v, instance->graph, solution->path,
                solution->totalOmega1, solution->totalOmega2 );
}

```



## 6.1.3. Local Search

```

int main( int argc, char const* argv[] )
{
    ....
    InitialSolution* initialSolution =
        heuristicFactory.createInitialSolution( initialSolutionParameter );
    InitialSolution* initialSolutionBestOmega1 =
        heuristicFactory.createInitialSolution( INITIAL_SOLUTION_A );
    NeighbourhoodSelector* selector =
        heuristicFactory.createNeighborhoodSelector( neighborhoodSelectorParameter );

    // parse the input
    parser.parseInput();

    for(auto instance:parser.problemInstances)
    {
        Solution* solution = initialSolution->getInitialSolution( instance );
        // si no encuentro el path que cumpla con K, pruebo usando dijkstra con omega1.
        // Tambien puede pasar que no encuentre ningun path,
        // por lo que totalOmega1 = INF, y en ese
        // caso tambien pruebo buscar otro path
        if( initialSolution->type != initialSolutionBestOmega1->type &&
            solution->totalOmega1 > instance->K ) {
            delete solution;
            solution = initialSolutionBestOmega1->getInitialSolution(instance);
        }

        // El dijkstra de omega1 debe cumplir con el K, sino no
        // tiene sentido correr la heuristica
        if(solution->totalOmega1 <= instance->K) {
            // run the heuristic
            Solution* newSolution = NULL;
            bool huboMejora = false;
            do
            {
                newSolution = selector->getBestNeighbour( solution );
                // Si no logro mejorar la solucion, termino
                if(newSolution != NULL) {
                    delete solution;
                    solution = newSolution;
                    huboMejora = true;
                } else {
                    huboMejora = false;
                }
            } while(huboMejora);
        }
        solution->print();
        delete solution;
    }
    return 0;
}

```

```

}

Solution* NeighbourhoodSelectorA::getBestNeighbour(const Solution* origSolution)
{
    // Itero sobre la matriz de soluciones
    // Por cada par de nodos, tengo que buscar si existe un path en la matriz,
    // tal que sustituyendolo por path entre el par de nodos de la solucion original
    // se obtenga una nueva solucion tal que su totalOmega2 sea menor

    // El path de una solution es un vector de ejes
    // En cada iteracion que encuentre una solucion mejor, voy a cambiar algunos
    // de los nodos, por lo que tengo que recalcular los nodos de la mejor solucion
    int edgesCount = origSolution->path.size();
    int nodesCount = edgesCount+1;
    vector<int> nodes(nodesCount);
    for(int i=0; i<edgesCount; i++) {
        Edge* edge = origSolution->path[i];
        nodes[i] = edge->fromNode;
    }
    // ultimo nodo del path
    nodes[nodesCount-1] = origSolution->path[edgesCount-1]->toNode;

    Solution* bestSolution = NULL;
    for(int i=0; i<nodes.size() - 1; i++) {
        for(int j=i+1; j<nodes.size(); j++) {
            // solution con sub path entre los nodos
            Solution* subSolution = origSolution->createSubSolutionBetween(nodes[i], nodes[j]);
            if(subSolution == NULL) continue;
            // dijkstra por omega2 entre los nodos
            Solution* solution_ij = getSolvedPathBetween(nodes[i], nodes[j]);
            if(solution_ij == NULL) continue;

            // Si el path creado con dijkstra usando omega2, tiene menos omega2 total,
            // que el path actual entre los nodos i y j, entonces chequeo si al
            // crear una nueva solucion tendra menos omega2 que la mejor solucion.
            // En ese caso me guardo esta nueva solucion como la mejor hasta ahora.
            // Ademas chequeo que se cumpla con el K requerido.
            double bestSolutionOmega2 = bestSolution == NULL ?
                origSolution->totalOmega2 :
                bestSolution->totalOmega2;
            double newSolutionOmega2 = origSolution->totalOmega2 - subSolution->totalOmega2
                + solution_ij->totalOmega2;
            double newSolutionOmega1 = origSolution->totalOmega1 - subSolution->totalOmega1
                + solution_ij->totalOmega1;
            if(newSolutionOmega2 < bestSolutionOmega2 && newSolutionOmega1 <= K) {
                if(bestSolution != NULL) {
                    delete bestSolution;
                }
                // creo la nueva mejor solucion
                bestSolution = createNewSolutionReplacingPath(origSolution, solution_ij);
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    delete subSolution;
}
}
return bestSolution;
}

