# Clase Práctica de Órdenes y Complejidad Algorítmica

Algoritmos y Estructuras de Datos II

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

12 de Abril de 2017

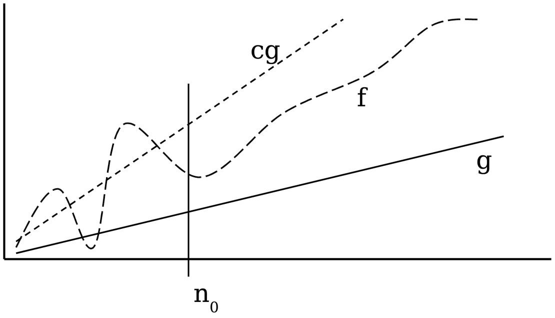
# Hoy en Algo 2

1. Notación de $O$, $\Theta$ y $\Omega$
   - Repaso y ejercitación de $O$
   - Notación
   - Repaso y ejercitación de $\Omega$
   - Repaso y ejercitación de $\Theta$
   - Resumen
2. Álgebra de órdenes
   - Simplificando las cuentas
3. Ejercicios de órdenes
4. Complejidad
   - Funciones básicas
   - Un par de ejercicios
   - Funciones con parámetros formales
   - Ejercicio de Parcial

# Notación $O$

- $O(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\exists n_0, c)(\forall n > n_0)\ f(n) \leq cg(n)\}$
- $f \in O(g)$ si y sólo si $\exists n_0, c$ tales que para todo $n > n_0$

$$f(n) \leq cg(n)$$



# Ejercicios $O$

- $O(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\exists n_0, c)(\forall n > n_0)\ f(n) \leq cg(n)\}$
- $f \in O(g)$ si y sólo si $\exists n_0, c$ tales que para todo $n > n_0$
$$f(n) \leq cg(n)$$

Demostrar que si

- $f(n) = 4n^2 + 5n + 2$ entonces $f \in O(g)$ donde $g(n) = n^2$
- $f_1 \in O(g_1)$ y $f_2 \in O(g_2)$ entonces $f_1 + f_2 \in O(\max\{g_1, g_2\})$

# Guarda

Sea $f(n) = 2^n$. Veamos que para todo $n$ dado, $f(n) \in O(1)$.

- Caso base: $f(1) = 2^1 = 2 = c_1 \in O(1)$
- Paso inductivo:
  $f(n+1) = 2^{n+1} = 2.2^n \leq 2.c_n.1 = 2.c_n = c_{n+1} \in O(1)$

# Guarda

La demostración se hace sobre los N, entonces para todo N, f(n) $\in$ O(1), lo cual es verdad porque f(n) es una constante al fijar cada N que toma.

La inducción se utiliza para demostrar sobre un conjunto inductivo, por ejemplo los Naturales, el error consiste en que se está predicando sobre el n, y no sobre la función, cada vez que se toma un N queda fijo y por eso es O(1).

# (Abusos de) notación

- $f \in O(g)$ si y sólo si $f(n) \leq cg(n)$ para todo $n > n_0$
- Notamos:
  - $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = O(g)$, y $f \in O(g(n))$ si y sólo si $f \in O(g)$
  - $f(n) \neq O(g(n))$, $f(n) \neq O(g)$, y $f \notin O(g(n))$ si y sólo si $f \notin O(g)$
- Recordar:
  - $O(g)$ u $O(g(n))$ representa un **conjunto de funciones**.
- Ejemplos:
  - $n \log n = O(n^2)$
  - $n^n \neq O(n!)$

CUIDADO: $f(n) = O(g(n)) \not\Rightarrow g(n) = O(f(n))$.

