Programação Linear

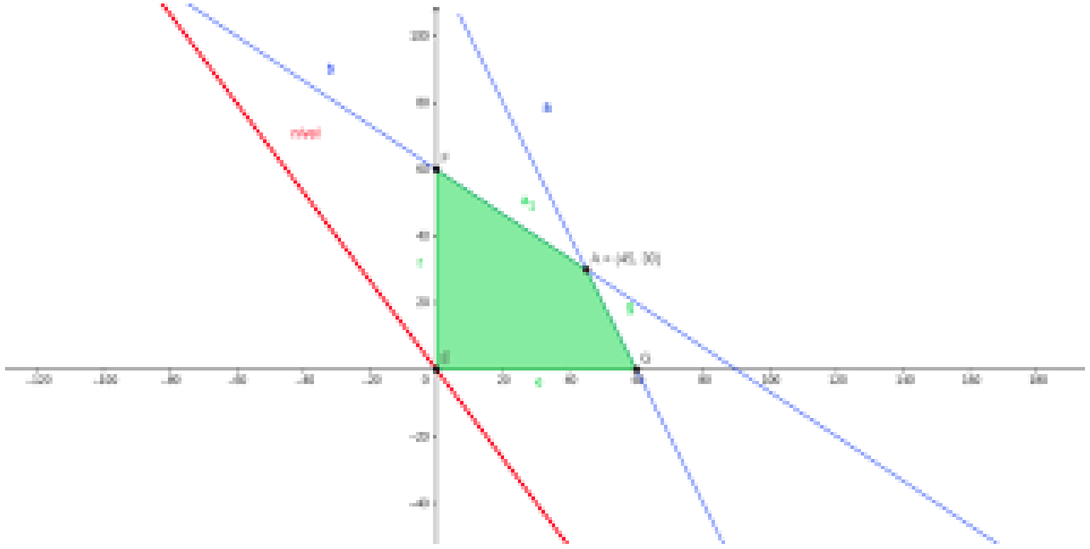
Histórico

- A origem da Pesquisa Operacional – PO – remonta a época da Segunda Grande Guerra Mundial. Os militares necessitavam gerenciar seus recursos de forma eficiente até os campos de batalha. Segundo registros, o governo britânico e norte-americano solicitaram a cientistas (matemáticos) que fizessem estudos (leia-se pesquisa) sobre operações militares de como otimizar essas operações.

- Com o fim da guerra e com a expansão econômica de diversos países as organizações não militares tinham operações cada vez mais complexas. Percebeu-se assim, que os problemas tratados nas questões militares eram na verdade muito semelhantes aos encontrados nas empresas, cada qual no seu devido contexto. Então no início de 1950, a PO passou a ser aplicada em organizações das mais variadas áreas de atuação.

A Programação Linear é uma técnica da Pesquisa Operacional.

A Pesquisa Operacional *utiliza de modelos matemáticos, estatística e algoritmos para ajudar a tomada de decisões. É mais frequente o seu uso para análise de sistemas complexos reais, tipicamente com o objetivo de melhorar ou otimizar a performance. É uma forma de matemática aplicada.*



Fases Principais

- ✓ Formulação do problema;
- ✓ Construção de um modelo que represente o sistema em estudo;
- ✓ Obtenção de solução a partir do modelo;
- ✓ Teste do modelo e da solução dele originada;
- ✓ Colocação da solução em funcionamento: implantação.

Programação Linear

- Modelos de problemas P.O. onde as funções e equações são todos de primeiro grau

- É um meio matemático de designar um montante fixo de recursos que estabeleça certa demanda de tal modo que alguma função-objetivo seja otimizada e ainda satisfaça a outras condições definidas.

- **Embora não haja uma fórmula única para a modelagem, sugere-se a seguinte metodologia:**

- **Identificar as variáveis decisórias:** aquilo que se pode controlar e que se deseja saber quanto vale. As variáveis devem ser claramente definidas. Se a variável usa alguma unidade de medida, deve-se deixar bem claro qual é esta unidade de medida. Se ela é real ou só pode assumir valores inteiros.

- **Identificar o objetivo:** sempre se quer ou maximizar ou minimizar um determinado objetivo, expresso em função das variáveis do problema.

- **Identificar os fatores restritivos:** também expressas em função das variáveis do problema, as restrições limitam as combinações das variáveis a determinados limites.

Modelo Geral de Problemas de Programação Linear

Todo problema de PL pode ser descrito através de uma função objetivo e através de um conjunto de restrições, todos lineares. Assim, temos o seguinte modelo genérico.

$$\{ \text{Max}, \text{Min} \}\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ =, \leq, \geq \} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ =, \leq, \geq \} b_2$$

……………………………………………………………

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ =, \leq, \geq \} b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\{\text{Max, Min}\}\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{=, \leq, \geq\}\ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{=, \leq, \geq\}\ b_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{=, \leq, \geq\}\ b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

No modelo matemático acima, deve-se interpretar:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ = conjunto de variáveis estruturais do problema;
- $c_1, c_2, \ldots, c_n$ = coeficientes da função objetivo;
- a_{ij} e b_j = coeficientes das restrições. Os coeficientes da b_i da mão direita devem necessariamente ser não-negativos quando o algoritmo de resolução é o Simplex.

O que está entre colchetes significa “usar um dos elementos separados por vírgula”.

A função objetivo expressa a meta que se deseja atender. Esta meta ou será de maximização (Max Z = ...) ou de minimização (Min Z = ...).

As restrições expressam limites a serem respeitados. A resolução procura a solução ótima no espaço de soluções compatíveis ao problema de PL, ou seja, no conjunto de pontos cujas coordenadas são valores das variáveis que satisfazem ao conjunto de restrições. Cada restrição poderá ser uma igualdade (=) ou uma desigualdade não-estrita ($\leq$ ou $\geq$).

Exemplo Problema 1.

- Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais. Digamos tipo A e B, em uma área restrita a um hectare, sendo que cada are cultivado pelo cereal A produz 8 sacas e para o B 10 sacos. Para o plantio, cada are cultivado pelo cereal A precisa de 3 homens hora e o cultivado pelo cereal B, precisa de 2 homens hora, sendo que a disposição máxima de homens hora é de 240. O custo de um homem hora é de R$ 20,00. A demanda máxima é limitada pelo mercado consumidor de 480 sacos do cereal A, a um preço de R$ 15,00 por saco e 800 sacos do cereal B, a um preço de R$12,00 por saco. O agricultor deseja planejar a sua produção de modo a maximizar o seu lucro.

