Atividade (Vale 50% Prova 1)

Nome: Lucas Bauchspiess

Nome: Rafael Ehlert

1) Expresse as funções na notação Big O, determinando a constante C e no, se possível.

a) f(n) =$\frac{n^3}{100} + n^2 + 10n + 3$

b) $f(n) = 10n^2 + 2^n + 4$

c) $f(n) = log_2^n + n + n^2$

2) Verifique se cada questão abaixo é verdadeira ou falsa e diga por que é falsa ou verdadeira.

$a)\ 10^{56}.n^2 \in O(n^2)$?

$b)\ 10^{56}n^2 \in O(n^3)$?

$c)\ 10^{56}n^2 \epsilon\ O(n)$?

$d)\ 2^{n+1} \epsilon\ O(2^n)$?

$f)\ n\ \in O(n^3)$?

3) Para as funções abaixo determine: $O, \theta, \Omega,\ se\ possível.$

$a)\ f(n) = 10n^3 + 5n + n^2$
$b)\ f(n) = n.\log n\ + \log n$
$c)\ f(n) = 3^x + n^3 + n$
$d)\ f(n) = 2\,n + 2500$

4)) Análise o algoritmo abaixo e identifique o pior caso usando a notação Assintótica.

Exibe_matriz_30[M]

FOR $i \leftarrow 1$ to comprimento_x{M]

FOR $j \leftarrow 1$ to comprimento_y{M]

FOR $k \leftarrow 1$ to comprimento_z[M]

Do descreva (M[i][j][k])

5) Para os pares de funções seguintes indique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações: $f(n) \in O\big(g(n)\big), f(n) \in \Omega\big(g(n)\big)\ e\ \ f(n) \in \theta\big(g(n)\big)$.

Explique sucintamente as suas opções.

$a)\ \ f(n) = 2n^3 - 10n^2;\ \ \ g(n) = 25n^2 + 37n$

$b)\ f(n) = 56;\ \ \ g(n) = \ log_2^{30}$

$c)\ \ f(n) = \ log_3^n;\ \ \ g(n) = log_2^n$

$d)\ f(n) = \ n^3;\ \ g(n) = 3^n$

$e)\ f(n) = n!; g(n) = 2^n$

Questão 1)

a)

Para a função: $f(n) = \frac{n^3}{100} + n^2 + 10n + 3$, temos:

Termo dominante: $\frac{n^3}{100}$, pois cresce muito mais que os outros, principalmente considerando números muito grandes.

Pela definição do Big O, queremos encontrar constantes C e n_0 tais que (∀ = p/ todo):

$f(n) \leq C \cdot g(n)\ \forall\, n \geq n_0$. Neste caso, $g(n) = n^3$. Então, $O\big(f(n)\big) = O(n^3)$

Ou seja, precisamos garantir que: $\frac{n^3}{100} + n^2 + 10n + 3 \leq \mathrm{C}n^3$

Para garantir essa desigualdade, podemos tomar um C suficientemente grande para cobrir todos os termos adicionais. Por exemplo, para n ≥ 10:

- $n^2 \leq n^3\ \forall\, n \geq 10$
- $10n \leq n^3\ \forall\, n \geq 10$
- $3 \leq n^3\ \forall\, n \geq 10$

  Portanto, $\frac{n^3}{100} + n^2 + 10n + 3 \leq \frac{n^3}{100} + n^3 + n^3 + n^3 = \frac{n^3}{100} + 3n^3$

Para um C suficientemente grande, $\frac{n^3}{100} \leq Cn^3$

Logo, $\frac{n^3}{100} + n^2 + 10n + 3 \leq 4n^3$, para $n \geq 10$.

A complexidade assintótica da função é $O(n^3)$ com $C = 4$ e $n_0 = 10$

b)

Para a função: $f(n) = 10n^2 + 2n + 4$, temos:

Termo dominante: n^2

- $2n \leq n^2\ \forall\, n \geq 2$
- $4 \leq n^2\ \forall\, n \geq 2$

Portanto, $10n^2 + 2n + 4 \leq 10n^2 + n^2 + n^2 = 12n^2$

Logo, a complexidade assintótica da função é $O(n^2)$ com $C = 12$ e $n_0 = 2$

c)

Para a função: $f(n) = log_2 n + n^2 + 10n + 3$, temos:

Termo dominante: n^2, pois é maior que n e $log_2 n$ cresce muito devagar.

