

Poglavlje 3

Matematički temelji tehnika kompresije s gubicima

Da bi se razumjele tehnike kompresije podataka koje će biti opisane u nastavku potrebno je biti upoznat sa odgovarajućom matematičkom podlogom. U skladu s tim, u ovom poglavlju će prvo biti opisan koncept vektorskog prostora, a zatim će se taj koncept kasnije koristiti pri opisu Fourierovih redova i Fourierove transformacije. Ipak, treba istaknuti da će na ovom mjestu biti opisan samo onaj dio matematičke podloge koji ima općeniti karakter i koji je zajednički većem dijelu tehnika kompresije podataka s gubicima. Isto tako, treba posebno naglasiti da opis matematičke podloge u ovom poglavlju neće biti rigorozan u matematičkom smislu u onom obimu kojeg inače zahtijeva matematička literatura. Odnosno, matematička podloga će biti dâta u obimu i na način koji je dovoljan za razumijevanje tehnika i algoritama kompresije podataka. Potpuniji i rigorozniji prikaz matematičke podloge čitalac može naći u odgovarajućoj literaturi iz područja matematike.

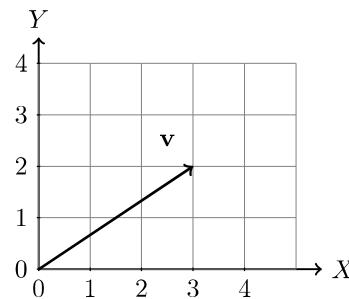
3.1 Vektori, vektorski prostori i skalarni proizvod vektora

Primjer vektora u dvodimenzionalnom prostoru je ilustriran na slici 3.1. Vektori se mogu prikazati na različite načine. Naprimjer, vektor \mathbf{v} sa slike 3.1 se može prikazati kao težinska suma jediničnih vektora u_x i u_y u X i Y smjeru:

$$\mathbf{v} = 3u_x + 2u_y.$$

Isto tako, vektor \mathbf{v} se može prikazati pomoću niza čije komponente su koeficijenti jediničnog vektora:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Slika 3.1: Vektor

Za mnoge primjene korisno je rastaviti vektore na vektorske komponente u koordinatnom sistemu. Vektorske komponente su paralelne s koordinatnim osima, pa se svaka od tih vektorskih komponenti može opisati brojem (skalarom), kojim treba pomnožiti jedinični vektor. U primjeru vektora \mathbf{v} na slici 3.1 skalarne vrijednosti su 3 i 2. Međutim, često se pojavljuju situacije u kojima nije očito kako pronaći koeficijente kojima treba pomnožiti jedinične vektore da bi se dobio taj vektor, pa nam je potreban neki postupak kojim dolazimo do tih koeficijenata.

Neka su zadana dva vektora \mathbf{a} i \mathbf{b}

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Skalarni proizvod vektora je binarna operacija koja kao argumente uzima dva vektora, a rezultat joj je skalar. Skalarni proizvod vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} je definiran na sljedeći način:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{3.1}$$

Uzmimo npr. da su vektori \mathbf{a} i \mathbf{b} zadani na sljedeći način:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tada je njihov skalarni proizvod:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17.$$

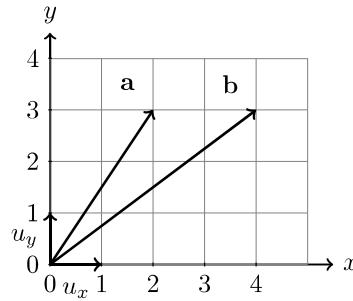
Dva vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} su ortogonalna ako je njihov skalarni proizvod jednak nuli, tj. ako vrijedi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Za skup vektora kažemo da je ortogonalan ako je svaki vektor iz tog skupa ortogonalan sa svakim drugim vektorom iz tog skupa.

Jedinične ortogonalne vektore u_x i u_y možemo zapisati na sljedeći način:

$$u_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 3.2: Jedinični vektori i vektori \mathbf{a} i \mathbf{b}

Jedinični vektori u_x i u_y , kao i vektori \mathbf{a} i \mathbf{b} , prikazani su na slici 3.2. Istaknimo da se pri rastavljanju nekog vektora \mathbf{a} na njegove vektorske komponente, koeficijent koji stoji uz jedinične vektore dobiva skalarnim proizvodom vektora \mathbf{a} i odgovarajućeg jediničnog vektora. Naprimjer, koeficijent a_1 vektora

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot u_x + a_2 \cdot u_y,$$

koji stoji uz jedinični vektor u_x se dobiva kao

$$\mathbf{a} \cdot u_x = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1,$$

dok se koeficijent a_2 koji stoji uz jedinični vektor u_y dobiva na sljedeći način:

$$\mathbf{a} \cdot u_y = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2.$$

Možemo reći da u određenom smislu skalarni proizvod dva vektora daje mjeru njihove "sličnosti". Ipak, istaknimo da nam ovakav način definiranja pojma "sličnosti" vektora i njihovog skalarnog proizvoda služi samo kao jedna od mogućih interpretacija, te ovu neformalnu usporedbu treba shvatiti restriktivno.

Prethodno kratko podsjećanje na pojmove kao što su vektor, skalarni proizvod, itd., zapravo nam treba poslužiti kao uvod za lakše razumijevanje koncepata koji

će biti opisani u nastavku. Naime, u nastavku će za potrebe opisa relevantnog matematičkog aparata za tehnike kompresije podataka, opisani koncepti vektora, slalarnog proizvoda, itd., biti poopćeni i na nizove i funkcije.

3.1.1 Vektorski prostori

Vektorski prostor V je matematička struktura koju čini skup objekata koje je moguće međusobno zbrajati i množiti članovima iz odabranog skupa skalara (\mathbb{R} ili \mathbb{C}). Pod *zbrajanjem vektora* podrazumijevamo dobivanje novog vektora čije komponente su jednake zbroju komponenti vektora koji se zbrajaju. Naprimjer, ako imamo vektore

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

tada je zbrajanje vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} definirano na sljedeći način:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Objekte iz strukture vektorskog prostora nazivamo *vektorima*. Priroda objekata iz skupa V je irelevantna. Vektorski prostor je realan ako su skalari realni brojevi, a kompleksan ako su skalari kompleksni brojevi. Nadalje, rezultat operacija zbrajanja i množenja vektora iz nekog vektorskog prostora V su također elementi tog vektorskog prostora. Za sve elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ i sve skalare α, β vrijede tzv. *svojstva operacija zbrajanja i množenja*.

Svojstva operacije zbrajanja su:

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
2. Postoji element $\mathbf{0} \in V$, takav da vrijedi $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, za sve $\mathbf{x} \in V$. Element $\mathbf{0}$ se naziva aditivni identitet.
3. Za svaki $\mathbf{x} \in V$, postoji $-\mathbf{x} \in V$, takav da je $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
4. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (komutativnost).

Svojstvo (2) govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje. Svojstvo (3) nalaže postojanje suprotnog elementa.

Svojstva operacije množenja su:

5. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
7. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x}) = \alpha\beta\mathbf{x}$.
8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $-1 \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$, $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Svojstvo (5) se naziva distributivnost množenja prema zbrajanju vektora, dok se svojstvo (6) naziva distributivnost množenja prema zbrajanju skalara. Svojstvo (7) se naziva svojstvo kvaziasocijativnosti. Svojstvo (8) onemogućava degenerirane strukture.

Element koji je označen sa $\mathbf{0}$ je neutralni element za zbrajanje i zove se *nulvektor*. Element koji je nulvektor ima veličinu nula.

Jednostavan primjer vektorskog prostora je skup realnih brojeva. U ovom slučaju, nula je nulvektor, tj. element koji ima svojstvo neutralnosti za operaciju zbrajanja. Lako možemo vidjeti da skup realnih brojeva zadovoljava prethodno navedena svojstva zbrajanja i množenja.

Nadalje, napomenimo na ovom mjestu da je pojam vektorskog prostora zapravo općenitiji od uobičajenog poimanja vektora. Razmotrimo, npr. skup svih mogućih funkcija $f(t) \in V$, koje zadovoljavaju sljedeći kriterij:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.3)$$

Funkcije koje zadovoljavaju izraz 3.3 nazivamo *funkcije s konačnom energijom*. Ako su funkcije $f(t)$ i $g(t)$ funkcije s konačnom energijom, te ako je α neki skalar, onda su i funkcije $f(t) + g(t)$ i $\alpha f(t)$, također funkcije s konačnom energijom. Na kraju, ako je funkcija $f(t)$ funkcija s konačnom energijom, onda je i funkcija $-f(t)$ isto tako funkcija s konačnom energijom.

Razmotrimo da li za skup svih funkcija $f(t) \in V$ s konačnom energijom zadovoljava svojstva zbrajanja. Za svojstva zbrajanja imamo da vrijedi sljedeće:

1. $(f(t) + g(t)) + h(t) = f(t) + (g(t) + h(t))$.
2. Postoji funkcija $\theta(t)$, takva da vrijedi $f(t) + \theta(t) = \theta(t) + f(t) = f(t)$, za sve funkcije $f(t) \in V$. Funkciju $\theta(t)$ definiramo tako da je jednaka nuli za sve vrijednosti t , jer ovako definirana funkcija predstavlja neutralni element iz vektorskog prostora V , za operaciju zbrajanja. Dakako, ovako definirana funkcija $\theta(t)$ je također funkcija s konačnom energijom.
3. Za svaku $f(t) \in V$, postoji $-f(t) \in V$, takva da je $f(t) + (-f(t)) = -f(t) + f(t) = \theta(t)$.
4. $f(t) + g(t) = g(t) + f(t)$ (komutativnost).

Prema tome, zaključujemo da skup svih funkcija $f(t)$ s konačnom energijom zadovoljava svojstva zbrajanja.

Nadalje, razmotrimo da li skup svih funkcija $f(t)$ s konačnom energijom zadovoljava svojstva množenja. Za svojstva množenja imamo da vrijedi sljedeće:

5. $\alpha(f(t) + g(t)) = \alpha f(t) + \alpha g(t).$
6. $(\alpha + \beta)f(t) = \alpha f(t) + \beta f(t).$
7. $(\alpha\beta)f(t) = \alpha(\beta f(t)) = \alpha\beta f(t).$
8. $1 \cdot f(t) = f(t), -1 \cdot f(t) = -f(t), 0 \cdot f(t) = \theta(t).$

Dakle, zaključujemo da skup svih funkcija $f(t)$ s konačnom energijom zadovoljava i svojstva množenja.