Solution* createNewSolutionReplacingPath(const Solution* orig, const Solution* sub) {
    int node1 = sub->path[0]->fromNode;
    int node2 = sub->path[sub->path.size()-1]->toNode;
    Solution* res = new Solution();
    vector<Edge*> edgesToRemove;
    bool subPathStartsAtNode1 = false;
    int subPathStartsAtEdgeIndex = 0;

    // primero agrego todos los edges del path original hasta encontrar
    // alguno de los nodos del subpath
    for(int i=0; i<orig->path.size(); i++) {
        Edge* edge = orig->path[i];
        if(edge->fromNode == node1 || edge->fromNode == node2) {
            subPathStartsAtNode1 = edge->fromNode == node1;
            subPathStartsAtEdgeIndex = i;
            break;
        } else {
            res->path.push_back(edge);
            res->totalOmega1 += edge->omega1;
            res->totalOmega2 += edge->omega2;
        }
    }

    // agrego todos los ejes del sub path
    for(int i=0; i<sub->path.size(); i++) {
        Edge* edge = sub->path[i];
        res->path.push_back(edge);
        res->totalOmega1 += edge->omega1;
        res->totalOmega2 += edge->omega2;
    }

    // busco el nodo desde donde continua el pedazo del path original
    // agrego todos los ejes del path original a partir de ahi
    int fromNode = subPathStartsAtNode1 ? node2 : node1;
    bool addEdges = false;
    for(int i=subPathStartsAtEdgeIndex+1; i<orig->path.size(); i++) {
        Edge* edge = orig->path[i];
        if(edge->fromNode == fromNode) {
            addEdges = true; // encuentre el nodo, asi que comienzo a añadir los nodos desde aca
        }
        if(addEdges) {
            res->path.push_back(edge);
            res->totalOmega1 += edge->omega1;
            res->totalOmega2 += edge->omega2;
        }
    }
}

```

```

    }
}

return res;
}

```

#### 6.1.4. Grasp

```

int main( int argc, char const* argv[] )
{
    // instantiate the neighborhood selector using the neighborhood selector parameter
    NeighbourhoodSelector* selector =
        heuristicFactory.createNeighborhoodSelector( neighborhoodSelectorParameter );
    // parse the input
    parser.parseInput();

    for(auto instance:parser.problemInstances)
    {
        selector->initialize(instance);

        // valores arbitrarios basados en n para criterio de terminaciones
        int n = instance->graph->nodeCount;
        int iteracionesSinMejorarCount = 0;
        int iteracionesSinMejorarMax = n;
        int iteracionesMax = n * log(n);
        int iteracionesSinInitialPathCount = 0;
        int iteracionesSinInitialPathMax = n;

        Solution* bestSolution = NULL;
        // aca faltaria hacer un dijkstra por omega1, para ver que al
        // menos existe una solucion factible

        for(int i = 0; i<iteracionesMax; i++) {
            // instantiate the initial solution using the initial solution parameter
            InitialSolution* initialSolution =
                heuristicFactory.createInitialSolution( initialSolutionParameter );
            Solution* solution = initialSolution->getInitialSolution( instance );
            if(solution->path.size() == 0) {
                // no encuentre un path entre u y v
                iteracionesSinInitialPathCount++;
                delete solution;
                if(iteracionesSinInitialPathCount < iteracionesSinInitialPathMax) {
                    continue; // sigo intentando buscar soluciones
                } else {
                    break; // me rindo, dejo de buscar soluciones
                }
            }
        }

        // El dijkstra de omega1 debe cumplir con el K, sino no tiene
    }
}

```

```

// sentido correr la heuristica
if(solution->totalOmega1 <= instance->K) {
    // run the heuristic
    Solution* newSolution = NULL;
    bool huboMejora = false;
    do
    {
        newSolution = selector->getBestNeighbour( solution );
        // Si no logro mejorar la solucion, termino
        if(newSolution != NULL) {
            delete solution;
            solution = newSolution;
            huboMejora = true;
        } else {
            huboMejora = false;
        }
    } while(huboMejora);

    if(bestSolution == NULL) {
        bestSolution = solution;
    } else if(solution->totalOmega2 < bestSolution->totalOmega2) {
        delete bestSolution;
        bestSolution = solution;
    } else {
        delete solution;
        iteracionesSinMejorarCount++;
    }
}

if(iteracionesSinMejorarCount > iteracionesSinMejorarMax) {
    break;
}

if(bestSolution != NULL) {
    bestSolution->print();
    delete bestSolution;
} else {
    cout << "no" << endl;
}

return 0;
}

```