- Objetivo: Maximizar o lucro do Agricultor.

- Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de ares a serem cultivados com o cereal A.

x_2 = quantidade de ares a serem cultivados com o cereal B.

- Restrições:
- Restrição de área cultivada: 100 ares (obs: 1 are = 100 m^2)
- Restrição de mão de obra: 240 homem-hora.
- Restrição de produção e mercado.

Trabalhando a função objetivo.

- Maximizar o Lucro.

Em economia: Lucro = Receita – Custo

$$\text{Max } Z = \underbrace{(15.8\,x_1 + 12.10.x_2)}_{\text{Receita}} - \underbrace{(20.3.x_1 + 20.2x_2)}_{\text{Custo}}$$

$$Max\ Z = 60x_1 + 80x_2$$

x_1 = quantidade de ares a serem cultivados com o cereal A.

x_2 = quantidade de ares a serem cultivados com o cereal B.

Trabalhando as restrições

- Restrição de área

$x_1 + x_2 \leq 100$

- Restrição de mão de obra

$3x_1 + 2x_2 \leq 240$

- Restrição de produção e mercado

$8x_1 \leq 480 \rightarrow x_1 \leq 60$
$10x_2 \leq 800 \rightarrow x_2 \leq 80$

e

$x_1 \quad e \quad x_2 \geq 0$

Reescrevendo o problema.

$$Max\ Z = 60x_1 + 80x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

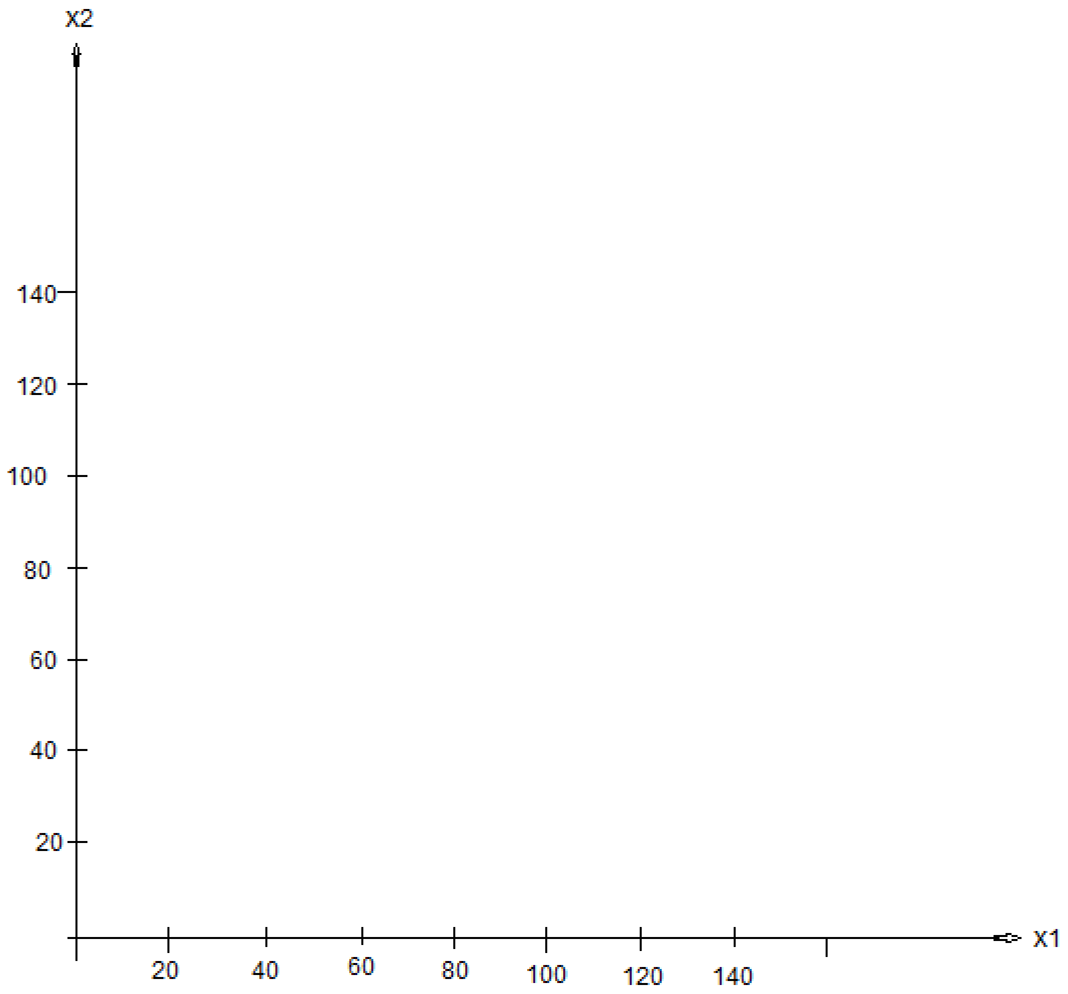
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

