Würfelexperiment

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Gruppen «Würfeln»:

> 50 Mal mit zwei Würfeln würfeln

Gruppen «Fälschen»:

> Summe der Augenzahl zweier Würfel ausdenken

Nächste Stunde versuchen wir die Fälschungen zu identifizieren. Dazu bitte:

1) Augenzahlen addieren
2) Wie oft ist die Summe=2, =3, ...?
3) Ergebnisse als ASCII .txt oder Excel mit Gruppennamen (NICHT Gruppe 1 oder 2) per E-Mail an joerg.franke@unibe.ch

Augen-zahlen-summe	Strich-liste	Summe
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

VERTEILUNGEN

Statistische Datenanalyse (Aufbau dieser Vorlesung)

b
UNIVERSITÄT
BERN

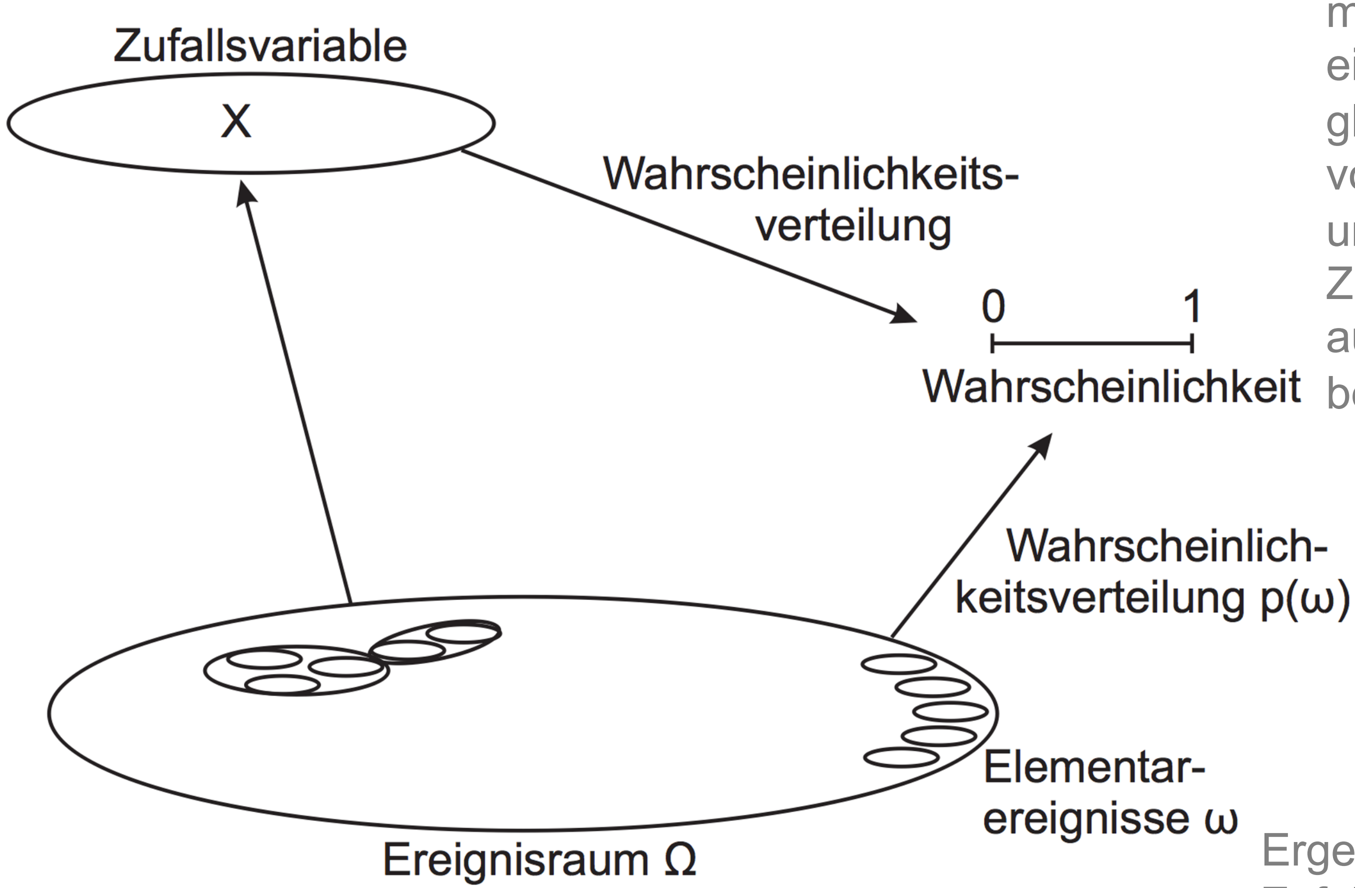
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Deskriptive Statistik	Rohdaten visualisieren	Datenqualität prüfen	statistische Masszahlen
Schliessende Statistik	Unterschiede identifizieren	Zusammenhänge identifizieren	Abhängigkeiten modellieren
	Statistische Tests Konfidenzintervalle	Korrelation	Regression
	Wie **wahrscheinlich** sind die Daten der Stichprobe, wenn die Nullhypothese zutrifft?	Gibt es gemeinsame gleich- oder entgegengerichtete Variationen	Kausalzusammenhänge für Vorhersagen oder Interpolationen nutzen
Fallen der Statistik			
weiterführende Methoden	Daten zusammenfassen		Extremwertstatistik
	Hauptkomponentenanalyse	Clusteranalyse	Zeitreihenanal. etc.

Ereignisraum, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable

Variable die den Ergebnissen eines Zufallsexperiments Werte (Realisierungen) zuordnet

theoretische Häufigkeit, mit der ein Ereignis in einer grossen Anzahl gleicher, wiederholter, voneinander unabhängiger Zufallsexperimente auftritt (z.B. 0.5 für Zahl beim Münzwurf)



Ergebnis eines Zufallsexperiments

Alle theoretisch möglichen Ereignisse, denen sich Wahrscheinlichkeiten zuordnen lassen

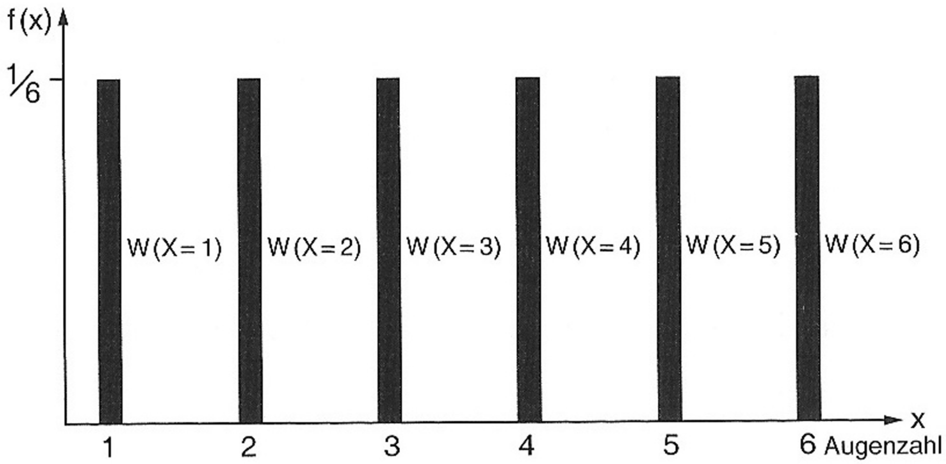
Theoretische Verteilungen diskreter Zufallsvariablen

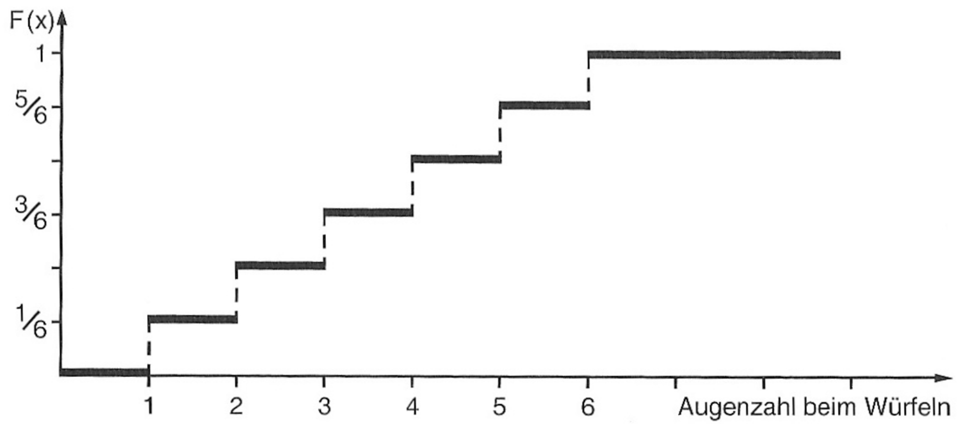
UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

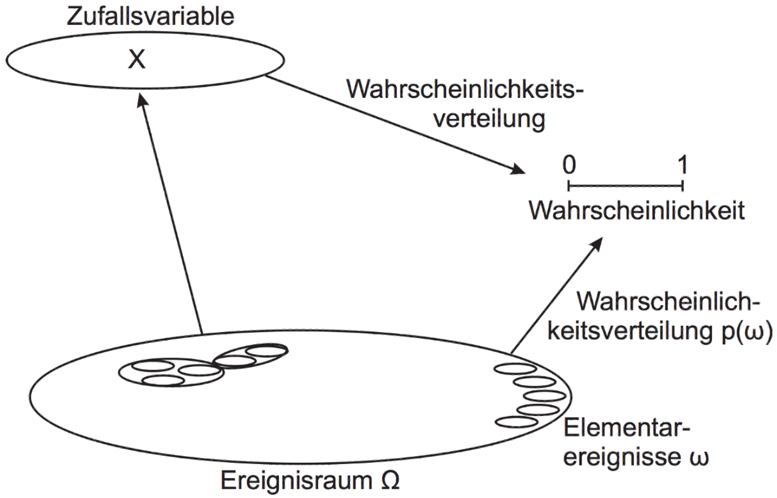
Theoretische **Wahrscheinlichkeits-funktion** einer diskreten Variablen mit Gleichverteilung

(Kumultative) **Verteilungsfunktion** einer diskreten Variablen mit Gleichverteilung





Ereignisraum, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable



Beispiel: Diskrete Räume

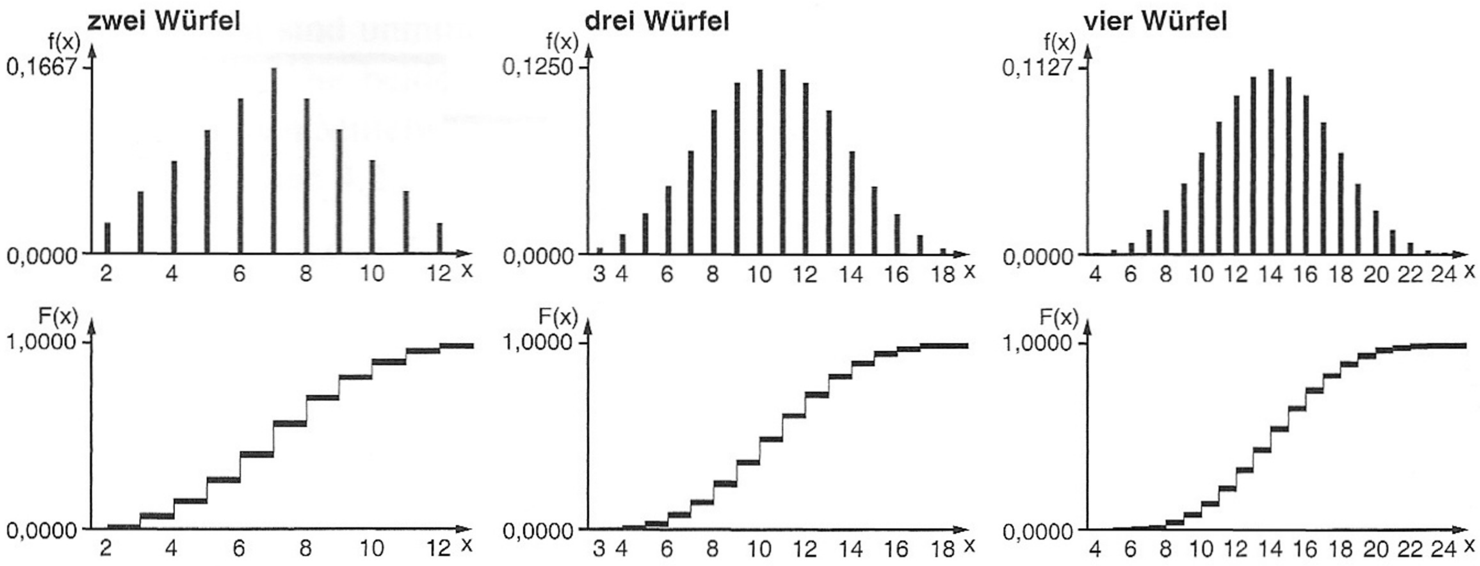
- Ihr würfelt mit **zwei** Würfeln
- Der **Ereignisraum** Ω, mit ω = {1,2,3,4,5,6} x {1,2,3,4,5,6}
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Elementarereignisse:
- Jedes Elementarereignis ω hat p(ω) = 1/36 (Gleichverteilung)
- p: probability
- **Zufallsvariablen** X können im Ereignisraum definiert werden.
- Beispiel: Anzahl der insgesamt geworfenen Augen X = {2,3,4,5,...,12}
- $P(X=x) = (6-|x-7|)/36$
- P steht für Probability, also Wahrscheinlichkeit

