GTI - Grundlagen der Technischen Informatik
2. Boolesche Funktionen

Lukas Zenger
Institut für Informatik
Universität Bern

Inhalt

Zahlendarstellungen

- Σ: ein fest gewähltes Input Alphabet
- Σ^n: ein Wort der Länge n über Σ
- $\Sigma_b := \{0,\ldots,b-1\}$: Alphabet des b-adischen Zahlensystems $(b>1)$
- Beispiele:
  - $\Sigma_2 = \{0,1\}$: Dual oder Binäralphabet
  - $\Sigma_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$: Oktalalphabet
  - $\Sigma_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: Dezimalalphabet
  - $\Sigma_{16} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$: Hexadezimalalphabet

b-adische Darstellung natürlicher Zahlen

- Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Dann ist jede natürliche Zahl z mit $0 \leq z \leq b^n - 1$ (und $n \in \mathbb{N}$) eindeutig als Wort der Länge n über Σ_b darstellbar durch

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i = z_0 b^0 + z_1 b^1 + \ldots + z_{n-1} b^{n-1}$$

  mit $z_i \in \Sigma_b = \{0, \ldots, b-1\}$ für $i = 0, \ldots, n - 1$.
- Als vereinfachende Schreibweise ist dabei folgende Ziffernschreibweise üblich:

$$z = (z_{n-1} z_{n-2} \ldots z_1 z_0)_b$$

- Wichtiger Spezialfall: b = 2 („Dualdarstellung“ natürlicher Zahlen)

Bsp: Darstellung von $(26)_{10}$

- $(26)_{10} = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 20 + 6$
- $(11010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
  $= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 16 + 8 + 2$
- $(32)_8 = 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 24 + 2$
- $(1A)_{16} = 1 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 1 \cdot 16 + 10 \cdot 1 = 16 + 10$

Beispiele von Zahlendarstellungen

- $z = (123)_{10}$

Darstellung im Dezimalsystem:
$z = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$
$\quad = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Darstellung im Dualsystem
$z = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1$
$\quad = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
$\quad = (1111011)_2$

- 1 Byte = 8 Bit (Bit = binary digit = Binärzahl):

$\rightarrow$ Darstellung der Zahlen 0 bis 2^8-1=255

Beispiele von Zahlendarstellungen

- $z = (431)_{10}$

Darstellung im Hexadezimalsystem

$$\begin{aligned} z &= 1 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 15 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 \\ &= (1AF)_{16} \end{aligned}$$

$= (1\ 1010\ 1111)_2$

1 A F Geht nur da $16 = 2^4$

Beispiele von Zahlendarstellungen

- $(49)_{10} = (?)_2$

Addition

- Dezimal-Addition

```
 183
+197
 11
----
 380
```

- Binär-Addition

```
 10110111
+11000101
1    111
---------
101111100
```

Zitat

- „I wish to God these calculations had been executed by steam.“ (Charles Babbage 1791-1871)

Schaltfunktionen

- **Definition**: Seien $n,m \in \mathbb{N}$, $n,m \geq 1$. Dann heisst eine Funktion $\mathcal{F}$: $B^n \rightarrow B^m$ **Schaltfunktion**.

- Beispiele:
  - Addition von zwei 16-stelligen Dualzahlen
  - Multiplikation von zwei 16-stelligen Dualzahlen
  - Sortieren von 30 16-stelligen Dualzahlen
  - Primzahltest

Schaltfunktionen

- Addition von zwei 16-stelligen Dualzahlen
  A: $B^{32} \to B^{17}$
- Multiplikation von zwei 16-stelligen Dualzahlen
  M: $B^{32} \to B^{32}$
- Sortieren von 30 16-stelligen Dualzahlen
  S: $B^{480} \to B^{480}$
- Primzahltest von 32-stelligen Dualzahlen
  P: $B^{32} \to B$,
  mit P(x) = 1, falls x Primzahl ist, 0 sonst

Boolesche Funktionen

Eine Schaltfunktion $f : B^n \to B$ heißt (n-stellige) Boolesche Funktion.

