Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

GTI HS 23 Serie 1

Tobias Kohler, Nicolas Wyss, Maya Nedir

Die 1. Serie ist bis Mittwoch, den 4. Oktober 2023 um 16:00 Uhr zu lösen und in schriftlicher Form in der Übungsstunde abzugeben. Für Fragen steht im ILIAS jederzeit ein Forum zur Verfügung. Zu jeder Frage wird, falls nicht anders deklariert, der Lösungsweg erwartet. **Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht akzeptiert**. Allfällige unlösbare Probleme sind uns so früh wie möglich mitzuteilen, wir werden gerne helfen. Viel Spass!

1 Äquivalenz von Booleschen Funktionen (8 Punkte)

(a) (2 Punkte) Gilt $x \cdot \neg x = 0$ in jeder Booleschen Algebra? Begründe deine Antwort.

(b) (2 Punkte) Zeige, dass $\neg 1 = 0$ in allen Booleschen Algebren gilt, d.h. forme $\neg 1$ unter Verwendung der Gesetze der Booleschen Algebra zu 0 um.
Freiwillige Zusatzfrage: Folgt daraus $0 \neq 1$?

(c) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+yz)(\neg x \neg y + z)y \\ g(x,y,z) &= yz \end{aligned}$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

(d) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$f(x,y,z) = (x+\neg y)(\neg x + y)$$
$$g(x,y,z) = (x+y)(\neg x + \neg y)$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

Bei (c) und (d): **Alle Umformungen** sollten begründet werden. Wahrheitstabelle

2 Eine erste, einfache Schaltung (2 Punkte)

Gib (unter ausschliesslicher Verwendung von Negation, Konjunktion und Disjunktion) eine Boolesche Funktion $f : B^3 \to B$ an, die sich wie folgt verhält:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & ,z=1 \\ y & ,z=0 \end{cases}$$

Wozu könnte man eine solche Schaltung brauchen?

3 b-adische Zahlendarstellung (1 Punkt)

Stelle die folgenden natürlichen Zahlen in der b-adischen Darstellungsform für $b = 8$ dar.

(a) (0.5 Punkte) $(132)_{10}$

(b) (0.5 Punkte) $(204)_{10}$

Erkläre die Konvertierungen!

4 Konvertierung von Zahlensystemen (1 Punkt)

Konvertiere die Zahl $(241)_{10}$ in eine Dual-, Oktal- und Hexadezimalzahl. Alle Umrechnungen sind zu erklären!

5 Addition von Dualzahlen (1 Punkt)

Konvertiere die Zahlen $(11)_{10}$ und $(59)_{10}$ in Binärzahlen und addiere die Resultate schriftlich. Alle Umrechnungen sind zu erklären!

6 Dreielementige Boolesche Algebren (3 Punkte)

Beweise, dass es keine dreielementigen Booleschen Algebren gibt.

Tipp: Nimm an, dass es eine dreielementige Boolsche Algebra gibt und zeige, dass ein Widerspruch entsteht.

Freiwillige Aufgaben

Einfache Umwandlung

Zeige, dass Zahlen in Binärdarstellung durch Zusammenfassen in Dreier- bzw. Viererblöcke einfach in Oktal- und Hexadezimal-Darstellung umgewandelt werden können:

$$\underbrace{011}_{3}\,\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{101}_{5}\,\underbrace{000}_{0}\,\underbrace{001}_{1}$$

bzw.

$$\underbrace{0011}_{3}\,\underbrace{1111}_{F}\,\underbrace{0100}_{4}\,\underbrace{0001}_{1}$$

also $(11111101000001)_2 = (37501)_8 = (3F41)_{16}$.

Boolesche Algebren

(a) Überprüfe für den 6−Tupel $\langle M, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ alle Gesetze der Booleschen Algebra, wobei

- $M := \{0, 1\}$
- $\mathbf{0} := 0$
- $\mathbf{1} := 1$
- $x \wedge y := x$
- $x \vee y := y$
- $\neg x := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$

Ist dieser Tupel eine Boolesche Algebra?