Theoretische Verteilungen diskreter Zufallsvariablen

b
UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Wahrscheinlichkeitsfunktion (oben) und Verteilungsfunktion (unten) der Zufallsvariablen Augensumme



Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsfunktion = **Erwartungswert**

Ereignisraum, Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable

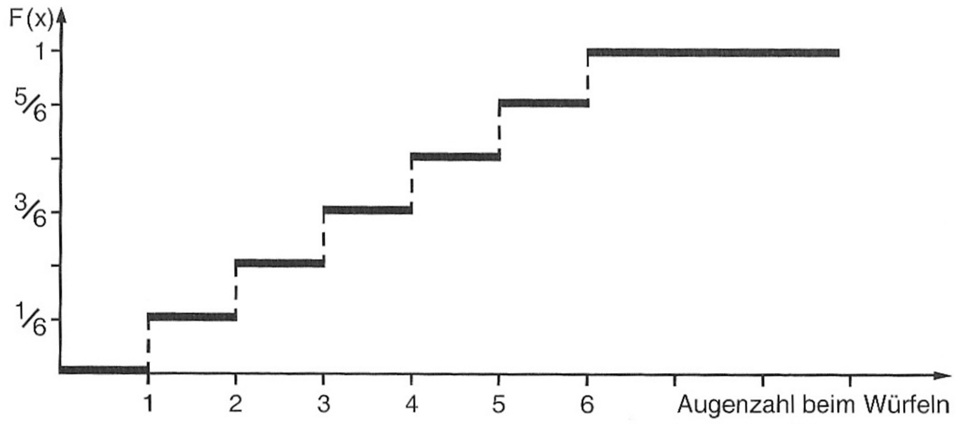
Beispiel: Stetige/kontinuierliche Räume (z.B. Temperatur)

- Der **Ereignisraum** Ω ist unendlich gross
- **Zufallsvariablen** X
- Temperatur eines zufällig ausgewählten Zeitpunkts
- $P(X = x) = 0$
- Wahrscheinlichkeiten sind definiert für Intervalle
- $P(X \leq x)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2)$

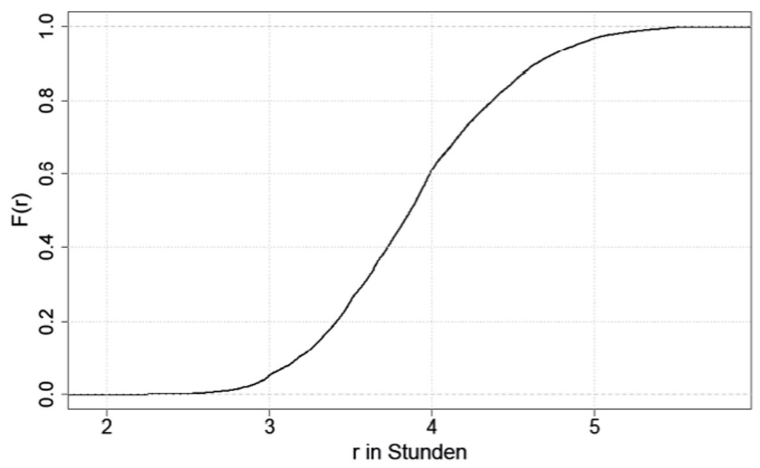
Theoretische Verteilungen von Zufallsvariablen

UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH



(Kumultative)
Verteilungsfunktion einer diskreten Variablen mit Gleichverteilung



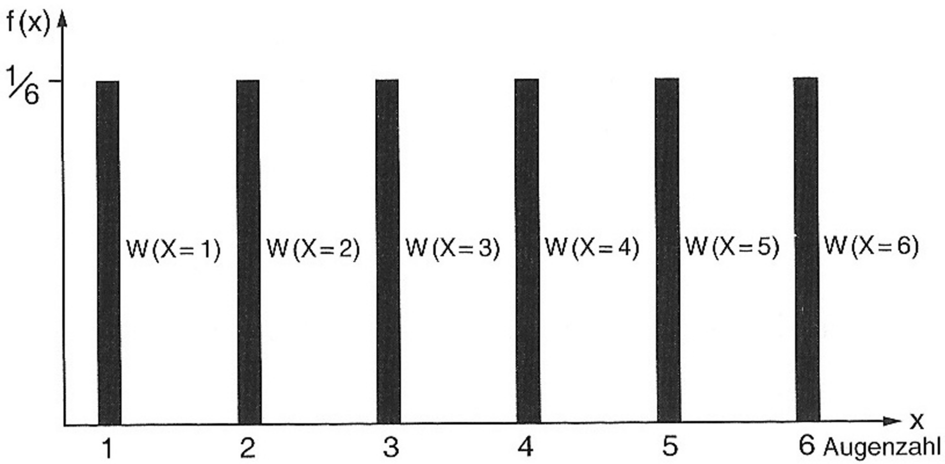
Verteilungsfunktion einer stetigen Variablen

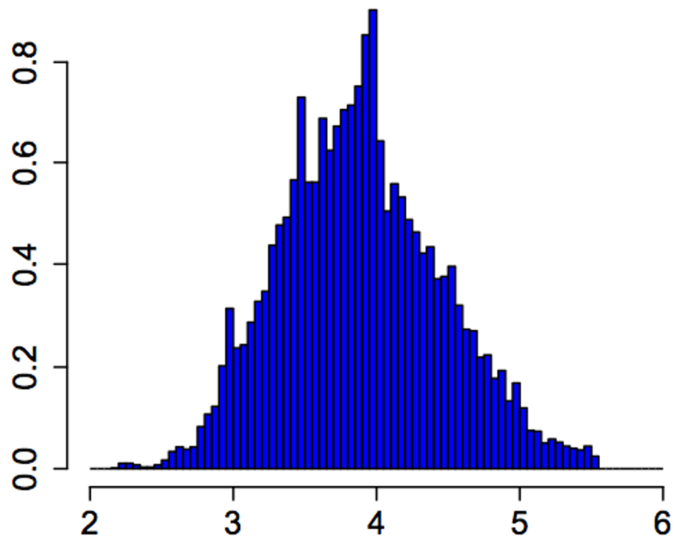
$F(r) = P(X \leq r)$

Empirische /Theoretische
Wahrscheinlichkeitsfunktion / Häufigkeit
einer normal- / gleichverteilten,
diskreter / stetiger
Zufallsvariablen

?

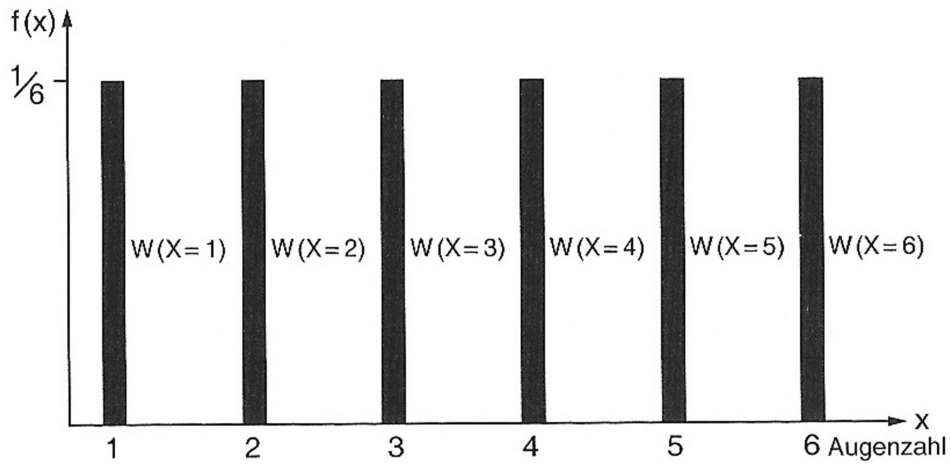
?



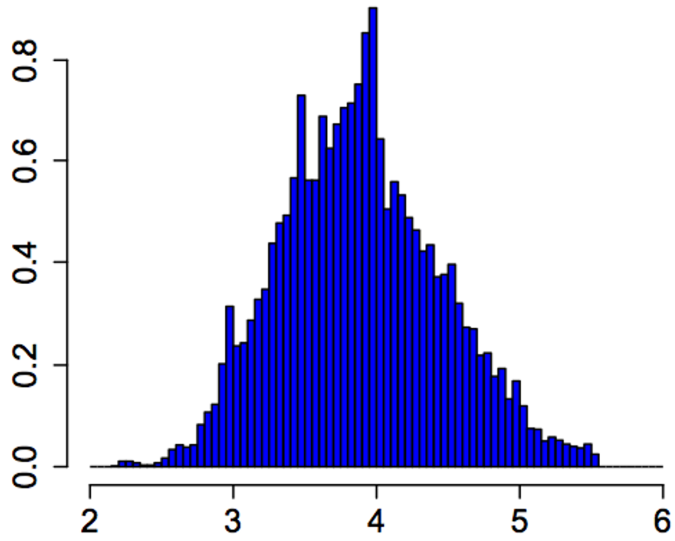


Theoretische/Empirische Wahrscheinlichkeitsfunktion/Häufigkeit einer gleich-/normalverteilten, diskreter/stetiger Zufallsvariablen

Theoretische **Wahrscheinlichkeits-funktion** einer diskreten Variablen mit Gleichverteilung



Empirische **Häufigkeit** einer stetigen Variablen mit Normalverteilung



Histogramm vs. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

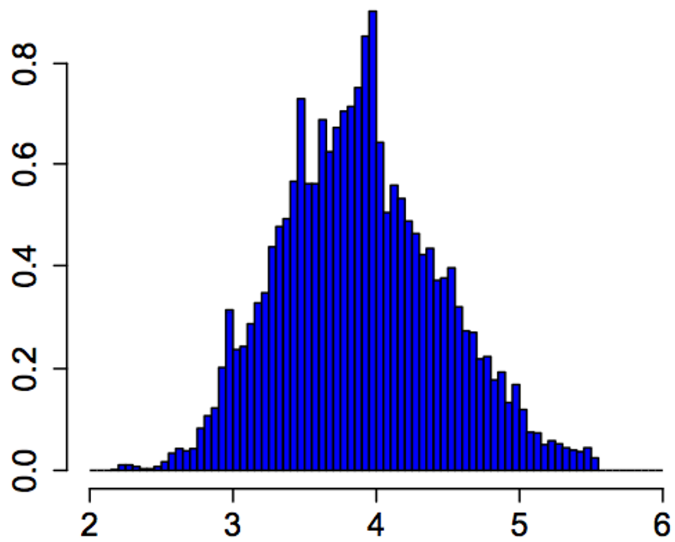
Ein **Histogramm** ist eine graphische Darstellung der **Häufigkeitsverteilung** von stetigen, metrisch skalierten Merkmalen (Kardinalskala). Dies erfordert eine Einteilung der Daten in Klassen.