Zusammenhang zu Schaltfunktionen:
Sei $\mathcal{F} : B^n \to B^m$ mit $\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$. Setzt man für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$f_i : B^n \to B,$$

def. durch

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i,$$

so ist $\mathcal{F}$ wie folgt darstellbar:

$$\mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1 \ldots x_n), f_2(x_1 \ldots x_n), \ldots, f_m(x_1 \ldots x_n))$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in B$.

1-stellige Boolesche Funktionen

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- Es gilt: $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \overline{x}$, $f_3(x) = 1$
- Die Funktion $f_2(x)$ wird auch als NOT(x) und $\neg x$ bezeichnet.

2-stellige Boolesche Funktionen

x	y	AND	OR	XOR
		Konjunktion	Disjunktion	Exclusive OR
		$\wedge$	$\vee$	$\leftrightarrow$
		f_1	f_7	f_6
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Motivation

> Setze **0 = Falsch** und **1 = Wahr**, dann folgt

x	x>3	x<6	NOT(x>3)	x>3 AND x<6
1				
2				
3				
4				
5				
6				

2-stellige Boolesche Funktionen

x	y	NAND	NOR
		Not AND	Not OR
		f_{14}	f_8
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

2-stellige Boolesche Funktionen

(1)		$x \cdot \overline{x}$	$x \cdot y$	$x \cdot \overline{y}$	x	$\overline{x} \cdot y$	y	$\not\leftrightarrow$	$x + y$
(2)		$\equiv 0$	Min	$>$	x	$<$	y	$\neq$	Max
(3)			$\wedge$	$\not\rightarrow$	x	$\not\leftarrow$	y	$\not\leftrightarrow$	$\vee$
x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(1)		$\overline{x + y}$		$\overline{y}$	$x + \overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{x} + y$	$\overline{x \cdot y}$	$x + \overline{x}$
(2)		1-Max	$=$	1-y	$\geq$	1-x	$\leq$	1-Min	$\equiv 1$
(3)		NOR	$\leftrightarrow$	$\neg y$	$\leftarrow$	$\neg x$	$\rightarrow$	NAND	
x	y	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Verknüpfung von Funktionen

> Was berechnet die Funktion (x OR y) AND (x OR z)?

x	y	z	x OR y	x OR z	(x OR y) AND (x OR z)
			$x \vee y$	$x \vee z$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Gesetze einer Booleschen Algebra

- Eine **boolesche Algebra** ist ein 6-Tupel $<S, \wedge, \vee, \overline{}, 0, 1>$, wobei S eine Menge ist und $\wedge$, $\vee$ binäre Operatoren, $\overline{}$ unärer Operator auf S. Dabei gelten folgende Gesetze:

(a) Kommuntativgesetze: $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$

(b) Assoziativgesetze: $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$
$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

(c) Verschmelzungsgesetze: $(x \vee y) \wedge x = x, (x \wedge y) \vee x = x$

(d) Distributivgesetze: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(e) Komplementgesetze: $x \vee (y \wedge \overline{y}) = x, x \wedge (y \vee \overline{y}) = x$

(f) Neutrale Elemente 0, 1: $x \vee 0 = x, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x, x \vee 1 = 1$

(g) de Morgansche Regeln: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

(h) Idempotenz: $x = x \vee x = x \wedge x = \overline{\overline{x}}$

¬ ((¬a · c) + (¬a · d))

$\neg((\neg a \cdot c) + (\neg a \cdot d))$	$\neg a$ ausklammern (Distributivgesetz)
$= \neg(\neg a \cdot (c + d))$	de Morgan
$= \neg\neg a + \neg(c + d)$	Idempotenz
$= a + \neg(c + d)$	de Morgan
$= a + (\neg c \cdot \neg d)$	

Beispiel für eine boolesche Algebra

> Sei V eine Menge, dann ist die Potenzmenge von V (die Menge aller Teilmengen von V) eine boolesche Algebra
mit $x \wedge y := x \cap y$ (Schnittmenge von x und y),
$x \vee y := x \cup y$ (Vereinigungsmenge x und y),
$\bar{x} := V \setminus x$ (Komplement von x),
$0 := \emptyset = \{\}$,
$1 := V$.

