第七章 埃尔米特（Hermite）多项式

————————特殊函数之三

§7.1 Hermite多项式的定义

1. ν阶Hermite方程的解

ν阶Hermite方程 $y''-2xy'+2\nu y=0$

用幂级数法求解该方程，设方程的解为 $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$

代入方程，整理，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}-2(k-\nu)c_k]x^k=0$$

从而有 $$c_{k+2}=\frac{2(k-\nu)}{(k+2)(k+1)}c_k \qquad k=0,1,2,\cdots$$

由上式知 $$c_2=-\frac{2\nu}{2!}c_0$$

$$c_{k+2} = \frac{2(k-v)}{(k+2)(k+1)} c_k \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

$$c_2 = -\frac{2v}{2!} c_0$$

$$c_4 = -\frac{-2(v-2)}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{2^2 v(v-2)}{4!} c_0$$

$$c_6 = -\frac{2(v-4)}{6 \cdot 5} c_4 = -\frac{2^3 v(v-2)(v-4)}{6!} c_0$$

$\cdots\cdots$

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{2^m v(v-2)\cdots(v-2m+2)}{(2m)!} c_0$$

$\cdots\cdots$

$$c_{k+2}=\frac{2(k-v)}{(k+2)(k+1)}c_k \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$c_3=-\frac{2(v-1)}{3!}c_1$$

$$c_5=-\frac{2(v-3)}{5\cdot 4}c_3=\frac{2^2(v-1)(v-3)}{5!}c_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_{2m+1}=(-1)^m\frac{2^m(v-1)(v-3)\cdots(v-2m+1)}{(2m+1)!}c_1 \quad \cdots\cdots$$

从而得方程的解为

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m}x^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m+1}x^{2m+1}$$

$$=c_0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m v(v-2)\cdots(v-2m+2)}{(2m)!}x^{2m}$$

$$+c_1\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m(v-1)(v-3)\cdots(v-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m}x^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m+1}x^{2m+1}$$

$$=c_0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m v(v-2)\cdots(v-2m+2)}{(2m)!}x^{2m}$$

$$+c_1\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m(v-1)(v-3)\cdots(v-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

$$=y_1(x)+y_2(x)$$

其中 c_0,c_1 是任意常数，又 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的解，故上式是方程的通解。

两个级数在实数域内收敛。

2. Hermite多项式

考察系数递推关系式 $c_{k+2}=\dfrac{2(k-v)}{(k+2)(k+1)}c_k \qquad k=0,1,2,\cdots$

当v是正整数n（包括零）时 $c_{n+2}=c_{n+4}=\cdots=0$

进一步知，当n是偶数（包括零）时，$y_1(x)$变成了多项式，$y_2(x)$仍为无穷级数；当n是奇数时，$y_2(x)$变成了多项式，$y_1(x)$仍为无穷级数。

为了了解上述多项式的系数形式，改写递推关系式为

$$c_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{2(n-k)}c_{k+2} \qquad k\le n-2$$

则
$$c_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}c_n$$

$$c_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{2(n-k)} c_{k+2} \qquad k \le n-2$$

则

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\cdot 2} c_n$$

$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 4} c_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 2\cdot 4} c_n$$

……

$$\longrightarrow \quad c_{n-2m} = (-1)^m \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2m+1)}{2^m \cdot 2\cdot 4\cdots 2m} c_n$$

$$= (-1)^m \frac{n!}{2^{2m} m!(n-2m)!} c_n$$

取 $c_n = 2^n$ 则

$$c_{n-2m} = (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} 2^{n-2m}$$

当n为偶数时，有系数 $c_n, c_{n-2}, \cdots, c_2, c_0$ ，对应多项式

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$$ 为关于x的偶次方的多项式

$$= (2x)^n - \frac{n!}{(n-2)!} (2x)^{n-2} + \cdots$$

当n为奇数时，有系数 $c_n, c_{n-2}, \cdots, c_3, c_1$ ，对应多项式

n次Hermite多项式

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$$ 为关于x的奇次方的多项式

统一写法，有

$$H_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$$

前几次Hermite多项式

$$H_0(x)=1 \qquad H_1(x)=2x$$

$$H_2(x)=4x^2-2 \qquad H_3(x)=8x^3-12x$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

