

**Projet de Traitement Numérique du Signal  
Réalisation d'un modem de fréquence selon la  
recommandation V21 de l'Union Internationale des  
Télécommunications (UIT)**

JEANVOINE Achille  
BAURIAUD Laura

Département Sciences du Numérique - Première année  
2022-2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modem de fréquence</b>	<b>4</b>
2.1	Construction du signal modulé en fréquence . . . . .	4
2.2	Génération du signal NRZ . . . . .	5
2.3	Génération du signal modulé en fréquence . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Démodulation par filtrage</b>	<b>7</b>
4.1	Synthèse du filtre passe-bas . . . . .	8
4.2	Synthèse du filtre passe-haut . . . . .	8
4.3	Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61 . . . . .	9
4.4	Filtrage . . . . .	10
4.5	Modification du démodulateur . . . . .	11
4.5.1	Modification de l'ordre du filtre . . . . .	11
4.5.2	Modification des fréquences . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21</b>	<b>11</b>
5.1	Contexte de synchronisation idéale . . . . .	11
5.1.1	Principe de fonctionnement de ce récepteur . . . . .	11
5.1.2	Résultats obtenus . . . . .	12
5.2	Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse . . . . .	13
5.2.1	Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment	13
5.2.2	Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence	13
<b>6</b>	<b>Démodulation du signal</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

## Table des figures

1	Signal modulé en fréquence . . . . .	4
2	Signal NRZ avec une échelle temporelle en secondes . . . . .	5
3	Densité spectrale de puissance du signal NRZ théorique et avec pwelch . . . . .	5
4	Signal modulé en fréquence de $x(t)$ . . . . .	6
5	Densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence avec pwelch et théorique	7
6	Démodulation par filtrage. . . . .	8
7	Filtre passe-bas. . . . .	8
8	Filtre passe-haut. . . . .	9
9	Les deux filtres à l'ordre 61. . . . .	9
10	Tracés pour un filtre passe bas. . . . .	10
11	Tracés pour un filtre passe haut. . . . .	11
12	Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale. . . . .	12
13	Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse. . . . .	14
14	Demodulation de l'image . . . . .	16

# 1 Introduction

L'objectif de ce projet était d'implanter un modem suivant la recommandation V21 du CCIT (Comité Consultatif International de Téléphonie et de Télégraphie, renommé depuis 1990 Union Internationale des Télécommunications (UIT)). En effet, il s'agissait de reconstituer une image à partir d'un message binaire abîmé.

## 2 Modem de fréquence

### 2.1 Construction du signal modulé en fréquence

La première étape du projet consistait à réaliser la modulation de fréquence, i.e. transformer l'information binaire à transmettre en un signal modulé en fréquence (exemple sur la figure 1).

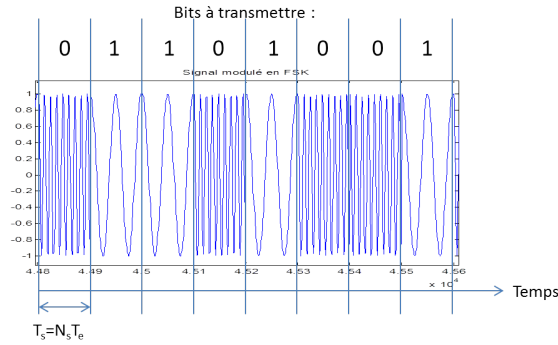


FIGURE 1 – Signal modulé en fréquence

Le signal modulé en fréquence  $x(t)$  est généré de la manière suivante :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \quad (1)$$

où  $NRZ(t)$  est un signal de type NRZ polaire formé à partir de la suite de bits à transmettre en codant les 0 et les 1 par des niveaux 0 et 1 de durée  $T_s$  secondes.  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$  qui peuvent être obtenues sous matlab en utilisant  $rand*2*pi$ .

## 2.2 Génération du signal NRZ

Nous avons généré un signal NRZ à partir de la suite de bits à transmettre (voir figure 2).

