Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

GTI HS 23 Serie 2

Tobias Kohler, Nicolas Wyss, Maya Nedir

Die 2. Serie ist bis Mittwoch, den 11. Oktober 2023 um 16:00 Uhr zu lösen und in schriftlicher Form in der Übungsstunde abzugeben. Für Fragen steht im ILIAS jederzeit ein Forum zur Verfügung. Zu jeder Frage wird, falls nicht anders deklariert, der Lösungsweg erwartet. **Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht akzeptiert**. Allfällige unlösbare Probleme sind uns so früh wie möglich mitzuteilen, wir werden gerne helfen.
Viel Spass!

1 DNF und KNF (5 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimme die DNF und die KNF

i. (1 Punkt) der Implikation-Funktion $x \to y$, wobei

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{falls x=0 oder y=1,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. (1 Punkt) der Exklusiv-Oder-Funktion (XOR) $\oplus$, wobei

$$x \oplus y = \begin{cases} 1 & \text{falls x}\neq\text{y,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) (1 Punkt) Gegeben sei die Boolesche Funktion $f : B^3 \to B$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(\neg x_2 x_3 + x_2 \neg x_3) + x_1 x_2(\neg x_1 + x_3) + \neg x_1 x_2 x_3$$

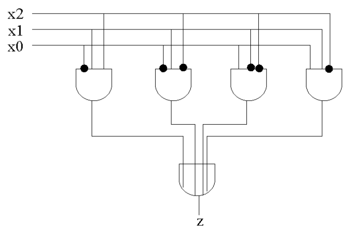
Bestimmte die DNF und die KNF dieser Funktion.

(c) (1 Punkt) Was ist "besser": `NOR` in KNF oder DNF darstellen? Begründe Deine Antwort.

(d) (1 Punkt) Bestimme den Minterm $m_7(x_0, x_1, x_2, x_3)$ und den Maxterm $M_{13}(x_0, x_1, x_2, x_3)$.

2 Schaltfunktionen I (3 Punkte)

(a) (1 Punkt) Bestimme diejenigen Eingabewerte x0, x1 und x2, für die die folgende Schaltung den Wert 1 am Ausgang z ausgibt.



(b) (2 Punkte) Bestimme diejenige Schaltung in disjunktiver Normalform, die für die drei Eingabewerte x_0, x_1 und x_2 genau dann den Wert 1 am Ausgang z ausgibt, wenn $x_0 \oplus x_1 = x_2$.

3 Schaltfunktionen II (5 Punkte)

Gegeben sei die Zeichenkette ARITHMETIK im ASCII-Code. Sei

$$f : B^7 \cap \{\text{ASCII-Codes von A, R, I, T, H, M, E, K}\} \to B$$

diejenige Funktion, die für jeden ASCII-codierten Buchstaben der Zeichenkette das Paritätsbit P (mit *gerader* Parität) berechnet, d.h.

$$P = f(x1, \ldots, x7) = \begin{cases} 1 & \text{falls x1, \ldots, x7 eine ungerade Anzahl an Einsen enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

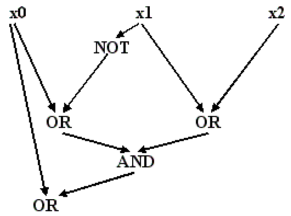
Bestimme die Schaltfunktion in DNF und stelle die Funktion als Schaltung in KNF dar.

Tipp: Zuerst die Wertetabelle berechnen. Nimm $x1$ als höchstwertiges Bit für die ASCII-Codierung, z.B. ASCII-Code von $B = (66)_{10} = (1000010)_2$, also $x1 = 1$, $x2 = 0, \ldots$ und $x7 = 0$ und die Parität ist $P = 0$ weil eine gerade Anzahl von Einsen auftritt.

Buchstabe	ASCII	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	P
A	65	...							
R	82								
I	73								
T	84								
H	72								
M	77								
E	69								
K	75								

4 Directed Acyclic Graphs (2 Punkte)

(a) (1 Punkt) Bestimme die Schaltfunktion zu folgendem DAG



(b) (1 Punkt) Bestimme den DAG zu folgender Schaltfunktion

$$f(x_0, x_1, x_2) \quad = \quad (x_0 + x_1) \cdot (\neg x_2 \cdot x_0 + x_1) + x_0$$

5 Funktionale Vollständigkeit (3 Punkte)

Die Menge $\{+, \neg\}$ ist funktional vollständig, denn jede Boolesche Funktion kann nur durch Komposition von Disjunktionen und Negationen dargestellt werden.

i. (1 Punkt) Stelle die Konstant-Null-Funktion $f(x_1, ..., x_n) = 0$ nur durch Komposition von Disjunktionen und Negationen dar.

ii. (2 Punkte) Zeige, dass die Menge $\{\to, \oplus\}$ funktional vollständig ist, indem du verwendest, dass es $\{+, \neg\}$ ist.