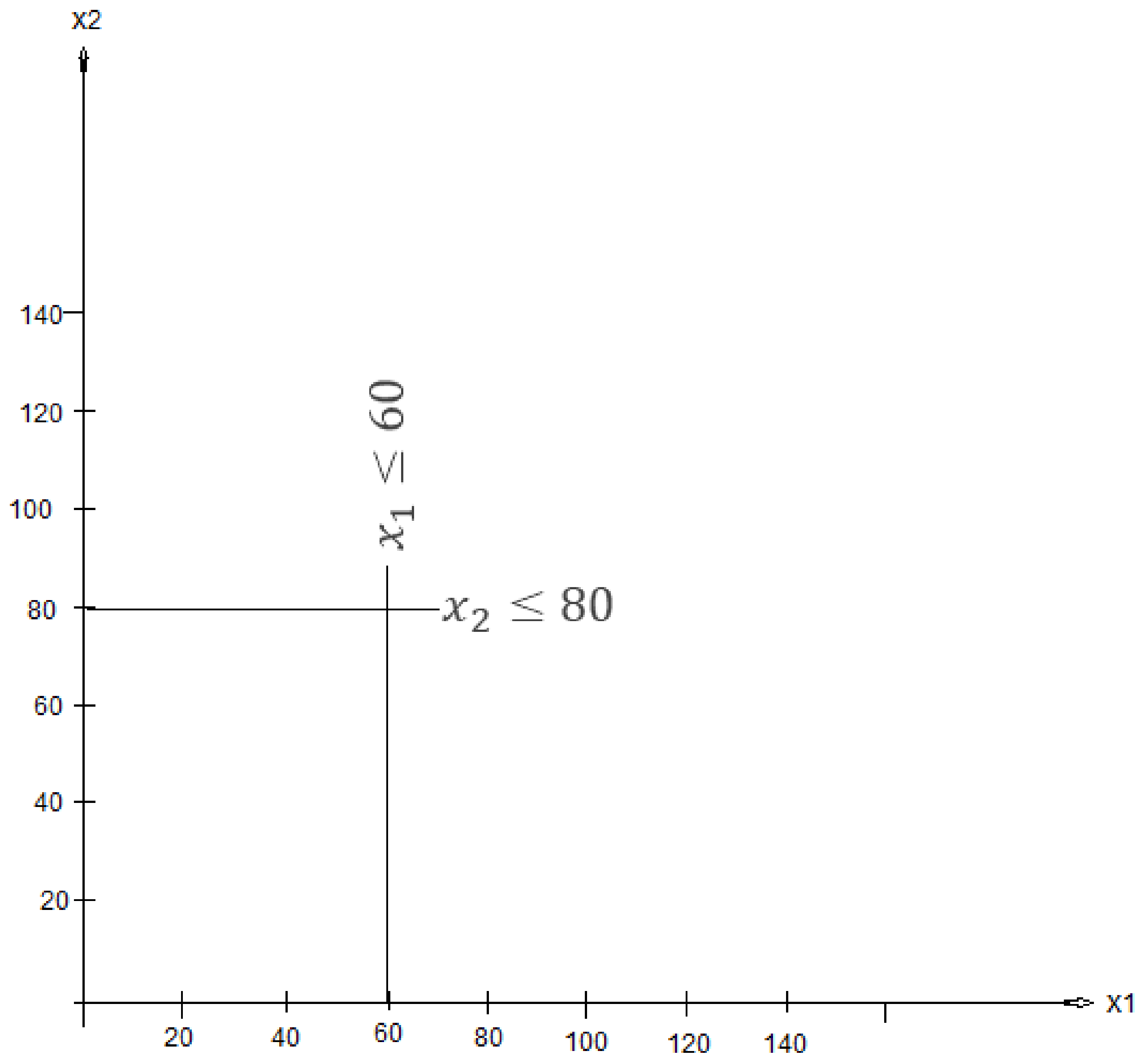
$$x_2 \leq 80$$

$$x_1 \quad e \quad x_2 \geq 0$$

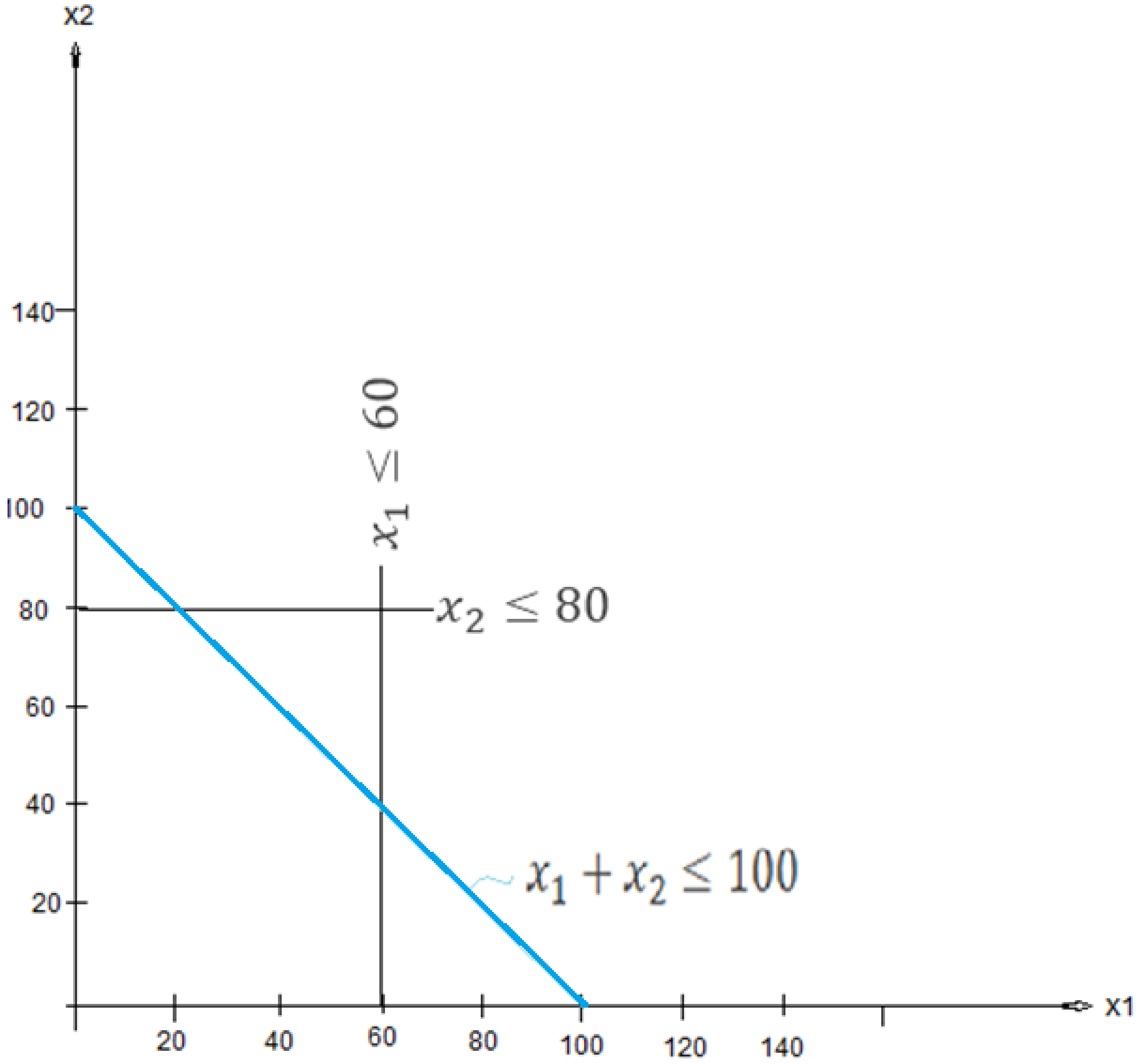
Solução Gráfica



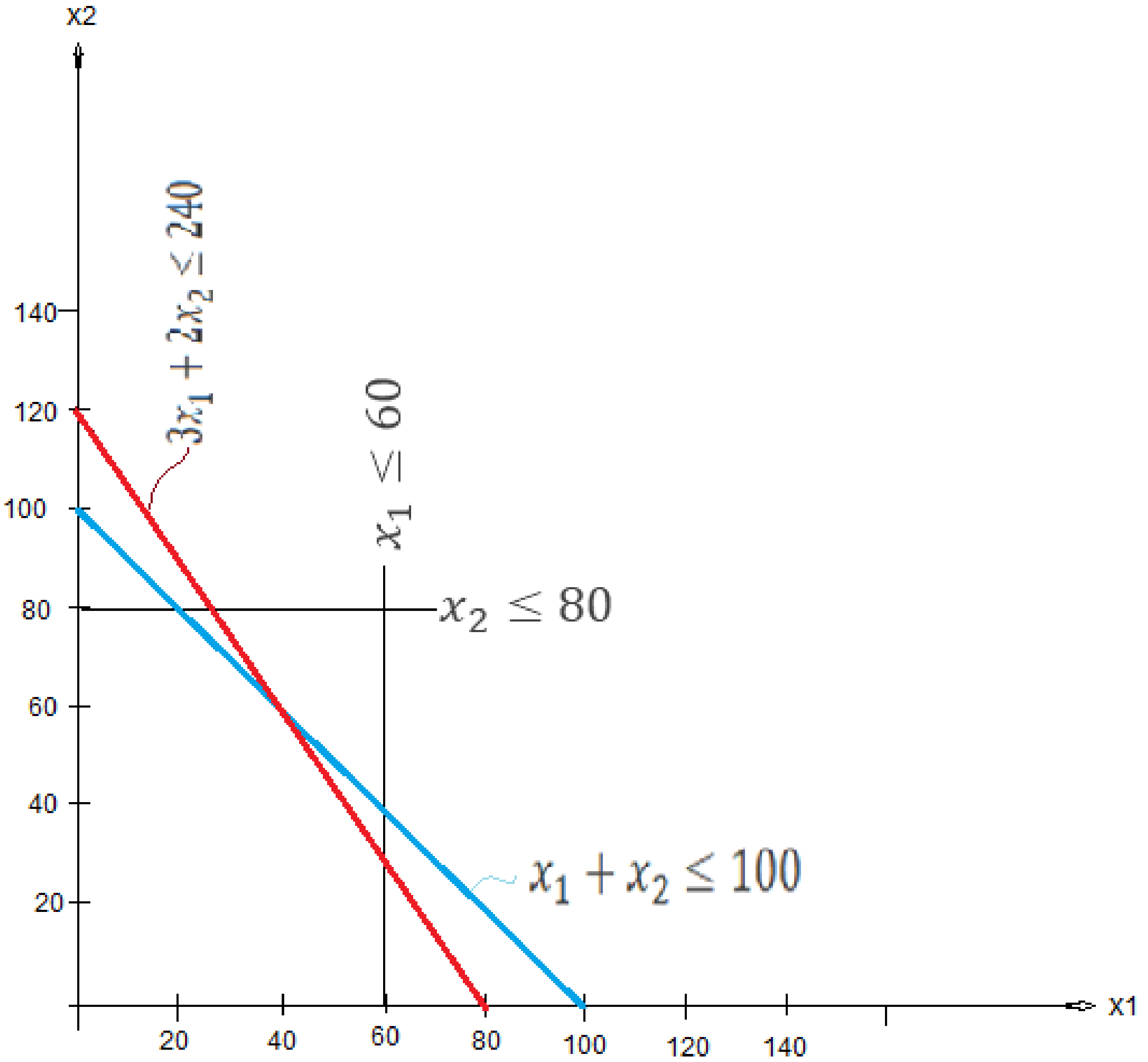
Construímos no plano cartesiano onde os eixos serão as variáveis x1 e x2



x2
140
120
100
80
60
40
20
$x_1 \leq 60$
$x_2 \leq 80$
20
40
60
80
100
120
140
x1



x2
140
120
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
120
140
x1
$x_1 \leq 60$
$x_2 \leq 80$
$x_1 + x_2 \leq 100$


x2
140
120
100
80
60
40
20
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$
$x_1 \leq 60$
$x_2 \leq 80$
$x_1 + x_2 \leq 100$
20
40
60
80
100
120
140
x1

Gradiente de uma função

- O cálculo do gradiente de uma função ajuda a dar a direção onde temos a indicação do ponto máximo.

A coisa mais importante para se lembrar sobre o gradiente: o gradiente da função se avaliado no ponto (x_0, y_0), apontará onde a subida é mais íngreme.