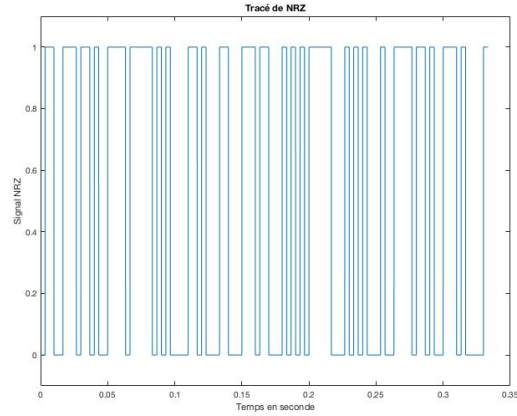


FIGURE 2 – Signal NRZ avec une echelle temporelle en secondes

Nous traçons maintenant la densité spectrale de puissance DSP du signal NRZ théorique ainsi qu'avec la fonction pwelch de matlab (voir figure 3).

$$S_{NRZ}(f) = \frac{1}{4}T_s \text{sinc}(\pi f T_s)^2 + \frac{1}{4}\delta(f) \quad (2)$$

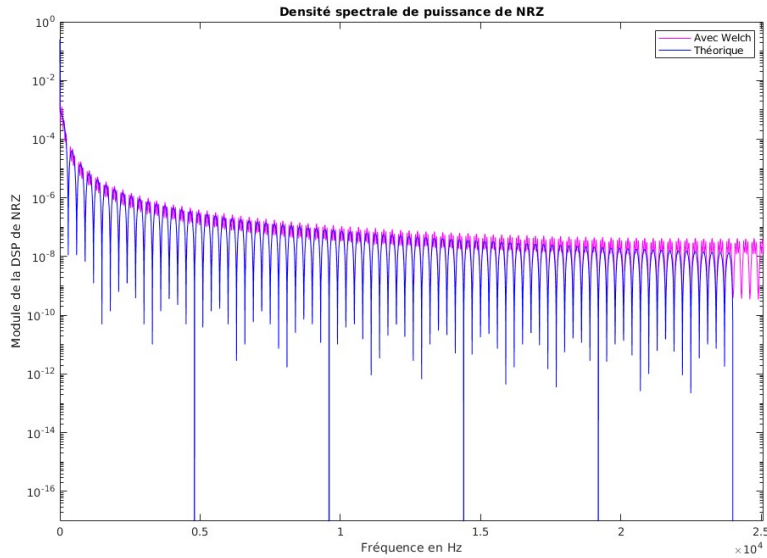


FIGURE 3 – Densité spectrale de puissance du signal NRZ théorique et avec pwelch

### 2.3 Génération du signal modulé en fréquence

À partir du signal NRZ précédent, et de la génération de deux cosinus numériques nous générons le signal modulé en fréquence défini précédemment et échantillonné à  $T_e$ .

**Calcul théorique de  $R_x(\tau)$  :**

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= E[x(t)x(t-\tau)] \\
 R_x(\tau) &= E[(1 - NRZ(t) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)) \\
 &\quad \times [(1 - NRZ(t-\tau)) \cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0) + NRZ(t-\tau) \cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1)]] \\
 R_x(\tau) &= E[(1 - NRZ(t))(1 - NRZ(t-\tau)) \cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0) \cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0) \\
 &\quad + NRZ(t)(NRZ(t-\tau)) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1) \\
 &\quad + (1 - NRZ(t-\tau))NRZ(t) \cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \\
 &\quad + (1 - NRZ(t))NRZ(t-\tau) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1)] \\
 R_x(\tau) &= E[(1 - NRZ(t))(1 - NRZ(t-\tau))] \times \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) \\
 &\quad + R_{NRZ}(\tau) \times \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1 \tau) \\
 &\quad + E[NRZ(t)]E[\cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0)]E[\cos(2\pi F_1 t + \phi_1)] \\
 &\quad - R_{NRZ}(\tau)E[\cos(2\pi F_0(t-\tau) + \phi_0)]E[\cos(2\pi F_1 t + \phi_1)] \\
 &\quad - R_{NRZ}(\tau)E[\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)]E[\cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1)] \\
 &\quad + E[NRZ(t-\tau)]E[\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)]E[\cos(2\pi F_1(t-\tau) + \phi_1)] \\
 R_x(\tau) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau)[1 - 1 + R_{NRZ}(\tau)] + R_{NRZ}(\tau) \times \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1 \tau) \\
 R_x(\tau) &= \frac{1}{2} R_{NRZ}(\tau)(\cos(2\pi F_0 \tau) + \cos(2\pi F_1 \tau))
 \end{aligned} \tag{3}$$