Budući da je pokazano da su zadovoljena i svojstva zbrajanja i svojstva množenja, zaključujemo da skup svih funkcija $f(t)$ s konačnom energijom konstituira vektorski prostor. Taj skup funkcija ćemo označavati kao $L_2(f)$ ili jednostavno kao L_2 .

Pod pojmom podprostora S nekog vektorskog prostora V ćemo podrazumijevati podskup skupa V , koji zadovoljava svojstva zbrajanja i množenja. Osim toga, da bi skup S bio podprostor, potrebno je da vrijedi i sljedeće:

- Ako su vektori \mathbf{x} i \mathbf{y} iz skupa S , onda je i $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ iz skupa S .
- Ako je x iz skupa S , onda je i $\alpha\mathbf{x}$ iz skupa S , gdje je α neki skalar.

3.1.2 Baza vektorskog prostora

Pojam *baze vektorskog prostora* je vrlo bitan za razumijevanje pojmove i tehnika koje će biti opisane u nastavku ove knjige. Prvo ćemo definirati pojам nezavisnosti vektora, budući da se na tom pojmu temelji i definicija baze vektorskog prostora. Vektori $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ su linearne nezavisne onda i samo onda ako se niti jedan od njih ne može prikazati kao linearne kombinacije ostalih vektora, odnosno oni su linearne zavisne onda i samo onda ako se barem jedan od njih može prikazati kao linearne kombinacije ostalih vektora.

Kao direktna posljedica spomenute definicije nezavisnosti vektora, pokazuje se da je skup vektora $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ linearne nezavisne ako i samo ako izraz

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_N\mathbf{x}_N = \mathbf{0},$$

implicira da vrijedi sljedeće:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_N = 0,$$

za sve $i = 1, 2, \dots, N$. Dokaz za ovu tvrdnju se može naći u većini knjiga koje se bave linearном algebrrom.

Skup vektora koji se može dobiti svim mogućim linearnim kombinacijama vektora iz nekog linearne nezavisnog skupa \mathbf{X} razapinje neki vektorski prostor. Skup vektora \mathbf{X} predstavlja bazu tog vektorskog prostora. Dakle, bazu nekog vektorskog prostora V sačinjava najveći broj linearne nezavisnih vektora tog prostora. Za neki dati vektorski prostor može postojati više od jedne baze.

Broj baznih vektora koji su potrebni za generiranje vektorskog prostora se naziva *dimenzija* vektorskog prostora. Razmotrimo nekoliko jednostavnih primjera. Svaka dva vektora jednog pravca su linearne zavisne, pa zaključujemo da se baza sastoji od jednog jedinog vektora. Nadalje, svaka tri vektora jedne ravnine su linearne zavisne, pa zaključujemo da se baza sastoji od dva vektora. Svaka četiri vektora trodimenzionalnog prostora su linearne zavisne, pa zaključujemo da se baza sastoji od tri vektora. Dimenzija prostora svih neprekidnih funkcija na intervalu $[0,1]$ je beskonačna. Za neku zadatu bazu, moguće je za svaki vektor u prostoru pronaći prikaz koji se temelji na toj bazi. Istaknimo da je prikaz vektora u nekoj zadanoj bazi jedinstven.

3.1.3 Skalarni proizvod vektora

Skalarni proizvod dva vektora \mathbf{x} i \mathbf{y} , što označavamo kao:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

je funkcija koja svakom paru vektora pridružuje neki broj (skalar). Skalarni proizvod zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$, gdje * označava konjugirano kompleksni broj.
2. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.
3. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, pri čemu vrijedi $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vrijednost $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ označavamo sa $\|\mathbf{x}\|$, te je nazivamo *norma* vektora \mathbf{x} . Norma je zapravo koncept koji je analogan uobičajenom poimanju pojma udaljenosti.

3.1.4 Ortogonalni i ortonormirani skupovi

Ortogonalnost u algebri i geometriji predstavlja relaciju između dva ili više objekata pri čemu isti ispunjavaju određene uvjete. U elementarnoj geometriji

se kaže da su dvije prave u ravni međusobno ortogonalne ako i samo ako je ugao između njih 90° . Neka je V neki vektorski prostor. Kaže se da su vektori \mathbf{x} i \mathbf{y} iz V međusobno ortogonalni ako je

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Konačan skup vektora $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ je ortogonalan ako je svaki vektor iz skupa \mathbf{X} ortogonalan sa svakim drugim vektorom iz tog skupa, tj. ako vrijedi $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$ za sve $i \neq j$. Za skup $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ kažemo da je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|\mathbf{x}_i\| = 1$ za sve $i = 1, 2, \dots, N$.

Neka je zadan prostor S_N sa ortonormiranim bazom $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$. Tada, sukladno definiciji baze vektorskog prostora, bilo koji vektor \mathbf{y} iz prostora S_N se može prikazati kao linearna kombinacija vektora \mathbf{x}_i :

$$\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_N \mathbf{x}_N. \quad (3.4)$$

Ako napravimo skalarni proizvod obiju strana izraza 3.4 sa vektorom \mathbf{x}_k , dobivamo:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k \rangle + \dots + \alpha_N \langle \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_k \rangle. \quad (3.5)$$

Budući da su vektori \mathbf{x}_i ortonormirani, vrijedi sljedeće:

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = k \\ 0 & \text{ako je } i \neq k \end{cases} \quad (3.6)$$

Na temelju 3.5 i 3.6 imamo da se koeficijenti α_k mogu dobiti na sljedeći način:

$$\alpha_k = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_k \rangle$$

za $k = 1, 2, \dots, N$.

Prethodno su ukratko izloženi ključni koncepti koji se odnose na vektore i vektorske prostore, a koji su bitni za razumijevanje tehnika koje će biti opisane u nastavku. Na ovom mjestu ćemo ukratko rezimirati najvažnije:

- Vektori kao objekti iz vektorskog prostora nisu samo tačke iz dvodimenzionalnog ili trodimenzionalnog prostora. Pokazali smo npr. da i funkcije možemo tretirati kao elemente iz vektorskog prostora.
- Skup vektora koji zadovoljavaju određene uvjete tvori vektorski prostor.
- Svi objekti nekog vektorskog prostora se mogu dobiti kao linearna kombinacija baznih vektora. Za isti vektorski prostor postoji više baznih vektora koji ga definiraju. Ako je skup baznih vektora ortogonalan i ako ti vektori imaju normu jednaku 1, onda taj skup vektora predstavlja ortonormirani bazni skup.
- Ako je bazni skup vektora ortonormiran, onda se koeficijenti koji definiraju linearnu kombinaciju, kojom se može prikazati bilo koji vektor iz vektorskog prostora, mogu dobiti izračunavanjem skalarnog proizvoda tog vektora i odgovarajućeg baznog vektora.

3.2 Fourierovi redovi

Početkom osamnaestog stoljeća prvi se put spominju trigonometrijski razvoji funkcija kod titranja i sličnih fizikalnih pojava. Međutim, sve do početka devetnaestog stoljeća trigonometrijski razvoji funkcija nisu bili sistematično proučavani. Godine 1807. francuski fizičar i matematičar Joseph Fourier je pokazao da se svaka periodička funkcija može prikazati kao suma sinusnih i kosinusnih funkcija. Odnosno, za neku zadanu periodičku funkciju $f(t)$ sa periodom T ,

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

funkciju $f(t)$ možemo rastaviti na sljedeći način [18, 19]:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi nt}{T}. \quad (3.7)$$

Budući da je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.8)$$

razvoj funkcije $f(t)$ možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.9)$$

3.2.1 Računanje Fourierovih redova

Računanje na intervalu $[-\pi, \pi]$

U ovom odjeljku ćemo pokazati kako se izračunavaju koeficijenti a_n i b_n na intervalu $[-\pi, \pi]$, kada je $T = 2\pi$. Tada za razvoj funkcije $f(t)$ u trigonometrijski Fourierov red možemo pisati sljedeće:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

uz napomenu da smo koeficijente a_n preimenovali u a_k , što je dakako potpuno irelevantno.

U nastavku će nam trebati sljedeći integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos ktdt. \quad (3.10)$$

Gornji integral primjenom formule za umnožak kosinusa možemo zapisati na sljedeći način:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos ktdt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+k)t + \cos(n-k)t]dt. \quad (3.11)$$

Ako je $n \neq k$, imamo da vrijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos ktdt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+k)t}{n+k} + \frac{\sin(n-k)t}{n-k} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \quad (3.12)$$

Nadalje, ako vrijedi $n = k \geq 1$, onda je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nt) dt = \pi. \quad (3.13)$$

Konačno, ako vrijedi $n = k = 0$, imamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos ktdt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi. \quad (3.14)$$

Na temelju prethodno izloženog, imamo da vrijedi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos ktdt = \begin{cases} 1, & \text{za } n = k \geq 1, \\ 2, & \text{za } n = k = 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Na sličan način se može pokazati da također vrijedi i sljedeće:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin ktdt = \begin{cases} 1, & \text{za } n = k \geq 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Osim toga, lako zaključujemo da vrijedi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin ktdt = 0, \quad n, k \in \mathbf{Z}, \quad (3.17)$$

imajući u vidu da je podintegralna funkcija neparna.

Prema tome, možemo zaključiti da je skup funkcija

$$\left\{ \dots, \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\} \quad (3.18)$$

ortonormiran skup u prostoru $L^2[-\pi, \pi]$.