Gradiente de uma função

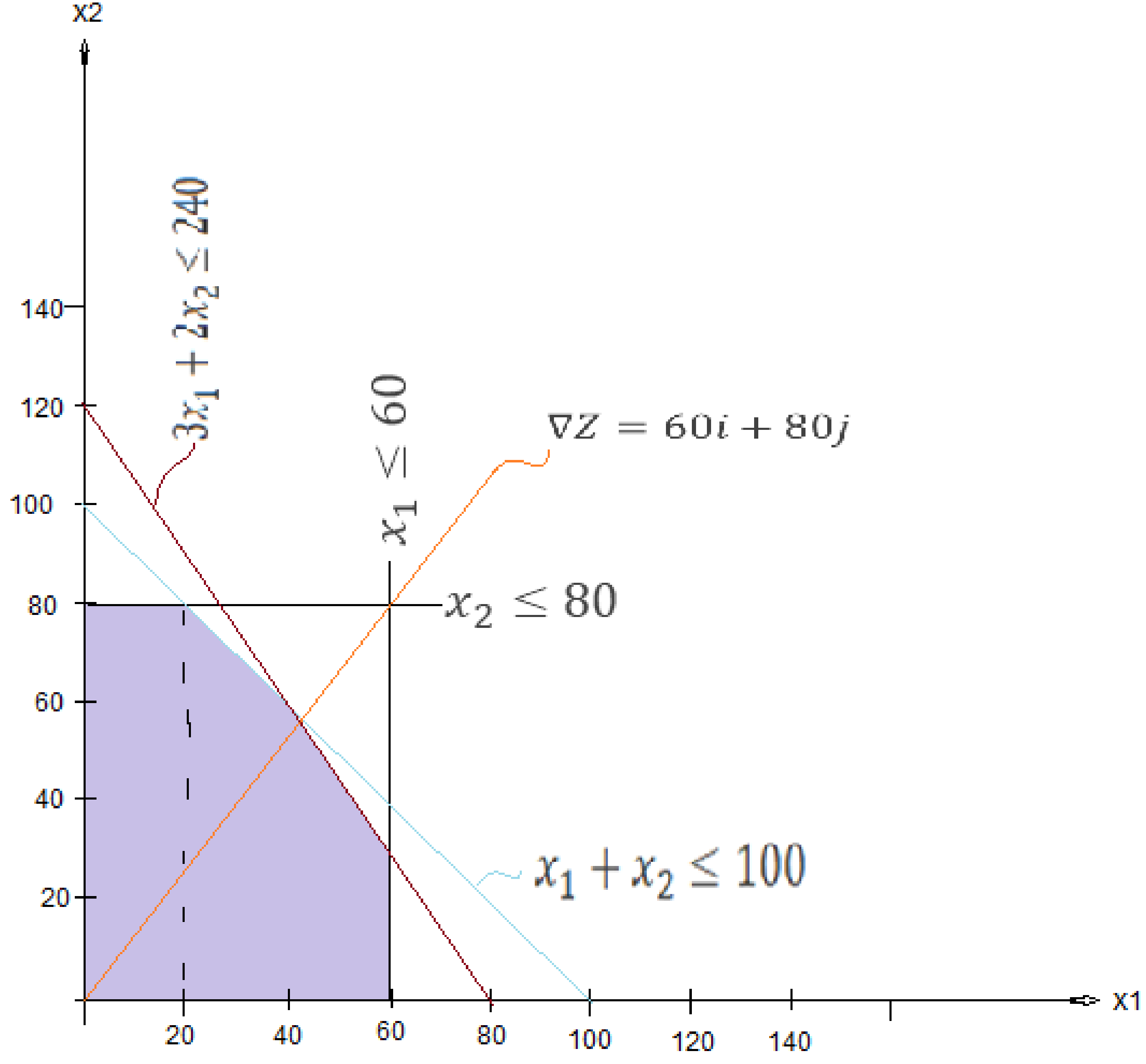
- $\nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x_1}i + \frac{\partial\emptyset}{\partial x_2}j + \frac{\partial\emptyset}{\partial x_3}k$ (Em 3 dimensões)

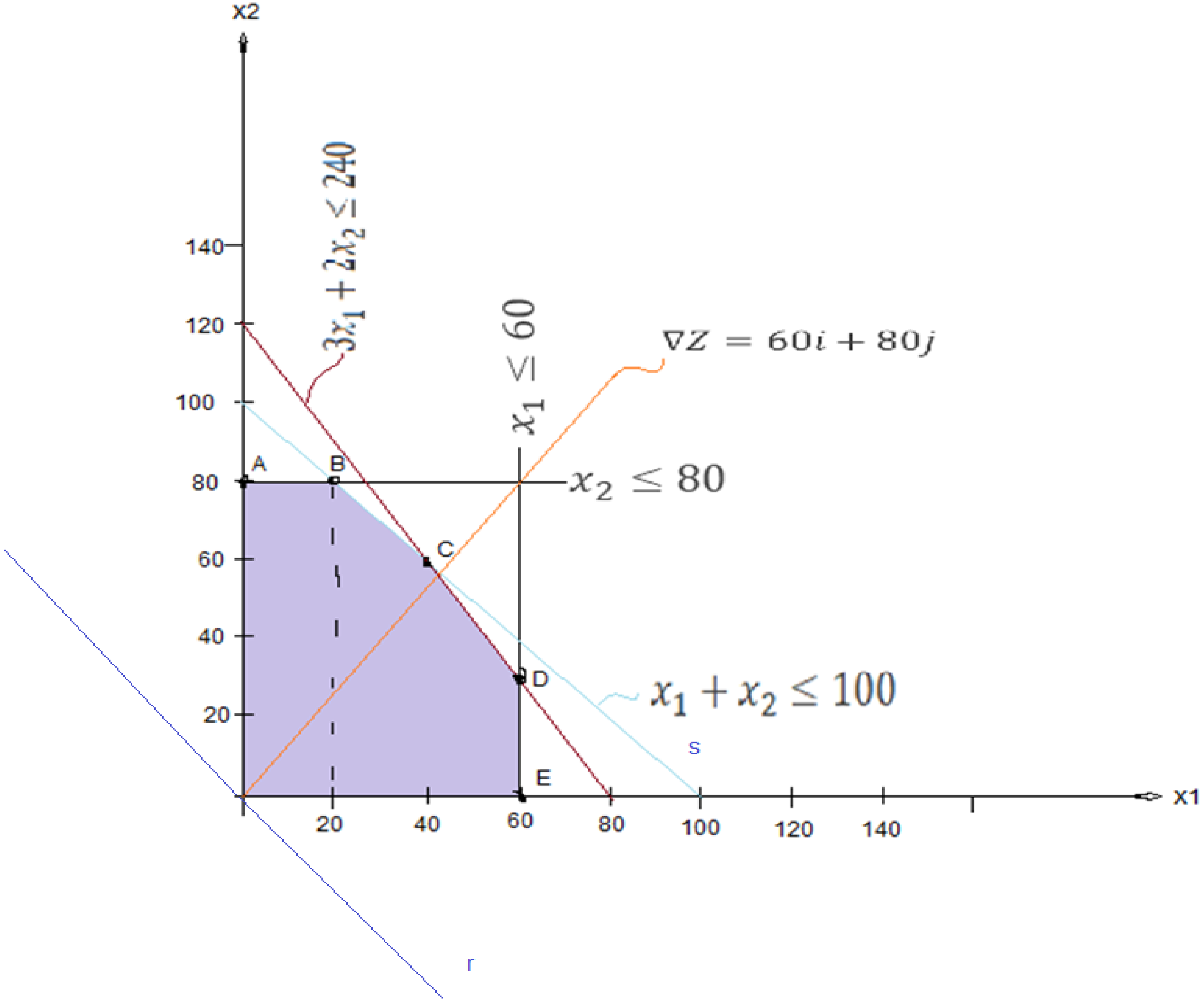
- No nosso caso estamos falando de duas dimensões.