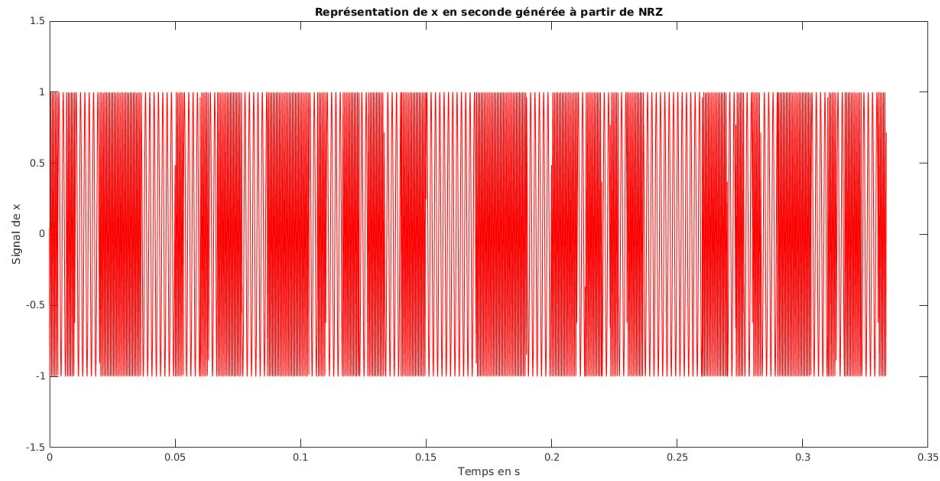


FIGURE 4 – Signal modulé en fréquence de  $x(t)$

Nous calculons maintenant la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence, la DSP théorique.

**Calcul théorique de la DSP :**

$$\begin{aligned}
S_{NRZ}(f) &= \frac{1}{4}NRZ(f) * (\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0) + \delta(f - F_1) + \delta(f + F_1)) \\
S_{NRZ}(f) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi(f - F_0)T_s) + \frac{1}{4}\delta(f - F_0) + \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi(f + F_0)T_s) + \frac{1}{4}\delta(f + F_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi(f - F_1)T_s) + \frac{1}{4}\delta(f - F_1) + \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi(f + F_1)T_s) + \frac{1}{4}\delta(f + F_1) \right]
\end{aligned} \tag{4}$$

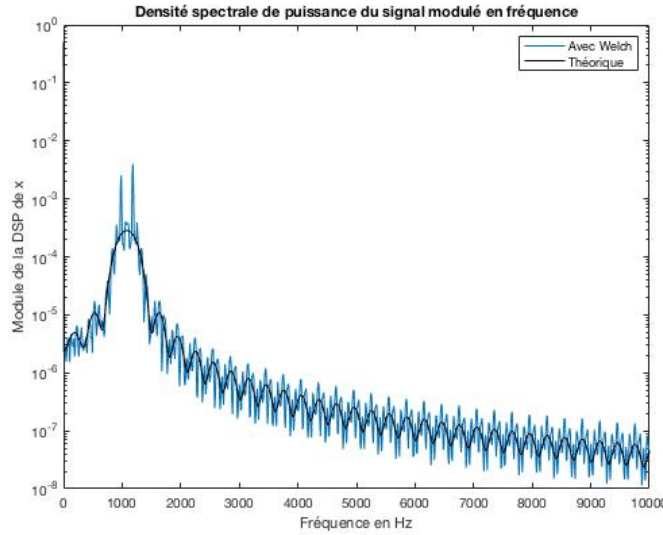


FIGURE 5 – Densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence avec pwelch et théorique

### 3 Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien

Nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien et qui modélise les perturbations introduites.

La puissance du bruit Gaussien à ajouter devra être déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité pour la transmission donné en dB :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_b}$$

où  $P_x$  représente la puissance du signal modulé en fréquence et  $P_b$  la puissance du bruit ajouté.

### 4 Démodulation par filtrage

La figure 6 présente le récepteur implanté pour retrouver, à partir du signal modulé en fréquence bruité, le message binaire envoyé.