Daumenregel für die Anzahl an Klassen

Anzahl der Messungen	Balkenzahl
<50	5 bis 7
50 bis 100	6 bis 10
100 bis 250	7 bis 12
>250	10 bis 20

Histogramm einer empirischen Stichprobe:

- absolute Anzahl n der Elemente pro Klasse auf der y-Achse oder
- relative Anzahl der Elemente auf der y-Achse, d.h. Fläche aller Säulen summiert sich zu 1 auf



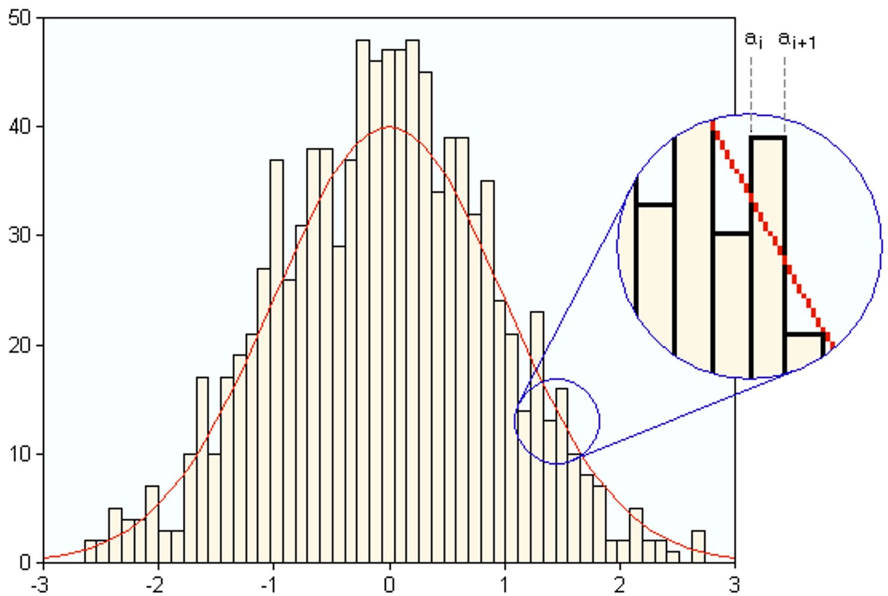
Histogramm vs. **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**

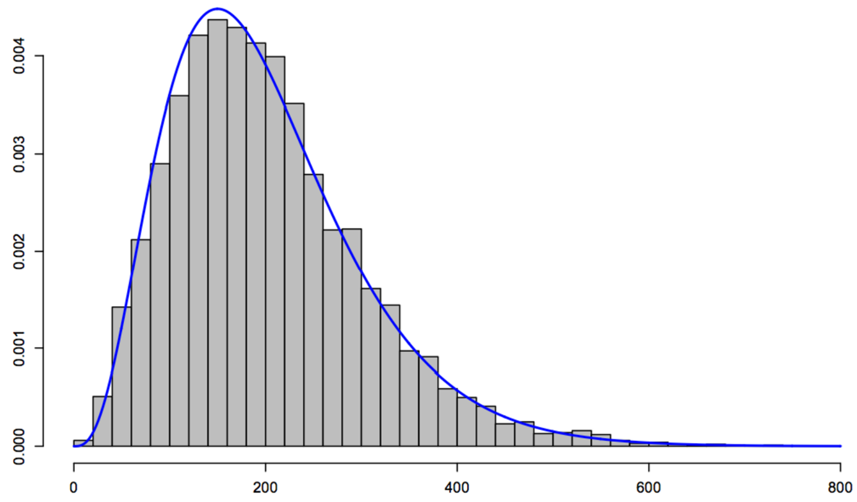
UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Histogramm zeigt die Häufigkeitsverteilung, hier von empirischen Daten.

Es kann genutzt werden, um die Wahrscheinlichkeitsdichte der Grundgesamtheit abzuschätzen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und „idealisiertes“ Histogramm einer theoretischen Verteilung



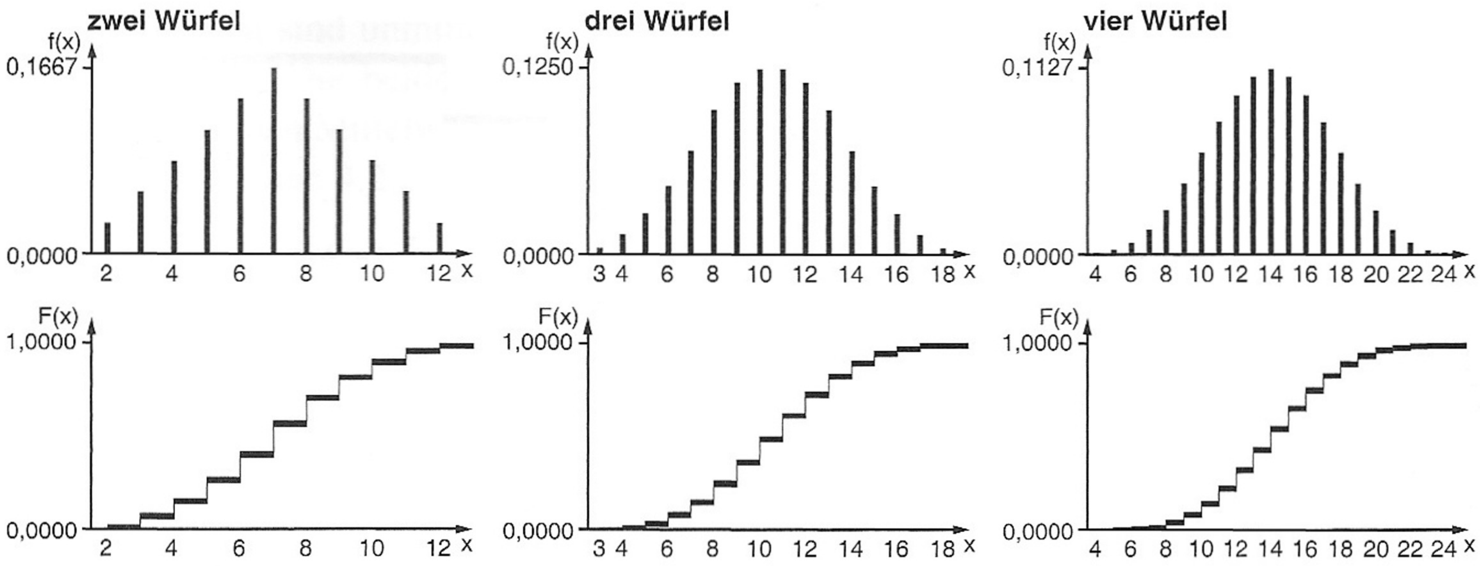


Theoretische Verteilungen diskreter Zufallsvariablen

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Wahrscheinlichkeitsfunktion (oben) und Verteilungsfunktion (unten)
der Zufallsvariablen Augensumme



Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsfunktion = **Erwartungswert**

Nähert sich **Normalverteilung** mit steigender Anzahl an Würfeln

Zentraler Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz ist ein Hauptsatz in der theoretischen Statistik und besagt im Allgemeinen, dass die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen annähernd normalverteilt ist.

> **n** sollte nach einer groben Faustformel mindestens **30** sein, damit die Summenformel als so gut wie normalverteilt angesehen werden kann.
> Daher die Daumenregel, dass Stichproben möglichst mindestens einen Umfang von 30 haben sollten.
> Der Verteilungstyp muss nicht bekannt sein, die Zufallsvariablen müssen nicht normal oder symmetrisch verteilt sein,
> allerdings muss eine Varianz existieren

Beispiel:

> Die Augenzahlensumme vieler gleichverteilter Würfelwürfe ist normalverteilt.

Zentraler Grenzwertsatz

UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

```
> # 1000000 gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 10
  erzeugen
> r <- runif(1000000,min=0,max=10)
> hist(r)   # Histogramm der Zufallszahlen
> mean(r)   # arithmetisches Mittel der Zufallszahlen
> # erzeuge leere Datenmatrix für 1000 Stichproben
> s <- matrix(NA,nrow=1000,ncol=50)
> for (i in 1:nrow(s)) {  # Schleife alle Zeilen (1 bis 1000) von s
>   # schreibe 50 zufällige Stichprobenwerte in Zeile i
>   s[i,] <- sample(r,50)
> }
> head(s)     # Kopf der Matrix s
> hist(s[1,],breaks=10) # Histogramm der ersten Stichprobe (Zeile)
> hist(s[2,],breaks=10) # Histogramm der zweite Stichprobe (Zeile)
> m <- apply(s,1,mean)  # Mittelwert aller Stichproben (Zeilen)
> hist(m)               # Histogramm der Stichprobenmittelwerte
```

Normalverteilung

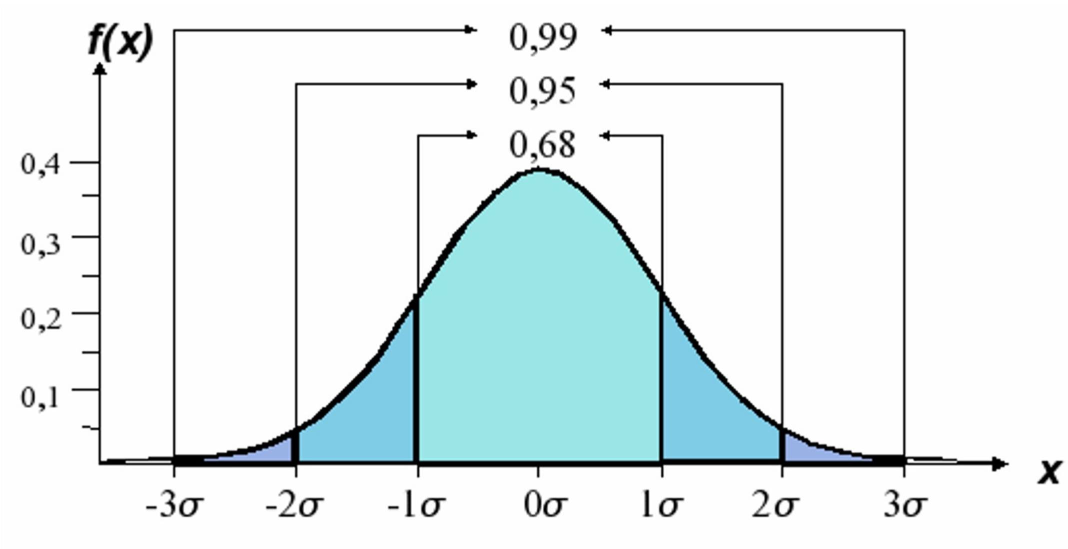
UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

> Normalverteilungen bzw. Gaussverteilungen oder gausssche Glockenkurve genannt:

> Die Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$ (Varianz σ^2) ist definiert als die Verteilung mit Dichtefunktion

$$f_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$



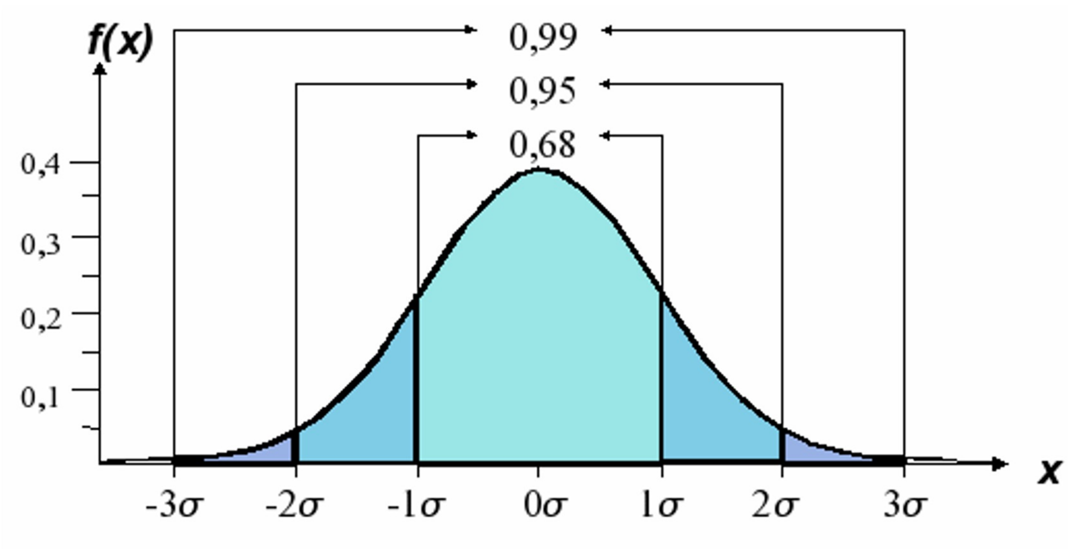
Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung

Normalverteilung

UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

> Ein/e schweizer Frau/Mann ist im Durchschnitt 165/178cm gross. Wie gross sind 68/95% der Frauen und Männer wenn eine Standardabweichung 6cm beträgt?

