# Lógica de Predicados

<parte 4 – formalização>

LÓGICA PARA COMPUTAÇÃO

PROF. JONATHAN GIL MÜLLER







Para provar a validade de uma argumento verbal, procedemos de mesma forma como estudado na lógica proposicional:

■ 1º PASSO: Escrevemos o argumento em linguagem simbólica, utilizando a sintaxe e a semântica da linguagem formal utilizada (lógica proposicional ou de predicados);





Para provar a validade de uma argumento verbal, procedemos de mesma forma como estudado na lógica proposicional:

- 2º PASSO: Mostramos que a conclusão pode ser deduzida a partir das premissas por meio de regras de dedução formal:
  - → Se o argumento envolver *fbf*s proposicionais as alternativas são:
    - ✓ tabela-verdade;
    - ✓ método da refutação;
    - ✓ regras de inferência para a lógica proposicional;
  - → Se o argumento envolver *fbf*s predicadas podemos usar:
    - ✓ regras de inferência para a lógica de predicados





**OBSERVAÇÃO**: O "trânsito" entre os dois passos anteriores exige a habilidade de reconhecer a tradução entre as linguagens utilizadas, natural ↔ formal. Por isso, seguiremos o conteúdo com o estudo da formalização de sentenças predicadas!

#### FORMALIZAÇÃO DE SENTENÇAS

Traduzir declarações em linguagem natural para fórmulas da lógica de predicados

p(x) = x é aluno de BCC

q(x) = x 'e inteligente

fórmula	leitura	exemplo
(∀x)(p(x))	tudo é P	Todos são alunos de BCC
	todo x tem propriedade p	
$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$	todo P é Q	Todo aluno de BCC é inteligente.
	qualquer que seja x, se x é P, x é Q	
	cada P é Q	Qualquer pessoa, se é aluno de BCC, é
		inteligente.
$(\forall x)(p(x) \rightarrow \neg q(x))$	todo P não é Q	Nenhum aluno de BCC é inteligente.
	qualquer que seja x, se x é P, x não é Q	
	nenhum P é Q	Qualquer pessoa, se é aluno de BCC, não é
		inteligente.





#### FORMALIZAÇÃO DE SENTENÇAS

Traduzir declarações em linguagem natural para fórmulas da lógica de predicados p(x) = x é aluno de BCC

q(x) = x 'e inteligente

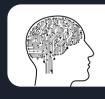
fórmula	leitura	exemplo
(∃x)(p(x))	alguém é P	Alguém é aluno de BCC.
	para pelo menos um x, x é P	
$(\exists x)(p(x) \land q(x))$	algum P é Q	Algum aluno de BCC é inteligente.
	para pelo menos um x, x é P e x é Q	Existe pelo menos um aluno de BCC
	existe um x, tal que x é P e x é Q	inteligente.
		Existe um aluno, tal que é de BCC e é
		inteligente.
$(\exists x)(p(x) \land \neg q(x))$	algum P não é Q	Algum aluno de BCC não é inteligente.
	para pelo menos um x, x é P e x não é Q	
	existe um x, tal que x é P e x não é Q	
$\neg((\forall x)(p(x)))$	é falso que tudo é P	É falso que todos são alunos de BCC.
$(\exists x)(\neg p(x))$	alguém não é P	Alguém não é aluno de BCC.
$\neg((\exists x)(p(x)))$	nada é P	Não existe aluno de BCC.
$(\forall x)(\neg p(x))$	tudo não é P	Ninguém é aluno de BCC.
	ninguém é P	Todos não são alunos de BCC.
	qualquer que seja x, x não é P	