# Múltiples parámetros

- $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f \in O(g)$ si y sólo si $f(\vec{n}) \leq cg(\vec{n})$ para todo $\vec{n} > \vec{n_0}$.
  donde $(x_1, \ldots, x_k) > (y_1, \ldots, y_k)$ sii $x_i > y_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.
- Otra vez, notamos:
  - $f(\vec{n}) = O(g(\vec{n}))$, $f(\vec{n}) = O(g)$, y $f \in O(g(\vec{n}))$ si y sólo si $f \in O(g)$
- Ejemplos:
  - $m \log n = O(mn)$

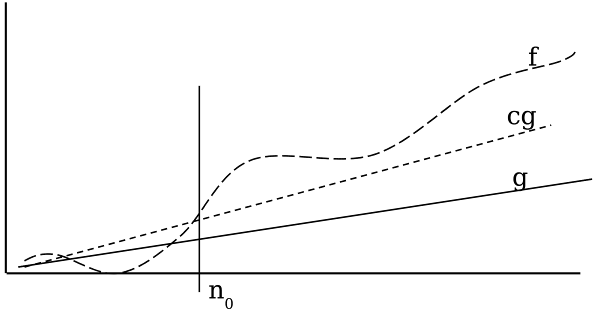
# Parámetros vs. constantes.

- ¿Qué significa $f \in O(n^k)$?
- Hay que aclarar cuáles son las constantes.
- Lo que no es constante, es parámetro de $f$
- Ejemplos:
  - Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $f \in O(n^k)$ entonces $f \in O(n^{k+1})$.
  - $n^k \in O(2^n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
  - Si $f$ es un polinomio, entonces $f \in O(n^k)$ para algún $k = O(1)$.

# Notación $\Omega$

- $\Omega(g) = \{f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \mid g \in O(f)\}$
- $f \in \Omega(g)$ si y sólo si $\exists \vec{n_0}, c$ tales que para todo $\vec{n} > \vec{n_0}$

$$cg(\vec{n}) \leq f(\vec{n})$$



# Ejercicio $\Omega$

- $\Omega(g) = \{f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \mid g \in O(f)\}$
- $f \in \Omega(g)$ si y sólo si $\exists \vec{n_0}, c$ tales que para todo $\vec{n} > \vec{n_0}$

$$cg(\vec{n}) \leq f(\vec{n})$$

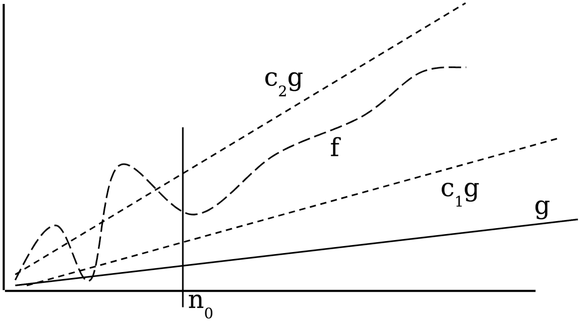
Demostrar que si

- $4n^2 + 5n + 2 = \Omega(n^2)$

# Notación $\Theta$

- $\Theta(g) = \{f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \mid f \in O(g) \text{ y } g \in O(f)\}$
- $f \in \Theta(g)$ si y sólo si $\exists \vec{n_0}, c_0, c_1$ tales que para todo $\vec{n} > \vec{n_0}$

$$c_0 g(\vec{n}) \leq f(\vec{n}) \leq c_1 g(\vec{n})$$



# Notación $\Theta$

- $\Theta(g) = \{f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \mid f \in O(g) \text{ y } g \in O(f)\}$
- $f \in \Theta(g)$ si y sólo si $\exists \vec{n_0}, c_0, c_1$ tales que para todo $\vec{n} > \vec{n_0}$

$$c_0 g(\vec{n}) \leq f(\vec{n}) \leq c_1 g(\vec{n})$$

Demostrar que si

- $4n^2 + 5n + 2 = \Theta(n^2)$

# Resumiendo...

- $f \in O(g)$ cuando $f$ está acotada superiormente por $g$
- $f \in \Omega(g)$ cuando $f$ está acotada inferiormente por $g$
- $f \in \Theta(g)$ cuando $f = O(g)$ y $f = \Omega(g)$.