$$\nabla Z = \frac{\partial Z}{\partial x_1}i + \frac{\partial z}{\partial x_2}j$$

$$Max\ Z = 60x_1 + 80x_2$$

$$\nabla Z = 60i + 80j$$


x2
x1
140
120
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
120
140
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$
$x_1 \leq 60$
$\nabla Z = 60i + 80j$
$x_2 \leq 80$
$x_1 + x_2 \leq 100$



x2
140
120
100
80
60
40
20
$3x_1 + 2x_2 \le 240$
$x_1 \le 60$
$\nabla Z = 60i + 80j$
$x_2 \le 80$
$x_1 + x_2 \le 100$
A
B
C
D
E
s
r
20
40
60
80
100
120
140
x1

Vamos Verificar os pontos A, B, C, D, E.

$$Max\ Z = 60x_1 + 80x_2$$

Ponto	X1	X2	Z
A	0	80	6400
B	20	80	7600
C	40	60	7200
D	60	35	6400
E	60	0	3600

CONSIDERAÇÕES

- ∇Z é um vetor que indica a direção do máximo crescimento da função objetivo, cujas as projeções horizontal e vertical são magnitudes proporcionais aos coeficientes da função objetivo, 60 e 80 respectivamente.
- A região hachurada representa o conjunto das soluções viáveis do problema.
- A reta r perpendicular ∇Z é o lugar geométrico de todos os pontos em que

  Z =0 e qualquer reta paralela a reta r é o lugar geométrico de pontos de

  Z constante. Deste modo, a reta s é paralela a reta r mais distante desta que contém algum ponto do conjunto de soluções compatíveis, que neste caso foi o ponto B.

Análise das restrições.

- $x_1 + x_2 \leq 100 \rightarrow 20 + 80 \leq 100\ (verdadeiro)$
- $3x_1 + 2x_2 \leq 240 \rightarrow 3.20 + 2.80 \leq 240 \rightarrow 220 \leq 240\ (verdadeiro)$
- $x_1 \leq 60 \rightarrow 20 \leq 60\ (verdadeiro)$
- $x_2 \leq 80 \rightarrow 80 \leq 80\ (verdadeiro)$
- $x_1 e\ x_2\ \geq 0 \rightarrow 20,\ 80\ \geq 0\ (verdadeiro)$

Conclusão

- Toda área será ocupada.
- Sobrarão 20 homens-hora.
- Mesmo sabendo que o mercado aceita 480 sacos de A, serão cultivados apenas 160 sacos.
- Serão cultivados 800 sacos do cereal B, que o mercado aceita.
- $x_1 = 20\ ares\ do\ cereal\ A$;
- $x_2 = 80\ ares\ do\ cereal\ B$;
- (Lucro) Z = 7600.

Exercício

Uma dieta foi recomendada a um paciente. Dispõe-se de apenas dois tipos de alimentos e a dieta prevê necessidades mínimas diárias dos seguintes nutrientes básicos.

Nutriente Básico	Necessidade mínima Diária (g)
Hidrato	15
Proteína	36
Vitamina	24

Os alimentos possuem a seguinte composição em g por Kg:

Nutriente Básico	Alimento 1	Alimento 2
Hidrato	30	10
Proteína	40	30
Vitamina	15	40

Cada Kg do alimento 1 custa R$ 3,20 e cada kg do alimento 2 custa R$4,80. Deseja-se minimizar o custo das refeições, atendendo as necessidades mínimas diárias de nutrientes básicos conforme prescrito pelo nutricionista.

(Max/Min) Z = ______________________________

Sujeito a: ______________________________

____

____

____

____

____

____

Modelagem

- Variáveis de decisão.

- $x_1 = Quant. alimento\ 1\ por\ dia$
- $x_2 = Quant.\ alimento\ 2\ por\ dia.$

Função Objetivo
Min Z = 3,20 . $x_1 + 4{,}80. x_2$

- Restrições.