#### Mais alguns exemplos...

sentença	fórmula
Todo aluno de BCC é inteligente. José é aluno de BCC.	inteligente(x) = x é inteligente
Portanto, José é inteligente.	aluno(x) = x é aluno de BCC
	((∀x)(aluno(x) → inteligente(x)) ∧ aluno(José)) → inteligente(José)
Todos os cachorros perseguem todos os coelhos.	cachorro(x) = x é cachorro
	coelho(x) = x é coelho
Qualquer animal, se for cachorro então, para qualquer	persegue(x, y) = x persegue y
outro animal, se for coelho, então cachorro persegue	
coelho.	$(\forall x)(cachorro(x) \rightarrow ((\forall y)(coelho(y) \rightarrow persegue(x, y))))$
Alguns cachorros perseguem todos os coelhos.	$(\exists x)(cachorro(x) \land ((\forall y)(coelho(y) \rightarrow persegue(x, y))))$
Apenas cachorros perseguem coelhos.	$(\forall x)((\forall y)((coelho(y) \land persegue(x, y)) \rightarrow cachorro(x)))$
Dados dois animais, se um for coelho e o outro persegui-	
lo, então o outro é um cachorro.	





Vamos aplicar tudo isso em um exemplo:

>> Mostre que o seguinte argumento é valido:

Todo os carros são novos. Alguns carros têm ar condicionado. Portanto, alguns carros são novos e têm ar condicionado.





Todo os carros são novos. Alguns carros têm ar condicionado. Portanto, alguns carros são novos e têm ar condicionado.

1º POSSO: Formolizações

Simbeles predicades:

N(x): x i mous

A(x): x tem orcondicion.

C(x): X 1 um Cons

Fernolizaçõe des premisses:

Pi: (Ax)(Cx)- N(x)) ou (Ax)(C(x) 1 N(x))

 $P_3: (\exists x) (C(x) \rightarrow A(x)) ou (\exists x) (C(x) \land A(x))$ 

Formolizaçõe de lanclusõe:

 $(((x) \land (x)) \land (x))$  (xE) : Q  $((x) \land (x) \land A(x))$ 





```
2º 10550: Nouver o ralidad (dedução formal)
                                                               (XE) (C(X) (MX) / ALA)
    I. (\forall x) (C(x) \longrightarrow N(x))
                                            inemuzsa
    2. (\exists x)(C(x) \rightarrow A(x))
       C(c) - A(c) especifico
                                            \mathcal{E}\mathcal{I}(2)
        C(O) -> N(C)
                                           \epsilon \forall (1)
   5.
       Cc
                                            Ilip
   6. AC)
                                           MP(3,5)
          ! N(c)
   7.
                                            MP (4.5)
            NCC) AACC)
                                            IA (6,7)
  9. CCC) -> (NCC) 1 A(C))
                                            I -> (5,8)
  10. (∃x) (Ccx) → (Ncx) A(x))
                                            (P) EI
```





Todo os carros são novos. Alguns carros têm ar condicionado. Portanto, alguns carros são novos e têm ar condicionado.

Duho moneiro:

PREDICADOS

$$N(x) = X i mous$$

$$P_1: (\forall x)(C(x) \land N(x))$$

$$P_{\alpha}:(\exists_{x})(\subset(x)\wedge A(x))$$

$$Q:(\exists x)(C(x) \wedge N(x) \wedge A(x))$$

Argumento:  $((\forall x)(C(x) \land N(x)) \land (\exists x)(C(x) \land A(x)) \rightarrow ((\exists x)(C(x) \land N(x) \land A(x)))$ 





#### Terminamos o estudo da lógica formal. O que conseguimos?

- O objetivo da lógica formal, muitas vezes chamada de lógica simbólica, é tornar os argumentos o mais sem sentido (único sentido) possível!
- A notação simbólica para a lógica proposicional e de predicados nos permite simbolizar argumentos. Um argumento colocado em notação simbólica remove qualquer possibilidade de nos deixarmos levar por nossas opiniões ou por nosso conhecimento externo sobre o tópico de um argumento, deixandoos concentrar apenas em sua estrutura para determinar sua validade lógica.





### Terminamos o estudo da lógica formal. O que conseguimos?

- Além disso, as regras de inferência nos permitem produzir a demonstração da validade de um argumento por manipulação simbólica. Não há necessidade de nenhum conhecimento externo, apenas uma concordância cuidadosa com as formas e restrições das regras.
- A prática torna esse processo cada vez mais fácil porque com o tempo você se familiariza com as formas que um argumento pode tomar e reconhece quais as regras que deve tentar aplicar. Por isso, estude bastante!





# LISTA DE EXERCÍCIOS 08...

Vamos estudar!!!







#### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 1

#### 1. Considere o seguinte esquema:

```
ciclista(x) \equiv x \in ciclista
```

$$veloz(x) \equiv x \in veloz$$

c₁ ≡ José

 $c_2 \equiv Maria$ 

Relacione a coluna da esquerda (sentenças em linguagem natural) com a coluna da direita (fórmulas da lógica de predicados):

- ( 🆊) Todo o ciclista é veloz.
- ( 🌠 ) Todos são ciclistas e velozes.
- ( 🍞 ) Existe ciclista que não é veloz.
- ( 4 ) Alguns são ciclistas e alguns não são.
- ( 🏂 ) Todos são ciclistas.
- ( 🏂 ) Alguém é veloz.
- ( → ) Somente ciclistas são velozes.
- (8) Nem todo o ciclista é veloz.
- (9) Maria é veloz e José é ciclista.

- (4)  $(\exists x)(ciclista(x)) \land (\exists x)(\neg ciclista(x))$
- $( ) ( \forall x)(veloz(x) \rightarrow ciclista(x))$
- ( $\bigcirc$ ) veloz(c<sub>2</sub>)  $\land$  ciclista(c<sub>1</sub>)
- (5)  $(\forall x)$ (ciclista(x))  $\checkmark$
- $\neq$  2)  $(\forall x)(ciclista(x) \land veloz(x))$
- ( **6** ) (∃x)(veloz(x))
- =(3)  $(\exists x)(ciclista(x) \land \neg veloz(x))$
- $\equiv (\bot) (\forall x)(\text{ciclista}(x) \rightarrow \text{veloz}(x))$





- 2. Dada a seguinte fórmula (∀x)((∃y)(ama(x, y))). Qual das seguintes sentenças em linguagem natural ela representa, considerando que ama(x, y) significa x ama y?
- (1) Alguém ama a todos.
- (2) Todos amam alguém.
- ( 3 ) Ninguém ama a todos.
- (4) Há alguém que todos amam.
- (5) Nenhuma das anteriores.





- 3. Dada a seguinte sentença "Algum homem inteligente ama Maria". Qual das seguintes fórmulas pode representá-la, considerando que a(x, y) significa x ama y, i(x) significa x é inteligente, h(x) significa x é homem?
- $(1)(\exists x)((i(x) \land h(x)) \rightarrow a(Maria, x))$
- $(2)(\exists x)((h(x) \land i(x)) \land a(Maria, x))$
- $(3)(\exists x)((h(x) \land i(x)) \land a(x, Maria))$
- (4) Nenhuma das anteriores.

4. Formalize as sentenças abaixo, utilizando o seguinte esquema:

```
médico(x) = x é médico(a)
enfermeiro(x) = x é enfermeiro(a)
ama(x, y) = x ama y
```

- a) Maria é médica. m (menio)
- b) Maria e José são médicos. (moris) 1 m (par)
- d) Maria é médica ou enfermeira <u>ou ambos.</u> (m(moris) ν e (moris)
- e) Se Maria é médica, então ela não é enfermeira. m(morio) -> 1 e(morio)
- f) José ama Maria. a ( Jose, morio )
- g) José ama a si próprio. ົນ (ງ໑໙, ງ໑໙ )
- h) José ama qualquer pessoa. (ᠰ) (வட்டிய், х))
- i) Qualquer pessoa ama José. (العدل (العدل))
- j) Qualquer pessoa ama a si mesma.  $(\forall x)(\alpha(x,x))$
- k) Alguma pessoa ama a si mesma.  $(\exists x)(\alpha(x,x))$



