Los siguienes ejercicios no forman parte del programa y no serán evaluados. Su objetivo es ver que la lógica proposicional puede ser utilizada para razonar sobre grafos no dirigidos. Están pensados para hacerse luego de la Práctica 4.

Ejercicio. Definamos un grafo no dirigido como un par (V, E), tal que $V \subseteq \mathbb{N}$ (el conjunto de *nodos* o *vértices* del grafo), y $E \subseteq V \times V$ (el conjunto de *aristas*). Un elemento $(i, j) \in E$ se interpreta como que existe una arista entre los nodos i y j.

Sean $p_i, q_{ij} \in \text{PROP}$, y sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Dada una valuación v, interpretaremos $v \vDash p_i$ como que nuestro grafo G tiene un nodo i. Si $v \vDash q_{ij}$ interpretaremos que existe una arista entre los nodos i y j.

Definamos el conjunto de fórmulas $\Gamma_G := \{p_i : i \in V\} \cup \{q_{ij} : (i, j) \in E\}$. Si v es una valuación tal que $v \vDash \Gamma_G$, diremos que la valuación *describe* al grafo G. (¿Por qué decimos eso?)

Podemos preguntarnos si ciertas propiedades de un grafo pueden describirse (con la interpretación que dimos) vía algún conjunto de fórmulas.

- ¿Existe un conjunto de fórmulas Φ tal que, dado un grafo G, $\Gamma_G \vDash \Phi$ si y solo si el grafo G tiene un nodo de índice par (es un número par)? *Sugerencia: definir una fórmula por cada número par.*

- ¿Existe un conjunto de fórmulas Φ tal que, dado un grafo G, $\Gamma_G \vDash \Phi$ si y solo si el grafo G tiene un camino de longitud 2 entre los nodos i y j? *Sugerencia: dado $k \in \mathbb{N}$, $p_{1,k} \wedge p_{k,3}$ describe que existe un camino* $1 \to k \to 3$.

- ¿Existe una fórmula ϕ tal que $v \vDash \Gamma_G \cup \{\phi\}$ si y solo si el grafo G tiene un camino entre i y j?

Ejercicio. Sean G y Γ_G como en el ejercicio X, y sean $C_1, \ldots, C_k$ colores distintos. Dado un grafo G, vamos a decir que G *satisface el problema del coloreo* si existe una manera de colorear todos los nodos de G de modo que no haya dos nodos conectados que tengan el mismo color.

Introduzcamos nuevas variables proposicionales r_{ij}, con $i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k$. Dada una valuación v, interpretaremos $v \vDash r_{ij}$ como que el nodo i tiene color j. Demostrar que se puede describir en lógica proposicional que un grafo G satisfaga el problema del coloreo, es decir, que dado un grafo G existe un conjunto de fórmulas Φ_G tal que $\Gamma_G \vDash \Phi_G$ si y solo si G satisface el problema del coloreo.

Referencias: `www.cs.ox.ac.uk/james.worrell/lec8-2015.pdf`