Un filtre passe-bas permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence  $F_0 = 6000\text{Hz}$ , tandis qu'un filtre passe-haut permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence  $F_1 = 2000\text{Hz}$ . Une détection d'énergie réalisée tous les  $T_s$  secondes permet de récupérer, à partir des signaux filtrés, les bits 0 et 1 transmis.

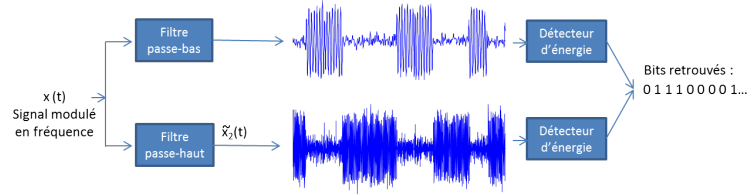


FIGURE 6 – Démodulation par filtrage.

#### 4.1 Synthèse du filtre passe-bas

Nous réalisons un filtre passe-bas. Nous affichons la réponse impulsionnelle ainsi que la sortie du filtre d'ordre 61.

$$H_{IPB}(f) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k y^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} a_k y^{-k}}$$

**Remarque : Passage d'un filtrage analogique à un filtrage numérique**

$$\Pi_{\Delta(f)} = \Delta f \text{sinc}(\pi \Delta f t)$$

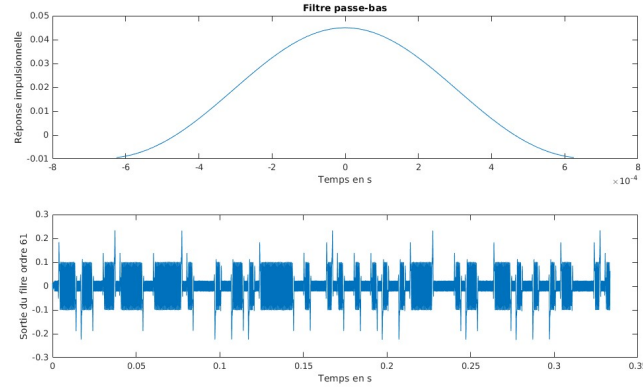


FIGURE 7 – Filtre passe-bas.

#### 4.2 Synthèse du filtre passe-haut

Nous réalisons un filtre passe-haut à partir du filtre passe-haut. Nous affichons la réponse impulsionnelle ainsi que la sortie du filtre d'ordre 61. La réponse impulsionnelle idéale d'un filtre passe-haut est

$$H_{IPH}(\tilde{f}) = 1 - H_{IPB}(\tilde{f}) \quad (5)$$

avec  $\tilde{f} = \frac{f}{F_c}$

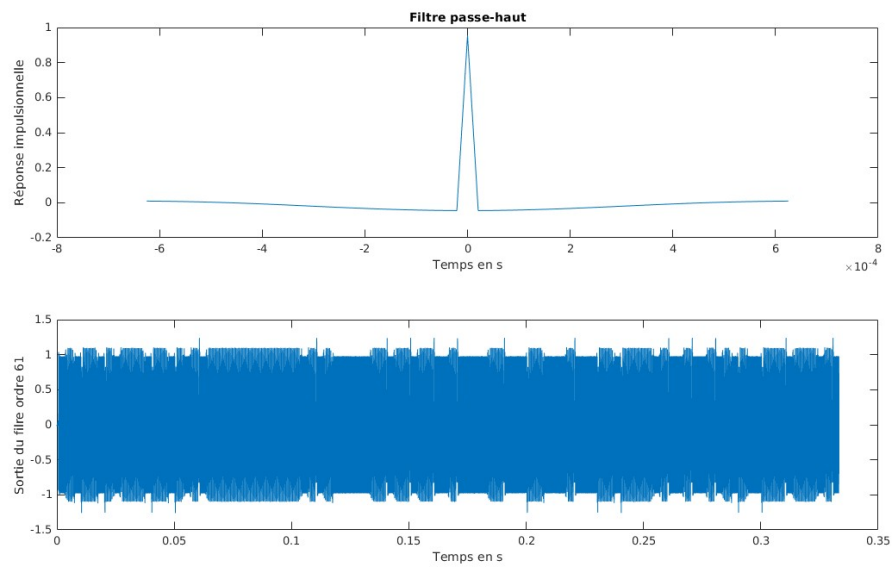


FIGURE 8 – Filtre passe-haut.

