Fourier

Luis Carlos Bastidas y Jennifer Paola Martelo

8 de febrero de 2022

1. Series de Fourier

Demostrar (con rigor matemático) los siguientes teoremas:

1. Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2) = f(T/2)$, y si la derivada $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable; entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sin(n\omega_0 t)) \tag{1}$$

se puede diferenciar termino por termino para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0(-a_n sin(n\omega_0 t) + b_n cos(n\omega_0 t)) \tag{2}$$

Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$. Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar termino por termino para obtener:

$$\int_{t1}^{t2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0}[-b_n(cos(n\omega_0 t_2) - cos(n\omega_0 t_1)) + a_n sin(n\omega_0 t_2) - sin(n\omega_0 t_1)] \tag{3}$$

1.1. Solución

Tomando la ecuación (1) se deriva la expresión, quedando de esta manera

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{a_0}{2}) + \frac{\partial}{\partial t}(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sin(n\omega_0 t)))$$

Se tiene en cuenta que la derivada es lineal, y se sacan los terminos que son constantes de las derivadas y se tiene que en cuenta que la derivada de una constante es cero.

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \frac{\partial}{\partial t}(cos(n\omega_0 t)) + b_n \frac{\partial}{\partial t}(sin(n\omega_0 t)))$$

Derivamos ambas expresiones, sabiendo que la $\frac{\partial cos(at)}{\partial t} = -asin(at)$ y que $\frac{\partial sin(at)}{\partial t} = acos(at)$ comprobando finalmente

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0(-a_n sin(n\omega_0 t) + b_n cos(n\omega_0 t))$$

Por otro lado, para comprobar que la integral de la ecuación (1) nos da como resultado lo visto en la ecuación (3), se integra la ecuación (1) y se aplica la linealidad de la integral:

$$\int_{t1}^{t2} f(t)dt = \int_{t1}^{t2} (\frac{a_0}{2})dt + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{t1}^{t2} (cos(n\omega_0 t))dt + b_n \int_{t1}^{t2} (sin(n\omega_0 t))dt))$$

Ahora, teniendo esta expresión, se usan las antiderivadas para una constante, para $cos(at)$ y para $sin(at)$, obteniendo finalmente la ecuación pedida al evaluar en los limites

$$\int_{t1}^{t2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0}[-b_n(cos(n\omega_0 t_2) - cos(n\omega_0 t_1)) + a_n sin(n\omega_0 t_2) - sin(n\omega_0 t_1)]$$

2. Presentación de funciones

1. Encontrar (analíticamente) la serie de Fourier de la función $f(t) = t$ para el intervalo $(-\pi, \pi)$ y $f(t+2\pi) = f(t)$.

2.1. Solución

Tomando la inecuación (1) tenemos que a_0 es:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)dt \tag{4}$$

entonces nuestra a_0 seria

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}) = 0$$

ahora para buscar a_n sabes gracias a la ecuación (1) que es igual a

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)cos(\frac{n\pi t}{L})dt \tag{5}$$

entonces a_n seria

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} tcos(\frac{n\pi t}{\pi})dt = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{n}tsin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} sin(nt)dt) = 0$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(cos(n\pi) - cos(-n\pi)) = \frac{1}{\pi n^2}(cos(n\pi) - cos(n\pi))$$

por ultimo calculamos b_n con la ecuación (1) sabemos que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)sin(\frac{n\pi t}{L})dt \tag{6}$$

entonces nuestra b_n seria

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (tsin(\frac{n\pi t}{\pi})dt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} tsin(nt)dt = \frac{1}{\pi}(-\frac{1}{n}tcos(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt)$$

$$\frac{1}{\pi}(-\frac{1}{n}\pi cos(n\pi) + \frac{1}{n}(-\pi)cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2}sin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

entones la solución de la serie de Fourier de $f(t) = t$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ es

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} sin(nt) \tag{7}$$

3. Función $\varsigma(s)$ de Riemann

1. Integrar (analıtcamente) la serie de Fourier de $f(t) = t^2$ en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$.

3.1. Solución

Utilizando la ecuación (1) y la (4) podemos encontrar a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi}\frac{t^3}{3}|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\frac{2\pi^3}{3}) = \frac{2\pi^2}{3} \tag{8}$$

Para encontrar a_n usamos la ecuación (1) y (5), entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(\frac{n\pi t}{\pi})dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(n\pi t)dt = \frac{2}{\pi}n^3[(\pi^2 n^2 - 2)sin(\pi n) + 2\pi n cos(\pi n)] = (-1)^n\frac{4}{n^2} \tag{9}$$

Para encontrar b_n usamos la ecuación (6) y (1), entonces

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(nt)dt = 0 \tag{10}$$

la derivada da cero ya que es una impar. Con esto podemos encontrar la serie de Fourier de $f(t) = t^2$, la cual es:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}cos(nt) \tag{11}$$

Ahora, integrando esta función, sabiendo que $f(t) = t^2$, queda lo siguiente:

$$\frac{1}{12}t(t^2 - \pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}sin(nt) \tag{12}$$

Teniendo en cuenta la identat de Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{13}$$

Se toma la ecuación de (12) y se ve que los coeficientes que son diferente de cero son:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^3} \tag{14}$$

Por lo que usando la identidad de Parseval tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{12}t(t^2 - \pi)\right)^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6} \tag{15}$$

Como $(-1)^{2n} = 1$ y sabiendo la definición de la función $\varsigma(6)$ de Riemann nos queda

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{12}t(t^2 - \pi)\right)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \tag{16}$$