(b) Beweise, dass eine endliche Boolesche Algebra über einer Menge M, die mindestens zwei Elemente enthält, eine gerade Anzahl von Elementen besitzt.

Tipp: Partitioniere M in geeignete Äquivalenzklassen von gerader Grösse.

(c) Gib je ein Beispiel einer abzählbar unendlichen und einer überabzählbar unendlichen Booleschen Algebra.

1 Äquivalenz von Booleschen Funktionen (8 Punkte)

(a) (2 Punkte) Gilt $x \cdot \neg x = 0$ in jeder Booleschen Algebra? Begründe deine Antwort.

(b) (2 Punkte) Zeige, dass $\neg 1 = 0$ in allen Booleschen Algebren gilt, d.h. forme $\neg 1$ unter Verwendung der Gesetze der Booleschen Algebra zu 0 um.
Freiwillige Zusatzfrage: Folgt daraus $0 \neq 1$?

(c) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+yz)(\neg x \neg y + z)y \\ g(x,y,z) &= yz \end{aligned}$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

(d) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+\neg y)(\neg x + y) \\ g(x,y,z) &= (x+y)(\neg x + \neg y) \end{aligned}$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

Bei (c) und (d): **Alle Umformungen** sollten begründet werden.

a) $x \cdot \neg x = 0$ Wahrscheinlich Komplementgesetz

b) $\neg 1 = 0 \quad = \neg 1 + 0 = 0$

Zeichen

AND	OR	NOT
$\wedge$	$\vee$	$\neg$
$x \cdot y$	$x + y$	$\overline{x}$
Min	Max	$1-x$

Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

1 a) $x \cdot \neg x = 0$ stimmt in jeder boolschen Algebra, da jedes x nur zwei Werte annehmen kann.

x	$\bar{x}$	$x \cdot \bar{x}$
0	1	0
1	0	0

✓

1 b) $\neg 1 = 0$

Ansatz: $\neg 1 = \neg 1 + 0$ (Neutrales Element)

- $1 + 0 = 1$ Identitätsgesetz
- $x = 1$; $x + \neg x = 1$, $1 + \neg 1 = 1$ Komplementärgesetz
- Da $1 + 0 = 1$ und $1 + \neg 1 = 1 \Rightarrow \underline{0 = \neg 1}$

1c)

(c) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$f(x,y,z) = (x+yz)(\neg x \neg y + z)y$$
$$g(x,y,z) = yz$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

x	y	z	$x+yz$	$\neg x \neg y + z$	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$\Rightarrow$ Ja, die beiden Funktionen sind äquivalent. Sie produzieren den selben Output.

(d) (2 Punkte) Sind die folgenden beiden Funktionen äquivalent? Begründe deine Antwort.

$$f(x,y,z) = (x + \neg y)(\neg x + y)$$
$$g(x,y,z) = (x + y)(\neg x + \neg y)$$

wobei $f : B^3 \to B$, $g : B^3 \to B$ und $B = \{0,1\}$.

x	y	z	$x + \neg y$	$\neg x + y$	$x + y$	$\neg x + \neg y$	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1			0	
1	0	0	1	0			0	
1	1	0	1	1			1	
0	0	1						
0	1	1						
1	0	1						
1	1	1						

Unnötig, da z in keiner Funktion vorkommt.

Die beiden Funktionen können nicht äquivalent sein.

Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

2 Eine erste, einfache Schaltung (2 Punkte)

Gib (unter ausschliesslicher Verwendung von Negation, Konjunktion und Disjunktion) eine Boolesche Funktion $f : B^3 \to B$ an, die sich wie folgt verhält:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & ,z = 1 \\ y & ,z = 0 \end{cases}$$

Wozu könnte man eine solche Schaltung brauchen?

x wenn $z = 1 \to x \cdot z$
y wenn $z = 0 \to y \cdot \neg z$
$\Rightarrow \underline{\underline{f(x,y,z) = x \cdot z + y \cdot \neg z}}$

Eine solche Schaltung könnte bspw. als eine Art Modus-Code mitgegeben werden. So kann die Variable z über den Modus entscheiden, welcher weiter angewendet wird.

3 b-adische Zahlendarstellung (1 Punkt)

Stelle die folgenden natürlichen Zahlen in der b-adischen Darstellungsform für $b = 8$ dar.

(a) (0.5 Punkte) $(132)_{10}$

(b) (0.5 Punkte) $(204)_{10}$

Erkläre die Konvertierungen!

132 : 8	16	Rest	4	
16 : 8	2	Rest	0	$\to (132)_{10} = (204)_8$
2 : 8	0	Rest	2	

204 : 8	25	Rest	4	
25 : 8	3	Rest	1	$\to (204)_{10} = (314)_8$
3 : 8	0	Rest	3	

4 Konvertierung von Zahlensystemen (1 Punkt)

Konvertiere die Zahl $(241)_{10}$ in eine Dual-, Oktal- und Hexadezimalzahl. Alle Umrechnungen sind zu erklären!

241 : 2 = 120 R 1
120 : 2 = 60 R 0
60 : 2 = 30 R 0
30 : 2 = 15 R 0
15 : 2 = 7 R 1
7 : 2 = 3 R 1
3 : 2 = 1 R 1
1 : 2 = 0 R 1

$(241)_{10} = (11110001)_2$

$(241)_{10} = (F \quad 1)_{16}$

$(241)_{10} = (3 \; 6 \; 1)_8$

5 Addition von Dualzahlen (1 Punkt)

Konvertiere die Zahlen $(11)_{10}$ und $(59)_{10}$ in Binärzahlen und addiere die Resultate schriftlich. Alle Umrechnungen sind zu erklären!

11 : 2 = 5 R 1
5 : 2 = 2 R 1
2 : 2 = 1 R 0
1 : 2 = 0 R 1

$(11)_{10} = (1011)_2$

59 : 2 = 29 R 1
29 : 2 = 14 R 1
14 : 2 = 7 R 0
7 : 2 = 3 R 1
3 : 2 = 1 R 1
1 : 2 = 0 R 1

$(59)_{10} = (111011)_2$

```
        1 0 1 1
  +   1 1 1 0 1 1
Ü     1 1 1   1 1
  (1 0 0 0 1 1 0)₂  = (70)₁₀ ✓
```

6 Dreielementige Boolesche Algebren (3 Punkte)

Beweise, dass es keine dreielementigen Booleschen Algebren gibt.

Tipp: Nimm an, dass es eine dreielementige Boolsche Algebra gibt und zeige, dass ein Widerspruch entsteht.

Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

- Komplement: In einer booleschen Algebra muss für jedes Element x ein Komplement $\neg x$ existieren, so dass $x + \neg x = 1$ und $x \cdot \neg x = 0$

In einem Fall mit dem Element a in B, müsste es auch für a ein Komplement $\neg a$ geben. Dort entsteht ein Widerspruch: $\neg a$ kann nicht 0 oder 1 sein, da diese bereits „vergeben" sind (neutrale Elemente). Das Komplement auf das Element selber ist ebenfalls unmöglich ($a \neq \neg a$)

Fall 1: Wenn $\neg a = 0$, dann muss $a + 0 = a = 1$ und $a \cdot 0 = 0$ gelten. $\Rightarrow a = 1$

Fall 2: Wenn $\neg a = 1$, dann muss $a + 1 = 1$ und $a \cdot 1 = 0$ gelten. $\Rightarrow a = 0$

In beiden Fällen ist a entweder 0 oder 1. Es besteht also gar kein drittes Element.