- $log_2 n \leq n^2 \; \forall \; n \geq 10$
- $n \leq n^2 \; \forall \; n \geq 10$
- $3 \leq n^3 \; \forall \; n \geq 10$

Portanto, $log_2 n + n + n^2 \leq n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2$

Logo, a complexidade assintótica da função é $O(n^2)$ com $C = 3$ e $n_0 = 10$

Questão 2)

a) VERDADEIRO

Tomando: $f(n) = 10^{56} \cdot n^2$ e $g(n) = n^2$

$C = 10^{56}$ e $n_0 \geq 1$

$10^{56} \cdot n^2 \leq 10^{56} \cdot n^2$

b) VERDADEIRO

Tomando: $f(n) = 10^{56} \cdot n^2$ e $g(n) = n^3$

$$\frac{10^{56} n^2}{n^3} = 10^{56} \cdot \frac{1}{n^3}$$

$C = 10^{56}$ e $n_0 \geq 1$

$10^{56} \cdot n^2 \leq 10^{56} \cdot n^2$

c) FALSO

Tomando: $10^{56} \cdot n^2 \leq Cn$

Dividindo por n: $10^{56} \cdot n \leq Cn$

Mas para $n \to \infty$, $10^{56} n$ cresce indefinidamente, enquanto C é uma constante fixa.
Isso é um absurdo, então a afirmação é falsa.

d) VERDADEIRO

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$

$C = 2$ e $n_0 \geq 1$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \; \forall \; n \geq 1$

e) VERDADEIRO

$\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$C = 1$ e $n_0 \geq 1$

$n \; \leq \; n^3 \; \forall \; n \geq 1$

Questão 3)

a)

Passo 1: Determinar $O\big(f(n)\big)$
O termo de maior ordem é $10n^3$. A constante 10 pode ser ignorada na notação assintótica.
Portanto: $f(n) = O(n^3)$

Passo 2: Determinar $\Omega\big(f(n)\big)$

Para $n \geq 1$, temos $5n \geq 0$ e $n^2 \geq 0$. Logo, $10n^3 + \; n^2 + \; 5n \geq 10n^3$. Portanto, escolhendo $C = 10$ e $n_0 = 1$, a condição da notação Big Omega é satisfeita. Como $f(n)$ é tanto $O(n^3)$ quanto $\Omega(n^3)$, ela é $\theta(n^3)$.

Passo 3: Determinar $\theta\big(f(n)\big)$

Como o termo dominante de $f(n) = 10n^3$ e os outros termos $5n \; e \; n^2$crescem mais lentamente, podemos dizer que a função cresce na mesma ordem de n^3.

b)

Passo 1: Determinar $O\big(f(n)\big)$
$O(n\ \cdot \log n)$ Sim, $f(n)$ é $O(n \cdot \log n)$. Para $n \geq 2$, temos $\log n\ \leq n\ \cdot \log n$. Portanto, $n \log n + \log n \leq n \log n +\ n \log n = 2n \log n$. Escolhendo $C = 2$ e $n_0 = 2$, a condição para Big O é satisfeita.

Passo 2: Determinar $\Omega\big(f(n)\big)$

Para $n \geq 2$, temos $\log n > 0$. Portanto, $n \log n + \log n \geq n \log n = 2n \log n$. Escolhendo $C = 1$ e $n_0 = 2$, a condição para Ω é satisfeita.

Passo 3: Determinar $\theta\big(f(n)\big)$

Como $f(n)$ é tanto $O(n\ \cdot \log n)$ quanto $\Omega(n\ \cdot \log n)$, ela é $\theta(n\ \cdot \log n)$.

c)

Passo 1: Determinar $O\big(f(n)\big)$
O termo dominante aqui é 3^n, já que o crescimento exponencial supera o crescimento polinomial (n^3 e n) para valores suficientemente grandes de n.

Podemos dizer que existe uma constante $C > 0$, $C = 3$ um valor $n_0 = 4$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $f(n) \leq C \cdot 3^n$

Passo 2: Determinar $\Omega\big(f(n)\big)$

Encontrar $C > 0$ e n_0 tal que $\forall\ n \geq n_0$ tenhamos:

$3^n +\ n^2 +\ n \geq C \cdot 3^n$. Pegando $C = 1$ e $n_0 = 1$. Portanto, $f(n) = \Omega(n)$

Passo 3: Determinar $\theta\big(f(n)\big)$: Como $f(n)$ é tanto $O(3^n)$ quanto $\Omega(3^n)$, ela é $\theta(3^n)$.

d)