Da bismo odredili kako se izračunavaju Fourierovi koeficijenti, krenimo od razvoja funkcije $f(t)$:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (3.19)$$

Zatim, u sljedećem koraku pomnožimo obje strane relacije 3.19 funkcijom $\cos nt/\pi$, te integrirajmo obje strane na intervalu $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] \cos nt dt. \quad (3.20)$$

Na temelju relacije 3.20, kao i relacija 3.15 i 3.17 imamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = a_n, \quad n \geq 1. \quad (3.21)$$

Na sličan način, množenjem obiju strana relacije 3.19 sa funkcijom $\sin nt/\pi$, te njihovim integriranjem, dobivamo:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = b_n, \quad n \geq 1. \quad (3.22)$$

Nadalje, način izračunavanja koeficijenta a_0 ćemo dobiti množenjem obiju strana relacije 3.19 sa $1/2\pi$ i njihovim integriranjem:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] dt. \quad (3.23)$$

Budući da za svaki cijeli broj k vrijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt = 0, \quad (3.24)$$

dobivamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt = a_0. \quad (3.25)$$

Prema tome, na temelju prethodnih razmatranja smo dobili da se funkcija $f(t)$ može razviti u sljedeći red:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (3.26)$$

pri čemu se koeficijenti a_0 , a_n i b_n , $n \geq 1$, izračunavaju kao

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad (3.27)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad (3.28)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt. \quad (3.29)$$

3.2.2 Općeniti intervali

U prethodnom odjeljku je opisan način razvoja funkcija u Fourierov red, pri čemu je korišten interval $[-\pi, \pi]$. U nastavku ćemo pokazati da se također može koristiti bilo koji interval duljine 2π . Neka je F neka periodična funkcija s temeljnim periodom 2π . Nadalje, neka je c bilo koji realan broj. Pokazat ćemo da vrijedi sljedeće

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt. \quad (3.30)$$

Nakon uvođenja smjene $t = x - 2\pi$, imamo:

$$\int_{-\pi}^{-\pi+c} F(t) dt = \int_{\pi}^{\pi+c} F(x - 2\pi) dx = \int_{\pi}^{\pi+c} F(x) dx, \quad (3.31)$$

jer je funkcija F periodična s periodom 2π .

Sada pretpostavimo da vrijedi $c \geq 0$. Koristeći 3.31 imamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi+c} F(t) dt - \int_{-\pi}^{-\pi+c} F(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi+c} F(t) dt - \int_{\pi}^{\pi+c} F(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt. \end{aligned}$$

Za slučaj da je $c < 0$, jednakost 3.30 se pokazuje na sličan način.

Nadalje, ako jednakost 3.30 primijenimo na funkcije

$$F(t) = f(t) \cos nt \text{ i } F(t) = f(t) \sin nt,$$

zaključujemo da se koeficijenti a_0 , a_n i b_n , koji se izračunavaju pomoću izraza 3.27, 3.28 i 3.29, zapravo mogu izračunavati za bilo koji interval oblika $[-\pi + c, \pi + c]$.

3.2.3 Interval bilo koje duljine

Funkcije se mogu razviti u Fourierov red na bilo kojem simetričnom intervalu $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ duljine T . Tada Fourierov red sadrži trigonometrijske funkcije

$$\cos \frac{2\pi nt}{T} \text{ i } \sin \frac{2\pi nt}{T}. \quad (3.32)$$

Primjetimo da se Fourierov red za period $T = 2\pi$ sastoji od trigonometrijskih funkcija

$$\cos nt \text{ i } \sin nt.$$

Neka je funkcija F definirana na intervalu $[-\pi, \pi]$. Uz supstituciju $t = x\pi/T$ vrijedi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T}^T F\left(\frac{\pi x}{T}\right) dx. \quad (3.33)$$

Nadalje, razmotrimo razvoj funkcije $f(t)$ u Fourierov red na intervalu $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, koristeći trigonometrijske funkcije 3.32:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (3.34)$$

Na temelju jednakosti 3.33, kao i jednakosti 3.27, 3.28 i 3.29, dobivamo

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \quad (3.35)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx \quad (3.36)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \quad (3.37)$$

Primjer 3.1. Potrebno je razviti u Fourierov red periodičnu funkciju $f(t)$ s periodom $T = 2\pi$, pri čemu je funkcija $f(t)$ na intervalu $-\pi \leq t \leq \pi$ definirana kao

$$f(t) = t.$$

Budući da je funkcija $f(t)$ neparna, za koeficijente a_n imamo:

$$a_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Koeficijente b_n izračunavamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt dt \\ &= -\frac{2t \cos nt}{n\pi} \Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nt dt \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{2 \sin nt}{n^2\pi} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

■

3.2.4 Kompleksni oblik Fourierovog reda

Često je Fourierov red funkcije korisnije izraziti preko kompleksnih funkcija $e^{jn\omega_0 t}$. Razmotrimo Taylorov razvoj funkcije e^x oko nule

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (3.38)$$

Uvrstimo li $x = jt$ u Taylorov razvoj 3.38, dobivamo da je

$$e^{jt} = 1 + jt + \frac{(jt)^2}{2!} + \frac{(jt)^3}{3!} + \frac{(jt)^4}{4!} + \dots \quad (3.39)$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela gornjeg razvoja imamo:

$$e^{jt} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) + j \cdot \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right). \quad (3.40)$$

Uzimajući u obzir poznate Taylorove razvoje funkcija *kosinus* i *sinus*:

$$\cos = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \quad (3.41)$$

$$\sin = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \quad (3.42)$$

na temelju jednakosti 3.40, 3.41 i 3.42, dobivamo definiciju kompleksne eksponentijalne funkcije

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t, \quad (3.43)$$

gdje je $j = \sqrt{-1}$.

Nadalje, imamo da vrijedi

$$e^{-jt} = \cos t - j \sin t, \quad (3.44)$$

pa je

$$\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}, \quad (3.45)$$

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}. \quad (3.46)$$

Na temelju izraza 3.45 i 3.46, kao i početnog oblika Fourierovog reda 3.9, imamo

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

gdje su koeficijenti c_n definirani na sljedeći način:

$$c_n = \begin{cases} a_0 & \text{za } n = 0, \\ \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} & \text{za } n > 0, \\ \frac{a_{-n}}{2} - \frac{b_{-n}}{2j} & \text{za } n < 0. \end{cases}$$

Sve periodičke funkcije sa periodom T formiraju neki vektorski prostor. Nadalje, iz izraza 3.47 možemo vidjeti da skup eksponencijalnih funkcija $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ predstavlja bazu tog vektorskog prostora, pri čemu se neka zadana funkcija $f(t)$ može prikazati parametrima $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, koji se odnose na spomenuti skup baznih funkcija. Drugim riječima, neka zadana periodička funkcija $f(t)$ se može sintetizirati na temelju odgovarajućih parametara $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Prethodno smo u ovom poglavlju opisali pojmove baze vektorskog prostora, skalarnog proizvoda, ortogonalnih i ortonormiranih skupova, pa ćemo u nastavku pokazati da je skup eksponenvijalnih funkcija $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ ortogonalan i ortonormiran, ali koristeći terminologiju vektorskog prostora koja je prethodno uvedena u ovom poglavlju.

Neka su periodičke funkcije $f(t)$ i $g(t)$ elementi nekog vektorskog prostora. Tada je skalarni proizvod tih vektora $\langle f(t), g(t) \rangle$ definiran na sljedeći način:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) g(t)^* dt, \quad (3.48)$$

gdje je t_0 neka proizvoljna konstanta, dok $g(t)^*$ označava konjugirano kompleksnu funkciju od $g(t)$. Budući da se za t_0 može uzeti bilo koja konstanta, u nastavku ćemo radi jednostavnosti koristiti vrijednost $t_0 = 0$.

Sada razmotrimo da li je skup bazičnih funkcija ortonormiran. Imamo sljedeće

$$\langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \quad (3.49)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(n-m)\omega_0 t} dt. \quad (3.50)$$

Ako je $n = m$, tada imamo

$$\begin{aligned} \langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j \cdot 0 \cdot \omega_0 \cdot t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T 1 \cdot dt \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

S druge strane, ako vrijedi $n \neq m$, definirajmo parametar k kao

$$k = n - m.$$

Tada, uzimajući u obzir da vrijedi

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

imamo

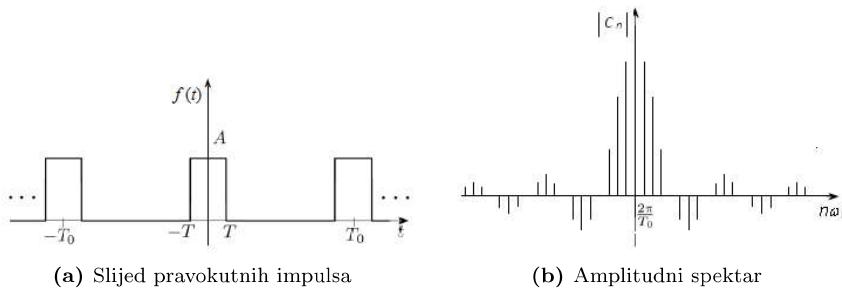
$$\begin{aligned}
 \langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{jk\omega_0 T} (e^{jk\omega_0 T} - 1) \\
 &= \frac{1}{jk\omega_0 T} (e^{jk2\pi} - 1) \\
 &= \frac{1}{jk\omega_0 T} (\cos(2k\pi) + j \sin(2k\pi) - 1) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Prema tome, bazni skup je ortonormiran, pa se koeficijenti c_n mogu izračunavati kao skalarni proizvod funkcije $f(t)$ i baznog vektora $e^{jn\omega_0 t}$:

$$c_n = \langle f(t), e^{jn\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \tag{3.53}$$

Skup beskonačno mnogo koeficijenata $\{c_n = |c_n| e^{j \arg c_n}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, sadrži informacije o elementarnim funkcijama oblika $e^{jn\omega_0 t}$ na koje se razlaže kontinuirani periodički signal $f(t)$. Koeficijenti kompleksnog Fourierovog reda definiraju *spektar periodičnog signala*. Njihove absolutne vrijednosti $|c_n|$ definiraju *amplitudni spektar*, dok argumenti $\theta_n = \arg c_n$ definiraju *fazni spektar*. Na slici 3.3b je prikazan način na koji se grafički prikazuje amplitudni spektar kontinuiranih periodičkih signala.

Primjer 3.2. Potrebno je odrediti koeficijente Fourierovog reda slijeda pravokutnih impulsa koji je prikazan na slici 3.3.