Wir können anhand der Verteilungen die Wahrscheinlichkeiten bestimmen



Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung

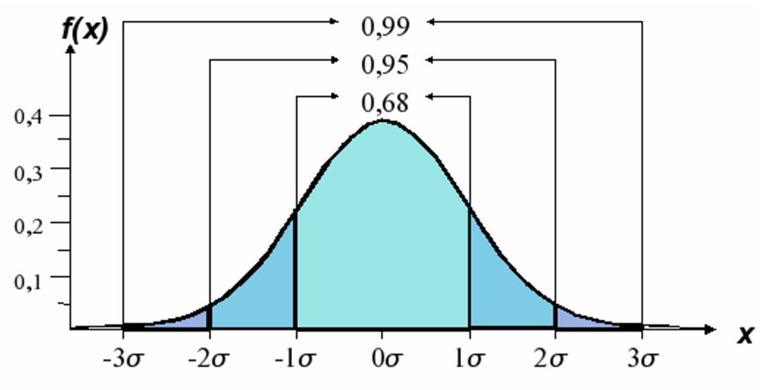
Normalverteilung

UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

- symetrisch zur Achse x = µ
- unimodal mit Maximum bei x = µ
- Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$
- asymptotisch gegen 0

- Standardnormalverteilung hat Mittelwert µ=0 und Standardabweichung σ = 1 durch Transformation (Standardisierung) $Z = (X - \mu) / \sigma$



Standardisierung / z-Transformation

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

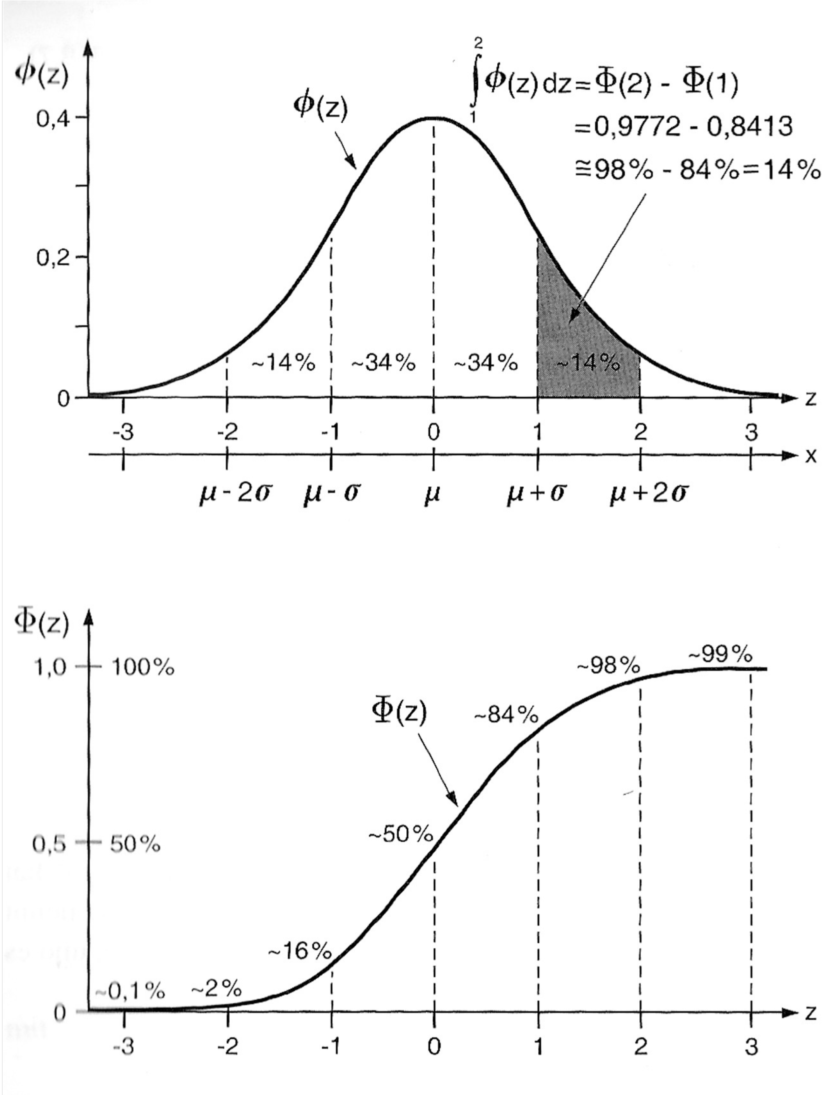
- Zum Vergleich verschiedener Elemente (d.h. Daten mit Bias oder unterschiedlichen Einheiten oder unterschiedlicher Varianz, etc.)
- Um Mittelwert und Standardabweichung korrigieren, d.h. der Mittelwert von z ist gleich 0 und Standardabweichung gleich 1

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Dimensionslos
- Für symetrische, unimodale Variablen, da auf Mittelwert und Standardabweichung beruhend

Normalverteilung und Verteilungsfunktionen

UNIVERSITÄT
BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

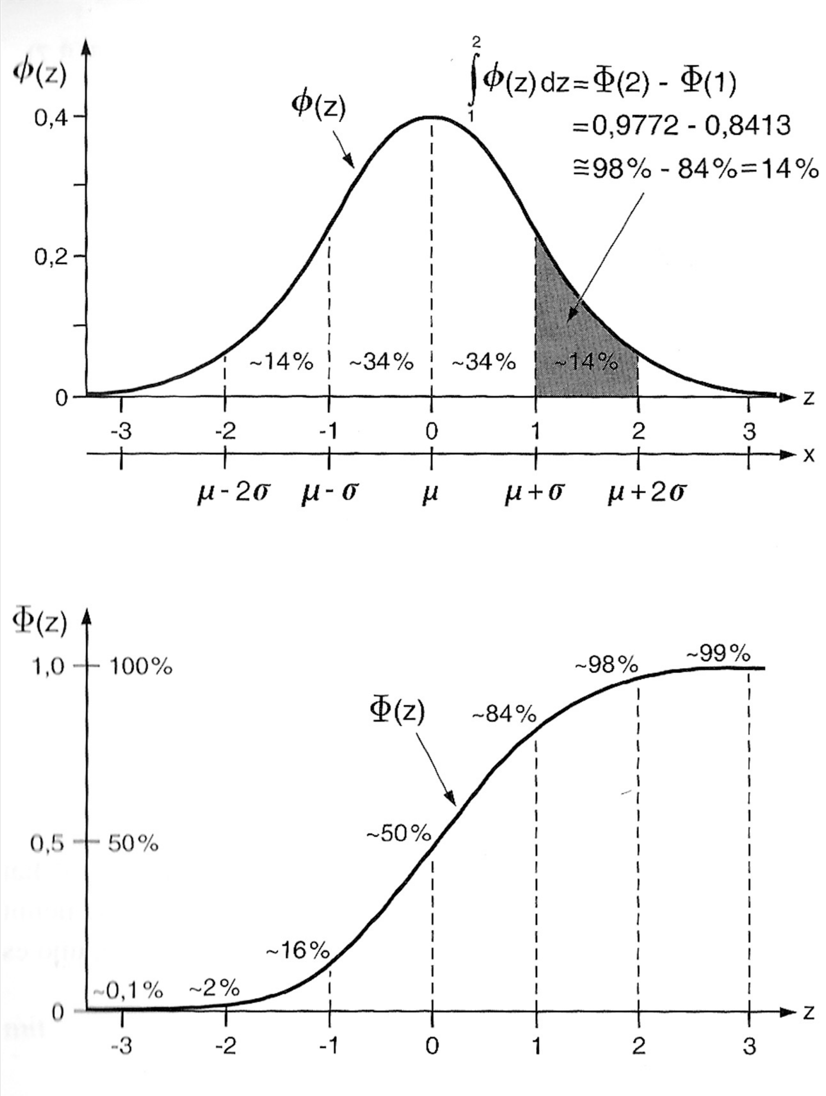


- Die Verteilungsfunktion φ(z) gibt die Unterschreitungswahrscheinlichkeit von z an und entspricht der Fläche unterhalb der Kurve links von z.
- Überschreitungswahrscheinlichkeit von z ist 1 - Unterschreitungswahrscheinlichkeit

Normalverteilung

UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH



> Durchschnitt 165/178cm (Frau/Mann) gross. Standardabweichung bei beiden 6cm.

> 99% der Frauen/Männer sind kleiner als?

Take-home messages

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

- Der zentrale Grenzwertsatz ist ein Hauptsatz in der theoretischen Statistik und besagt im Allgemeinen, dass die Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen annähernd normalverteilt ist.
- Aus bekannten Verteilungen wie beispielsweise der Normalverteilung lassen sich Wahrscheinlichkeiten ablesen.
- Schliessende Statistik beruht meist auf Wahrscheinlichkeiten und liefert uns KEINE 100% sicheren Ergebnisse! (D.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft das Ergebnis der Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu.)

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

STATISTISCHE TESTS
TEIL 1

Bahrenberg I: Kap. 5;
Ernste Anh. B;
Ewing I: Kap. 10

Statistische Datenanalyse (Aufbau dieser Vorlesung)

UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Deskriptive Statistik	Rohdaten visualisieren	Datenqualität prüfen	statistische Masszahlen
Schliessende Statistik	Unterschiede identifizieren	Zusammenhänge identifizieren	Abhängigkeiten modellieren
	Statistische Tests Konfidenzintervalle	Korrelation	Regression
	Wie wahrscheinlich sind die Daten der Stichprobe, wenn die Nullhypothese zutrifft?	Gibt es gemeinsame gleich- oder entgegengerichtete Variationen	Kausalzusammenhänge für Vorhersagen oder Interpolationen nutzen
Fallen der Statistik			
weiterführende Methoden		Daten zusammenfassen	Extremwertstatistik
	Hauptkomponentenanalyse	Clusteranalyse	Zeitreihenanal. etc.

Schliessende Statistik

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Grundgesamtheit: die Menge aller Objekte/Untersuchungseinheiten

Liegt eine Grundgesamtheit vor, erübrigt sich die meiste schliessende Statistik und zählen oder messen reicht.

> "Die Grösse von Kantonen ist nicht normalverteilt."

> "Die letzten 10 Jahre waren an der MeteoSchweiz Messstation für Bern wärmer als die Jahre 1901-1910».

Stichprobe: Teilmenge der Grundgesamtheit (in diesem Kurs: Zufallsauswahl; es gibt aber auch systematische Stichproben)

Ziel der schliessenden Statistik:

> Aus Stichproben Aussagen über die Grundgesamtheit machen
> Schätzen von Kennzahlen der Grundgesamtheit
> Testen von Hypothesen über die Grundgesamtheit

Schätzen

UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE CLIMATE CHANGE RESEARCH

- Schätzen von Kennzahlen der Grundgesamtheit (Mittelwert, Streuungsmasse, Stärke von Abhängigkeiten, etc.)
- Definieren einer **Schätzfunktion** der Stichprobe, deren Erwartungswert die Kennzahl der Grundgesamtheit ist

Beispiel:

- Die Stichprobenvarianz (mit n-1) ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz der Grundgesamtheit (mit n; siehe Folien zur deskriptiven Statistik)