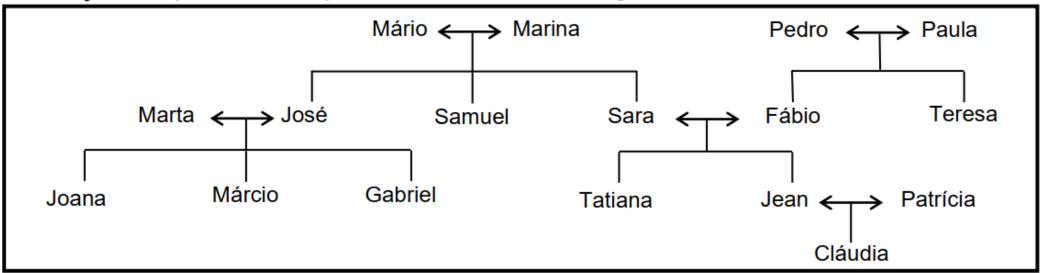


- I) Existe alguém que Maria não ama.  $(\exists x)(\neg a (mois, x))$
- m) Existe alguém que tanto José quanto Maria amam.  $(\exists_x)(\Box(\exists_x), X) \land \Box(movin, X))$
- n) <u>Existe alguém</u> que José ama e <u>alguém</u> que Maria ama. (϶ϫ)(ω(μω,κ)) Λ (϶γ)(α (μουο, γ)
- o) Logo mnudo ama todo mnudo. (Ax) (AA) (a (x/A))
- p) Alguém ama alguém.  $(\exists_x)(\exists_y)(\alpha(x_{iy}))$
- q) Existe alguém que ama todo mundo. (Ⅎχ)(ϥϗ)(α (χιχ))
- r) Todo mundo é amado por alguém. (∃x)(∀y)(∞(x,y))
- s) Se José ama a si próprio, então ele ama alguma pessoa. α(μον, μον) → (∃x)(α(μον, x))
- t) Se José não ama a si próprio, então ele ama ninguém. ⊸α (ຜູ້ເພື່ອເຂົ້າ) → ¬((∃κ)(α(ω,κ)))





**5.** Considere as relações de parentesco representadas através da seguinte árvore:



5.1. Formalize as sentenças abaixo, utilizando o seguinte esquema:

homem(x)  $\equiv$  x é do sexo masculino. mulher(x)  $\equiv$  x é do sexo feminino.

- a) Mário é homem.
- b) Pedro é homem.
- c) José é homem.
- d) Samuel é homem.
- e) Fábio é homem.
- f) Márcio é homem.

- g) Gabriel é homem.
- h) Jean é homem.
- i) Marina é mulher.
- j) Paula é mulher.
- k) Marta é mulher.
- I) Sara é mulher.

- m) Teresa é mulher.
- n) Joana é mulher.
- o) Tatiana é mulher.
- p) Patrícia é mulher.
- q) Cláudia é mulher.





### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 5

#### **GABARITO**

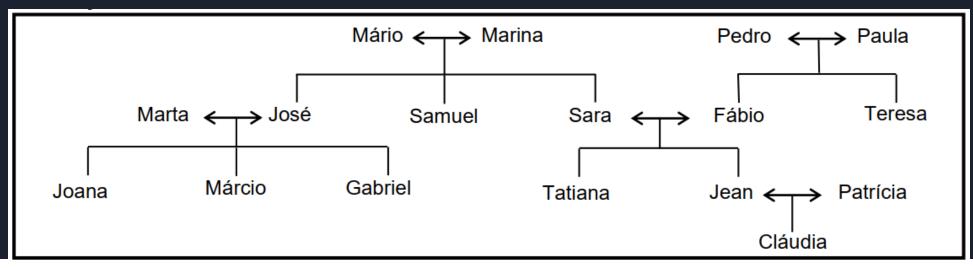
a) Mário é homem.	homem(Mário)
b) Pedro é homem.	homem(Pedro)
c) José é homem.	homem(José)
d) Samuel é homem.	homem(Samuel)
e) Fábio é homem.	homem(Fábio)
f) Márcio é homem.	homem(Márcio)

g) Gabriel é homem.	homem(Gabriel)
h) Jean é homem.	homem(Jean)
i) Marina é mulher.	mulher(Marina)
j) Paula é mulher.	mulher(Paula)
k) Marta é mulher.	mulher(Marta)
l) Sara é mulher.	mulher(Sara)

m)	Teresa é mulher.	mulher(Teresa)
n)	Joana é mulher.	mulher(Joana)
o)	Tatiana é mulher.	mulher(Tatiana)
p)	Patrícia é mulher.	mulher(Patrícia)
q)	Cláudia é mulher.	mulher(Cláudia)







5.2. Considere que I[genitor(x, y)] = **V**, se (x é pai de y) ou (x é mãe de y). Determine para quais valores de x e y, o predicado *genitor(x, y)* é verdadeiro.