Hidrato: $0{,}03x_1 + 0{,}01x_2 \geq 0{,}015$

Proteína: $0{,}040x_1 + 0{,}030x_2 \geq 0{,}036$

Vitaminas: $0{,}015x_1 + 0{,}040x_2 \geq 0{,}024$
$x_1, x_2 \geq 0$

(Max/Min) Z = ____________________

Sujeito a: ____________________

____

____

____

____

____

____

(Max/Min) $Z = 3{,}20\,x1 + 4{,}80\,x2$

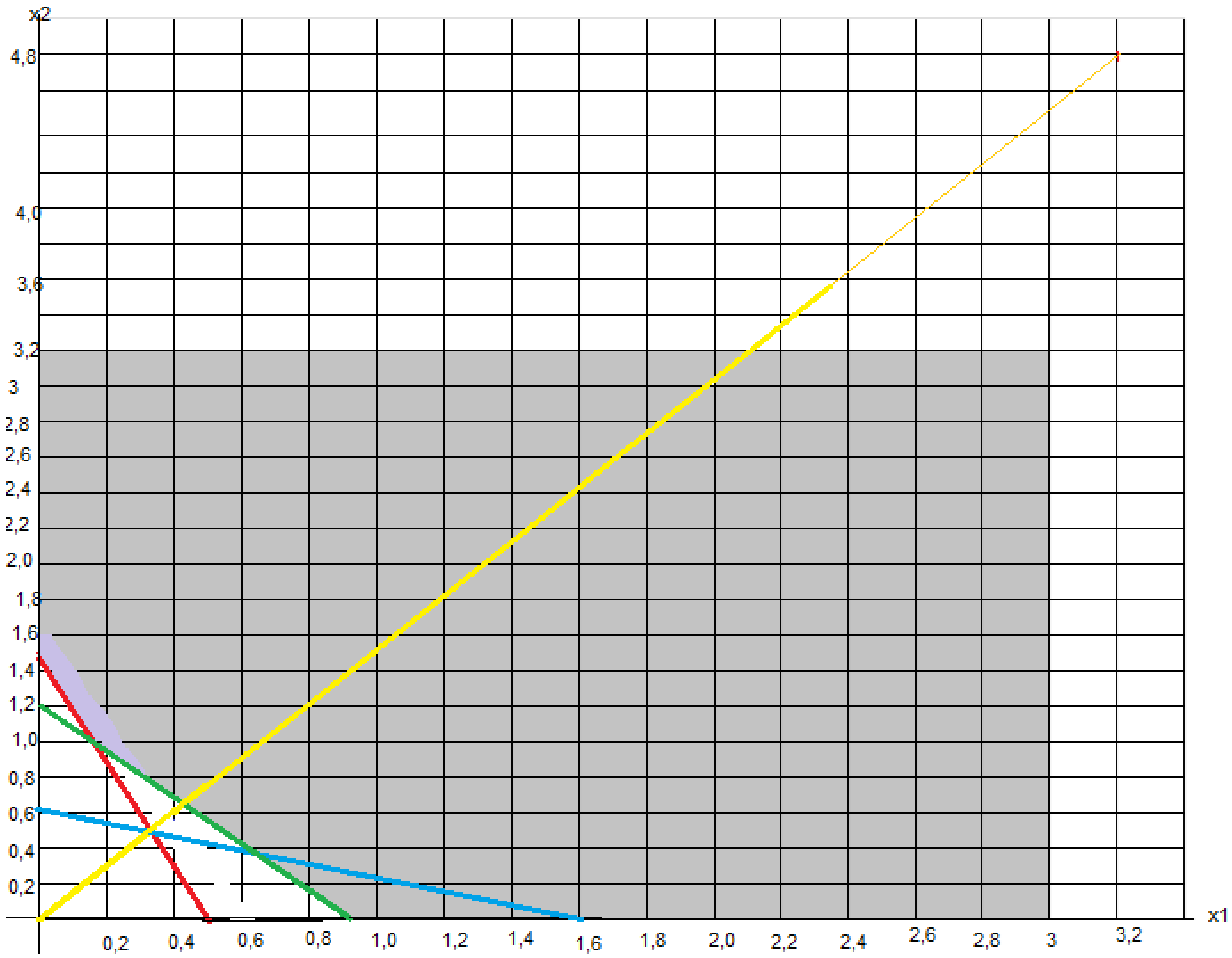
Sujeito a: $0{,}03\,x1 + 0{,}01x2 \leq 0{,}015$