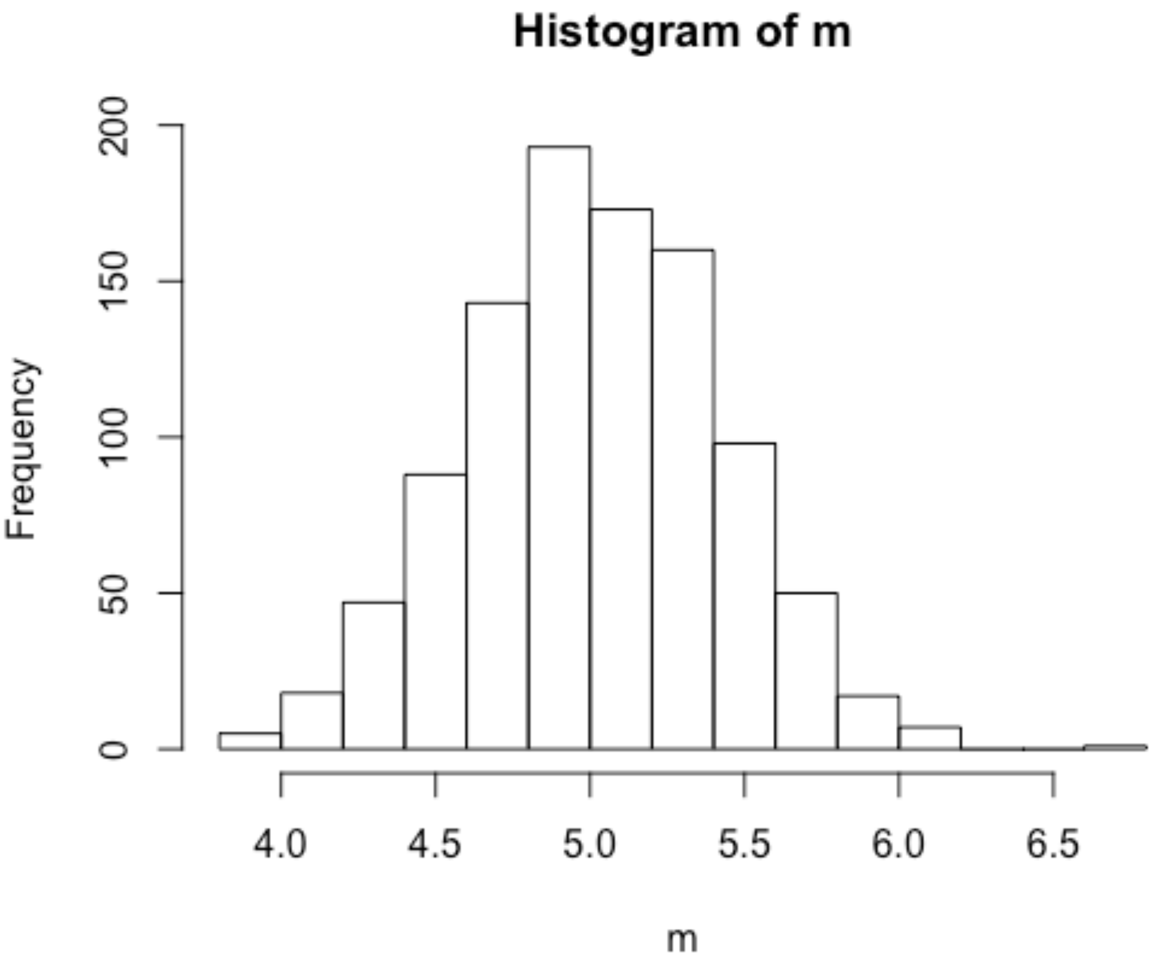
$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- Der Stichprobenmittelwert ist ein erwartungstreuer Schätzer des Mittelwerts der Grundgesamtheit (siehe nächste Folie)

Zentraler Grenzwertsatz

UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

```
>   # 1000000 gleichvert
    erzeugen
>   r <- runif(1000000,m
>   hist(r)    # Histogra
>   mean(r)    # arithmet
>   # erzeuge leere Date
>   s <- matrix(NA,nrow=
>   for (i in 1:nrow(s))
>     # schreibe 50 zufä
>     s[i,] <- sample(r,
>   }
>   head(s)      # Kopf c
>   hist(s[1,],breaks=1(
>   hist(s[2,],breaks=1(
>   m <- apply(s,1,mean)
>   hist(m)
```



Stichprobe vs. Grundgesamtheit

Wie können wir aus relativ kleinen Stichproben Informationen über die Grundgesamtheit ziehen, z.B.:

> Aus einer Befragung von 10000 Personen, das Ergebnis einer Wahl

> Aus 50 Proben, ob ein ganzer Schlachthof frei von Salmonellen ist

Konzept:

Beim Start zum Engadiner Skimarathon wird ein Bus vermisst. Bei der Suche findest du einen Parkplatz einen Bus. Du schaust in den Bus und stellt fest, dass das durchschnittliche Alter der Personen vermutlich bei ca. 80 Jahren liegt.

Denkst ihr dies ist der vermisste Bus oder sucht ihr weiter?

Warum?

Stichprobe vs. Grundgesamtheit

Konzept:

Beim Start zum Engadiner Skimarathon wird ein Bus vermisst. Bei der Suche findest du einen Parkplatz einen Bus. Du schaust in den Bus und stellt fest, dass das durchschnittliche Alter der Personen vermutlich bei ca. 80 Jahren liegt.

Ihr denkt vermutlich, es ist sehr unwahrscheinlich. Marathonläufer sind normalerweise eher jünger und es ist unwahrscheinlich, dass so viele von den ältesten Teilnehmern in einem Bus gelandet sind. Daher beschliesst ihr, die Suche fortzusetzen.

Eure Annahme ist, das ein zufällige Stichprobe aus allen Teilnehmern ungefähr die gleichen Merkmale haben sollte wie Grundgesamtheit.

Testtheorie

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

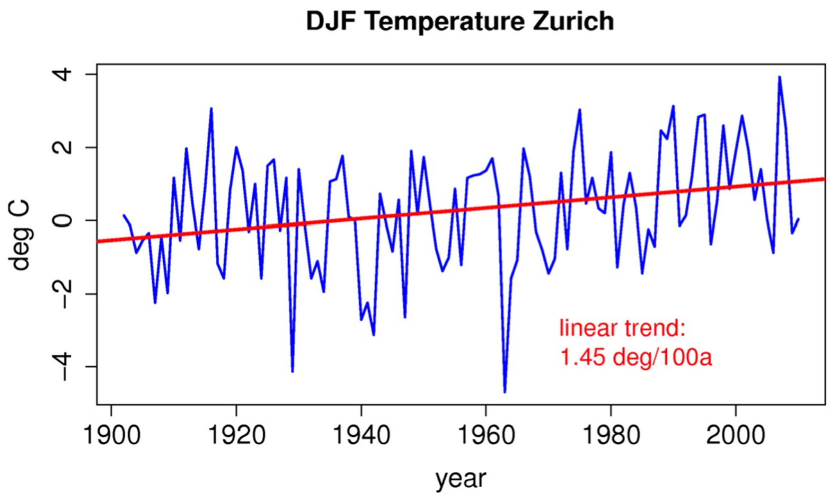
Was kann man mit Hypothesen testen?

> Sind Parameter (Kennzahlen wie Mittelwert) zweier (mehrerer) Grundgesamtheiten aus denen die Stichproben stammen gleich?
>
> Wirkt z.B. ein neues Medikament besser als ein Placebo?

> Verteilung der Grundgesamtheit aus der die Stichprobe gezogen wurde ist gleich einer bestimmten Verteilung, z.B. Normalverteilung ($N_{\mu;\sigma}$)

> Parameter der Grundgesamtheit gleichen vorgegebenen Werten, z.B. μ=Konstante oder Korrelationskoeffizient ρ=0

Ist dies ein echter Trend oder nur ein Rauschen?

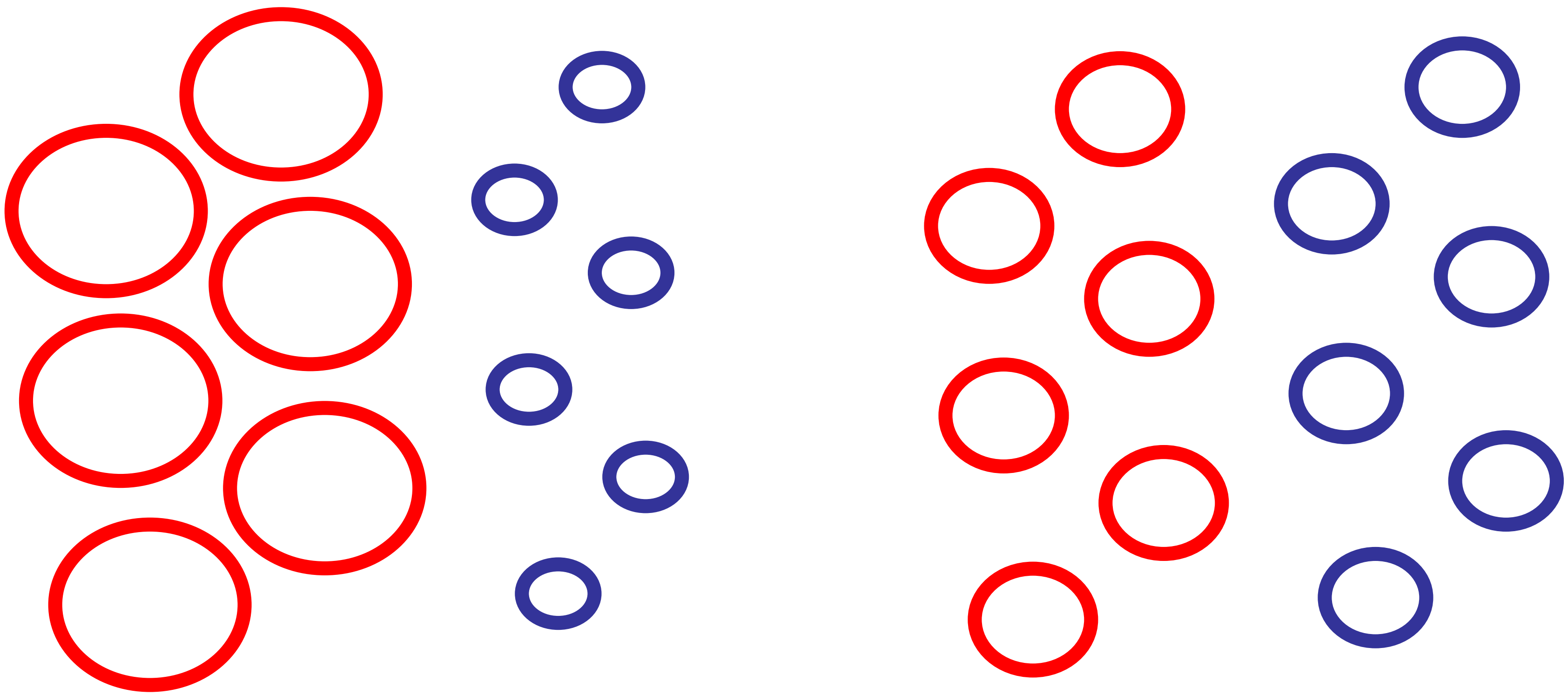


Visualisiert das Problem
Statistik muss nicht abstrakt sein!

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

> Ob zwei Gruppen bzw. Stichprobe und Grundgesamtheit statistisch signifikant unterschiedlich sind, hängt an der **Grösse des Effekts**

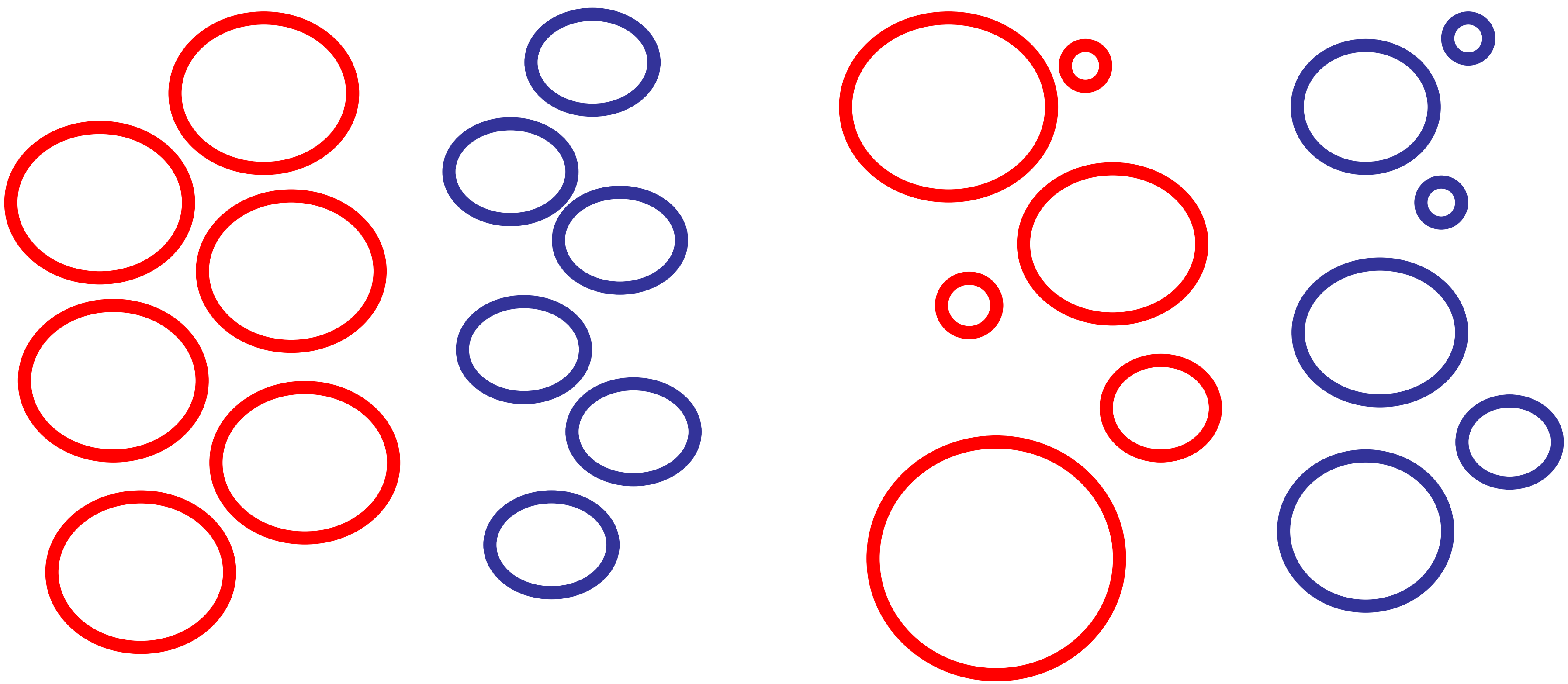


Visualisiert das Problem
Statistik muss nicht abstrakt sein!