- Hay que tener cuidado con las constantes.

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n^k) \subset O(k^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$$

# Álgebra de órdenes

- ¿Qué significan las siguientes expresiones?
  - $O(f) + O(g) = O(h)$
  - $O(f) \cdot O(g) = O(h)$
  - $\sum_{i=1}^{n} O(n) = O(n^2)$.

# Álgebra de órdenes

- Definiciones.
  - $O(f) + O(g) = O(f+g) = O(\max\{f, g\})$
  - $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$
  - En general, $O(f) \bullet O(g) = O(f \bullet g)$.
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} O(f) = O\left(\sum_{i=1}^{n} f\right) = O(nf)$.
  - En particular, si $n$ es constante, entonces $\sum_{i=1}^{n} O(f) = O(f)$
  - $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} O(f) = O\left(\prod_{i=1}^{n} f\right) = O(f^n)$.

Para pensar: $O(f) + O(g) \neq O(f) \cup O(g)$.

# Álgebra de órdenes (ejercicios)

- Evaluar la validez de las siguientes ecuaciones (justificar):
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} O(1) = O(n)$.
  - Si $k \in \mathbb{N}$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^k} O(n) = O(2^k n) = O(n)$.
  - Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} O(k) = O(1)$

# Órdenes y expresiones

- ¿Qué significa $f(n) + O(n)$?
- Por ejemplo, algún algortimo tiene complejidad $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$?.
- En general, si $f(n) = g(n) \bullet O(h(n))$ significa que
  - $f(n) = g(n) \bullet h'(n)$ para algún $h' \in O(h)$, i.e.
  - existen $c, n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq g(n) \bullet (c \cdot h(n))\ \forall\ n \geq n_0$.
- Ejemplos:
  - $f(n) = 3n + O(\log n)$ significa $f(n) \leq 3n + c \log n$ para $c \in \mathbb{N}$.
  - $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ significa $T(n) \leq 2T(n/2) + cn$ para $c \in \mathbb{N}$.
  - $f(n) = n^{O(1)}$ significa $f(n) = n^c$ para $c \in \mathbb{N}$.

# Ejercicios para hacer en clase

Verdadero o Falso, justificar

- $2^n = O(1)$
- $n = O(n!)$
- Para todo $i, j \in \mathbb{N},\ in = O(jn)$
- $nm = O(n^2 + m^2)$

Charlar entre ustedes

- ¿Qué significa, intuitivamente, $O(f) \subseteq O(g)$?
- ¿$O(n^2) \cap \Omega(n) = \Theta(n^2)$?

# ¿Qué es la complejidad de un algoritmo?

- Función para medir los recursos que consume un algoritmo
  - Tiempo
  - Memoria
  - Ancho de banda
  - Escrituras a disco, etc
  - Operaciones elementales
  - Operaciones en general
- Peor caso, mejor caso, caso promedio.

# Sumatoria

```
SUM(in A: arreglo(nat)) → res:nat
    res ← 0
    for i ← 1 to tam(A):
        res ← res + A[i]
```

$$T(n) = c_1 + \sum_{i=1}^{tam(A)} c_2 = \Theta(n), \text{ donde n} = \text{tam(A)}$$

# Sumatoria exponencial

```
SUMEXP(in A: arreglo(nat)) → res:nat
        var i: nat
        res ← 0
        i ← 1
        while i ≤ tam(A):
                res ← res + A[i]
                i ← i * 2
```

$$T(n) = c_1 + \sum_{i=1, i=2^j}^{tam(A)} c_2 = \Theta(log\ \ n), \text{ donde n} = \text{tam(A)}$$

# Búsqueda secuencial

```
BúsquedaSecuencial(in A: arreglo(nat), in e: nat) → res:bool
    var i: nat
    i ← 1
    while i ≤ tam(A) and A[i] ≠ e:
        i ← i + 1
    res ← i < tam(A)
```

¿Se acuerdan cuando dije esto: "Peor caso, mejor caso, caso promedio."?