Slika 3.3: Slijed pravokutnih impulsa i njegov spektar

Koeficijenti Fourierovog reda su:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T A e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.54)$$

Za $n \neq 0$ imamo:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Big|_{-T}^T \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{e^{jn\omega_0 T} - e^{-jn\omega_0 T}}{jn\omega_0} \\ &= \frac{2AT}{T_0} \frac{e^{jn\omega_0 T} - e^{-jn\omega_0 T}}{j2n\omega_0} \\ &= \frac{2AT}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 T}{n\omega_0 T} \\ &= \frac{2AT}{T_0} \text{sinc } n\omega_0 T \\ &= \frac{2AT}{T_0} \text{sinc } n2\pi \frac{T}{T_0}. \end{aligned}$$

Nadalje, za $n = 0$ imamo srednju vrijednost signala:

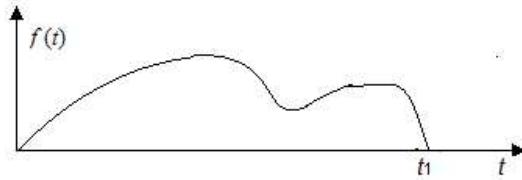
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-j \cdot 0 \cdot \omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T Adt \\ &= \frac{2AT}{T_0}. \end{aligned}$$

Na slici 3.3b je prikazan amplitudni spektar slijeda pravokutnih impulsa. Budući da su koeficijenti c_n realni brojevi, imaginarni dio tih koeficijenata je jednak nuli, pa za fazni spektar imamo da vrijedi $\theta_n = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}$. Dakako, u općem slučaju, na sličan način na koji je u grafičkom obliku na slici 3.3b prikazan amplitudni spektar, može se prikazati i fazni spektar. ■

Istaknimo još jednom da nam Fourierovi redovi omogućuju frekvencijski prikaz isključivo periodičkih signala. Iako većina signala koji se koriste u različitim područjima primjene zapravo nisu periodički signali, koncept Fourierovih redova je iznimno važan i pri analizi neperiodičkih signala. Naime, koncept Fourierovih redova se može proširiti i na neperiodičke signale, što je opisano u nastavku.

3.3 Fourierova transformacija

Razmotrimo funkciju $f(t)$ prikazanu na slici 3.4.



Slika 3.4: Primjer funkcije

Nadalje, definirajmo funkciju $f_P(t)$ koja predstavlja tzv. *periodičko proširenje* funkcije $f(t)$, na sljedeći način

$$f_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT), \quad (3.55)$$

gdje je $T > t_1$. Budući da je funkcija f_P periodička funkcija, možemo je prikazati u obliku Fourierovog reda

$$f_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (3.56)$$

gdje su koeficijenti c_n definirani kao

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.57)$$

Definirajmo

$$C(n, T) = c_n T$$

i

$$\Delta\omega = \omega_0.$$

Sada izraze 3.56 i 3.57 možemo zapisati na sljedeći način:

$$f_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C(n, T)}{T} e^{jn\Delta\omega t} \quad (3.58)$$

$$C(n, T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt. \quad (3.59)$$

Primijetimo da funkciju $f(t)$ možemo dobiti iz funkcije $f_P(t)$ uzimajući limes funkcije $f_P(t)$, pri čemu T teži u beskonačnost. Imajući u vidu da je $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$, možemo također reći da funkciju $f(t)$ možemo dobiti iz funkcije $f_P(t)$, uzimajući limes funkcije $f_P(t)$, pri čemu $\Delta\omega$ teži u nulu. Nadalje, kako $\Delta\omega$ teži u nulu, tako $n\Delta\omega$ teži u kontinuiranu varijablu ω . Prema tome, imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0} C(n, T) &= \lim_{T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Iz gornjeg izraza možemo primijetiti da smo zapravo dobili funkciju samo jedne varijable ω . Ako tu funkciju označimo sa $F(\omega)$, tada možemo pisati

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.61)$$

Funkcija $F(\omega)$ se naziva *Fourierova transformacija*.

Funkciju $f(t)$ možemo dobiti iz $f_P(t)$ kao sljedeći limes:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_P(t). \quad (3.62)$$

Na temelju izraza 3.58 imamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n, T) \frac{\Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Iraz

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.64)$$

se naziva *inverzna Fourierova transformacija*.

Fourierova transformacija definirana izrazom 3.61 daje frekvencijski prikaz kontinuiranog neperiodičkog signala i zbog člana $e^{j\omega t}$ ova transformacija je kompleksna funkcija, pa je možemo zapisati u obliku:

$$F(\omega) = F_r(\omega) + jF_i(\omega), \quad (3.65)$$

gdje

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

predstavlja realni dio, dok

$$F_i(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

predstavlja imaginarni dio te funkcije. U eksponencijalnom obliku, tj. u polarnim koordinatama vrijedi

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{\theta(\omega)}, \quad (3.66)$$

gdje su:

$$|F(\omega)| = \sqrt{F_r^2 + F_i^2}, \quad (3.67)$$

$$\theta(\omega) = \arctan \frac{F_i}{F_r}. \quad (3.68)$$

Članovi $F(\omega)d\omega$ u izrazu 3.64 zapravo sadrže informaciju o amplitudnoj i faznoj gustoći beskonačno mnogo elementarnih funkcija oblika $e^{j\omega t}$ na koje se razlaže kontinuirani neperiodički signal $f(t)$. Modul Fourierove transformacije $|F(\omega)|$ definira spektralnu gustoću amplituda, pa se naziva *amplitudni spektar* neperiodičkog signala. S druge strane, argument $\theta(\omega)$ definira spektralnu gustoću faza, pa se naziva *fazni spektar* neperiodičkog signala.

Primjer 3.3. Potrebno je odrediti spektar sljedećeg signala

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{za } t \geq 0, \\ 0 & \text{za } t < 0. \end{cases}$$

Izračunavamo Fourierovu transformaciju signala $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{\alpha + j\omega} (0 - 1) \\
&= \frac{1}{\alpha + j\omega} \\
&= \frac{1}{\alpha + j\omega} \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

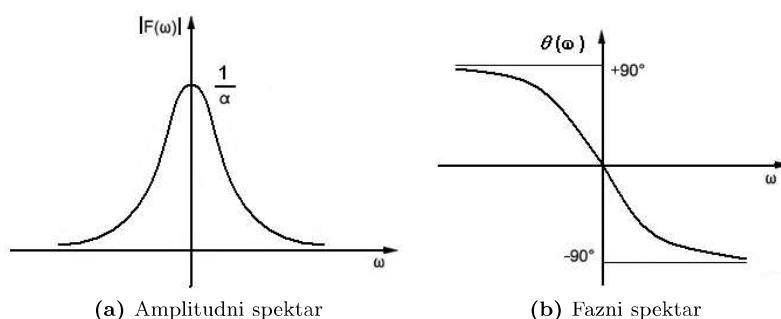
Prema tome, za amplitudni spektar dobivamo:

$$\begin{aligned}
|F(\omega)| &= \left| \frac{1}{\alpha + j\omega} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.
\end{aligned}$$

Nadalje, za fazni spektar imamo:

$$\theta(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Na slici 3.5 su u grafičkom obliku prikazani amplitudni i fazni spektar signala $f(t)$.



Slika 3.5: Amplitudni i fazni spektar signala $f(t)$

3.4 Svojstva Fourierove transformacije

3.4.1 Simetričnost

Fourierova transformacija je data sa

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \quad (3.69)$$

Zamjenom varijabli t i ω dobivamo

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-j\omega t}d\omega. \quad (3.70)$$

Nadalje, inverzna Fourierova transformacija od $2\pi f(-\omega)$ je:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[2\pi f(-\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (\text{smjena } \omega \rightarrow -\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-j\omega t}d\omega. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Usporedbom desnih strana izraza 3.70 i 3.71 dobivamo

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi f(-\omega)] = F(t). \quad (3.72)$$

Prema tome, ukoliko signal u vremenskom domenu funkcionalnog oblika $f(t)$ ima spektar funkcionalnog oblika $F(\omega)$, onda spektar signala koji u vremenu ima funkcionalni oblik $F(t)$, poprima oblik reflektiranog izvornog signala pomnoženog sa 2π . Drugim riječima, ako postoji transformacijski par

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad (3.73)$$

tada je

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega). \quad (3.74)$$

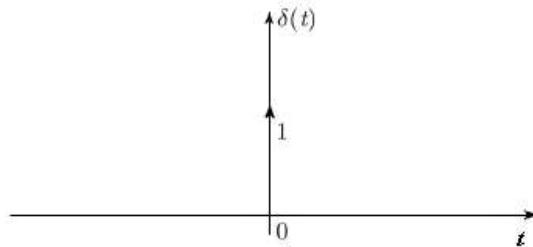
Primjer 3.4. U ovom primjeru ćemo odrediti Fourierovu transformaciju za Diracovu funkciju

$$f(t) = \delta(t).$$

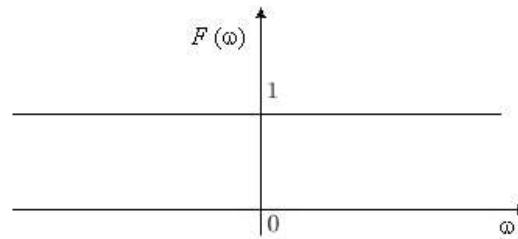
Na temelju definicije Fourierove transformacije imamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega 0} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Na slici 3.6 su prikazani Diracova funkcija i njen spektar.



(a) Diracova funkcija



(b) Fourierova transformacija Diracove funkcije

Slika 3.6: Diracova funkcija i njena Fourierova transformacija

Primjer 3.5. U ovom primjeru ćemo pronaći Fourierovu transformaciju konstantne funkcije

$$f(t) = 1, \tag{3.76}$$

primjenom svojstva simetrije Fourierove transformacije.