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

- Ob zwei Gruppen bzw. Stichprobe und Grundgesamtheit statistisch signifikant unterschiedlich sind, hängt an der **Variation der Stichproben**

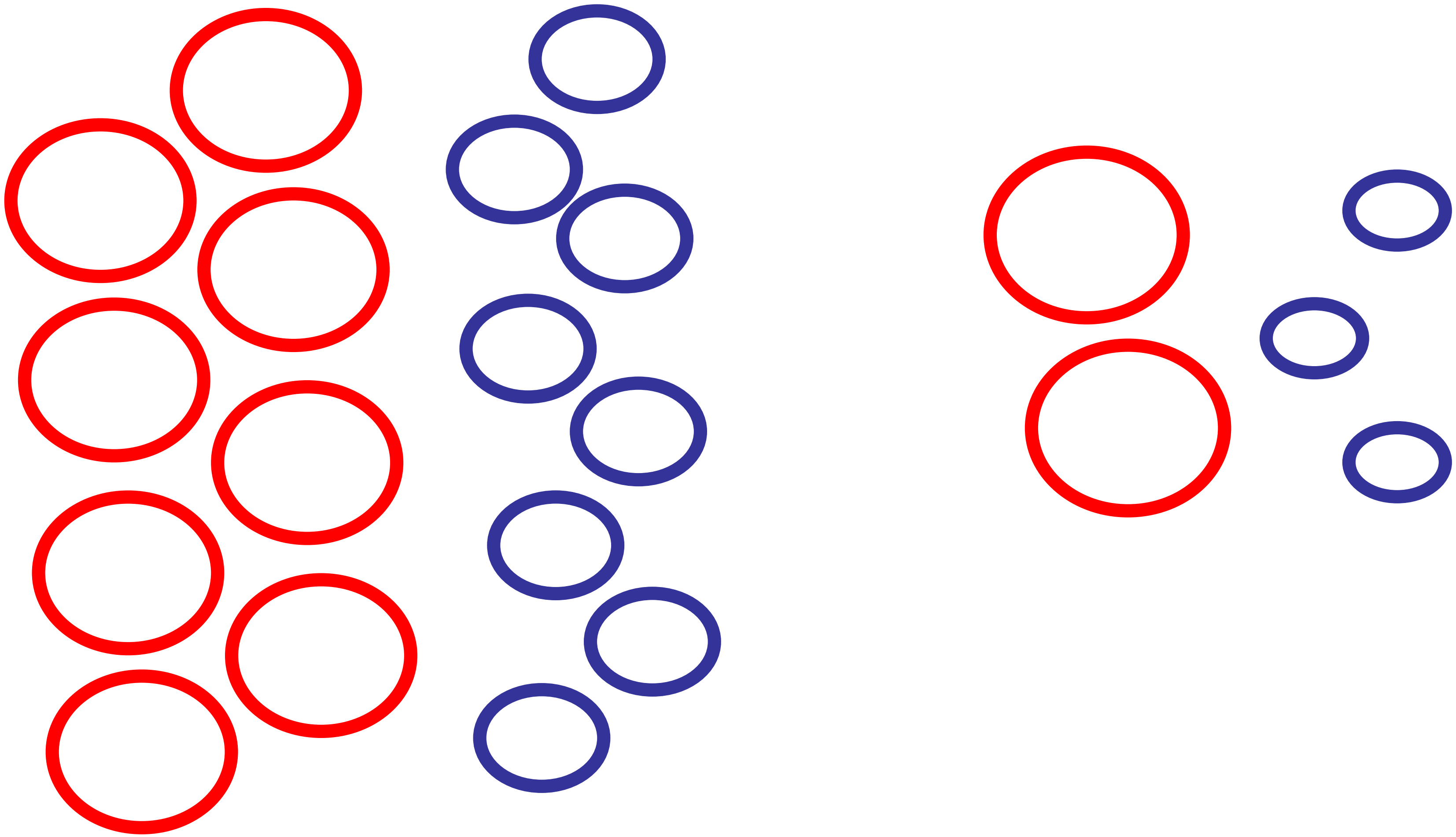


Visualisiert das Problem
Statistik muss nicht abstrakt sein!

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

- Ob zwei Gruppen bzw. Stichprobe und Grundgesamtheit statistisch signifikant unterschiedlich sind, hängt an der **Stichprobengrösse**



Standardabweichung vs. Standardfehler

> Die Standardabweichung misst die Variation in der Grundgesamtheit (bzw. deren beste Schätzung aus der Stichprobe), z.B. Die Teilnehmer am Skimarathon haben ein mittleres Alter von 40 Jahren mit einer Standardabweichung von 10 Jahren, wobei wir annehmen, dass die Alter ungefähr normalverteilt ist.

> D.h. 68% der Läufer sind zwischen ? und ? Jahre und 95% zwischen ? und ? Jahre alt.

Standardabweichung vs. Standardfehler

... mittleres Alter von 40 Jahren mit einer Standardabweichung von 10 Jahren

D.h. 68% der Läufer sind zwischen 30 und 50 Jahre und 95% zwischen 20 und 60 Jahre alt.

Der **Standardfehler** misst die Abweichungen der Stichprobenmittelwerte vom Mittelwert der Grundgesamtheit, z.B. wenn wir Busse mit Läufern beladen, was ist dann die Abweichung des mittleren Alters der Läufer in den Bussen?

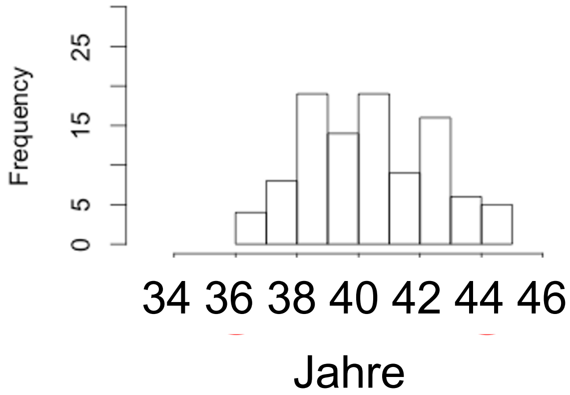
D.h. Das mittlere Teilnehmeralter der Grundgesamtheit ist immer noch 40 Jahren. In einem Bus sind die Leute jedoch im Mittel 41 Jahre alt, im nächsten 38 Jahre, ...

Verbindung zwischen beiden:

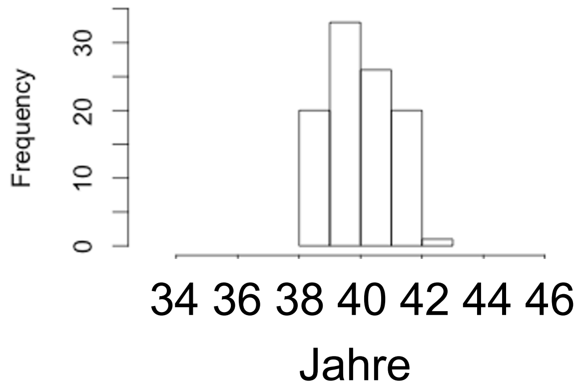
Der Standardfehler ist die Standardabweichung der Stichprobenmittel, wenn mehrere Stichproben erhoben werden, d.h. ein grosser Standardfehler bedeutet die Stichprobenmittel weichen relativ weit vom Mittel der Grundgesamtheit ab.

Standardabweichung vs. Standardfehler

100 Stichprobenmittel, n=20
entspricht Bus mit 20 Personen



100 Stichprobenmittel, n=100
entspricht Bus mit 100 Personen



Bei einer grösseren Stichprobe (rechts) ist es unwahrscheinlicher, dass die Stichprobenmittelwerte vom Mittel der Grundgesamtheit abweichen.

Standardfehler: $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

mit s, der Standardabweichung der Stichprobe, bzw. der Varianz s^2
d.h. der Standardfehler ist gross, wenn die Standardabweichung der Stichprobe gross ist und nimmt mit steigender Stichenprobengrösse (n) ab.

Die **Standardfehler sind** dank des zentralen Grenzwertsatzes **normalverteilt!**

UNIVERSITÄT
BERN

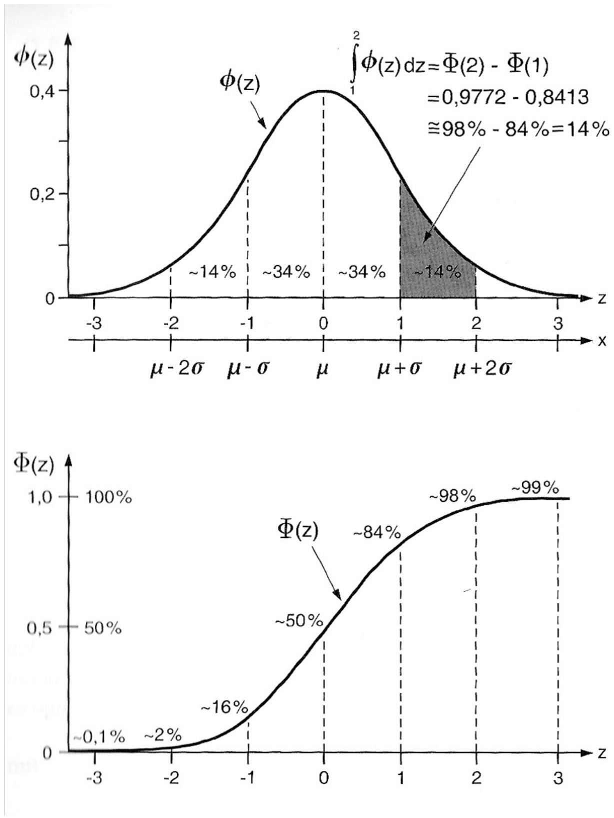
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Statistisch begründete Entscheidung

- Mittleres Alter der Marathonteilnehmer beträgt 40 Jahre und die Standardabweichung 10 Jahre.

- Im gefundenen Bus beträgt das mittlere Alter 80 Jahre. Nehmen wir an im Bus würden 50 Personen sitzen d.h.
- der Standardfehler wäre
  s=sqrt(10 Jahre^2/50)=1.41Jahre
  Die Differenz ist mit 80-40=40 Jahre grösser als 28 Standardfehler.

- Aus der Normalverteilung können wir schliessen, dass dies mit >99.9%iger Sicherheit der falsche Bus ist!



Testtheorie
Hypothesen aufstellen

Wie im Gericht: Unschuldig bis die Schuld bewiesen ist

1. Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_A oder H_1

> Beim Aufstellen der Nullhypothese geht man davon aus, „Alles bleibt beim alten, nichts hat sich geändert", „Vermutung, die ohne überwältigenden Gegenbeweis weiterhin gelten würde“

> Was ich zeigen oder beweisen will, gehört normalerweise in die Alternativhypothese

> Wir nehmen H_A als wahr an, wenn wir Beweise gegen H_0 haben

> **Alternativhypothesen** können **einseitig (grösser/kleiner)** oder **zweiseitig** sein **(ungleich)**

> Das **Gleichheitszeichen** gehört immer in die **Nullhypothese** (kann auch grösser-gleich oder kleiner-gleich sein).