### 4.3 Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61

Nous pouvons comparer les résultats obtenus avec les deux filtres.

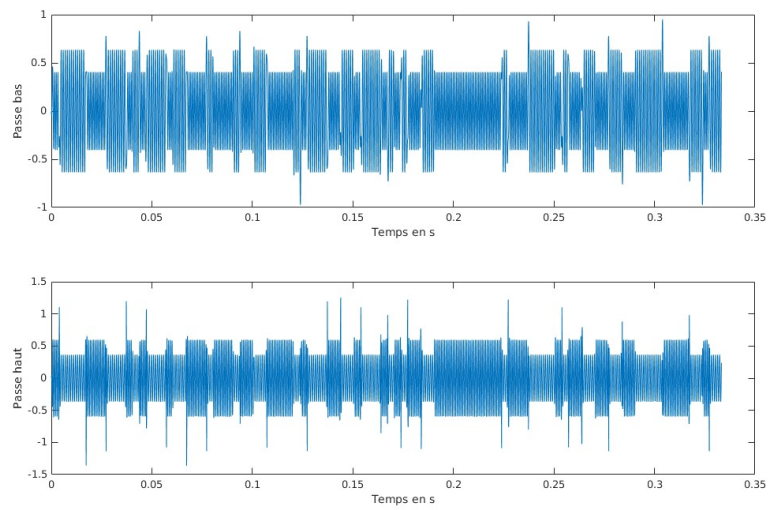


FIGURE 9 – Les deux filtres à l'ordre 61.



## 4.4 Filtrage

Les 30 premiers points des signaux filtrés à l'aide de `filter.m` ne sont pas bons. En effet, il faut prendre en compte le centrage en 0 avec la partie réelle et imaginaire.

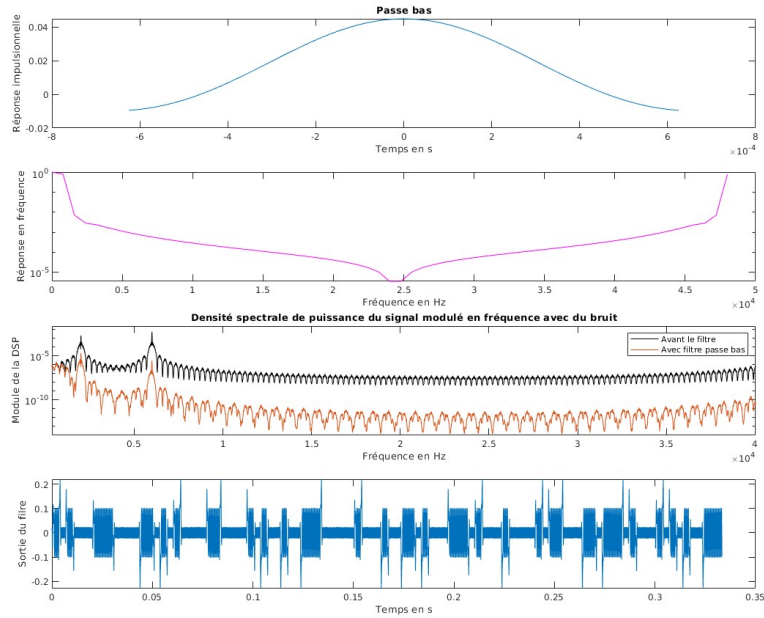


FIGURE 10 – Tracés pour un filtre passe bas.