$0{,}04\,x1 + 0{,}03x2 \leq 0{,}030$

$0{,}015\,x1 + 0{,}04x2 \leq 0{,}024$

$x1;\ x2\ \geq 0$

Solução



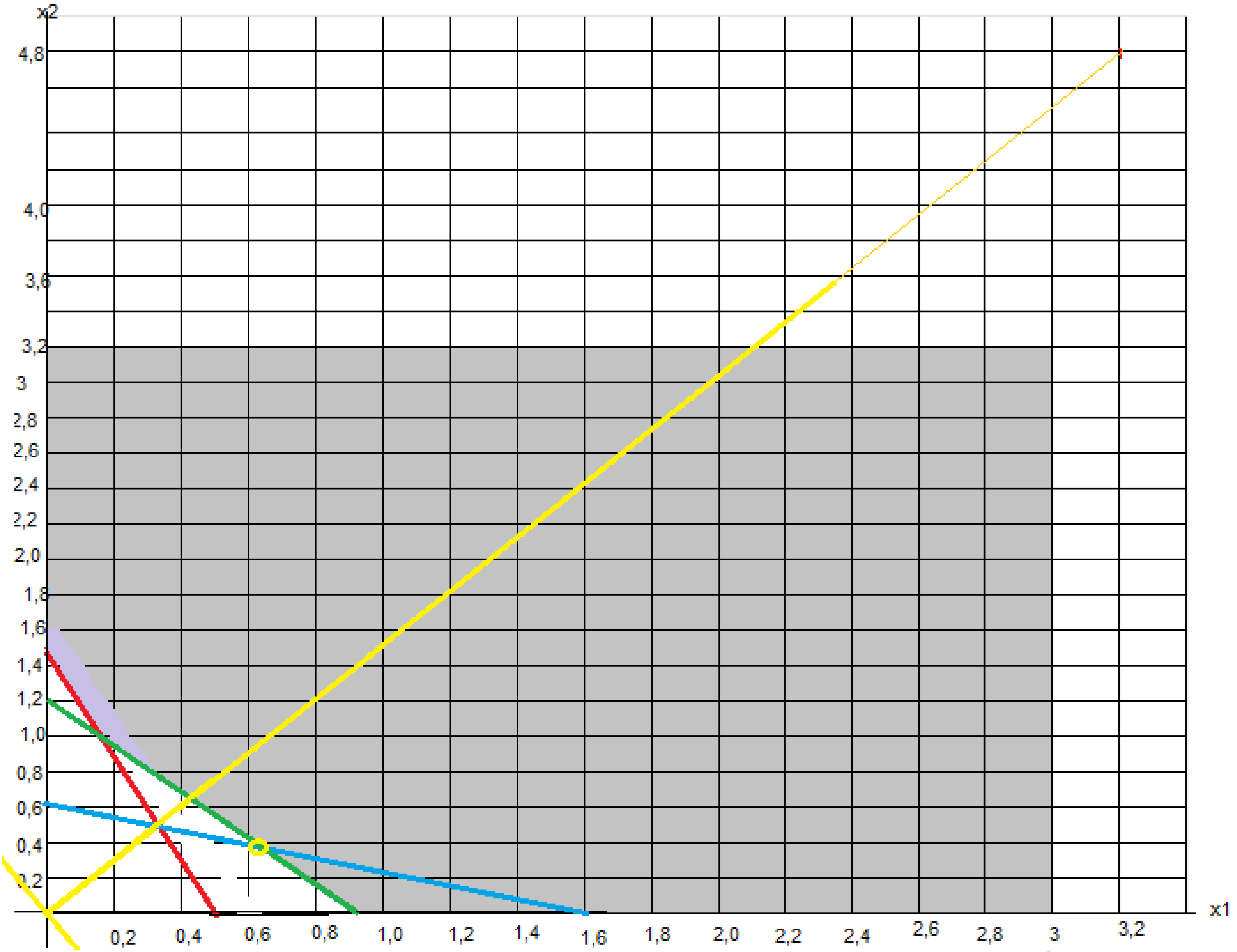
Cor azul vitaminas

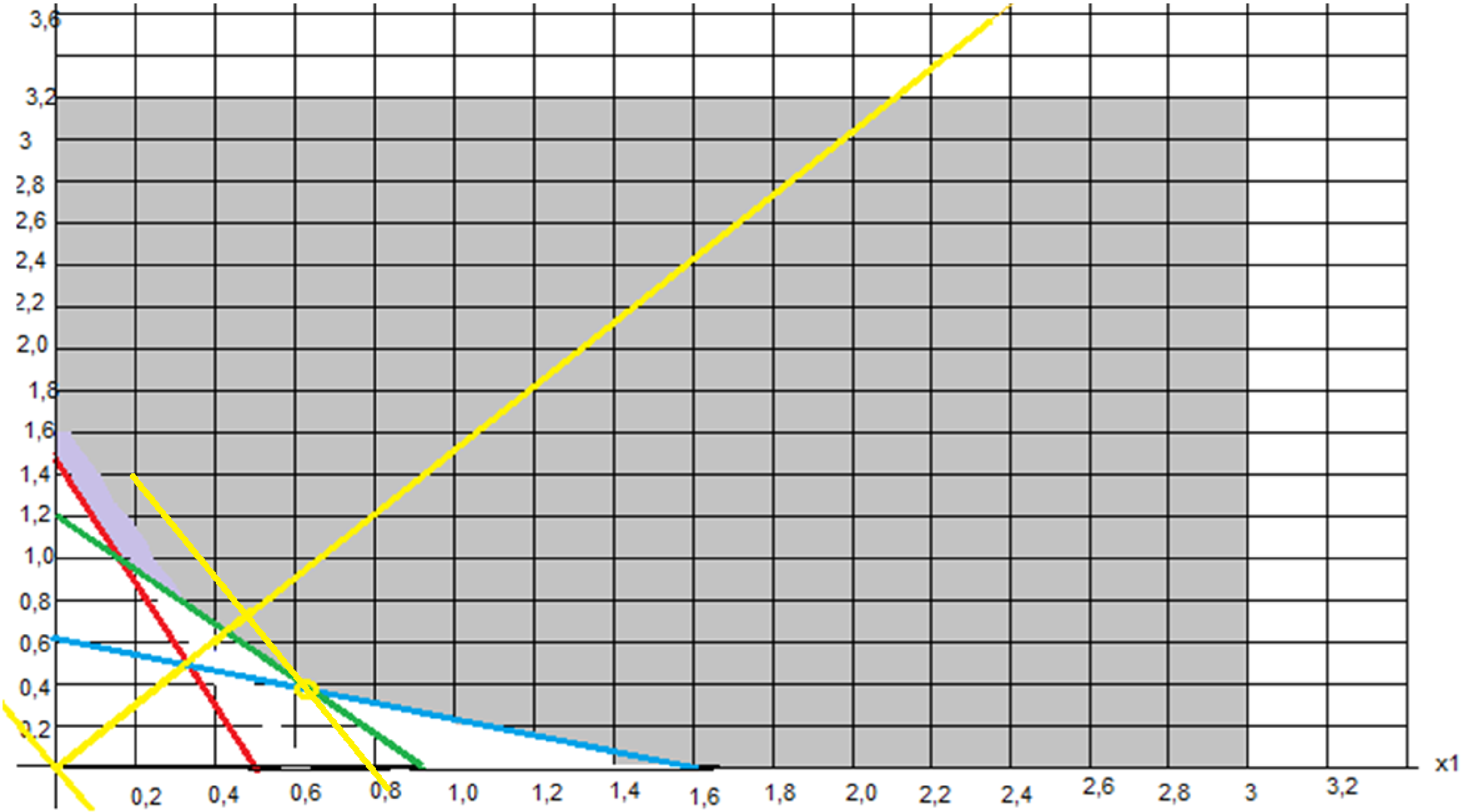
Cor Verm Hidrato

Cor Verde Proteina

Cor amarela vetor nabla

Cor cinza área viável


x2
4,8
4,0
3,6
3,2
3
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3
3,2
x1


3,6
3,2
3
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3
3,2
x1

		Função OBJETIVO	Restrição Hidrato	Restrição Proteína	Restrição Vitaminas
X1	X2	3,2.x1+4,8.x2	0,030.x1+0,01.X2>=0,015	0,04.x1+0,03.x2>=0,036	0,015.x1+0,04.x2.=0,024
0,6	0,4	3,84	0,022	0,036	0,025
0,62	0,38	3,808	0,0224	0,0362	0,0245
0,6263	0,3649	3,75568	0,022438	0,035999	0,0239905
0,64	0,36	3,776	0,0228	0,0364	0,024
0,66	0,34	3,744	0,0232	0,0366	0,0235
0,68	0,32	3,712	0,0236	0,0368	0,023
0,7	0,3	3,68	0,024	0,037	0,0225

Exercício 3

Um serralheria pode fabricar pias de aço inoxidável e/ou saladeiras do mesmo material. Para isso, utiliza como matéria prima chapas de aço de um tamanho único, padronizado. Como cada chapa pode-se fabricar uma pia e duas saladeiras ou então 6 saladeiras, As sobras são economicamente inaproveitáveis. A empresa vende cada pia $ 80,00 e cada saladeira a $ 25. Cada chapa de aço inoxidável custa $ 60,00. Os demais custos não dependem da decisão. Sabe-se por experiência passada que não consegue vender mais de 4 saladeira para cada pia vendida. A empresa pode utilizar até 680 chapas e deseja saber quanto deve produzir de cada artigo para ter lucro máximo.

A solução deve especificar o número inteiro de chapas que deve ser utilizadas.

Resposta Esperada

51000