Passo 1: Determinar $O\big(f(n)\big)$

A função $f(n)$ é $O(n)$. Isso porque o crescimento da função é limitado superiormente por um múltiplo constante de n. Podemos encontrar um $C > 0$ e um n_0 tal que $\forall\ n > n_0$, tenhamos $2n\ +\ 2500 \leq C \cdot n$. Então, se $n_0 = 2500$, $\forall\ n_0 \geq 2500$, teremos $2n + 2500 \leq 3n$. Portanto, $f(n) = O(n)$. $C = 3$ e $n_0 = 2500$

Passo 2: Determinar $\Omega\big(f(n)\big)$

A função $f(n)$ também é $\Omega(n)$. Isso significa que o crescimento da função é limitado inferiormente por um múltiplo constante de n. Precisamos encontrar $C > 0$ e n_0 tal que $\forall\ n \geq n_0$, tenhamos $2n + 2500 \leq C \cdot n$. Pegando $C = 1$ e $n_0 = 1$ $2n + 2500 \geq 2n \geq n$

Então, podemos escolher $n_0 = 1$. Portanto, $f(n) = \Omega(n)$ $C = 1$ e $n_0 = 1$.

Passo 3: Determinar $\theta\big(f(n)\big)$

Como $f(n)$ é tanto $O(n)$ quanto $\Omega(n)$, ela é $\theta(n)$.

Questão 4)

Análise o algoritmo abaixo e identifique o pior caso usando a notação Assintótica:

Exibe_matriz_30[M]

FOR $i \leftarrow$ 1 to comprimento_x{M]

FOR $j \leftarrow$ 1 to comprimento_y{M]

FOR $k \leftarrow$ 1 to comprimento_z[M]

Do descreva (M[i][j][k])

A complexidade de tempo do algoritmo no pior caso é $O(n_x \, . \, n_y \, . \, n_z)$

Questão 5)

Para os pares de funções seguintes indique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações: $f(n) \in O(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $f(n) \in \theta(g(n))$.

a) $f(n)$ = 2n 3 − 10n 2 ; $g(n)$ = 25n 2 + 37^n

f(n)∈/O(g(n)): Falso, pois f(n) não é limitada superiormente por g(n). Não existe uma constante c que satisfaça 2n3 −10n2 ≤c·(25n2 +37n) para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Ω(g(n)): Verdadeiro, pois f(n) cresce mais rápido que g(n). Existe uma constante c que satisfaz 2n3 −10n2 ≥c·(25n2+37n) para todo n suficientemente grande.

f(n)∈/Θ(g(n)): Falso, porque o crescimento de f(n) e g(n) não é idêntico. Eles não crescem na mesma taxa.

b) f (n) = 56; $g(n)$ = log2 30

f(n)∈O(g(n)): Verdadeiro, pois o crescimento de f(n) é no máximo igual ao de g(n). Existe uma constante c tal que 56≤c·log302 para todo n (já que não dependem de n).

f(n)∈Ω(g(n)): Verdadeiro, pois f(n) também cresce no mesmo ritmo que g(n) (ambos constantes). Existe uma constante c tal que 56≥c·log302 para todo n.

f(n)∈Θ(g(n)): Verdadeiro, já que f(n) e g(n) crescem exatamente na mesma taxa (ambas são constantes).

c) $f(n) = log3\ n$; $g(n) = log2\ n$

f(n)∈O(g(n)): Verdadeiro, pois f(n) cresce no máximo tão rápido quanto g(n). Existe uma constante c tal que log3(n)≤c·log2(n) para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Ω(g(n)): Verdadeiro, pois f(n) também cresce no mínimo tão rápido quanto g(n). Existe uma constante c tal que log3(n)≥c·log2(n) para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Θ(g(n)): Verdadeiro, já que f(n) e g(n) têm crescimento idêntico.

d) $f(n) = n\ 3$; $g(n) = 3\ n$

f(n)∈O(g(n)): Verdadeiro, pois f(n) cresce mais lentamente que g(n). Existe uma constante c tal que n3 ≤c·3n para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Ω(g(n)): Falso, pois f(n) não cresce no mínimo tão rápido quanto g(n). Não existe uma constante c que satisfaça n3 ≥c·3n para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Θ(g(n)): Falso, pois f(n) e g(n) não têm o mesmo crescimento.

e) $f(n) = n!$; $g(n) = 2^n$

f(n)∈O(g(n)): Falso, pois f(n) cresce mais rápido que g(n). Não existe uma constante c que satisfaça n!≤c·2n para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Ω(g(n)): Verdadeiro, pois f(n) cresce no mínimo tão rápido quanto g(n). Existe uma constante c tal que n!≥c·2n para todo n suficientemente grande.

f(n)∈Θ(g(n)): Falso, pois não há crescimento idêntico.