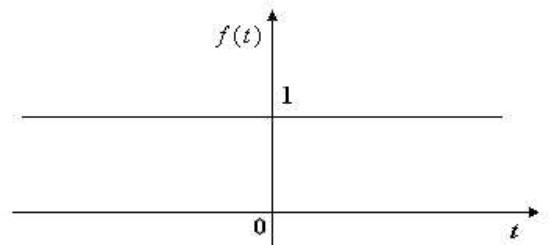
U primjeru 3.4 je pokazano da je

$$\delta(t) \leftrightarrow 1.$$

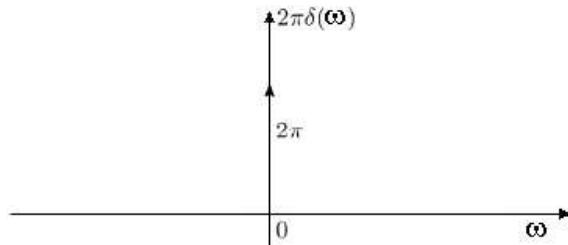
Na temelju svojstva simetrije dobivamo

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad (3.77)$$

Na slici 3.7 su prikazani konstantna funkcija i njen spektar.



(a) Konstantna funkcija



(b) Fourierova transformacija konstantne funkcije

Slika 3.7: Konstantna funkcija i njena Fourierova transformacija

Istaknimo da spektar konstantne funkcije ne bismo mogli dobiti direktnom primjenom definicionog izraza za izračun Fourierove transformacije, budući da konstantna funkcija nije absolutno integrabilna. Upravo uvođenje Diracove funkcije i primjena svojstva simetrije omogućuju da se dobije spektar i za konstantnu funkciju.

■

3.4.2 Pomak u frekvencijskom domenu

Razmotrimo šta se događa sa spektrom $F(\omega)$ nekog signala $f(t)$, ako se $f(t)$ pomnoži sa eksponencijalnom funkcijom $e^{j\omega_0 t}$, tj. razmotrimo spektar funkcije

$$f(t)e^{j\omega_0 t}. \quad (3.78)$$

Fourierova transformacija gornje funkcije je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt \\ &= F(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Prema tome, ako je

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad (3.80)$$

množenje signala $f(t)$ sa eksponencijalnom kompleksnom funkcijom $e^{j\omega_0 t}$, za posljedicu ima pomjeranje spektra signala $f(t)$ po frekvencijskoj osi za ω_0 , tj. vrijedi

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0). \quad (3.81)$$

Nadalje, razmotrimo šta se događa sa spektrom $F(\omega)$ nekog signala $f(t)$, ako se $f(t)$ pomnoži npr. sa funkcijom $\cos(\omega_0 t)$, tj. razmotrimo spektar funkcije

$$f(t) \cos(\omega_0 t). \quad (3.82)$$

Budući da se funkcija $\cos(\omega_0 t)$ može prikazati pomoću eksponencijalnih funkcija kao

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad (3.83)$$

možemo pisati sljedeće

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[f(t) \cos(\omega_0 t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Prema tome, ako je

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad (3.84)$$

množenje signala $f(t)$ u vremenu sa funkcijom $\cos(\omega_0 t)$, za posljedicu ima generiranje spektra koji se sastoji od sljedećih komponenti:

- prvu komponentu čini spektar $F(\omega)$ pomnožen sa $1/2$ i pomjerena po frekvencijskoj osi za ω_0 ;
- drugu komponentu čini spektar $F(\omega)$ pomnožen sa $1/2$ i pomjerena po frekvencijskoj osi za $-\omega_0$.

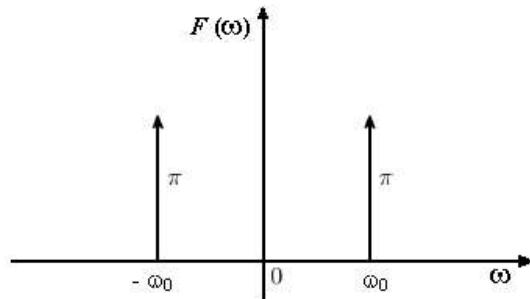
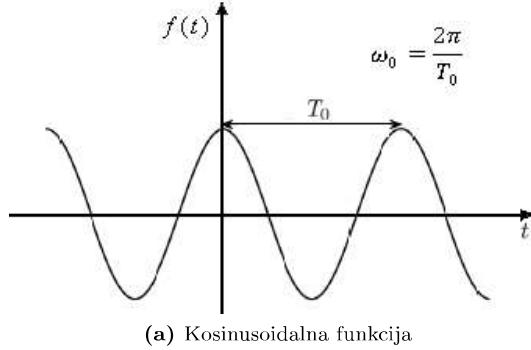
Drugim riječima, vrijedi:

$$f(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \quad (3.85)$$

Primjer 3.6. Odredimo Fourierovu transformaciju signala

$$f(t) = \cos(\omega_0 t). \quad (3.86)$$

koji je prikazan na slici 3.8



Slika 3.8: Kosinusoidalna funkcija i njen spektar

U primjeru 3.5 je pokazano da je Fourierova transformacija konstantne funkcije $f(t) = 1$

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi\delta(\omega).$$

Za Fourierovu transformaciju funkcije $\cos(\omega_0 t)$ na temelju svojstva pomaka u frekvencijskoj domeni imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \mathcal{F}[1 \cdot \cos(\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0).\end{aligned}$$

Na slici 3.8 je prikazana kosinusoidalna funkcija i njen spektar.

■

3.4.3 Skaliranje

Skaliranje nekog signala $f(t)$ faktorom a u vremenskoj domeni matematički zapisujemo kao

$$f(at). \quad (3.87)$$

Na slikama 3.9 i 3.10 je u grafičkom obliku prikazano skaliranje pravokutnog impulsa faktorom a manjim i većim od jedan, respektivno. Prema tome, *skaliranjem* se signal u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni proširuje ili sužava, ovisno o vrijednosti faktora skaliranja. Fourierova transformacija funkcije $f(at)$ je:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t}dt. \quad (3.88)$$

Uz zamjenu $u = at$ i $du = adt$ imamo:

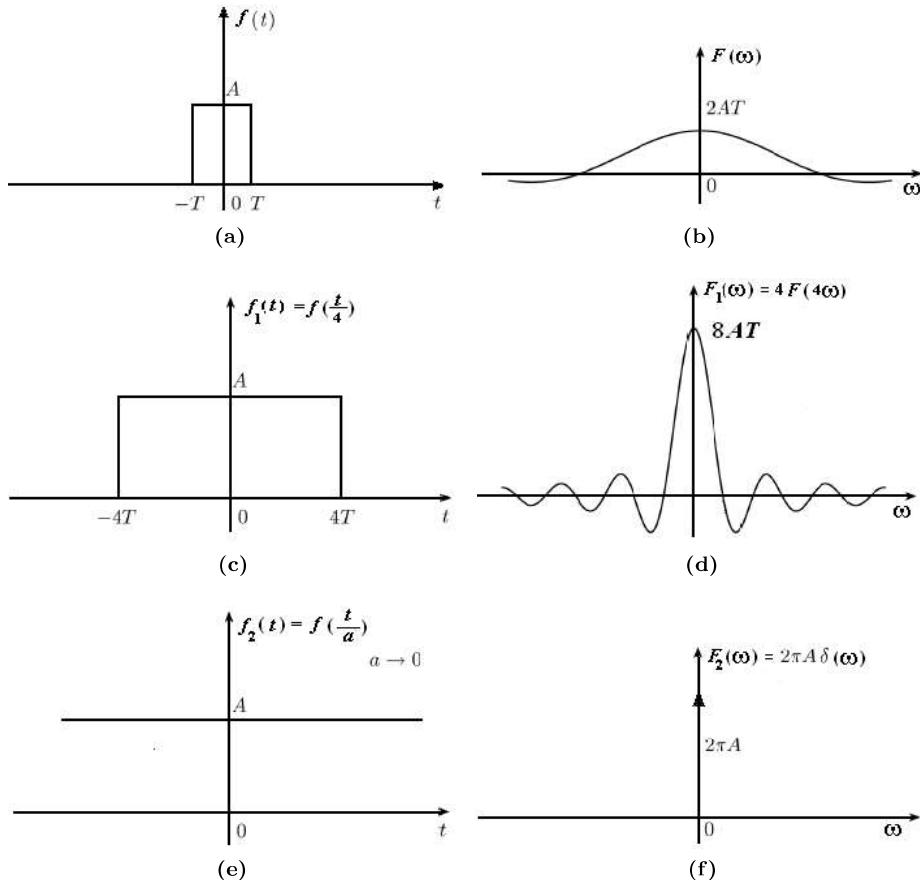
$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}du. \quad (3.89)$$

Za $a > 0$ imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\frac{\omega}{a}t}dt \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned} \quad (3.90)$$

S druge strane, za $a < 0$ imamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(t) e^{-j\frac{\omega}{a}t} dt \\
 &= -\frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} f(t) e^{-j\frac{\omega}{a}t} dt \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\frac{\omega}{a}t} dt \\
 &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).
 \end{aligned} \tag{3.91}$$



Slika 3.9: Skaliranje faktorom manjim od 1

Prema tome, proširivanje ili sužavanje signala u jednoj domeni dovodi do

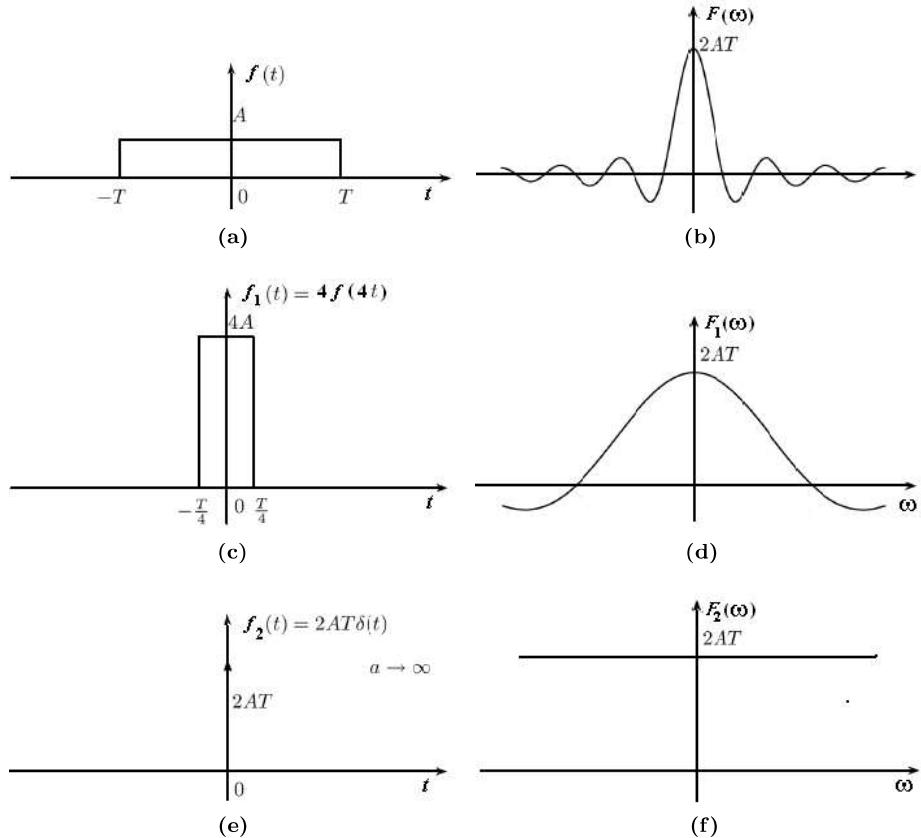
sužavanja ili proširivanja signala u drugoj domeni. Ako je

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \quad (3.92)$$

onda vrijedi

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (3.93)$$

za $a \in \mathbb{R}$.