Testtheorie
Hypothesen aufstellen

b
UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Wie im Gericht: Die Beweise

2. Festlegung des Schwellenwertes / kritisches Signifikanzniveaus,
   z.B. α = 0.05 (d.h. wir verlangen mindestens 95%ige Wahrscheinlichkeit, die richtige Entscheidung zu treffen)

3. Ziehung der Stichprobe

4. Zusammenfassung der Daten in einem Wert einer Teststatistik, z.B. t-Wert des Student t-Test, und überprüfen, ob dieser Wert ein kritisches Niveau überschreitet.

Testtheorie
Hypothesen aufstellen

b
UNIVERSITÄT
BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Wie im Gericht: Beratungen und Überlegungen

ALTERNATIV: Überschreitungswahrscheinlichkeit (p für probability) berechnen.

- **PROBLEM: p ist von Hand oft komplizierter zu berechnen**
- p ist zwischen 0 und 1 und gibt die Stärke der Beweise gegen H_0 an
- Angenommen H_0 ist wahr, wie wahrscheinlich ist es zufällig diesen oder einen grösseren Testwert zu erhalten?
- Der p-Wert ist die numerische Antwort
- Je kleiner p, desto stärker die Beweise gegen H_0 (oft 0.05 als Grenze)
- p-Wert sagt **NICHT**: Wie wahrscheinlich ist es, dass die H_0 wahr ist
- p-Wert sagt: Wie wahrscheinlich die Daten sind, wenn H_0 wahr ist

Testtheorie
Hypothesen aufstellen

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

Wie im Gericht: Das Urteil

5. Liegt das Ergebnis der Stichprobe innerhalb des Annahmebereichs, wird H_0 angenommen, anderenfalls abgelehnt, d.h.

wichtig!

Option 1:

- Teststatistik, z.B. t-Wert < kritischer Wert in Tabelle
- grosser p-Wert ($p > \alpha$, z.B. mit α=0.05 für 95%ige Sicherheit)
- wir schliessen daraus -> Daten sind konsistent mit H_0

Option 2:

- Teststatistik, z.B. t-Wert > kritischer Wert in Tabelle
- kleiner p-Wert ($p < \alpha$)
- wir schliessen daraus -> es gibt ausreichend Beweise, um H_0 abzulehnen und H_A anzunehmen (statistisch signifikant).

Testtheorie

Testentscheidung In der GG ist …	H_0 nicht ablehnen	H_0 ablehnen
H_0 wahr	👍	Fehler 1. Art 👎
H_0 falsch	Fehler 2. Art 👎	👍

- Es gibt keine Testverfahren, die gleichzeitig beide Fehlerarten minimieren.
- Das Signifikanzniveau α legt den Fehler 1. Art fest, den wir in Kauf zu nehmen gewillt sind.
- Der Fehler 2. Art (β) ist meistens mit nicht so gravierenden Folgen verbunden

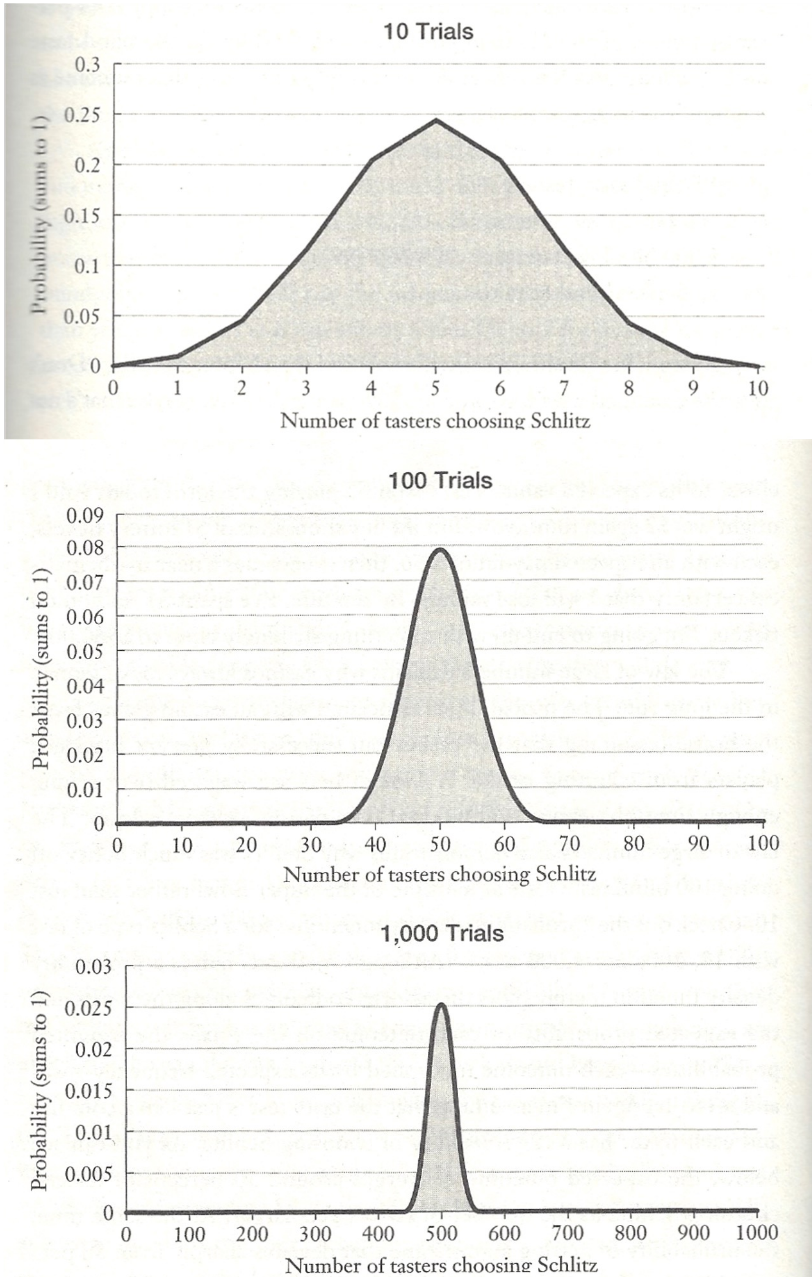
Testtheorie

Testentscheidung In der GG ist …	H_0 nicht ablehnen	H_0 ablehnen
H_0 wahr		Fehler 1. Art
H_0 falsch	Fehler 2. Art	

- Beispiel SPAM Filter: H_0 = Mail ist kein SPAM.
- Der Filter schaut, ob es Gründe gibt H_0 zu widerlegen (Auftreten von speziellen Wörtern, etc.)
- Ein Fehler 1. Art wäre ein Mail in den SPAM Ordner zu verschieben, die gar kein SPAM ist.
- Der Fehler 2. Art wäre ein Mail durch den Filter zu lassen, die SPAM ist.

Mittelwerte testen

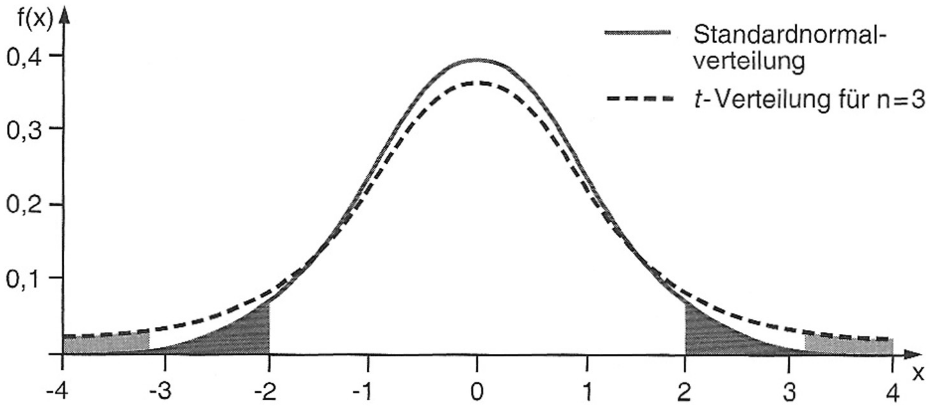
- μ und σ aus X_{Mittel} und s_x schätzen
- dies führt bei kleinen Stichproben zu zusätzlichen Unsicherheiten (grosser Standardfehler bei kleinem Stichprobenumfang)
- es ist unwahrscheinlich, dass die Stichprobe exakt das Mittel der Grundgesamtheit hat
- dadurch wird Verteilung breiter und flacher (t-Verteilung)



Tests für das arithmetisches Mittel

William Gosset alias Student, 1876-1937

> Die standardisierte Schätzfunktion des Stichproben-Mittelwerts ist nicht normalverteilt, sondern t-verteilt, wenn die zur Standardisierung des Mittelwerts benötigte Varianz des Merkmals unbekannt ist und mit der Stichprobenvarianz geschätzt werden muss.



- Symetrisch mit Mittelwert 0
- Stichprobenmittelwerte folgen t-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden
- bei FG > 30 ist t-Verteilung fast identisch mit Normalverteilung

T-Test für den Mittelwert

(Vergleich von Stichprobemittel und mit fixem Wert, z.B. bekanntem Mittel der GG oder Grenzwert)

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE CLIMATE CHANGE RESEARCH

Hypothesen:

H_0: Erwartete Sept.-Nov. Mitteltemperatur beträgt 9ºC ($x = \mu_0$)

H_A: Die Temperatur weicht signifikant von 9ºC ab ($x \neq \mu_0$)

Teststatistik: $T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$ x=8.75ºC, s_x=0.10ºC, n=111, T=-2.40

ähnlich der Standardisierung / Z-Transformation / Standardnormalverteilung

mit dem Standardfehler $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

Der Standardfehler zeigt die theoretische Streubreite des Stichprobenmittelwerts, im Gegensatz zur Standardabweichung, die die reale Streubreite aller Werte der Stichprobe beschreibt. Der Standardfehler wird um so kleiner, je größer der Stichprobenumfang.

ACHTUNG: s steht für die **Standardabweichung**,
s^2 für die **Varianz** und
s_x für den **Standardfehler.**

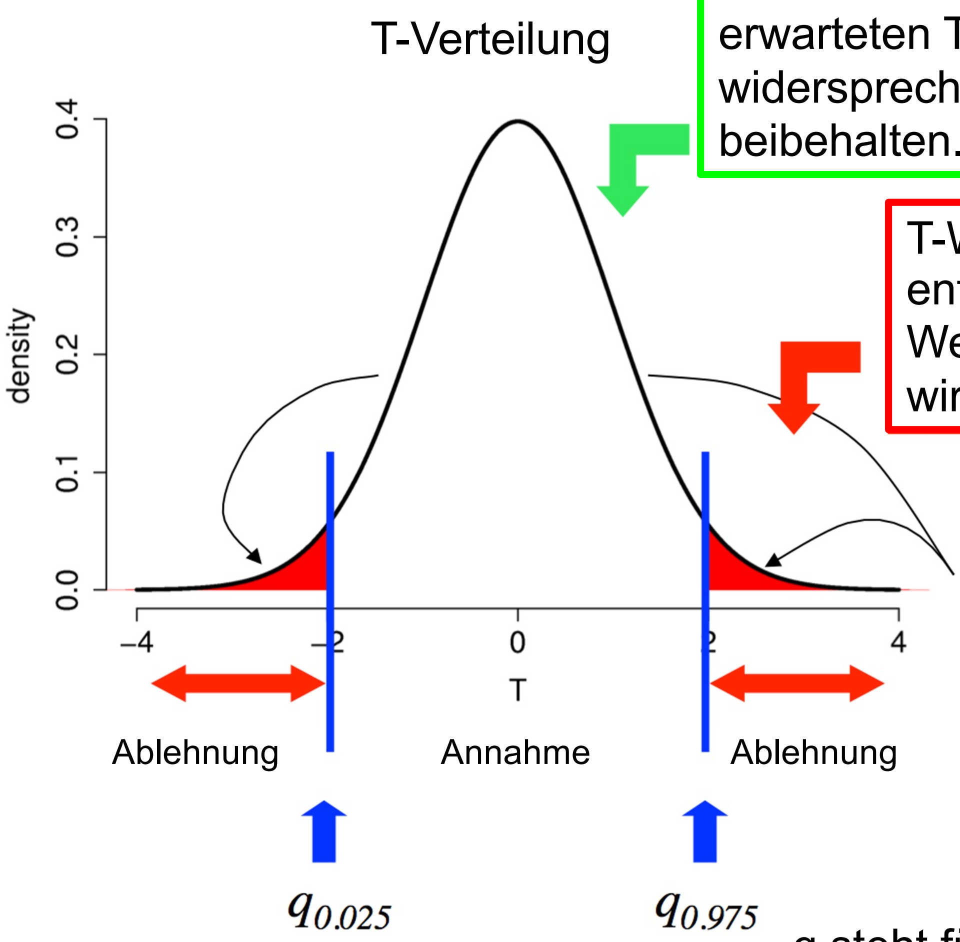
T-Test für den Mittelwert

UNIVERSITÄT BERN

OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

T-Wert der Daten ist nahe dem erwarteten T-Wert. Die Daten widersprechen H_0 NICHT → H_0 wird beibehalten.

