Sol08 - Lösungen der Übung 8

Diskrete Mathematik (Universität Bern)

Institut für Informatik, Universität Bern
Diskrete Mathematik
HS 2022

Prof. Christian Cachin
Mariarosaria Barbaraci
Luca Zanolini

Lösung zu Übung 8

8.1 Äquivalenzrelationen: Partition einer Menge (2pt)

Für die Partitionen der Menge S = $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ geben wir die Äquivalenzrelationen an. Für diese muss Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gelten.

a) $R_a = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (e, f), (e, g), (f, e), (f, f), (f, g), (g, e), (g, f), (g, g)\}$. Man kann die Relation auch als Matrix abbilden, um es übersichtlicher zu machen.

$$R_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $R_b = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f), (g, g)\}$

$$R_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $R_c = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (e, e), (e, f), (e, g), (f, e), (f, f), (f, g), (g, e), (g, f), (g, g)\}$

$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) $R_d = \{(a, a), (a, c), (a, e), (a, g), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, e), (c, g), (d, b), (d, d),$

$(e,a),(e,c),(e,e),(e,g),(f,f),(g,a),(g,c),(g,e),(g,g)\}$

$$R_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.2 Halbordnungen (3pt)

Eine Relation R auf der Menge S ist eine Halbordnung, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

a) Die Relation R_a ist reflexiv, antisymmetrisch, aber nicht transitiv. Somit handelt es sich nicht um eine Halbornung.
   Die transitive Hülle wäre $R' = R_a \cup \{(b,c)\}$. R' wäre hingegen eine Halbordnung.

b) Die Relation R_b ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, also handelt es sich um eine Halbordnung.

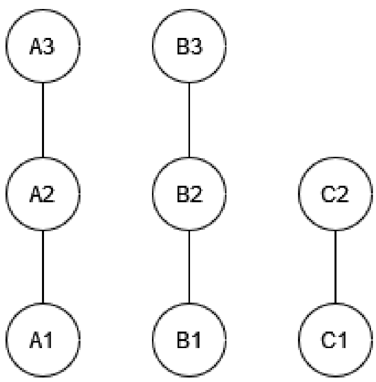
c) Die Relation R_c ist reflexiv, antisymmetrisch, aber nicht transitiv. Somit ist es keine Halbordnung.
   Die transitive Hülle wäre $R'' = R_c \cup \{(a,d),(a,b),(b,a),(b,d),(c,a),(c,b),(d,c)\}$. R'' wäre jedoch nicht mehr antisymmetrisch und somit auch keine Halbornung.

8.3 Strenge Halbordnung durch parallele Prozesse (5pt)

i) Sämtliche Abhängigkeiten werden durch den Code erzeugt. Aus unserem Code folgt z.B., dass $A1$ *immer* vor $A2$ stattfindet und $A2$ vor $A3$ und deshalb auch $A1$ vor $A3$, d.h., $\{(A1,A2),(A2,A3),(A1,A3)\} \subset H$. Somit ist die Menge aller zwingenden Abhängigkeiten in H gegeben durch

$$H_0 = \{(A1,A2),(A1,A3),(A2,A3),(B1,B2),(B1,B3),(B2,B3),(C1,C2)\}.$$

Man kann dies auch mit einem Hasse-Diagramm darstellen.



a) `X = 5. Y = 35.:`
   Wir betrachten den Output und sehen, dass X aus den beiden Startwerten berechnet wird. Nämlich $X = 2+3$ bei $A3$. Also müssen $A2$ vor $B3$ und $A2$ vor $C2$ stattgefunden haben.

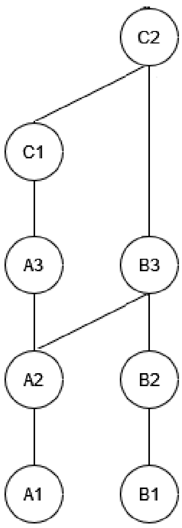
Danach wird der finale Wert von Y durch Prozess C bei $C2$ berechnet (dies impliziert $A3$ vor $C1$), und bei $C2$ wird der Wert von Y aus $B3$ überschrieben, also $B3$ vor $C2$.

ii) Wir können daraus schliessen:
$H = H_0 \cup \{(A2, B3), (A2, C2), (A3, C1), (B3, C2)\}$.

iii) Wir leiten daraus eine strenge Halbordnung her:
Aus $(A2, B3)$, folgt $(A1, B3)$
Aus $(A2, C2)$, folgt $(A1, C2)$
Aus $(A3, C1)$, folgt $(A2, C1)$, $(A1, C1)$, $(A3, C2)$
Aus $(B3, C2)$, folgt $(B1, C2)$, $(B2, C2)$.

$$H' = H \cup \{(A1, B3), (A1, C2), (A2, C1), (A1, C1), (A3, C2), (B1, C2), (B2, C2)\}.$$

iv) Die nebenläufigen (concurrent) Ereignisse sind:
$A1\|B1$, $A1\|B2$, $A2\|B1$, $A2\|B2$, $A3\|B1$, $A3\|B2$, $A3\|B3$, $B1\|C1$, $B2\|C1$, $B3\|C1$.
Alles zusammen kann im folgendem Hasse-Diagramm gesehen werden.