Freiwillige Aufgaben

Boolesche Funktionen

Sei $f : B^n \to B$ eine Boolesche Funktion und $a \in B$. Mit $f(x_i/a)$ bezeichnen wir die Boolesche Funktion die durch Einsetzen von a als fester Wert in f entsteht, d.h.

$$f(x_i/a) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Zeige, dass sich jede Boolesche Funktion wie folgt darstellen lässt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \cdot f(x_i/1) + \neg x_i \cdot f(x_i/0)$$

Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

1 DNF und KNF (5 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimme die DNF und die KNF

i. (1 Punkt) der Implikation-Funktion $x \to y$, wobei

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{falls x=0 oder y=1,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. (1 Punkt) der Exklusiv-Oder-Funktion (XOR) $\oplus$, wobei

$$x \oplus y = \begin{cases} 1 & \text{falls x}\neq\text{y,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i

i	x	y	$x \to y$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

i

DNF

$= m_0 + m_1 + m_3$

$= (\bar{x}\cdot\bar{y}) + (\bar{x}\cdot y) + (x\cdot y)$

KNF $\quad M_2 := \neg m_2$

$M_2 = \neg(x\cdot\bar{y}) = \bar{x} + \bar{\bar{y}} = \bar{x} + y$

ii

i	x	y	$x \oplus y$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

DNF: $m_1 + m_2 = (\bar{x}\cdot y) + (x\cdot\bar{y})$ ✓

KNF: $M_0 \cdot M_3 = \neg(\bar{x}\cdot\bar{y}) \cdot \neg(x\cdot y)$

$= (\bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}}) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$

$= (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$ ✓

(b) (1 Punkt) Gegeben sei die Boolesche Funktion $f : B^3 \to B$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\underbrace{(\neg x_2 x_3 + x_2 \neg x_3)}_{a} + \underbrace{x_1 x_2(\neg x_1 + x_3)}_{b} + \underbrace{\neg x_1 x_2 x_3}_{c}$$

Bestimmte die DNF und die KNF dieser Funktion.

	x	y	z	a	b	c	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	1	0	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	0	1	0	1

DNF: $m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = (\bar{x}yz) + (x\bar{y}z) + (xy\bar{z}) + (xyz)$

KNF: $M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 = \neg(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \cdot \neg(\bar{x}\bar{y}z) \cdot \neg(x\bar{y}z) \cdot \neg(x\bar{y}\bar{z})$

$= (x+y+z) \cdot (x+y+\bar{z}) \cdot (\bar{x}+y+\bar{z}) \cdot (\bar{x}+y+z)$

Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

(c) (1 Punkt) Was ist "besser": `NOR` in KNF oder DNF darstellen? Begründe Deine Antwort.

(d) (1 Punkt) Bestimme den Minterm $m_7(x_0, x_1, x_2, x_3)$ und den Maxterm $M_{13}(x_0, x_1, x_2, x_3)$.

c)

X	Y	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

DNF ist „besser", da nur ein einschlagiges Indizes (m_0)

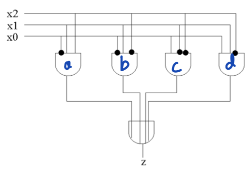
d)

m_7 0 1 1 1 $\Rightarrow \bar{x}_0 x_1 x_2 x_3$ ✓

m_{13} 1 1 0 1 $\Rightarrow \neg(x_0 x_1 \bar{x}_2 x_3) = \bar{x}_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$ ✓

2 Schaltfunktionen I (3 Punkte)

(a) (1 Punkt) Bestimme diejenigen Eingabewerte x0, x1 und x2, für die die folgende Schaltung den Wert 1 am Ausgang z ausgibt.



(b) (2 Punkte) Bestimme diejenige Schaltung in disjunktiver Normalform, die für die drei Eingabewerte x_0, x_1 und x_2 genau dann den Wert 1 am Ausgang z ausgibt, wenn $x_0 \oplus x_1 = x_2$.

a) ✓

i	x_0	x_1	x_2		
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	1	b
3	0	1	1	1	a
4	1	0	0	1	c
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	1	d
7	1	1	1	0	

b) Alle in Aufgabe a gefundenen Lösungen ohne [6] entsprechen dem Kriterium $x_0 \oplus x_1 = x_2$

Deshalb: $(\bar{x}_0 x_1 \bar{x}_2) + (\bar{x}_0 x_1 x_2) + (x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2)$

Schaltung dazu! So blööd

Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

3 Schaltfunktionen II (5 Punkte)

Gegeben sei die Zeichenkette ARITHMETIK im ASCII-Code. Sei

$$f : B^7 \cap \{\text{ASCII-Codes von A, R, I, T, H, M, E, K}\} \to B$$

diejenige Funktion, die für jeden ASCII-codierten Buchstaben der Zeichenkette das Paritätsbit P (mit *gerader* Parität) berechnet, d.h.

$$P = f(x1, \ldots, x7) = \begin{cases} 1 & \text{falls x1, \ldots, x7 eine ungerade Anzahl an Einsen enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Schaltfunktion in DNF und stelle die Funktion als Schaltung in KNF dar.