→ $\langle P(V), \cap, \cup, V \setminus, \{\}, V \rangle$ ist ein Beispiel für eine boolesche Algebra.

Spezialfall unseres Beispiels

- Sei V die Menge {a}
- Die Potenzmenge von V hat zwei Elemente {}, {a}

- Definiere 0 := {} und 1 := {a}.
- Damit gilt: Potenzmenge von V = {0,1} = B

- Definiere für x,y aus {0,1}:
  - $x \text{ AND } y = x \cap y$
  - $x \text{ OR } y = x \cup y$
  - $\text{NOT } x = \bar{x} = V \setminus x = \{a\} \setminus x$

- <{0,1}, AND, OR, NOT,0,1> ist eine boolesche Algebra.
- Die Gesetze der booleschen Algebra gelten somit als Rechenregeln für AND, OR und NOT.

(1 AND 0) OR (NOT 0)

(1 AND 0) OR (NOT 0)

$$= (\{a\} \cap \{\,\}) \cup (\{a\} \setminus \{\,\})$$

$$= \{\,\} \cup \{a\}$$

$$= \{a\}$$

= 1

(1 AND 0) OR (NOT 0)

= 0 OR 1

= 1

Beispiel: Verschmelzungsgesetz

> (x OR y) AND x = x ?

x	y	x OR y	(x OR y) AND x	x
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

De Morgan

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x + \neg y$	$\neg(\neg x + \neg y)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

$= x \cdot y$

Beispiel: Distributivgesetz

> $(x + y) \cdot (x + z) = xx + xz + yx + yz$ in BA gilt weiter:
> $= x + xy + xz + yz$
> $= x + x(y+z) + yz = x(1+(y+z)) + yz$
> $= x(1) + yz = x + yz$

x	**y**	**z**	**x + y**	**x +z**	**(x+y)·(x+z)**	**yz**	**x+yz**
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Bedeutung von Booleschen Algebren

- Boolesche Algebren kommen in verschiedenen mathematischen Teilgebieten vor. Ihre Bedeutung ist nicht nur auf die technische Informatik beschränkt.
- Beispiele:
  - Boolesche Ringe (Algebra)
  - Verbände (Ordnungstheorie)
  - Kompakte, total unzusammenhängende Hausdorffräume (Topologie)
  - Semantik für Logiken
  - Boolean-valued models (Modelltheorie, gängiges Mittel um die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese von ZFC zu zeigen)

Boolesche Körper

Die Menge B = {0,1} mit den Operationen XOR und AND bildet einen **Körper** $\mathbb{Z}_2$ mit dem Nullelement 0 und dem Einselement 1.

In dem Zusammenhang wird XOR als Addition (+) und AND als Multiplikation (·) betrachtet.

ACHTUNG:
Je nach Kontext bezeichnet das Symbol+ die Funktion OR oder die Funktion XOR.
In den nächsten Wochen steht + für OR.