#### **GABARITO**

genitor(José, Joana) genitor(José, Márcio) genitor(José, Gabriel) genitor(Marta, Joana) genitor(Marta, Márcio) genitor(Marta, Gabriel) genitor(Pedro, Fábio) genitor(Pedro, Teresa) genitor(Paula, Fábio) genitor(Paula, Teresa)

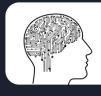
genitor(Fábio, Tatiana) genitor(Fábio, Jean) genitor(Sara, Tatiana) genitor(Sara, Jean) genitor(Jean, Cláudia) genitor(Patrícia, Cláudia)





- 5.3. Utilizando os predicados básicos definidos anteriormente (homem(x), mulher(x), genitor(x, y)), especifique fórmulas da lógica de predicados para:
- a) pai $(x, y) \equiv x \in pai de y$
- b)  $pai(x) \equiv x \in pai$
- c)  $m\tilde{a}e(x, y) \equiv x \text{ \'e m\'ae de y}$
- d)  $m\tilde{a}e(x) \equiv x \in m\tilde{a}e$
- e) filho(x, y)  $\equiv$  x é filho de y
- f) filho(x) = x é filho
- g) filha(x, y)  $\equiv$  x é filha de y
- h) filha(x) = x é filha

- i) casal(x, y) ≡ entre x e y existe a relação de casal com filhos
- j) irmão $(x, y) \equiv x$  é irmão de y
- k) irm $\tilde{a}(x, y) \equiv x \text{ \'e irm\'a de } y$
- I)  $tio(x, y) \equiv x \in tio de y$
- m)  $tia(x, y) \equiv x \in tia de y$
- n) sobrinho(x, y)  $\equiv$  x é sobrinho de y
- o) sobrinha(x, y)  $\equiv$  x é sobrinha de y











### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 5

#### **GABARITO**

c)	$m\tilde{a}e(x, y) \equiv x \text{ \'e m\~ae de y}$	$(\exists x)((\exists y)((mulher(x) \land genitor(x, y)) \rightarrow m\tilde{a}e(x, y)))$
d)	mãe(x) ≡ x é mãe	$(\exists x)((\exists y)((mulher(x) \land genitor(x,y)) \to m\tilde{a}e(x))) \ \ OU \ \ (\exists x)((\exists y)(m\tilde{a}e(x,y) \to m\tilde{a}e(x)))$
g)	filha(x, y) ≡ x é filha de y	$(\exists x)((\exists y)((mulher(x) \land genitor(y, x)) \rightarrow filha(x, y)))$
h)	filha(x) ≡ x é filha	$(\exists x)((\exists y)((mulher(x) \land genitor(y, x)) \to filha(x)))  OU  (\exists x)((\exists y)(filha(x, y) \to filha(x)))$
j)	irmão(x, y) ≡ x é irmão de y	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((((pai(z, y) \land pai(z, x)) \land homem(x)) \land (x \neq y)) \rightarrow irmão(x, y))))$
k)	irmã(x, y) ≡ x é irmã de y	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((((genitor(z, y) \land genitor(z, x)) \land mulher(x)) \land (x \neq y)) \rightarrow irm \tilde{a}(x, y))))$
I)	$tio(x, y) \equiv x \text{ \'e tio de } y$	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((genitor(z, y) \land irmão(x, z)) \rightarrow tio(x, y))))$
	OU	
		$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((genitor(z, y) \land (irmão(x, z) \lor \underline{cunhado}(x, z))) \rightarrow tio(x, y))))$
		$(\exists x)((\exists y)((\exists z)(((casal(x, z) \land irmã(z, y)) \rightarrow \underline{cunhado}(x, y))))$
m)	tia(x, y) ≡ x é tia de y	
n)	sobrinho(x, y) $\equiv$ x é sobrinho de y:	$(\exists x)((\exists y)(((tio(y, x) \lor tia(y, x)) \land homem(x)) \rightarrow sobrinho(x, y)))$
o)	sobrinha(x, y) $\equiv$ x é sobrinha de y:	$(\exists x)((\exists y)(((tio(y, x) \lor tia(y, x)) \land mulher(x)) \rightarrow sobrinha(x, y)))$