Slika 3.10: Skaliranje faktorom većim od 1

Na slici 3.9 je prikazan učinak skaliranja funkcije $f(t)$ faktorom manjim od 1 (proširivanje signala) u vremenskoj domeni na funkcionalni oblik signala u frekvencijskoj domeni.

Isto tako, na slici 3.10 je prikazan učinak skaliranja funkcije $f(t)$ faktorom većim od 1 (sužavanje signala).

3.4.4 Konvolucija u vremenskoj domeni

Pri razmatranju ulazne i izlazne pobude kod linearnih sistema, što će biti opisano u ovom poglavlju u odjeljku 3.5, izuzetno važan značaj imaju integrali sljedećeg oblika:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3.94)$$

i

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (3.95)$$

Gornji integrali definiraju operaciju konvolucije signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$, što se zapisuje na sljedeći način

$$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t). \quad (3.96)$$

Potražimo Fourierovu transformaciju konvolucije dva signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \otimes f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\tau) f_2(t - \tau)] d\tau \right] e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Nakon zamjene redoslijeda integriranja imamo:

$$\mathcal{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t - \tau)] e^{-j\omega t} dt \right] d\tau.$$

Uvođenjem smjene $u = t - \tau$ dobivamo:

$$\mathcal{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f_2(u)] e^{-j\omega u} du \right] e^{-j\omega \tau} d\tau.$$

Budući da integral u uglastim zagradama ne ovisi o τ , možemo pisati:

$$\mathcal{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f_2(u)] e^{-j\omega u} du \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right]$$

$$= F_2(\omega)F_1(\omega).$$

Prema tome, konvoluciji signala u vremenskoj domeni odgovara množenje njihovih Fourierovih transformacija u frekvencijskoj domeni. Odnosno, ako je

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

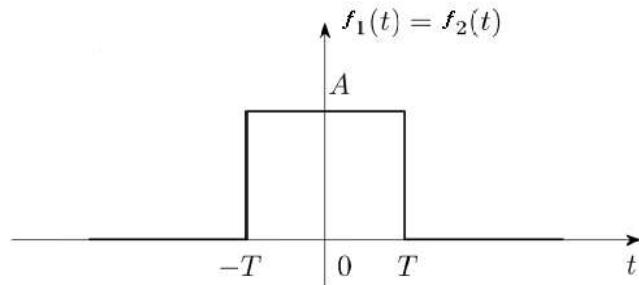
i

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega),$$

tada vrijedi

$$f_1(t) \otimes f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega).$$

Primjer 3.7. Odredimo Fourierovu transformaciju pravokutnog impulsnog signala $f_1(t)$, koji je prikazan na slici 3.11.



Slika 3.11: Pravokutni impuls

Fourierova transformacija $F_1(\omega)$ pravokutnog impulsa $f_1(t)$ je:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-T}^{T} Ae^{-j\omega t}dt \\ &= -\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T}^T \\ &= A\frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \end{aligned}$$

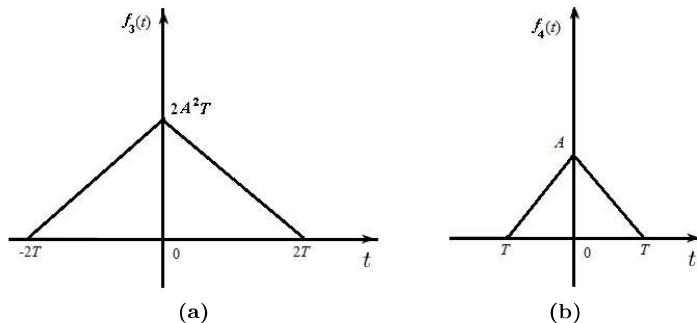
$$\begin{aligned}
&= A \frac{\cos(j\omega T) + j \sin(j\omega T) - \cos(-j\omega T) - j \sin(-j\omega T)}{j\omega} \\
&= A \frac{2j \sin(\omega T)}{j\omega} \\
&= 2AT \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \\
&= 2AT \text{sinc}(\omega T).
\end{aligned}$$

■

Primjer 3.8. Na slici 3.11 su prikazani dva ista pravokutna signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Konvolucija tih signala daje pravokutni signal $f_3(t)$:

$$f_3(t) = f_1(t) \otimes f_2(t),$$

koji je prikazan na slici 3.12(a). Polazeći od svojstva konvolucije u vremenskoj domeni, zatim svojstva skaliranja, kao i prethodno izračunate Fourierove transformacije za pravokutni signal u primjeru 3.7, potrebno je odrediti Fourierovu transformaciju trokutastog signala $f_4(t)$, koji je prikazan na slici 3.12(b).



Slika 3.12: Trokutasti signali $f_3(t)$ i $f_4(t)$

U primjeru 3.7 je pokazano da za Fourierove transformacije pravokutnih signala $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ i $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ imamo:

$$F_1(\omega) = F_2(\omega) = 2AT \text{sinc}(\omega T).$$

Fourierova transformacija signala $F_3(\omega) = \mathcal{F}[f_3(t)]$ na temelju svojstva konvolucije u vremenskoj domeni je

$$\begin{aligned}
F_3(\omega) &= \mathcal{F}[f_3(t)] \\
&= \mathcal{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] \\
&= F_1(\omega)F_2(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2AT \operatorname{sinc}(\omega T) \cdot 2AT \operatorname{sinc}(\omega T) \\ &= 4A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(\omega T). \end{aligned}$$

Nadalje, trokutasti signal $f_4(t)$ ima $2AT$ puta manju amplitudu i trajanje u intervalu od $-T$ do T , što je duplo kraće u odnosu na signal $f_3(t)$. Dakle, za signal $f_4(t)$ možemo pisati:

$$f_4(t) = \frac{1}{2AT} f_3\left(\frac{t}{2}\right).$$

Prema tome, za Fourierovu transformaciju signala $F_4(\omega) = \mathcal{F}[f_4(t)]$, uzimajući u obzir prethodno izračunatu Fourierovu transformaciju signala $f_3(t)$ i svojstvo skaliranja, imamo:

$$\begin{aligned} F_4(\omega) &= \mathcal{F}[f_4(t)] \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2AT} f_3\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2AT} \mathcal{F}\left[f_3\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2AT} \cdot \frac{1}{2} F_3\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4AT} \cdot 4A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= AT \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right). \end{aligned}$$

■

3.4.5 Konvolucija u frekvencijskoj domeni

Potražimo sljedeću inverznu Fourierovu transformaciju:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)\right],$$

pri čemu vrijede sljedeći transformacijski parovi:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

i

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega).$$

Imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \left[\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) F_2(\omega - \sigma) d\sigma \right] e^{j\omega t} d\omega.\end{aligned}$$

Nakon zamjene redoslijeda integriranja imamo:

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) \right] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega - \sigma) e^{j\omega t} d\omega \right] d\sigma.$$

Uvođenjem smjene $v = \omega - \sigma$ imamo

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) \right] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_2(v) e^{jvt} dv \right] e^{j\sigma t} d\sigma.$$

Budući da integral u uglastim zagradama ne ovisi o σ , možemo pisati:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \left[\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) \right] &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_2(v) e^{jvt} dv] \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\sigma) e^{j\sigma t} d\sigma \right] \\ &= f_2(t) f_1(t).\end{aligned}$$

Prema tome, konvoluciji Fourierovih transformacija signala u frekvencijskoj domeni odgovara množenje signala u vremenskoj domeni. Odnosno, ako je

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

i

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega),$$

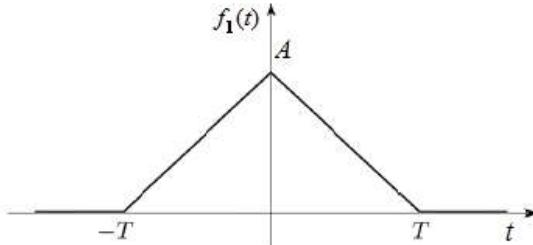
tada vrijedi

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega). \quad (3.97)$$

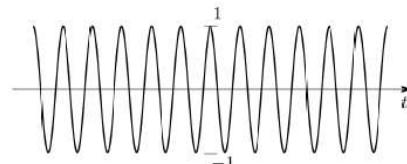
Primjer 3.9. Neka je zadan sljedeći signal $f_2(t)$ koji je *amplitudno modulirani* trokutasti signal sa slike 3.13a:

$$f_2(t) = f_1(t) \cos(\omega_0 t),$$

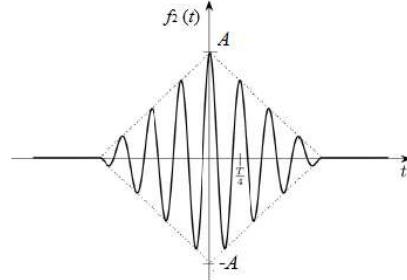
Signal $f_2(t)$ je prikazan na slici 3.13c.