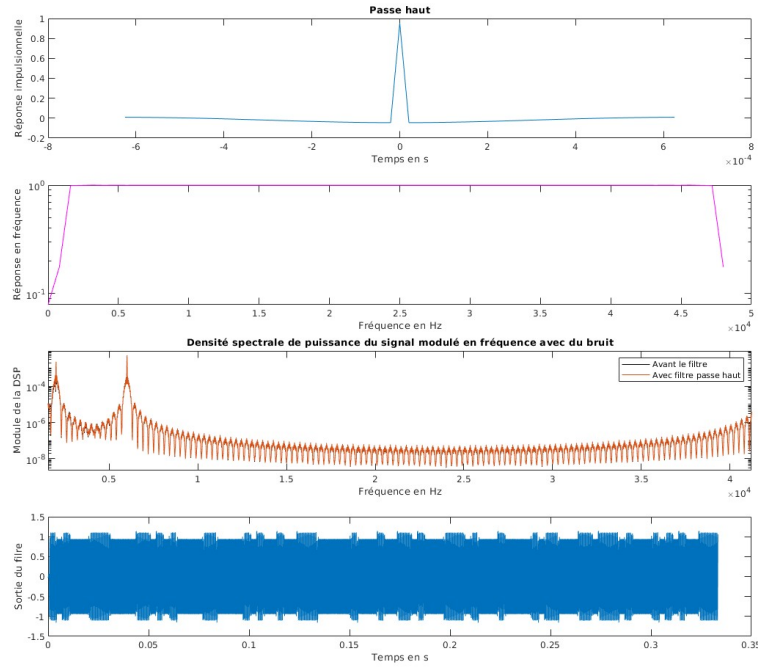


FIGURE 11 – Tracés pour un filtre passe haut.

## 4.5 Modification du démodulateur

### 4.5.1 Modification de l'ordre du filtre

Nous allons considérer un filtre d'ordre supérieur 201. Nous ne retrouvons pas les mêmes résultats que précédemment. Ceci s'explique par le fait qu'en augmentant l'ordre du signal on "décale" le signal lors de la démodulation d'où l'augmentation du TEB. Il faut donc considérer le décalage initial pour retrouver le bon résultat.

### 4.5.2 Modification des fréquences

Les fréquences  $F_0$  et  $F_1$  sont très proches, le TEB ne peut donc pas être nul avec un ordre bas avec notre filtre. En augmentant l'ordre, nous pourrions utiliser des fréquences plus proches.

## 5 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

### 5.1 Contexte de synchronisation idéale

La figure 12 présente le récepteur implanté afin de retrouver, dans un contexte de synchronisation idéale, le message binaire envoyé à partir du signal modulé en fréquence suivant la recommandation V21.

#### 5.1.1 Principe de fonctionnement de ce récepteur

Le problème de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est un problème important lorsque l'on réalise une transmission. Les deux doivent être parfaitement synchronisés en temps et en fréquence pour que le démodulateur implanté précédemment fonctionne, ce qui en pratique n'est

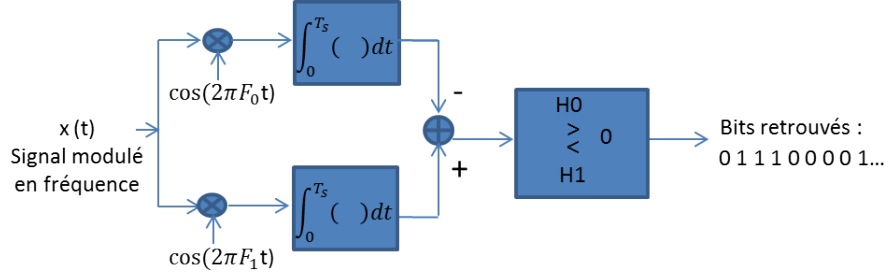


FIGURE 12 – Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.

pas possible. Avec une erreur de phase porteuse, le modem implanté précédemment ne fonctionne plus. Nous avons un retard par rapport au signal de départ. En utilisant le sinus et le cosinus, avec la norme V21, des simplifications sont possibles et nous obtenons ainsi le bon résultat.

### 5.1.2 Résultats obtenus

Dans un contexte de synchronisation idéale, nous retrouvons bien le signal initial.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
 &= \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
 &= \int_0^{T_s} \frac{1 + \cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0)}{2} dt \\
 &= \frac{T_s}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0) dt \\
 &= \frac{T_s}{2} + \left[ \frac{1}{4\pi F_0} \sin(4\pi F_0 t + 2\phi_0) \right]_0^{T_s} \\
 &= \frac{T_s}{2} + \frac{1}{8\pi F_0} \left( \sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0) \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

**On remarque que, comme**  $|\sin(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$

**Si**  $T_s \gg \frac{1}{2\pi F_0}$

**Alors**  $\frac{T_s}{2} + \frac{1}{8\pi F_0} \left( \sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0) \right) \approx \frac{T_s}{2}$