b) `X = 16. Y = 28.` Wir betrachten den Output und sehen, dass X mit dem Startwert von X und einem veränderten Y berechnet wird, nämlich als $X = 2 + 14$, wobei $Y = 14 = 2 \cdot 7$ von Prozess C geschrieben wurde. Also muss $C2$ vor $A2$ stattgefunden haben und in Prozess C muss $Y = 2 \cdot 7$ berechnet worden sein, noch bevor Prozess A den Wert X geschrieben hat in $A3$. Das heisst also, dass $C1$ vor $A3$ kommt. Der Endwert $Y = 28$ wurde durch Prozess B aus $14 \cdot 2$ berechnet, wozu $Y = 14$ bei $B1$ nach $C2$ durch Prozess B gelesen wurde (und deshalb auch $Y = 14$ bei $C2$ von Prozess B bei $B3$ durch $Y = 28$ überschrieben wurde). Dazu muss Prozess A bei $A2$ den Wert von Y vor $B3$ gelesen haben. Im Weiteren gilt $X = 2$ bei $B2$, und so darf $A3$ erst nach $B2$ stattgefunden haben. Nur so kommen wir auf unser Ergebnis.

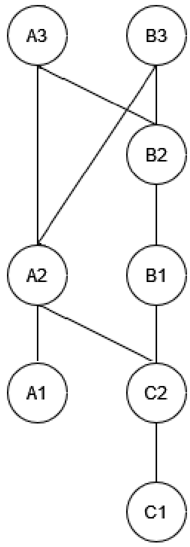
ii) Wir können daraus schliessen:
$H = H_0 \cup \{(C2, A2), (C1, A3), (C2, B1), (C2, B3), (A2, B3), (B2, A3)\}$

iii) Wir leiten daraus eine strenge Halbordnung her:
Aus $(C2, A2)$, folgt $(C2, A3)$, $(C1, A2)$
Aus $(C2, B3)$, folgt $(C1, B3)$
Aus $(B2, A3)$, folgt $(B1, A3)$

Aus $(C2, B1)$, folgt $(C2, B2)$, $(C1, B1)$, $(C1, B2)$
Aus $(A2, B3)$ folgt $(A1, B3)$.

$$H' = H \cup \{(C2, A3), (C1, A2), (C1, B3), (B1, A3), (C2, B2), (C1, B1), (C1, B2), (A1, B3)\}.$$

iv) Die nebenläufigen (concurrent) Ereignisse sind:
$A1 \| B1$, $A1 \| B2$, $A1 \| C1$, $A1 \| C2$, $A2 \| B1$, $A2 \| B2$, $A3 \| B3$.
Alles zusammen kann im folgendem Hasse-Diagramm gesehen werden.



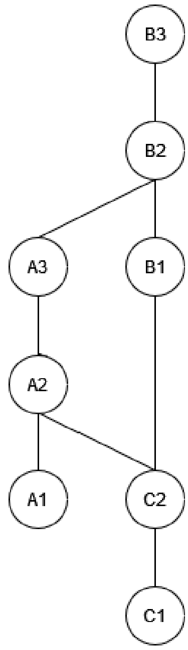
c) `X = 16. Y = 224.` Wie wir sehen wird X gleich wie bei b) berechnet (dies impliziert die ersten drei Abfolgen $C2$ vor $A2$, $C1$ vor $A3$ und $C2$ vor $B1$). Der Wert Y hingegen wird durch $Y = 16 \cdot 14$ berechnet, also muss $A3$ vor $B2$ ausgeführt worden sein (und deshalb auch $A2$ vor $B3$).

ii) Daraus folgt:
$H = H_0 \cup \{(C2, A2), (C1, A3), (C2, B1), (A3, B2), (A2, B3)\}$.

iii) Wir leiten daraus eine strenge Halbordnung her:
Aus $(C2, A2)$, folgt $(C2, A3)$, $(C1, A2)$
Aus $(C2, B1)$, folgt $(C2, B2)$, $(C2, B3)$, $(C1, B1)$, $(C1, B2)$, $(C1, B3)$
Aus $(A3, B2)$, folgt $(A2, B2)$, $(A1, B2)$, $(A3, B3)$, $(A1, B3)$
Aus $(C1, A3)$ und $(A2, B3)$ folgen direkt keine weiteren Abhängigkeiten.

$$H' = H \cup \{(C2, A3), (C1, A2), (C2, B2), (C2, B3), (C1, B1), (C1, B2), (C1, B3), (A2, B2), (A1, B2), (A3, B3), (A1, B3)$$

iv) Die nebenläufigen (concurrent) Ereignisse sind:
$A1 \| B1$, $A1 \| C1$, $A1 \| C2$, $A2 \| B1$, $A3 \| B1$.
Alles zusammen kann im folgendem Hasse-Diagramm gesehen werden.


B3
B2
A3
B1
A2
A1
C2
C1