(a) Trokutasti impuls



(b) Kosiunusoida



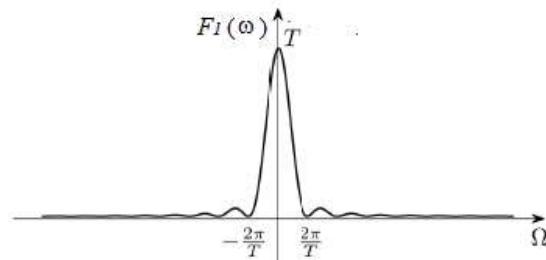
(c) Amplitudno modulirani trokutasti impuls

Slika 3.13: Primjer amplitudno moduliranog signala

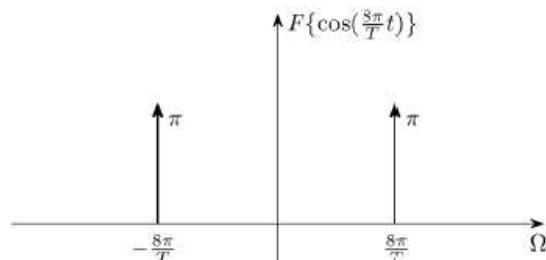
Potrebno je odrediti Fourierovu transformaciju signala $f_2(t)$. Na temelju svojstva konvolucije u frekvencijskoj domeni imamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1(t)] \otimes \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} [AT \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega T}{2}] \otimes [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}^2 \frac{(\omega - \omega_0)T}{2} + \frac{AT}{2} \operatorname{sinc}^2 \frac{(\omega + \omega_0)T}{2}. \end{aligned}$$

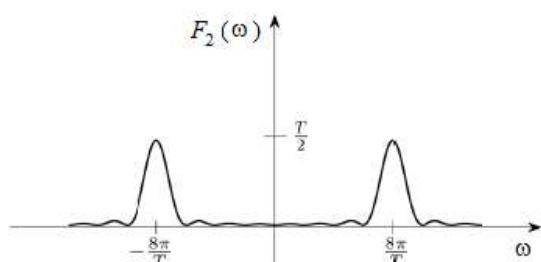
Na slici 3.14 su prikazane Fourirove transformacije trokutastog impulsa $f_1(t)$, kosinusoide i amplitudno moduliranog signala $f_2(t)$.



(a) Fourierova transformacija trokutastog impulsa



(b) Fourierova transformacija kosinusoide



(c) Fourierova transformacija amplitudno moduliranog signala

Slika 3.14: Fourierova transformacija amplitudno moduliranog signala

■

3.4.6 Parsevalova teorema

Energija nekog neperiodičkog signala $f(t)$ je data sa:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (3.98)$$

Na temelju izraza za sintezu signala

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.99)$$

i njegovog konjugirano kompleksnog oblika

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega, \quad (3.100)$$

možemo pisati sljedeće:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Dobiveni identitet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.102)$$

se naziva *Parsevalova teorema* za neperiodičke signale. Ova teorema zapravo pokazuje da se energija signala pored vremenske domene može isto tako izračunati i u frekvencijskoj domeni. Funkcija

$$|F(\omega)|^2$$

se naziva *energetski spektar signala* ili *spektralna gustoća energije*.

3.5 Linearni sistemi

Svaki sistem djeluje u nekoj okolini, povezujući dva ili više signala. Naprimjer, televizijski uređaj priključen na kablovsku mrežu je sistem koji signal iz kabela pretvara u sliku i zvuk. Mikrofon je sistem koji pretvara zvučni signal iz okolnog prostora u električni signal na svom izlazu. Mobitel je sistem koji elektromagnetsku energiju pretvara u sliku, zvuk, video ili tekst. Svi navedeni primjeri uređaja su opisani na način da neki *ulazni signal* pretvaraju u odgovarajući *izlazni signal*. Drugim riječima, svi navedeni sistemi su opisani tzv. *ulazno-izlaznim modelom sistema*. Osim toga, u prethodno navedenim primjerima sistema nismo opisivali nikakve implementacijske detalje. Možemo zapravo reći da ulazno-izlazni model sistema opisuje sistem kao tzv. *crnu kutiju*, jer se tim opisom ne ulazi u njegovu unutarnju strukturu. Dakako, postoje i odgovarajući matematički modeli za opis unutarnje strukture sistema, što za potrebe materije koja se izlaže na ovom mjestu nije potrebno. Nama će za uspostavljanje uzročno-posljedične veze između ulaza i izlaza na ovom mjestu biti u fokusu *linearni i vremenski invarijantni sistemi*. Istaknimo da se pomoću ovakvih sistema mogu modelirati mnogi realni problemi u različitim područjima primjene. Osim toga, čak i u situacijama kada problemi izvorno nisu linearni, mogu se koristiti linearni modeli sistema za opis tih problema, uz određene prilagodbe i aproksimacije. Na slici 3.15 je prikazan ulazno-izlazni model sistema L za koji vrijedi:

$$g(t) = L[f(t)].$$



Slika 3.15: Ulazno-izlazni model sistema

Za sistem L kažemo da je linearan ako vrijedi:

$$L[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] = a_1g_1(t) + a_2g_2(t), \quad (3.103)$$

Nadalje, ako je za neki ulaz $f(t)$, odziv linearног sistema L jednak $g(t)$, tj. vrijedi

$$L[f(t)] = g(t), \quad (3.104)$$

tada za sistem L za koji vrijedi

$$L[f(t - t_0)] = g(t - t_0), \quad (3.105)$$

kažemo da je *vremenski invarijantan sistem*.

3.5.1 Prijenosna funkcija

Ako je na ulazu linearog vremenski invarijantnog sistema neki kosinusoidalni (sinusoidalni) signal frekvencije ω_0 , tada izlazni signal ima također kosinusoidalni (sinusoidalni) oblik iste frekvencije, tj. vrijedi:

$$L[\cos(\omega_0 t)] = \alpha \cos(\omega_0(t - t_d)).$$

Koristeći kompleksni oblik navedeno svojstvo možemo zapisati na sljedeći način:

$$L[e^{j\omega_0 t}] = \alpha e^{j\omega_0(t - t_d)}.$$

Drugim riječima, odziv nekog zadanog linearog sistema na kosinusoidalnu (sinusoidalnu) pobudu neke konkretnе frekvencije, možemo karakterizirati sa dva parametra:

- parametrom α koji predstavlja pojačanje;
- parametrom t_d koji predstavlja kašnjenje.

Napomenimo da se obično umjesto kašnjenja t_d zapravo koristi faza ϕ :

$$\phi = \omega_0 t_d.$$

Općenito, parametri α i ϕ su funkcije frekvencije. Prema tome, da bismo karakterizirali sistem za sve frekvencije, potreban nam je par funkcija $\alpha(\omega)$ i $\phi(\omega)$. Ovaj par funkcija konstituira tzv. prijenosnu funkciju $H(\omega)$:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)},$$

gdje je $|H(\omega)| = \alpha(\omega)$ i $\theta(\omega) = \phi(\omega)$. Prijenosna funkcija $H(\omega)$, Fourierova transformacija $F(\omega)$ ulaza $f(t)$ i Fourierova transformacija $G(\omega)$ izlaza $g(t)$ su povezane na sljedeći način:

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega). \quad (3.106)$$

Nadalje, koristeći svojstvo konvolucije u vremenskoj domeni, dobivamo i vezu između pobude $f(t)$ i odziva $g(t)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau,$$

odnosno

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau,$$

pri čemu $H(\omega)$ označava Fourierovu transformaciju funkcije $h(t)$.

3.5.2 Impulsni odziv

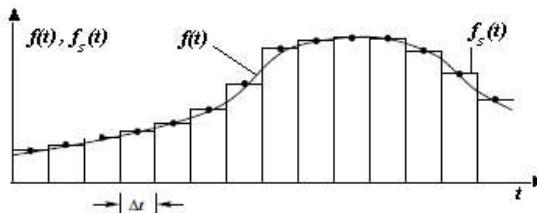
Prepostavimo da je zadan neki linearan sistem L sa ulaznom pobudom $f(t)$. Nadalje, neka je pobuda $f(t)$ aproksimirana po dijelovima konstantnom funkcijom (tzv. step funkcijom) $f_S(t)$

$$f_S(t) = \sum f(n\Delta t) \text{rect}\left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right), \quad (3.107)$$

gdje je

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } |t| < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Primjer aproksimacije pobude $f(t)$ po dijelovima konstantnom funkcijom $f_S(t)$, ilustriran je na slici 3.16.



Slika 3.16: Aproksimacija funkcije $f(t)$ po dijelovima konstantnom funkcijom $f_S(t)$

Odziv linearanog sistema L na ulaz $f_S(t)$ je:

$$\begin{aligned} L[f_S(t)] &= L\left[\sum f(n\Delta t) \text{rect}\left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right)\right] \\ &= L\left[\sum f(n\Delta t) \frac{\text{rect}\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)}{\Delta t} \Delta t\right]. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Primjenjujući princip superpozicije dobivamo

$$L[f_S(t)] = \sum f(n\Delta t) L\left[\frac{\text{rect}\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)}{\Delta t}\right] \Delta t. \quad (3.109)$$

Primijetimo da je limes $f_S(t)$, kada Δt teži u nulu, jednak funkciji $f(t)$. Nadalje, *impulsna funkcija* $\delta(t)$ je definirana kao

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)}{\Delta t}. \quad (3.110)$$

Prema tome, imamo

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} L[f_S(t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum f(n\Delta t) L\left[\frac{\text{rect}\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)}{\Delta t}\right] \Delta t \\ &= \int f(\tau) L[\delta(t-\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Označimo odziv sistema L na impulsnu pobudu $\delta(t)$ sa $h(t)$, tj.

$$h(t) = L[\delta(t)]. \quad (3.112)$$

Ako je sistem vremenski invarijantan, tada imamo

$$L[f(t)] = \int f(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (3.113)$$

Iraz 3.113 se naziva *konvolucijski integral*. Na temelju svojstva konvolucije u vremenskom domenu lako zaključujemo da je Fourierova transformacija impulsnog odziva $h(t)$ jednaka prijenosnoj funkciji $H(\omega)$.