Ziele

Sie können Zahlen zwischen verschiedenen Zahldarstellungen umrechnen

Sie kennen die Begriffe Schaltfunktion und Boolesche Funktion

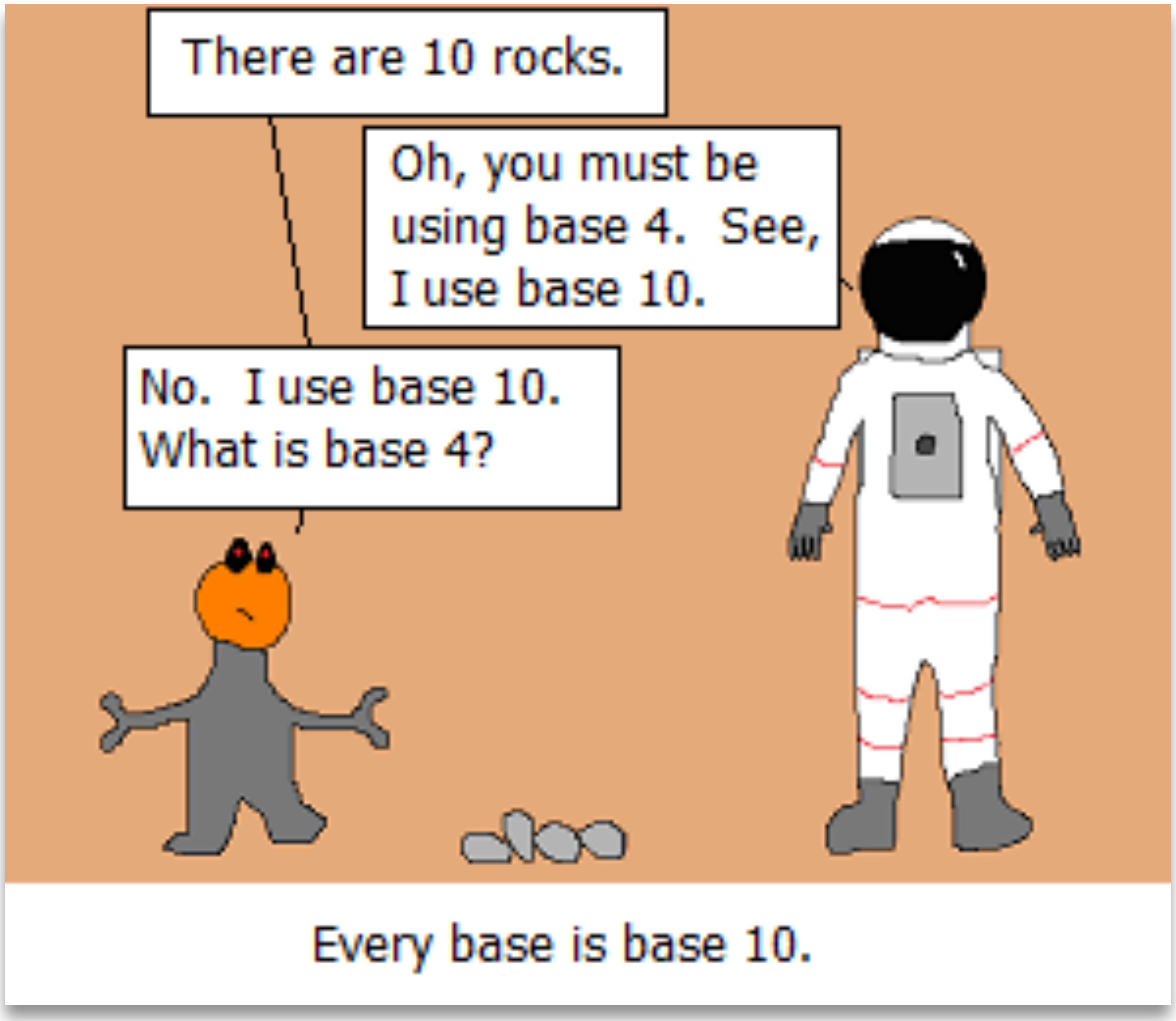
Sie kennen alle ein- und zweistellige Boolesche Funktionen

Sie können für eine zusammengesetzte Boolesche Funktion die Wahrheitstabelle berechnen

Sie kennen die Gesetze der Boolesche Algebra und können diese verwenden, um Boolesche Ausdrücke umzuformen

Sie können überprüfen, ob zwei Boolesche Ausdrücke dieselbe Funktion beschreiben (sowohl durch Ausrechnen als auch durch Umformen).

Zum Schluss



Ausserirdische haben 10 Finger - genau wie wir.