#### Outras fórmulas da lógica de predicados para parentesco

outras relações de parentesco:	
avô(x, y) ≡ x é avô de y	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((pai(x, z) \land genitor(z, y)) \rightarrow av\hat{o}(x, y))))$
avó(x, y) ≡ x é avó de y	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((m\tilde{a}e(x, z) \land genitor(z, y)) \rightarrow avó(x, y))))$
neto(x, y) ≡ x é neto de y	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((genitor(y, z) \land filho(x, z)) \rightarrow neto(x, y))))$
OU	
	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((av\hat{o}(y, x) \lor av\acute{o}(y, x)) \land homem(x)) \rightarrow neto(x, y))))$
neta(x, y) ≡ x é neta de y	$(\exists x)((\exists y)((\exists z)((genitor(y, z) \land filha(x, z)) \rightarrow neta(x, y))))$



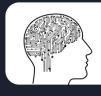


#### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 5

- 5.4. Utilizando os predicados básicos definidos anteriormente (homem(x), mulher(x), genitor(x, y)), especifique fórmulas da lógica de predicados para:
  - a) antepassado(x, y)  $\equiv$  x é antepassado de y, se x for genitor de y ou x for genitor de alguém que é antepassado de y
  - b) descendente(x,y)  $\equiv$  x é descendente de y

#### **GABARITO**

- 5.4. Utilizando os predicados básicos definidos anteriormente (homem(x), mulher(x), genitor(x, y)), especifique fórmulas da lógica de predicados para:
  - a) antepassado(x, y)  $\equiv$  x é antepassado de y, se x for genitor de y ou x for genitor de alguém que é antepassado de y
    - $(\exists x)((\exists y)((\exists z) ((genitor(x, y) \lor (genitor(x, z) \land antepassado(z, y))) \rightarrow antepassado(x, y))))$
  - b) descendente(x,y)  $\equiv$  x é descendente de y  $(\exists x)((\exists y)(antepassado(y, x) \rightarrow descendente(x, y)))$   $(\exists x)((\exists y)((\exists z) ((genitor(y, x) \lor (genitor(y, z) \land descendente(x, z))) \rightarrow descendente(x, y))))$