3.5.3 Filtri

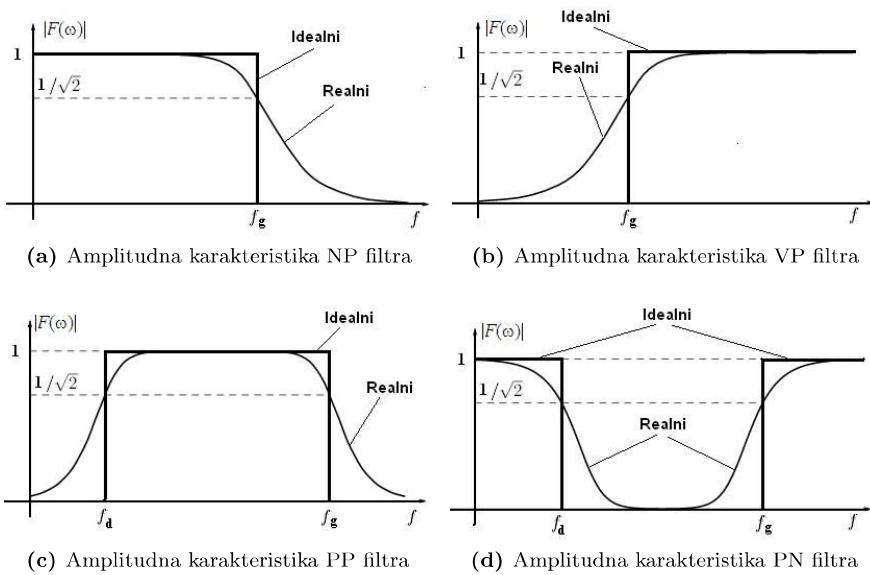
Često korišteni tip linearnih sistema u različitim područjima primjene su *filtrii*. Filtri su sistemi koji propuštaju komponente ulaznog signala iz određenog frekvencijskog pojasa, te prigušuju komponente iz nekog drugog frekvencijskog pojasa. Na taj način filtri zapravo mijenjaju frekvencijsku karakteristiku ulaznog signala.

Ovisno o amplitudnoj karakteristici filtri se često svrstavaju u sljedeće četiri grupe:

- niskopropusni filtri (NP filtri);

- visokopropusni filtri (VP filtri);
- pojasnopropusni filtri (PP filtri);
- pojasnnonepropusni filtri (PN filtri);

Idealni niskopropusni filter bi trebao propuštati sve frekvencijske komponente u rasponu 0 Hz do neke granične frekvencije f_g , te istovremeno ne propuštati frekvencijske komponente iznad f_g . S druge strane, idealni visokopropusni filter bi trebao propuštati sve frekvencijske komponente iznad granične frekvencije f_g , a blokirati frekvencijske komponente ispod te granične frekvencije. Nadalje, idealni pojasnnonepropusni filter propušta komponente u frekvencijskom intervalu od donje granične frekvencije f_d do gornje granične frekvencije f_g , uz istovremeno blokiranje frekvencijskih komponenti koje su izvan tog intervala. Konačno, idealni pojasnnonepropusni filtri blokiraju komponente od neke donje granične frekvencije f_d do definirane gornje granične frekvencije f_g , uz istovremeno propuštanje frekvencijskih komponenti koje su izvan tog intervala. Na slici 3.17 su prikazane amplitudne karakteristike navedena četiri tipa idealnih filtera.



Slika 3.17: Amplitudne karakteristike filtera

Pri stvarnim izvedbama nije moguće realizirati filtere sa idealnim karakteristikama. Zbog toga se amplitudne karakteristike idealnih filtera aproksimiraju sa filtrima čija je izvedba moguća i čije su karakteristike najpričinjije idealnim. Na slici 3.17 su pored amplitudnih karakteristika idealnih filtera prikazani i primjeri amplitudnih karakteristika realno mogućih izvedbi filtera. Dakako, prikazani

primjeri imaju samo ilustrativnu svrhu, budući da se izvedbe realnih filtara mogu realizirati na mnogo načina i u puno varijanti koje su definirane postavljenim željenim svojstvima konkretnih izvedbi. Budući da se realnim izvedbama filtara ne mogu postići oštре granice koje definiraju intervale propuštanja i blokiranja frekvencijskih komponenti, kako je to specificirano definicijama idealnih filtara, kod realnih filtara se granična frekvencija obično definira kao frekvencija na kojoj se amplituda smanjuje na $1/\sqrt{2}$ od njene maksimalne vrijednosti (vidjeti sliku 3.17).

Prethodno je već navedeno da se odzivi linearnih sistema, pa time i filtara, mogu karakterizirati prijenosnim funkcijama. Naprimjer, prijenosna funkcija $H(\omega)$ idealnog niskopropusnog filtra je definirana na sljedeći način:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & \text{za } |\omega| < 2\pi f_g, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Budući da prijenosna funkcija linearnih sistema općenito ima oblik $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$, možemo pisati da je amplitudna karakteristika idealnog niskopropusnog filtra definirana kao:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{za } |\omega| < 2\pi f_g, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Na kraju naglasimo, da je područje projektiranja filtara vrlo široko i njihov potpuniji opis izlazi van okvira ove knjige. Drugim riječima, na ovom mjestu su samo ukratko opisani najčešće korišteni tipovi filtara i njihova najznačajnija frekvencijska svojstva, u onoj mjeri koliko je to potrebno za razumijevanje metoda, algoritama i tehnika koje će biti opisane u nastavku ove knjige.

3.6 Diskretna Fourierova transformacija

U mnogim područjima primjene signal je diskretan skup podataka, pa nam je potreban diskretni ekvivalent kontinuirane Fourierove transformacije. Taj ekvivalent je *diskretna Fourierova transformacija* (eng. *Discrete Fourier Transform-DFT*) [20]. Neka je $f(t)$ kontinuirani signal. Fourierova transformacija izvornog signala je definirana kao

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.114)$$

S druge strane, izvorni signal se može rekonstruirati inverznom Fourierovom transformacijom:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.115)$$

Prisjetimo se da se koeficijenti Fourierovih redova za neku periodičnu funkciju $f(t)$ s periodom T dobivaju na sljedeći način:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jk\omega_0 t} dt. \quad (3.116)$$

Pretpostavimo sada da je kontinuirani izvorni signal $f(t)$ uzorkovan u N tačaka u jednakim intervalima uzorkovanja T . Na taj način se dobiva diskretni signal f_S :

$$f_S = f(t) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - \frac{n}{N} T). \quad (3.117)$$

Prema tome, Fourierovi koeficijenti funkcije f_S , koje ćemo označiti sa F_k , su:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - \frac{n}{N} T) e^{jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^T f(t) \delta(t - \frac{n}{N} T) e^{jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} f(\frac{n}{N} T) e^{j \frac{2\pi k n}{N}}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

pri čemu smo koristili sljedeće:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.119)$$

Ako definiramo niz uzoraka f_n kao

$$f_n = f(\frac{n}{N} T), \quad (3.120)$$

dobivamo sljedeći izraz za diskrete Fourierove redove:

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{j \frac{2\pi k n}{N}}. \quad (3.121)$$

S druge strane, da bi se rekonstruirao izvorni signal, polazi se od prikaza funkcije $f(t)$ Fourierovim redom

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (3.122)$$

Da bismo dobili uzorke f_n u trenucima

$$t = \frac{n}{N}T, \quad (3.123)$$

koristimo funkciju $f(t)$:

$$f_n = f\left(\frac{n}{N}T\right). \quad (3.124)$$

Odnosno, imamo:

$$f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}}. \quad (3.125)$$

Suma 3.125 koja sadrži beskonačno mnogo članova može se prikazati preko beskonačno mnogo parcijalnih sumi, od kojih svaka sadrži N članova

$$f_n = \dots + \sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}} + \sum_{k=N}^{2N-1} c_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}} + \dots \quad (3.126)$$

Gornju sumu 3.126 možemo napisati i u sljedećem obliku:

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN} e^{j \frac{2\pi n(k+lN)}{N}} \quad (3.127)$$

Budući da je

$$e^{j \frac{2\pi n(k+lN)}{N}} = e^{j \frac{2\pi k n}{N}} e^{j 2\pi nl},$$

te da vrijedi

$$e^{j 2\pi nl} = \cos(2\pi nl) + j \sin(2\pi nl) = 1,$$

imamo

$$e^{j \frac{2\pi n(k+lN)}{N}} = e^{j \frac{2\pi k n}{N}}.$$

Prema tome, imamo

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k n}{N}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN} \quad (3.128)$$

Definirajmo

$$\tilde{c}_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN}. \quad (3.129)$$

Istaknimo da je \tilde{c}_k periodičan sa periodom N . Može se pokazati da vrijedi

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} F_k,$$

pa dobivamo izraz za *inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju*

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j \frac{2\pi k n}{N}}. \quad (3.130)$$

3.7 Pitanja i zadaci za vježbu

1. Obrazložite koja sve svojstva zadovoljava skup svih funkcija sa konačnom energijom na temelju kojih se taj skup može okarakterizirati kao vektorski prostor?
2. Navedite koja sve svojstva zadovoljava skalarni proizvod dva vektora?
3. Objasnite šta su to ortogonalni i ortonormirani skupovi?
4. Izvedite izraze za koeficijente a_0 , a_n i b_n , $n \geq 1$, kod Fourierovih redova, za interval $[-\pi, \pi]$.
5. Izvedite izraze za koeficijente a_0 , a_n i b_n , $n \geq 1$ kod Fourierovih redova, za interval bilo koje duljine.
6. Izvedite izraz za koeficijente c_n kod kompleksnih Fourierovih redova, za interval bilo koje duljine.
7. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = x,$$

definiranu na intervalu $-\pi \leq x \leq \pi$.

8. Neka je zadana funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3x & \text{za } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$.

9. Neka je zadana funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{za } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{za } -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2 & \text{za } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$.

10. Dokažite Parsevalovu teoremu za Fourierovu transformaciju?
11. Objasnite svojstvo simetričnosti Fourierove transformacije?
12. Obrazložite svojstvo pomaka u frekvencijskoj domeni kod Fourierove transformacije?
13. Obrazložite svojstvo konvolucije dva signala u vremenskoj domeni?
14. Obrazložite koji par funkcija konstituira tzv. prijenosnu funkciju nekog sistema?
15. Objasnite na koji način je definirana impulsna funkcija, te izvedite izraz za konvolucijski integral?