**Donc**  $\int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \approx \frac{T_s}{2}$

De même,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\
&= \frac{T_s}{2} + \frac{1}{8\pi F_1} \left( \sin(4\pi F_1 T_s + 2\phi_1) - \sin(2\phi_1) \right) \\
\text{Si } T_s &\gg \frac{1}{2\pi F_1} \\
\text{Alors } \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt &\approx \frac{T_s}{2}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \left( \cos(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \phi_1) + \cos(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \phi_1) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi(F_0 - F_1)} \sin(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \phi_1) + \frac{1}{2\pi(F_0 + F_1)} \sin(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \phi_1) \right]_0^{T_s} \\
&= \frac{1}{4\pi(F_0 - F_1)} \left( \sin(2\pi(F_0 - F_1)T_s + \phi_0 - \phi_1) - \sin(\phi_0 - \phi_1) \right) \\
&+ \frac{1}{4\pi(F_0 + F_1)} \left( \sin(2\pi(F_0 + F_1)T_s + \phi_0 + \phi_1) - \sin(\phi_0 + \phi_1) \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

Grâce aux calculs, comme  $\frac{T_s}{2} > 0$  nous pouvons obtenir le signe du signal modulé en fréquence et donc savoir s'il s'agit d'un 0 ou d'un 1 et ainsi retrouver le signal initial.

## 5.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

Le problème de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est un problème important lorsque l'on réalise une transmission. Les deux doivent être parfaitement synchronisés en temps et en fréquence pour que le démodulateur implanté précédemment fonctionne, ce qui en pratique n'est bien entendu pas possible. Afin que le modem puisse continuer à fonctionner en présence d'une erreur de phase porteuse, celui-ci doit être modifié. La figure 13 présente un démodulateur permettant de s'affranchir de problèmes de synchronisation de phase entre les oscillateurs d'émission et de réception.

### 5.2.1 Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

Avec une erreur de phase porteuse, le modem implanté précédemment ne fonctionne plus. Nous avons un retard par rapport au signal de départ.

### 5.2.2 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

Cette fois nous considérons deux cosinus et deux sinus avec un décalage de phases différentes. Les décalages de phase se simplifient et nous obtenons le bon résultat. Le TEB obtenu sans bruit est bien égal à 0.

Voici le calcul théorique pour la seconde version du modem V21.

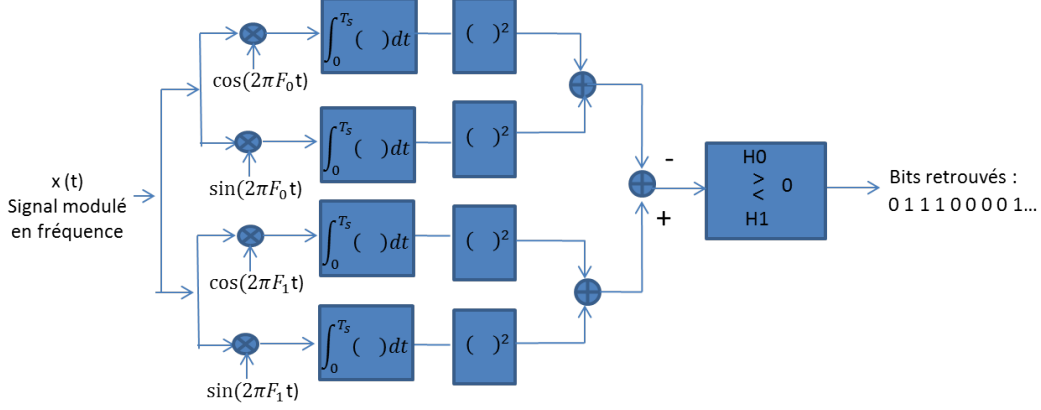


FIGURE 13 – Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \left( \cos(4\pi F_0 t + \phi_0 + \theta_0) + \cos(\phi_0 - \theta_0) \right) dt \\
 &= \frac{T_s}{2} \cos(\phi_0 - \theta_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4\pi F_0} \sin(4\pi F_0 t + \phi_0 + \theta_0) \right]_0^{T_s} \\
 &= \frac{T_s}{2} \cos(\phi_0 - \theta_0) + \frac{1}{8\pi F_0} \left( \sin(4\pi F_0 T_s + \phi_0 + \theta_0) - \sin(\phi_0 + \theta_0) \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