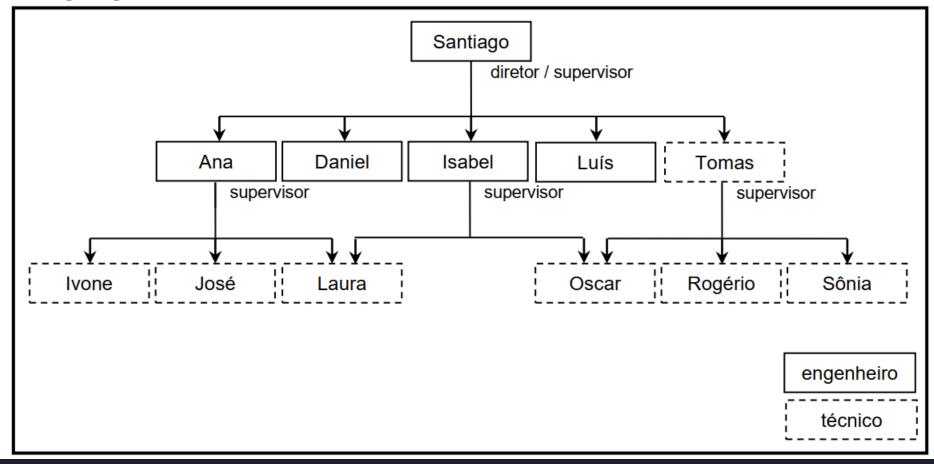






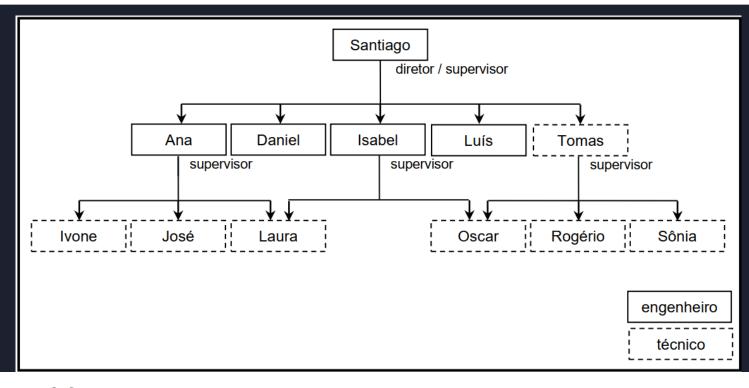
#### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 6

**6.** Considere o organograma abaixo, com chefes e subordinados:









#### 6.1. Considere que:

I[cargo(x, y)] = V, se (y ocupa o cargo x)

I[supervisor(x, y)] =  $\mathbf{V}$ , se (x é supervisor direto de y)

I[diretor(x)] = V, se (x é diretor)

Determine para quais valores os predicados são verdadeiros.





#### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 6

#### **GABARITO**

cargo(engenheiro, Ana)
cargo(engenheiro, Daniel)
cargo(engenheiro, Isabel)
cargo(engenheiro, Luís)
cargo(engenheiro, Santiago)

cargo(técnico, Ivone) cargo(técnico, José)

cargo(técnico, Laura)
cargo(técnico, Oscar)

cargo(técnico, Rogério) cargo(técnico, Sônia)

cargo(técnico, Tomas)

supervisor(Ana, Ivone) supervisor(Ana, José) supervisor(Ana, Laura)

supervisor(Isabel, Laura) supervisor(Isabel, Oscar)

supervisor(Tomas, Oscar) supervisor(Tomas, Rogério) supervisor(Tomas, Sônia) supervisor(Santiago, Ana) supervisor(Santiago, Daniel) supervisor(Santiago, Isabel) supervisor(Santiago, Luís) supervisor(Santiago, Tomas)

diretor(Santiago)





#### LISTA DE EXERCÍCIOS 08: questão 6

- 6.2. Utilizando os predicados básicos definidos anteriormente (cargo(x, y), supervisor(x, y), diretor(x)), especifique fórmulas da lógica de predicados para:
  - a) chefiar(x, y) ≡ x pode ser chefe de y, se (1° caso): x for técnico, x for supervisor e y for técnico; (2° caso): x for engenheiro e y for técnico, (3° caso) x for engenheiro e y for engenheiro
  - b) dirigir(x)  $\equiv$  x pode ser diretor, se x for engenheiro e x for supervisor
  - c) chefiado\_por(x, y)  $\equiv$  x é chefiado por y, se y é supervisor (direto ou indireto) de x

#### **GABARITO**

- a) chefiar(x, y) ≡ x pode ser chefe de y, se (1° caso): x for técnico, x for supervisor e y for técnico; (2° caso): x for engenheiro e y for técnico, (3° caso) x for engenheiro e y for engenheiro
  - $(\exists x)((\exists y)((\exists z))$
  - $((\text{cargo}(\text{t\'ecnico},\,x) \land (\text{supervisor}(x,\,z) \land \text{cargo}(\text{t\'ecnico},\,y) \land (x \neq y)) \lor$
  - (cargo(engenheiro, x) ∧ cargo(técnico, y)) ∨
  - $(\text{cargo}(\text{engenheiro},\,x) \land \text{cargo}(\text{engenheiro},\,y) \land (x \neq y))) \rightarrow \text{chefiar}(x,\,y))))$
- b) dirigir(x)  $\equiv$  x pode ser diretor, se x for engenheiro e x for supervisor  $(\exists x)((\exists y)((cargo(engenheiro, x) \land (supervisor(x, y)) \rightarrow dirigir(x)))$
- c) chefiado\_por(x, y)  $\equiv$  x é chefiado por y, se y é supervisor (direto ou indireto) de x  $(\exists x)((\exists y)((\exists z) ((supervisor(y, x) \lor (supervisor(y, z) \land chefiado por(x, z))) \rightarrow chefiado por(x, y))))$