Tipp: Zuerst die Wertetabelle berechnen. Nimm $x1$ als höchstwertiges Bit für die ASCII-Codierung, z.B. ASCII-Code von $B = (66)_{10} = (1000010)_2$, also $x1 = 1$, $x2 = 0$, ... und $x7 = 0$ und die Parität ist $P = 0$ weil eine gerade Anzahl von Einsen auftritt.

		64	32	16	8	4	2	1	
Buchstabe	ASCII	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P
A	65	1	0	0	0	0	0	1	0
R	82	1	0	1	0	0	1	0	1
I	73	1	0	0	1	0	0	1	1
T	84	1	0	1	0	1	0	0	1
H	72	1	0	0	1	0	0	0	0
M	77	1	0	0	1	1	0	1	0
E	69	1	0	0	0	1	0	1	1
K	75	1	0	0	1	0	1	1	0

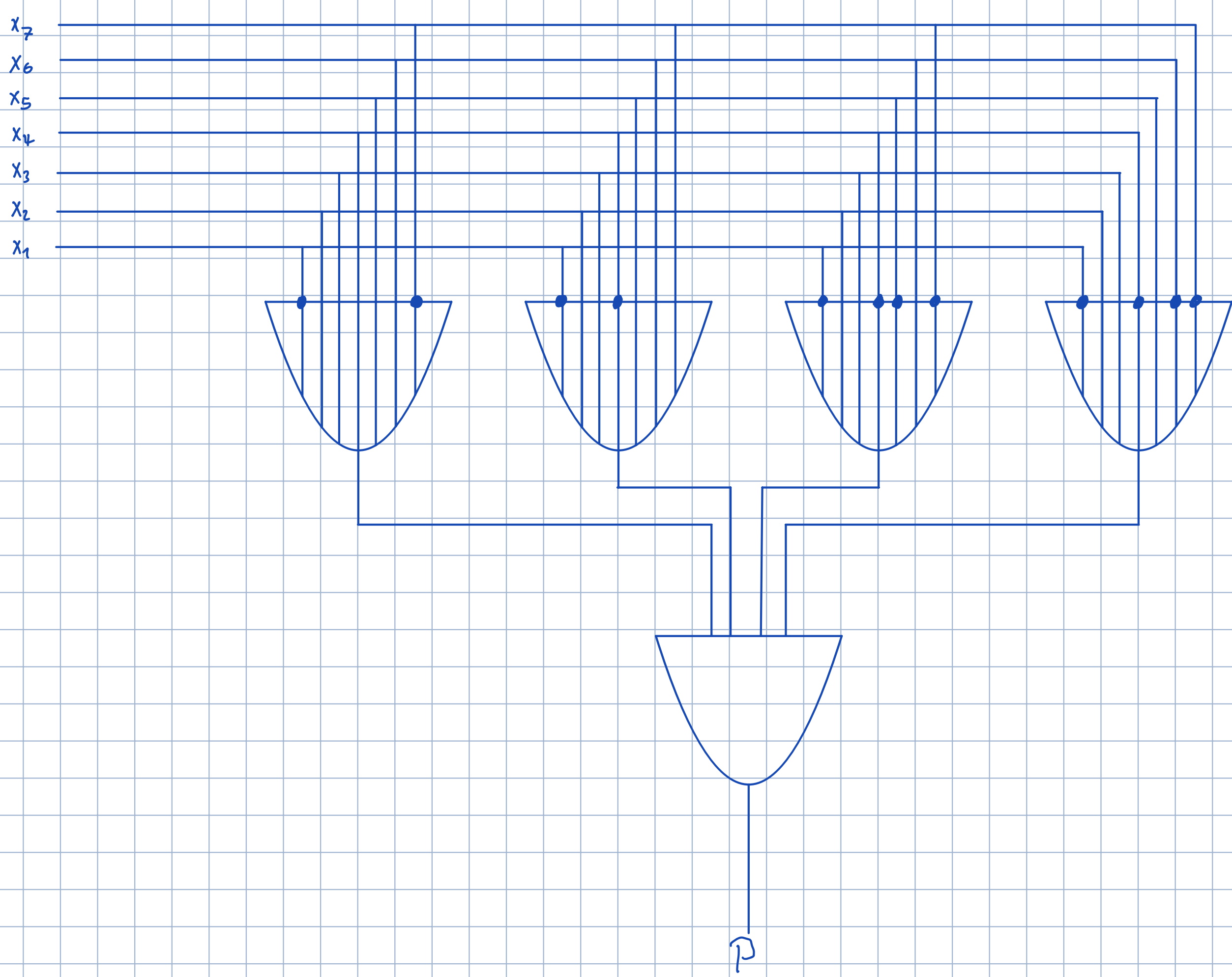
$$DNF = \overset{m_{82}}{R} + \overset{m_{73}}{I} + \overset{m_{84}}{T} + \overset{m_{69}}{E}$$