§7.2 Hermite多项式的母函数与递推公式

令 $w(x,t)=e^{2xt-t^2}$ 将其展开成变量t的Taylor级数，则有

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)\bigg|_{t=0} t^n \qquad |t|<\infty$$

$$\overset{\Delta}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^n$$

则 $H_n(x)$ 是n次Hermite多项式。

证明:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2te^{2xt-t^2}=2tw$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=2(x-t)e^{2xt-t^2}=2(x-t)w$$

$$\left.\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^n \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2te^{2xt-t^2} = 2tw \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n'(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}H_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n-1)!}H_{n-1}(x)t^n$$

比较同次幂系数有

$$H_0'(x) = 0$$

$$\frac{1}{n!}H_n'(x) = \frac{2}{(n-1)!}H_{n-1}(x)$$

即

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= 2(x-t)e^{2xt-t^2} = 2(x-t)w \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} H_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{n!} H_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} H_n(x) t^{n+1}$$

即 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} H_{n+1}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{n!} H_n(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!} H_{n-1}(x) t^n$$

比较同次幂系数有 $H_1(x) = 2xH_0(x)$

$$\frac{n+1}{(n+1)!} H_{n+1}(x) = \frac{2x}{n!} H_n(x) - \frac{2}{(n-1)!} H_{n-1}(x)$$

即 $$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} &H_n(x)-2xH_{n-1}(x)+2(n-1)H_{n-2}(x)=0 \\ &H_n'(x)=2nH_{n-1}(x), \quad n=1,2,\cdots \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow H_n(x)-\frac{2x}{2n}H_n'(x)+\frac{2(n-1)}{2(n-1)2n}H_n''(x)=0$$

$$\Longrightarrow H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

$\Longrightarrow H_n(x)$**是Hermite方程的解，故是Hermite多项式。**

定义：称$w(x,t)$**是Hermite多项式的母函数。**

Hermite多项式的微分形式：

Hermite多项式的微分形式：

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)\bigg|_{t=0} = e^{x^2}\left(\frac{\partial^n e^{-(x-t)^2}}{\partial t^n}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$= (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n}\right)\bigg|_{u=x} = (-1)^n e^{x^2}\frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n}$$

Hermite多项式的递推公式：

$$H_0'(x) = 0$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$H_1(x) = 2xH_0(x)$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

§7.3 Hermite多项式的正交性及其应用

结论： Hermite多项式 $\{H_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上关于权函数正交，即 $f(x)=e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

证明从略。

结论： 设$f(x)$为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，且满足

（1）$f(x)$**在任何有限区间** $(-a,a)$ **内都是分段光滑的函数；**

（2） $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} f^2(x) dx < +\infty$$

则$f(x)$必能展成如下形式的级数：

在连续处有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n(x) \qquad -\infty<x<+\infty$

在不连续处有 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

其中 $C_n=\dfrac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}f(x)H_n(x)dx$

例2：将$f(x)=e^x$在$(-\infty,+\infty)$内展成Hermite多项式的级数形式

解：设 $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n(x)$$

则

$$C_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^xH_n(x)\mathrm{d}x=\frac{-1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^x d(e^{-x^2}H_{n-1}(x))$$

$$=\frac{-1}{2^n n!\sqrt{\pi}}[e^x\cdot e^{-x^2}H_{n-1}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^xe^{-x^2}H_{n-1}(x)dx]$$

$$=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^xe^{-x^2}H_{n-1}(x)dx$$

……

$$=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^xe^{-x^2}H_0(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}=\frac{e^{\frac{1}{4}}}{2^n n!}$$

注:

$$e^{-x^2}H_n(x)=-\frac{d}{dx}(e^{-x^2}H_{n-1}(x))$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+x}dx=\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}$$

故 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2^n n!} H_n(x)$$