**On remarque que**

$$\frac{T_s}{2} \cos(\phi_0 - \theta_0) + \frac{1}{8\pi F_0} \left( \sin(4\pi F_0 T_s + \phi_0 + \theta_0) - \sin(\phi_0 + \theta_0) \right) \approx \frac{T_s}{2} \cos(\phi_0 - \theta_0)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \sin(2\pi F_0 t + \theta_0) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \left( \sin(4\pi F_0 t + \theta_0 + \phi_0) + \sin(\theta_0 - \phi_0) \right) dt \\
 &= \frac{T_s}{2} \sin(\phi_0 - \theta_0) + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4\pi F_0} \cos(4\pi F_0 t + \theta_0 + \phi_0) \right]_0^{T_s} \\
 &= \frac{T_s}{2} \sin(\phi_0 - \theta_0) + \frac{1}{8\pi F_0} \left( \cos(\phi_0 + \theta_0) - \cos(4\pi F_0 T_s + \phi_0 + \theta_0) \right)
 \end{aligned} \tag{10}$$

**On remarque que**

$$\frac{T_s}{2} \sin(\phi_0 - \theta_0) + \frac{1}{8\pi F_0} \left( \sin(4\pi F_0 T_s + \phi_0 + \theta_0) - \sin(\phi_0 + \theta_0) \right) \approx \frac{T_s}{2} \sin(\phi_0 - \theta_0)$$

**On a alors, après sommation des carrés,**  $\frac{T_s^2}{4} \cos^2(\phi_0 - \theta_0) + \frac{T_s^2}{4} \sin^2(\phi_0 - \theta_0) = \frac{T_s^2}{4} > 0$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \cos(2\pi F_1 t + \theta_1) dt \\
&= \frac{1}{4\pi(F_0 - F_1)} \left( \sin(2\pi(F_0 - F_1)T_s + \phi_0 - \theta_1) - \sin(\phi_0 - \theta_1) \right) \\
&+ \frac{1}{4\pi(F_0 + F_1)} \left( \sin(2\pi(F_0 + F_1)T_s + \phi_0 + \theta_1) - \sin(\phi_0 + \theta_1) \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \sin(2\pi F_1 t + \theta_1) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \left( \sin(2\pi(F_1 - F_0)t + \theta_1 - \phi_0) + \sin(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \theta_1) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2\pi(F_0 - F_1)} \cos(2\pi(F_0 - F_1)t + \phi_0 - \theta_1) - \frac{1}{2\pi(F_0 + F_1)} \cos(2\pi(F_0 + F_1)t + \phi_0 + \theta_1) \right]_0^{T_s} \\
&= \frac{1}{4\pi(F_1 - F_0)} \left( \cos(\phi_0 - \theta_1) - \cos(2\pi(F_0 - F_1)T_s + \phi_0 - \theta_1) \right) \\
&+ \frac{1}{4\pi(F_1 + F_0)} \left( \cos(\phi_0 + \theta_1) - \cos(2\pi(F_0 + F_1)T_s + \phi_0 + \theta_1) \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

Après l'élévation au carré des deux intégrales et la différence, en comparant les signes, nous pouvons retrouver la valeur du bit du signal initial. Ce nouveau filtre élimine la contrainte du déphasage grâce à la somme des carrés des cosines et sinus avec deux déphasages aléatoires différents.

## 6 Démodulation du signal

Grâce au dernier démodulateur, nous avons pu obtenir l'image fournie démodulée. Il s'agit de Charles Camichel, le fondateur de l'N7.

## 7 Conclusion

Ce projet nous a permis d'utiliser l'ensemble de nos connaissances acquis en notre cours de Traitement du Signal ainsi que lors des TP et TDs.

Après avoir implanté un modem en fréquence, nous avons eu l'occasion de démoduler par filtrage, avec un filtre passe haut et un filtre passe bas. Et finalement nous avons réussi à implanter un modem de fréquence selon la recommandation V21 qui reconstruit le signal initial, nous avons retrouvé une image.



FIGURE 14 – Demodulation de l'image