$$= (x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 x_6 \bar{x}_7) + (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 x_7) + (x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6 \bar{x}_7) + (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \bar{x}_6 x_7)$$

$$KNF = \neg \overset{M_{65}}{A} \cdot \neg \overset{M_{72}}{H} \cdot \neg \overset{M_{77}}{M} \cdot \neg \overset{M_{75}}{K}$$

$$= \neg(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 x_7) \cdot \neg(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \bar{x}_7) \cdot \neg(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \bar{x}_6 x_7) \cdot \neg(x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 x_6 x_7)$$

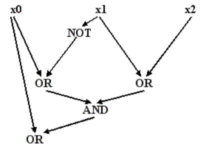
$$(\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \bar{x}_7) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4 + x_5 + x_6 + x_7) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + x_6 + \bar{x}_7) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3 + \bar{x}_4 + x_5 + \bar{x}_6 + \bar{x}_7)$$



Lukas Batschelet, 16-499-733
Paulo Rangel Garcia, 23-111-461

4 Directed Acyclic Graphs (2 Punkte)

(a) (1 Punkt) Bestimme die Schaltfunktion zu folgendem DAG

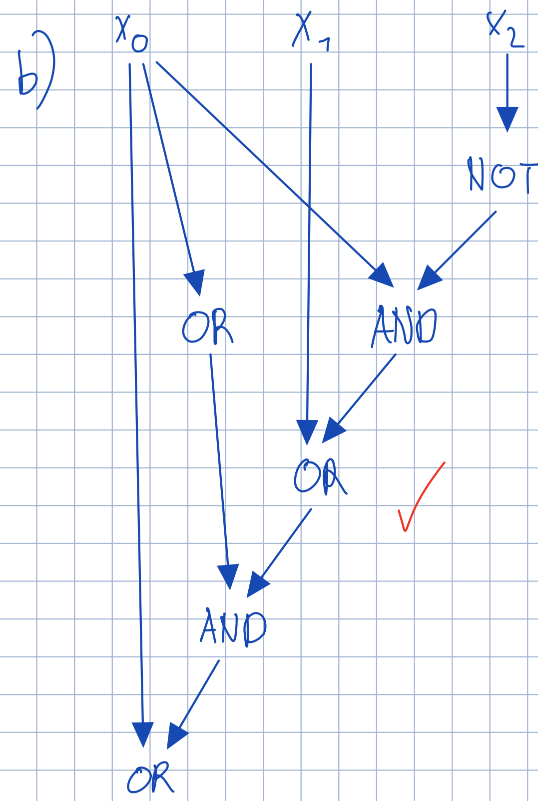


(b) (1 Punkt) Bestimme den DAG zu folgender Schaltfunktion

$$f(x_0, x_1, x_2) \quad = \quad (x_0 + x_1) \cdot (\neg x_2 \cdot x_0 + x_1) + x_0$$

a) $x_0 + (x_0 + \bar{x}_1) \cdot (x_1 + x_2)$ ✓

b)



✓

5 Funktionale Vollständigkeit (3 Punkte)

Die Menge $\{+, \neg\}$ ist funktional vollständig, denn jede Boolesche Funktion kann nur durch Komposition von Disjunktionen und Negationen dargestellt werden.

i. (1 Punkt) Stelle die Konstant-Null-Funktion $f(x_1, ..., x_n) = 0$ nur durch Komposition von Disjunktionen und Negationen dar.

ii. (2 Punkte) Zeige, dass die Menge $\{\rightarrow, \oplus\}$ funktional vollständig ist, indem du verwendest, dass es $\{+, \neg\}$ ist.

a) $f(x_1, ..., x_n) = 0$ ✓

$$= \neg(x_1 + \bar{x}_1) + ... + \neg(x_n + \bar{x}_n)$$

b) Ansatz: Wenn wir $\rightarrow$ und $\oplus$ mit $\neg$ und $+$ darstellen können, ist die Menge auch funktional vollständig

- $\neg$ $\quad \neg a = a \oplus 1 = (a \rightarrow a) \oplus a$
- $+$

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

d.h.

$$\boxed{\begin{aligned} \neg A &= A \oplus 1 \\ A + B &= (A \rightarrow B) \rightarrow B \end{aligned}}$$