$$T_{peor}(n) = c_1 + \sum_{i=1, A[i] \neq e}^{n} c_2 =^{e \notin A} \Theta(n), \text{ donde n} = \text{tam(A)} + 1$$

$$T_{mejor}(n) = c_1 + \sum_{i=1, A[i] \neq e}^{n} c_2 =^{e = A[1]} \Theta(1), \text{ donde n} = \text{tam(A)} + 1$$

# Un par de ejercicios con `fors`

FORFOR1(**in** $A$: *arreglo*(*nat*))

**for** $i \leftarrow 1$ *to* $tam(A)$:

  **for** $j \leftarrow 1$ *to* $10$:

    $A[i] \leftarrow A[i] + A[i]$

FORFOR2(**in** $A$: *arreglo*(*nat*))

**for** $i \leftarrow 1$ *to* $tam(A)$:

  **for** $j \leftarrow 1$ *to* $1000000000000000$:

    $A[i] \leftarrow A[i] + A[i]$

# Otro par de ejercicios con `fors`

```
FORFOR3(in A: arreglo(nat))
1.      for i ← 1 to tam(A):
2.          for j ← 1 to tam(A):
3.              A[i] ← A[i] + A[j]
```

```
FORFOR4(in A: arreglo(nat))
1.      for i ← 1 to tam(A):
2.          for j ← i + 1 to tam(A):
3.              A[i] ← A[i] + A[j]
```

# Parámetros formales y subrutinas

- ¿Qué pasa si tenemos llamadas a subrutinas?
- Veámoslo en el pizarrón

- ¿Qué pasa si tenemos parámetros formales?
- Veámoslo en los ejemplos

# Búsqueda secuencial

**Parámetros formales**

**generos** $\alpha$

**operaciones**

$\bullet =_\alpha \bullet : \alpha \times \alpha \to \mathit{bool}$

```
BúsquedaSecuencial(in A: arreglo(α), in e: α) → res:bool
    var i: nat
    i ← 1
    while i ≤ tam(A) and A[i] ≠_α e:
        i ← i + 1
    res ← i < tam(A)
```

$$T_{peor}(n) = c_1 + \sum_{i=1, A[i] \neq e}^{n} c_2 + cmp_\alpha(A[i]) =^{e \notin A} \Theta(\sum_{i=1, A[i] \neq e}^{n} cmp_\alpha(A[i])) = O(n max_{i \in [1..n]}(cmp_\alpha(A[i])))$$

$$T_{mejor}(n) = c_1 + \sum_{i=1, A[i] \neq e}^{n} c_2 + cmp_\alpha(A[I]) =^{e = A[1]} \Theta(cmp_\alpha(A[1])),$$
$$\text{donde n} = \text{tam(A)} + 1$$

# Ejercicios de parcial


Discutir la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente en cada caso:

1. $\Omega(n) \subseteq O(n^2)$
2. $O(n^2) \subseteq \Omega(n)$

# Ejercicios de parcial

```
function DivisoresDePares(arreglo A)
    int i, total;
    total := 0;
    for i := 0 ... Long(A) - 1 do
        if 2 divide a A[i] then
            for j := 0 ... Long(A) - 1 do
                if A[j] divide a A[i] then
                    total := total + 1;
                    return total;
```

**Observación:** Consideramos que las verificaciones de divisibilidad en el algoritmo son operaciones elementales.

1. ¿La complejidad temporal del *mejor caso* es $O(n^2)$?.
2. ¿La complejidad temporal del *peor caso* es $\Omega(n)$?.

# Resumiendo...

- Complejidad (modo AED 2): Contar *operaciones elementales* de los algoritmos.
- Peor caso vs. Mejor caso; no confundir con $O$ vs. $\Omega$.
- Las OE son las operaciones que provee una máquina RAM.
- Suponemos que las OE toman tiempo constante $O(1)$.
    - ¡En Algo 3 se cuestiona si esto es cierto!