T-Wert ist weit vom erwarteten T-Wert entfernt. Es ist unwahrscheinlich diesen T-Wert zu erhalten, wenn H_0 wahr ist → H_0 wird abgelehnt.



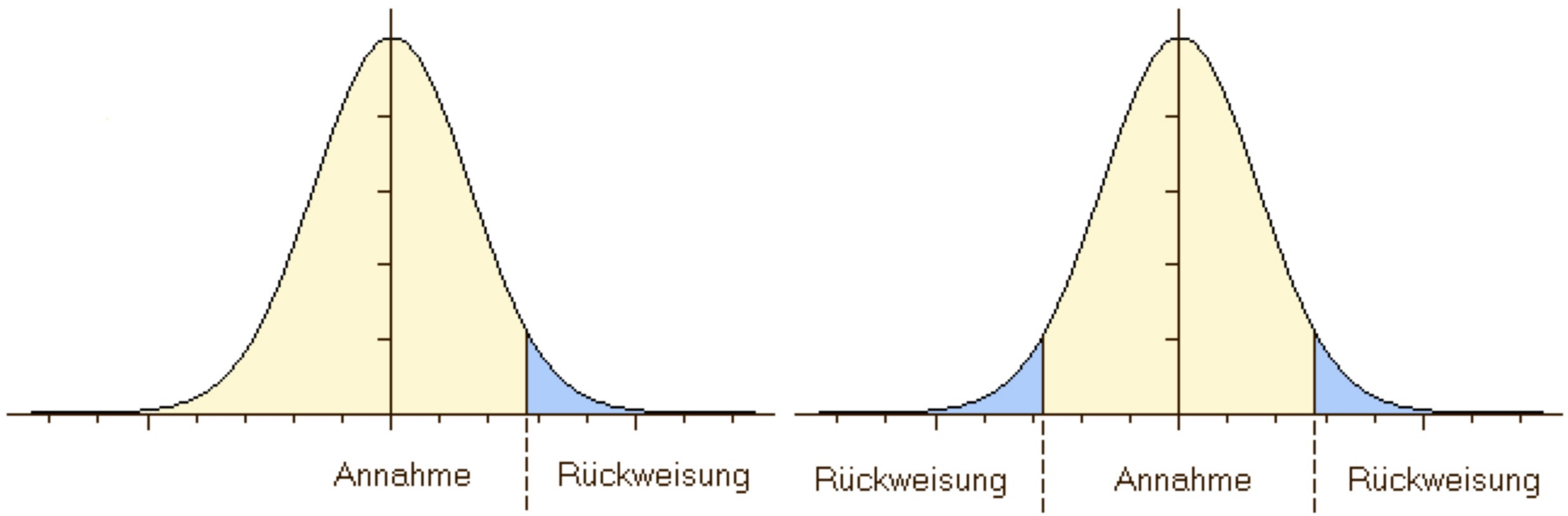
Signifikanzlevel α: die Fläche der Dichtefunktion der T-Verteilung, die zur Ablehnung von H_0 führt (oft α=0.05).

q steht für Quantil

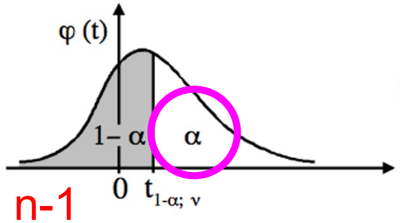
Ein- vs. zweiseitiger Test

UNIVERSITÄT BERN
OESCHGER CENTRE
CLIMATE CHANGE RESEARCH

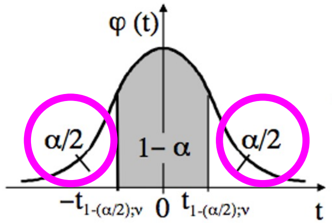
- Bei Parametertests kann H_0 als ein- oder zweiseitiger Test formuliert werden:
- Zweiseitiger Test: Wir untersuchen Abweichungen vom vermuteten Parameterwert in beide Richtungen (H_0: $\mu = 0$; H_A: $\mu \neq 0$).
- Einseitiger Test: Wir untersuchen Abweichungen vom vermuteten Parameterwert nur in eine Richtung (H_0: $\mu \geq 0$; H_A: $\mu < 0$ oder H_0: $\mu \leq 0$; H_A: $\mu > 0$)



t-Verteilungs Tabelle



$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$



$t_{1-(\alpha/2)} = -t_{\alpha/2}$

n-1

ν	Statistische Sicherheit 1-α					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,592	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	1,303	1,684	2,021	2,443	2,704	3,307
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

FG

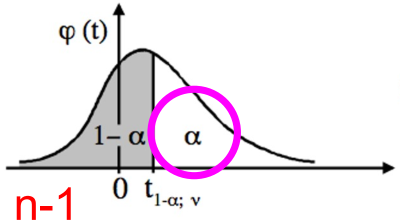
Statistische Sicherheit 1-α							ν
0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999	
3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6	1
1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2
1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92	3
1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4
1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5
1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	6
1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7
1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	8
1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9
1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10
1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11
1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	12
1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13
1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14
1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15
1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	16
1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	17
1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,992	18
1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19
1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20
1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,327	3,819	21
1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	22
1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23
1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	24
1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25
1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26
1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27
1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28
1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29
1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30
1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40
1,299	1676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	50
1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60
1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	80
1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	100
1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	200
1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500
1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	∞

n=111

α=0.05

Zweiseitiger Test

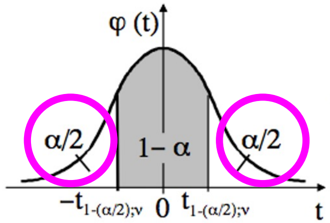
t-Verteilungs Tabelle



$t_{1-\alpha} = -t_\alpha$

n-1

ν	Statistische Sicherheit 1-α					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,592	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	1,303	1,684	2,021	2,443	2,704	3,307
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090



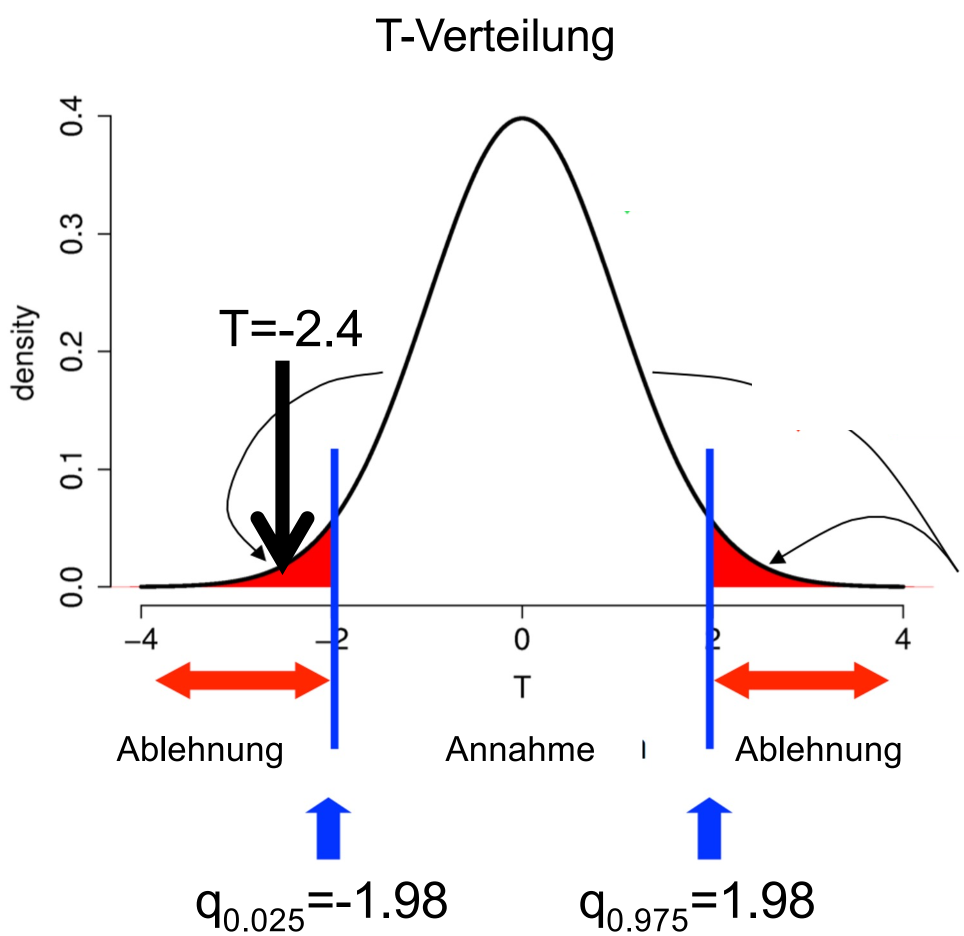
$t_{1-(\alpha/2)} = -t_{\alpha/2}$

FG

Statistische Sicherheit 1-α							ν
0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999	
3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6	1
1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2
1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92	3
1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4
1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5
1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	6
1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7
1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	8
1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9
1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10
1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11
1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	12
1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13
1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14
1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15
1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	16
1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	17
1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,992	18
1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19
1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20
1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,327	3,819	21
1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	22
1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23
1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	24
1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25
1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26
1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27
1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28
1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29
1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30
1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40
1,299	1676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	50
1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60
1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	80
1,290	1,660	$\boxed{1,984}$	2,364	2,626	3,174	3,390	100
1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	200
1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500
1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	∞

Kritische Grenzwerte:
-1.98 und +1.98

T-Test für den Mittelwert



Test

> Wert von T (= –2.40) ist im Ablehnungsbereich

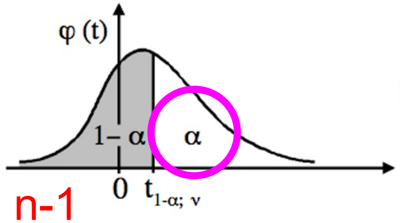
> Stichprobenmittelwert unterscheidet sich von Erwartungswert (9ºC) auf dem 5% Signifikanzlevel.

> Test p-Wert von 0.018

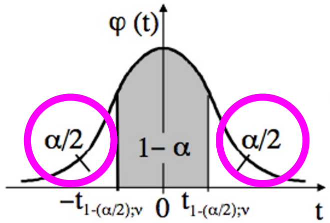
p-Wert

> Das kleinste α für das H_0 abgelehnt würde

t-Verteilungs Tabelle



$t_{1-\alpha} = -t_\alpha$



$t_{1-(\alpha/2)} = -t_{\alpha/2}$

n-1

ν	Statistische Sicherheit 1-α					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,592	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	1,303	1,684	2,021	2,443	2,704	3,307
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
∞	1,282	1,645	$\boxed{1,960}$	2,326	2,576	3,090

oder entsprechend -1.96

FG

Statistische Sicherheit 1-α							ν
0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999	
3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6	1
1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60	2
1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92	3
1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	4
1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	5
1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	6
1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7
1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	8
1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	9
1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	10
1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	11
1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	12
1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	13
1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	14
1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	15
1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	16
1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	17
1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,992	18
1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	19
1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	20
1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,327	3,819	21
1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	22
1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768	23
1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	24
1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	25
1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	26
1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	27
1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	28
1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	29
1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	30
1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	40
1,299	1676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	50
1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	60
1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	80
1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	100
1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	200
1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	500
1,282	1,645	$\boxed{1,960}$	2,326	2,576	3,090	3,291	∞

nur der positive Wert angegeben,
beim 2-seitgen Test ist der negative
kritische Grenzwert entsprechend -1.96